Notas en Álgebra Lineal I

Índice

1. Transformaciones Lineales

Definición 1.1: Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, una función

$$T : U \to V$$

es una transformación lineal si se cumple

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in V : T(\lambda \mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$.

Definición 1.2: Sea $T : U \to V$ transformación lineal, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \subseteq U \\ \operatorname{im}(T) &= \{\mathbf{v} \in V \mid v = T(\mathbf{u}) \text{ para algún } \mathbf{u} \in U\} \subseteq V \end{aligned}$$

Lema 1.1: $\ker(T) < U$

Prueba: Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} &\in \ker(T) \to \ker(T) < U \end{aligned}$$

□

Lema 1.2: $\operatorname{im}(T) < V$

Prueba: Dados $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \operatorname{im}(T)$, existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ tal que $\mathbf{u}' = T(\mathbf{u})$ y $\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$, luego

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\ &= T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \\ \alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}' &\in \operatorname{im}(T) \to \operatorname{im}(T) < V \end{aligned}$$

□

Lema 1.3: T es inyectiva $\leftrightarrow$ T lleva un conjunto l.i. a un conjunto l.i.

Prueba: Definimos $S = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset U$ l.i. y $\{T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_k)\} \subset V$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{v} = T(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{v} = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i\right), \{\alpha_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{K}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i),$$

el conjunto $\{T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_k)\}$ es l.i. ya que genera V. Procedemos a demostrar el retorno

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} : \mathbf{u} = T(\mathbf{u}') \text{ y } \mathbf{v} = T(\mathbf{v}')$$

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i, T(\mathbf{u}') = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{u}_i, T(\mathbf{v}') = \sum_{i=1}^{k} \beta_i T(\mathbf{u}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \forall i \in I_k$$

$$T(\mathbf{u}') = T(\mathbf{v}') \to \mathbf{u}' = \mathbf{v}'$$

□

Lema 1.4: T es sobreyectiva $\leftrightarrow$ T lleva un conjunto generador a un conjunto generador.

Prueba: La prueba se deja como ejercicio para el lector. □

Lema 1.5: T es biyectiva $\leftrightarrow$ T lleva una base a una base.

Prueba: La prueba se deja como ejercicio para el lector. □

Definición 1.3: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, se dice que T es

- monomorfismo si T es inyectiva.
- epimorfismo si T es sobreyectiva.
- isomorfimo si T es biyectiva.

Teorema 1.6: Dados V y W ambos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ base de V y $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\} \subset W$ se cumple

$$\exists! T : V \to W \text{ transformación lineal} \mid T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \forall i \in I_n$$

Prueba: Sea $\mathbf{v} \in V$, como B es base de V

$$\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{K} \mid \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i,$$

definamos

$$\begin{aligned} T : U &\to V \\ \underbrace{\mathbf{u}}_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i} &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i. \end{aligned}$$

Se cumple la unicidad de T. En efecto,

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}' : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i,$$

implica

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \to \alpha_i = \alpha_i', \forall i \in I_n,$$

por consiguiente

$$T(\mathbf{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i\right) = T(\mathbf{v}').$$

T es una transformación lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{v}') &= T\left(\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \alpha_i') \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \alpha_i') \mathbf{w}_i \\ &= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{w}_i \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{v}) + \lambda_2 T(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

T es único. En efecto, supongamos que existe $T' : U \to V$ tal que $T'(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$,

$$
\begin{aligned}
T'(\mathbf{u}) &= T'\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T'(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{w}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\mathbf{v}_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \\
&= T(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

□

Corolario 1.6.1: Si $T, T' : U \to V$ son transformaciones lineales que coincidien en una base B de U, entonces $T = T'$.

Teorema 1.7 (De núcleo e imagen): Sea $T : U \to V$ transformación lineal con $\dim U < +\infty$

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T)$$

Prueba: Sea $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$ base de $\ker(T)$ por el teorema de completación de bases, existen $\mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n \in U$ tal que el conjunto $\{\mathbf{u}_1 ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n\}$ es base de U □

Corolario 1.7.1: El conjunto $\{T(\mathbf{u}_{k+1}), ..., T(\mathbf{u}_n)\}$ es base de $\operatorname{im} T$

Prueba: Probemos que el conjunto es l.i., supongamos $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \mathbf{0} \to \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \in \ker(T)$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-\beta_i) \mathbf{u}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \to \alpha_i = 0 \wedge \beta_i = 0$$

en sus repectivos índices. Veamos si el conjunto genera a $\operatorname{im}(T)$, sea $\mathbf{v} \in \operatorname{im}(T)$ existe $\mathbf{u} \in U$ tal que $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$

$$
\begin{aligned}
\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K} : T(\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \alpha_i T(\mathbf{u}_i) + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i)
\end{aligned}
$$

□

1.1. Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Teorema 1.1.1: Dados U, V ambos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T : U \to V$ transformación lineal, se cumple

$$
\frac{U}{\ker(T)} \simeq \operatorname{im}(T)
$$

Observación: La notación $\simeq$ indica que existe un isomorfimo entre ambos.

Prueba: Definimos

$$
f : \frac{U}{\ker(T)} \to V, \quad [\mathbf{u}] \mapsto T(\mathbf{u}).
$$

f está bien definido. En efecto,

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}] &\to \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker(T) \\
&\to T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \\
&\to T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \\
&\to f([\mathbf{u}]) = f([\mathbf{v}]).
\end{aligned}
$$

f es una transformación lineal. En efecto,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha[\mathbf{u}] + \beta[\mathbf{v}]) &= f([\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}]) \\
&= T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\
&= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \\
&= \alpha f([\mathbf{u}]) + \beta f([\mathbf{u}]).
\end{aligned}
$$

f es inyectivo. En efecto,

$$
\begin{aligned}
f([\mathbf{u}]) = f([\mathbf{v}]) &\to T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \\
T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} &\to \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker(T) \\
\mathbf{u} \sim \mathbf{v} &\to [\mathbf{u}] = [\mathbf{v}].
\end{aligned}
$$

Obtenemos

$$\frac{U}{\ker(T)} \simeq \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(T)$$

□