Notas en Álgebra Lineal I

Índice

1. Transformaciones Lineales 1

1. Transformaciones Lineales

Definición 1.1: Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, una función

$$T : U \to V$$

es una transformación lineal si se cumple
- $\forall u, v \in V : T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in V : T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Definición 1.2: Sea $T : U \to V$ transformación lineal, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{u \in U \mid T(u) = 0\} \subseteq U \\ \operatorname{im}(T) &= \{v \in V \mid v = T(u) \text{ para algún } u \in U\} \subseteq V \end{aligned}$$

Lema 1.1: $\ker(T) < U$

Prueba: Sean $u, v \in \ker(T)$

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha u + \beta v) &= \alpha T(u) + \beta T(v) \\ &= 0 \\ \alpha u + \beta v \in \ker(T) &\to \ker(T) < U \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.2: $\operatorname{im}(T) < V$

Prueba: Sean $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \operatorname{im}(T)$

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\ &= T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \\ \alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' \in \operatorname{im}(T) &\to \operatorname{im}(T) < V \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.3: T es inyectiva $\leftrightarrow$ T lleva un conjunto l.i. a un conjunto l.i.

Prueba: Definimos $S = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset U$ l.i. y $\{T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_k)\} \subset V$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{v} = T(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{v} = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i\right), \{\alpha_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{K}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i),$$

el conjunto $\{T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_k)\}$ es l.i. ya que genera V. Procedemos a demostrar el retorno

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} : \mathbf{u} = T(\mathbf{u}') \ \text{ y } \ \mathbf{v} = T(\mathbf{v}')$$

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i \to T(\mathbf{u}') = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{u}_i \to T(\mathbf{v}') = \sum_{i=1}^{k} \beta_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \forall i \in I_k$$

$$T(\mathbf{u}') = T(\mathbf{v}') \to \mathbf{u}' = \mathbf{v}'$$

□

Lema 1.4: T es sobreyectiva $\leftrightarrow$ T lleva un conjunto generador a un conjunto generador.

Lema 1.5: T es biyectiva $\leftrightarrow$ T lleva una base a una base.

Definición 1.3: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, se dice que T es
- monomorfismo si T es inyectiva.
- epimorfismo si T es sobreyectiva.
- isomorfimo si T es biyectiva.

Teorema 1.6: Sean V y W ambos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sean $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ base de V y $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\} \subset W$

$$\exists! T : V \to W \text{ transformación lineal} \mid T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \forall i \in I_n$$