Algorithmique avancée: Contrôle Partiel du Lundi 21 Octobre 2019.

Le barème est donné à titre indicatif. La compréhension du sujet faisant partie de l'épreuve, **on ne répondra à aucune question**. Si vous rencontrez des ambiguïtés, vous expliquerez **sur votre copie** comment vous les interprétez.

Durée 2h. Seul document autorisé: 1 feuille A4 recto-verso.

On rappelle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \log i \rfloor \in \Theta(n \log n)$$

I - Tas binaires (10 points)

On considère le tableau $T1$ suivant : $T1 =$

16	6	13	63	46	82	86	22	30

Ce tableau contient 9 éléments ($T1$.LENGTH$= 9$).

1) **(2 pt)** Créez un tas binaire MAXIMAL $H1$ à partir de $T1$ grâce à l'opération BUILDHEAP. Vous donnerez sa représentation sous forme d'arbre et sous forme de tableau.
2) **(1 pt)** Que donne l'opération REMOVE sur $H1$? Vous décrirez l'arbre obtenu et le tableau.

On considère l'algorithme suivant :

Procedure CONSTRUIRETAS(T)

```
T.SIZE ← 1
for i = 2 to T.LENGTH do
    ADD(T,T[i])
```

où ADD est la procédure d'ajout d'un élément dans un tas binaire MAXIMAL.

3) **(2 pts)** Appliquez CONSTRUIRETAS au tableau $T1$. Vous donnerez la représentation du tableau obtenu, nommé $H2$, sous forme d'arbre et sous forme de tableau. $H2$ est-il un tas binaire?
4) **(0.5 pt)** Proposez un élément à ajouter à $H2$ qui demandera le plus d'opérations possibles, et décrivez le tableau $H3$ résultant.

Dans le cas général où le tableau contient n éléments, on désire connaître l'efficacité de CONSTRUIRETAS. Pour cela, on s'intéresse aux questions suivantes :

5) **(1 pt)** On considère le $i$ème élément du tableau représentant un tas binaire de n éléments, à quelle profondeur est-il? Justifiez.
6) **(1 pt)** Étant donné un tableau de n éléments, proposez une configuration qui soit le pire cas possible en complexité pour CONSTRUIRETAS, c'est à dire qui impose que CONSTRUIRETAS effectue le maximum d'opérations possibles.
7) **(1 pt)** Combien cela demandera-t'il d'opérations en notation Θ en fonction de n ? Vous justifierez votre réponse en sommant les opérations à faire pour chacun des n éléments.
8) **(0.5 pt)** Proposez une configuration qui soit un meilleur des cas pour CONSTRUIRETAS dans le cas général d'un tableau à n éléments (c'est-à-dire une configuration pour laquelle CONSTRUIRETAS effectuera le moins d'opérations possibles).
9) **(0.5 pt)** Comparez les complexités spatiales et temporelles de CONSTRUIRETAS en pire cas à celles de BUILDHEAP.
10) **(0.5 pt)** Existe-t'il des configurations où CONSTRUIRETAS et BUILDHEAP font le même nombre d'échanges?

II - AVL (7 pts)

On considère le même tableau $T1 =$

16	6	13	63	46	82	86	22	30

1) **(1 pt)** Créez l'arbre binaire de recherche $A1$ obtenu par ajouts successifs des éléments de $T1$. Puis transformez $A1$ en un AVL (s'il ne l'est pas déjà). Vous noterez les hauteurs des sous-arbres gauches et droits de chaque noeud. On rappelle que par convention un arbre vide à une hauteur de -1.

2) **(1 pt)** Quelles sont les insertions qui demanderaient des rotations afin de rétablir la propriété d'AVL? On demande un exemple de valeur à insérer pour chaque emplacement qui pose problème (on ne demande pas le résultat de l'insertion).

3) **(1.5 pts)** Pour chaque hauteur 0, 1, 2 et 3, dessinez un exemple d'AVL ayant cette hauteur et le moins de noeuds possible. Pour chacun de ces AVL, comptez le nombre de feuilles obtenues (notés respectivement F_0, F_1, F_2, F_3).

4) **(1.5 pts)** Proposez une expression du nombre de feuilles F_h, de l'AVL A_h de hauteur h ayant le moins de noeuds possibles, en fonction des nombres de feuilles des AVL A_{h-1} de hauteur $h-1$ et A_{h-2} de hauteur $h-2$ ayant le moins de noeuds possibles (leur nombre de feuilles étant notés respectivement F_{h-1} et F_{h-2}). Justifiez.

   En utilisant le fait que le ième terme de la suite de Fibonacci u_i est tel que $u_i > \frac{\varphi^i - 1}{\sqrt{5}}$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (φ est appelé le nombre d'or[1]), en déduire une borne asymptotique supérieure de la hauteur d'un AVL fonction du nombre de noeuds (donc préciser le f dans l'expression "la hauteur h d'un AVL de taille n est en $O(f(n))$").

5) **(1 pt)** Reprendre la question précédente en donnant les AVLs avec le plus de noeuds possibles pour une hauteur de 0, 1, 2 et 3. Donnez une expression générale du nombre de noeuds dans de tels AVL en fonction de la hauteur h. En déduire une borne asymptotique inférieure de la hauteur d'un AVL en fonction du nombre de noeuds (donc préciser le g dans l'expression "la hauteur h est en $\Omega(g(n))$"). Conclure sur une expression en Θ de la hauteur d'un AVL.

6) **(1 pt)** Peut-on créer un arbre rouge-noir à partir de l'AVL obtenu à la question 1? si oui dessinez-le sinon expliquez.

III - B-Arbres (3 pts)

On considère encore le même tableau $T1 =$

16	6	13	63	46	82	86	22	30

1) **(2 pts)** Créez le B-arbre $B1$ de degré $t = 3$ résultant de l'insertion successive des éléments du tableau $T1$. Vous détaillerez les passages d'éclatement des noeuds.

2) **(1 pt)** Décrivez le nouveau B-arbre obtenu après insertion des deux éléments 64 et 45 dans $B1$.

[1] Plus précisément $u_i = \frac{\varphi^i - \varphi'^i}{\sqrt{5}}$ où $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ mais l'inégalité suffit pour l'exercice.