

# Notas en Álgebra Lineal I

## Índice

1. Transformaciones Lineales .....	1
------------------------------------	---

## 1. Transformaciones Lineales

**Definición 1.1:** Sean  $U$  y  $V$  dos  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, una función

$$T : U \rightarrow V$$

es una transformación lineal si se cumple

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in V : T(\lambda \mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ .

**Definición 1.2:** Sea  $T : U \rightarrow V$  transformación lineal, definimos los conjuntos

$$\ker(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \subseteq U$$

$$\operatorname{im}(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \text{ para algún } \mathbf{u} \in U\} \subseteq V$$

**Lema 1.1:**  $\ker(T) < U$

*Prueba:* Dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in \ker(T) \rightarrow \ker(T) < U$$

□

**Lema 1.2:**  $\operatorname{im}(T) < V$

*Prueba:* Dados  $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \operatorname{im}(T)$ , existen  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  tal que  $\mathbf{u}' = T(\mathbf{u})$  y  $\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$ , luego

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\ &= T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' \in \operatorname{im}(T) \rightarrow \operatorname{im}(T) < V$$

□

**Lema 1.3:**  $T$  es inyectiva  $\leftrightarrow T$  lleva un conjunto l.i. a un conjunto l.i.

*Prueba:* Definimos  $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset U$  l.i. y  $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_k)\} \subset V$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{v} = T(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{v} = T\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right), \{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{K}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i T(\mathbf{u}_i),$$

el conjunto  $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_k)\}$  es l.i. ya que genera  $V$ . Procedemos a demostrar el retorno

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} : \mathbf{u} = T(\mathbf{u}') \text{ y } \mathbf{v} = T(\mathbf{v}')$$

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i, T(\mathbf{u}') = \sum_{i=1}^k \alpha_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i, T(\mathbf{v}') = \sum_{i=1}^k \beta_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \forall i \in I_k$$

$$T(\mathbf{u}') = T(\mathbf{v}') \rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{v}'$$

□

**Lema 1.4:**  $T$  es sobreyectiva  $\leftrightarrow T$  lleva un conjunto generador a un conjunto generador.

*Prueba:* La prueba se deja como ejercicio para el lector.

□

**Lema 1.5:**  $T$  es biyectiva  $\leftrightarrow T$  lleva una base a una base.

*Prueba:* La prueba se deja como ejercicio para el lector.

□

**Definición 1.3:** Sea  $T : U \rightarrow V$  una transformación lineal, se dice que  $T$  es

- monomorfismo si  $T$  es inyectiva.
- epimorfismo si  $T$  es sobreyectiva.
- isomorfismo si  $T$  es biyectiva.

**Teorema 1.6:** Dados  $V$  y  $W$  ambos  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales y  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  base de  $V$  y  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\} \subset W$  se cumple

$$\exists! T : V \rightarrow W \text{ transformación lineal} \mid T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \forall i \in I_n$$

*Prueba:* Empecemos por la existencia. Sea  $\mathbf{v} \in V$ , como  $B$  es base de  $V$  entonces

$$\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K} \mid \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i,$$

definamos

$$\begin{aligned} T : U &\rightarrow V \\ \underbrace{\mathbf{u}}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i} &\mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i, \end{aligned}$$

tenemos que demostrar la buena definición de  $T$ ,  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}'$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{v}_i \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \rightarrow \alpha_i = \alpha'_i, \forall i \in I_n \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' \rightarrow T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}') \end{aligned}$$

y ahora se debe demostrar que  $T$  es una transformación lineal

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{v}') &= T\left(\lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \alpha'_i) \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \alpha'_i) \mathbf{w}_i \\ &= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{w}_i \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{v}) + \lambda_2 T(\mathbf{v}') \end{aligned}$$

ahora nos quedaría demostrar que  $T$  es único, supongamos que existe  $T' : U \rightarrow V$  tal que  $T'(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$

$$T'(\mathbf{u}) = T'\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i T'(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i T(\mathbf{v}_i) = T\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = T(\mathbf{u})$$

□

**Corolario 1.6.1:** Si  $T, T' : U \rightarrow V$  son transformaciones lineales que coincidan en una base  $B$  de  $U$ , entonces  $T = T'$ .

**Teorema 1.7** (De núcleo e imagen): Sea  $T : U \rightarrow V$  transformación lineal con  $\dim U < +\infty$   

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T)$$

*Prueba:* Sea  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  base de  $\ker(T)$  por el teorema de completación de bases, existen  $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n \in U$  tal que el conjunto  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es base de  $U$   $\square$

**Corolario 1.7.1:** El conjunto  $\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$  es base de  $\operatorname{im} T$

*Prueba:* Probemos que el conjunto es l.i., supongamos  $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i) &= \mathbf{0} \\ T\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) &= \mathbf{0} \rightarrow \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \in \ker(T) \\ \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i &= \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i \\ \sum_{i=1}^n (-\beta_i) \mathbf{u}_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i &= \mathbf{0} \rightarrow \alpha_i = \beta_i = 0 \text{ para sus índices respectivos} \end{aligned}$$

$\square$