Exercícios de programação Python e ALC (2)

1. Programe a substituição reversa e a substituição direta.
2. Programar o escalonamento de Gauss de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Atenção: neste processo não fazer troca de filas.
3. Qual é a condição que faz que o escalonamento de Gauss seja interrompido?
4. Escrever uma condição suficiente para que exista decomposição LU de uma matriz A.

NOS SEGUINTES EXERCÍCIOS ASSUMIR QUE A ADMITE A DECOMPOSIÇÃO LU

5. Programar a decomposição LU a partir de A (escrever uma função que recebe A e retorna L e U).
6. Programe a decomposição LU na qual coloca L e U em uma única matriz. Esta programação deve servir para matrizes altas e baixas.
7. Programar a resolução de $Ax = b$ com a decomposição $A = LU$. Nesta rotina empregar a substituição direta para resolver $Ly = b$ e empregar a substituição reversa para resolver $Ux = y$.
8. Pensar como fazer uma decomposição LDU de uma matriz A a partir de uma decomposição LU de A. Onde
    - L é triangular inferior com uns na diagonal
    - D é diagonal com os pivots da eliminação de Gauss
    - U é triangular superior com uns na diagonal
9. Programar essa decomposição LDU (escrever uma função que recebe A e retorna L e U).
10. Resolver sistemas lineares com a docomposição LDU (escrever uma função que recebe A e b e retorna x tal que Ax=b)
11. O que é uma matriz simétrica ?
12. Como fica a decomposição LDU de uma matriz A quando a matriz é simétrica? Será que $L = U^\top$? Quem é D?
13. O que é uma matriz definida positiva?
14. Como construir a decomposição de Cholesky $C^\top C$ a partir da decomposição LU de A (simétrica e definida positiva)?
15. Programar a decomposição de Cholesky $C^\top C$ a partir da decomposição LU de A.
16. programar a função determinante de toda matriz quadrada A como base na definição (recursiva):
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A(i,j) det(Aij)$$
onde Aij é uma submatriz de A onde se apaga a fila i e a coluna j.
17. Assumindo que $A = LDU$ e empregando a propriedade do determinante

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

prove que $det(A) = det(D)$.

18. Como podemos empregar o escalonamento de Gauss de A para calcular $det(A)$? Dica: se o pivot é zero, então o determinante de A é zero. Se o pivot não é zero, então posso continuar escalonando. Se finalizar o processo de escalonamento, basta fazer o produto das entradas na diagonal da matriz escalonada.
19. O que é a inversa de uma matriz quadrada A? A inversa da matriz A sempre existe? Como posso calcular a inversa de uma matriz a partir da decomposição LU? De que forma?
20. Programar uma função que calcula a inversa de uma matriz A empregando a decomposição LU. (escrever função que recebe A e retorna a inversa de A)

+ Código + Texto