***Задача:***

Найти три уникальных числа в массиве, входящие в диапазон типа int (32 бита), среди чисел которые встречаются по два раза.

***Решение:***

Для решения данной задачи используется логическая операция XOR (Исключающее или), для общего понимания, таблица истинности выглядит следующим образом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | x^y |
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Итак, понадобиться п все числа в массиве в двоичную запись и просматривать i-ый бит каждого числа для дальнейших действий. Для примера возьмем следующую последовательность и переведем её в другую сис. исчисл.:

| 7 | 3 | 5 | 8 | 3 | 8 | 9 | 10

111 | 011 | 101 | 1000 | 011 | 1000 | 1001| 2

Сперва требуется найти XOR всех чисел в последовательности, получим следующее число, обозначим его « х » - 1110 ( 10112 ).

***~~Warning!!!~~***  Можно заметить, что при нахождении данной суммы (XOR всех чисел), все числа из массива которые повторяются 2 раза сократятся, например, если найти XOR двух одинаковых чисел, то получим число равное нулю.

-- Если до сих пор не ясно, см. таблицу выше и найдите XOR двух одинаковых чисел—

В заключении получаем что сумма всех чисел будет равна сумме всех уникальных чисел.

Получив сумму мы фактически знаем XOR сумму всех наших уникальных чисел. Далее разберём пару случаев:

Случай 1 – в i-ом бите лежит ноль, находим сумму всех чисел у которых бит равен нулю ( это число « у » ). У нас возникает два подслучая:

( 1 ) У всех уникальных чисел в i-ом бите лежит ноль.

( 2 ) У **одного** из этих чисел в данном бите ноль, в остальных случаях – один.

Случай 2 – в i-ом бите лежит один, находим сумму всех чисел у которых бит равен одному ( это число « у » ). У нас возникает два подслучая:

( 1 ) У **одного** из трьох искомых чисел лежит один, в других – ноль.

( 2 ) У всех чисел в бите лежит один.

В случае нахождения **одного** уникального числа, этим числом будет « у » . Случай в котором мы получили бы сумму **ДВУХ** уникальных чисел невозможен.

1 0 0 – (1)

0 1 1 – (2)

или

7 8 2 – (1)

2 7 1 – (2)

Сверху мы видим числа, которые выражают i-тые биты трьох уникальных чисел, как же мы можем доказать то что мы НИКОГДА не получим сумму ДВУХ уникальных чисел? А вот как, опираясь на таблицу выше, давайте посчитаем XOR этих бит.

В (1) мы можем заметить, что при нахождении выйдет число 1 ( **1**^0^0 = **1** ).

В (2) при подсчёте увидим 0 ( **0**^1^1 = **0**).

Из этого можно сделать вывод, что сперва мы будем обязаны получить ОДНО число, которым и будет « у ».

После же нахождения « у », нужно проделать операцию XOR для того, чтобы убрать одно из найденных нами чисел в переменной « х ». Допустим, имеем три уникальных числа в последовательности - **7 8 2**. Тогда первое число, которое мы найдем будет **7**, так как в переменной « х » храниться XOR всех трьох чисел, то чтобы убрать число нужно найти XOR еще раз для того, чтобы числа скоротились. После такой операции в переменной « х » останется XOR лишь двух чисел - **8 2**. Осталась самая незамысловатая часть, **найти два уникальных числа**. Действия все те же, но нужно учитывать, что найденное число вышло из игры.

Сейчас мы обсудили нахождение одного числа, но так же есть вероятность выпадения следующих случаев:

1 1 1 – (1)

0 0 0 – (2)

или

7 1 3 – (1)

4 2 8 – (2)

Для остальных подслучаев нужно специальное условие которое скажет нам об том, что отыскать одно из чисел НЕВОЗМОЖНО. Для решения проблемы нужно переключиться на другой i-тый бит, и делать так покуда у нас появиться возможность выбрать ОДНО из искомых чисел.

Разберём случай (1), при подсчёте переменная « х » = 1012 = 510. В этом случае получается, что « у » равен « х », так как если взять за начальный ( i-тый ) бит - последний индекс. Если сейчас не совсем понятно, то при разборе парочки примеров все будет понятно.

В случае (2), переменная « х » = 11102 = 1410. Здесь же выходит аналогичная ситуация.

**Разберем пару случаев!**

**Пример 1. Разберем пример из самого начала**

| **7** | 3 | **5** | 8 | 3 | 8 | **9** | 10

**Действие 1** – *Находим « х »*

х = 10112 = 11

**Действие 2** – *Смотрим на i-тый бит переменной « х » и находим « у »*

Предлагаю взять за отправную точку самый последний индекс разряд (i-тый бит ) – n.

Тогда нам необходимо взять все числа с значением бита (0 или 1) в данном разряде. Так как в этом разряде число **1**, нужно найти *XOR* всех чисел бит которых в этом разряде равен этому числу.

| **7** | **3** | **5** | 8| **3** | 8 | **9** | 10

**111** | **011** | **101** | 1000 | **011** | 1000 | **1001**| 2

При таком случае « y » = 10112 = 11.

**Действие 3** – *Сравниваем переменную « х » и « у »*

Так как условие равенства между этими переменными выполняется, это свидетельствует о том, что мы не нашли нужное число, « у » = 11, это значит нам нужно сменить разряд бита – n-1.

**Действие 2 (+1)** – *Смотрим на i-тый бит переменной « х » и находим « у »*

| **7** | **3** | 5 | 8| **3** | 8 | 9 | 10

**111** | **011** | 101 | 1000 | **011** | 1000 | 1001| 2

В таком случае х = 10**1**12 = 11.

« y » = 1112 = 7.

Это наше первое число, которое мы нашли. Так как мы его нашли, значит должны выполнить операцию XOR над « х » и « y ». После этого « х » перестанет содержать в себе **7**, потому как он скоротится « х » = 11002 = 12 .

**Действие 2 (+2)** – *Смотрим на i-тый бит переменной « х » и находим « у »*

| 7 | 3 | **5** | **8** | 3 | **8** | **9** | 10

111 | 011 | **101** | **1000** | 011 | **1000** | **1001**| 2

В таком случае х = 11**0**02 = 12.

« у » = 12.

**Так же очень важно учитывать, то что найденное число уже не участвует в процессе вычисления.**

Переменные равны, переходим на другой разряд бита – n-2.

**Действие 2 (+3)** – *Смотрим на i-тый бит переменной « х » и находим « у »*

| **7** | 3 | **5** | 8 | 3 | 8 | 9| 10

**111** | 011 | **101** | 1000 | 011 | 1000 | 1001| 2

В таком случае х = 1**1**002 = 12.

« у » = 5, так как исключаем 7 из вычисления.

Так как ближе к концу нам требовалось найти ДВА оставшихся числа, то при выполнении XOR над « х » = 1100 ^ 101 = 10012 = 9, что и является нашим ***последним*** числом.

**Пример 2.**

| **4** | 8 | 8 | **9** | 3 | 3 | **34** | 10

**Действие 1**

х = 10111**1**2 = 47

**Действие 2…n**

| 4 | 8 | 8 | **9** | **3** | **3** | 34 | 10

100 | 1000 | 1000 | **1001** | **011** | **011** | 100010 2

y = 10012 = 9

x = 10011**0**2 = 37

| **4** | **8** | **8** | 9 | 3 | 3 | **34** | 10

**100** | **1000** | **1000** | 1001 | 011 | 011 | **100010** 2

y = 1000102 = 34

x = 1002 = 4