Algorithmique Avancée

Partie B. Résolution de problèmes combinatoires polynomiaux

Chap 5: Programmation Linéaire

Florence Bannay

Master Informatique – Université Paul Sabatier

2020-2021

I. Introduction par l'exemple

Le barman

Un barman dispose de 30 l de jus d'orange, 24 l jus de pamplemousse et 18 l jus de framboise. Il propose deux coktail :

- le "soleil couchant" à 8€ le litre, soit 80€ le bidon composé de 5l de jus d'orange, 2 l de jus de pamplemousse pour 1 l de jus de framboise et 2l d'eau
- le "balancé" à 6€ le litre, soit 60€ le bidon composé de 3l de jus d'orange, 3l de jus de pamplemousse et 3l de jus de framboise et 1l d'eau

Il désire préparer la quantité optimale de chaque cocktail afin de maximiser son gain.

Exercice 1 : Remplir le tableau suivant

Dispose de 30 l orange, 24 l pample. 18 l framboise. Veut maximiser son gain en préparant quantité optimale de chaque cocktail.

- "soleil couchant" (80€ le bidon)= 5l orange, 2 l pample, 1 l framb. (et 2l eau)
- "balancé" (60€ le bidon)= 3l orange, 3l pample et 3l framb. (et 1l eau)

Représentation in Extenso (forme canonique)

Variables de décision :	x : nombre de bidons de "soleil couchant" (à 80€) y : nombre de bidons de "balancé" (à 60€)
Fonction Objectif :	max $(z = ...x + ...y)$
CONTRAINTES	$...x + ...y \leq ...$ (stock jus d'orange) $...x + ...y \leq ...$ (stock jus pample.) $...x + ...y \leq ...$ (stock jus de framboise) $x, y \geq 0$ (contraintes de positivité)

Un programme linéaire avec n variables et m contraintes peut s'écrire sous plusieurs formes.

Forme Génerale
$$\begin{array}{llll} \min / \max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{tel que :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \preceq \quad b_i & \forall i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j & \preceq 0 & \forall j \subseteq \{1, 2 \ldots n\} \end{array}$$

avec $\preceq \in \{\leq, \geq, =\}$

Représentations in extenso/matricielle

	Forme Canonique in extenso	Forme Standard in extenso	Forme Standard matricielle
	$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\max z = C.X$
$i = 1, 2 \ldots m$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \; b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \; b_i$	$A.X = B$
$j = 1, 2 \ldots n$	$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$X \geq \vec{0}$

avec i indice de la contrainte, j indice de la variable et

- $C = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ un vecteur lignes de gain c_j à maximiser,
- $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ un vecteur colonne de variables,
- A une matrice $m \times n$ de coefficients a_{ij} et
- $B = (b_1, b_2, \ldots b_m)^T$ un vecteur colonne des second membres b_i des contraintes.

Exercice 2

En quelle forme est le problème du barman avec le codage suivant ?

Variables de décision :	x : nombre de bidons de "soleil couchant" (à 80€) y : nombre de bidons de "balancé" (à 60€)
Fonction Objectif :	max $(z = 80x + 60y)$
CONTRAINTES	$5x + 3y \leq 30$ (stock jus d'orange) $2x + 3y \leq 24$ (stock jus pample.) $1x + 3y \leq 18$ (stock jus de framboise) $x, y \geq 0$ (contraintes de positivité)

Transformations

- **inéquation** $\rightarrow$ **équation** (ajout variable d'écart)

  $ax \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ax + e = b \quad e \geq 0$

  $ax \geq b \quad \Leftrightarrow \quad ax - e = b \quad e \geq 0$

- **équation** $\rightarrow$ **inéquation**

  $$ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \text{ et} \\ ax \geq b \end{cases}$$

- **contrainte supériorité** $\rightarrow$ **infériorité**

  $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i$

- **min** $\rightarrow$ **max** : $\max f(x) = -\min -f(x)$

- **variable non contrainte** $\rightarrow$ **positive**

  $$x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (transformation)

Pour transformer la forme canonique suivante en forme standard, combien de lignes faut-il changer ?

Forme canonique :	Forme standard :
$\max(z = 80x + 60y)$	$\max(z = ...)$
tel que : $5x + 3y \leq 30$	tel que : ... = ...
$2x + 3y \leq 24$	... = ...
$1x + 3y \leq 18$	... = ...
$x, y \geq 0$	... ≥ 0

Exercice 4 : supérieur -> inférieur

- Transformer $9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$
- en $\ldots x_1 \; \ldots x_2 \; \ldots x_3 \leq \ldots$

Exercice 5 : standard in extenso -> standard matricielle

Donnez la forme matricielle associée à :

Standard in ext. :

$\max(z = 80x + 60y)$

$$\begin{aligned} \text{tel que : } 5x + 3y + e_1 &= 30 \\ 2x + 3y + e_2 &= 24 \\ 1x + 3y + e_3 &= 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme Standard Matricielle :

$$\max z = \overset{C}{(\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots)} \times \overset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}} \times \overset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}}$$

Vocabulaire

Définition

Étant donné un programme linéaire P sous forme Matricielle Standard,
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est une*

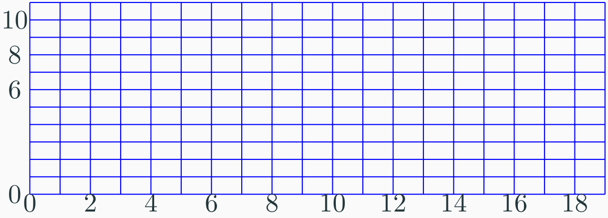
- *solution de P ssi $A.X^T = B$*
- *solution réalisable de P ssi $A.X^T = B$ et $X \geq \vec{0}$*
- *solution optimale de P ssi c'est une solution réalisable qui donne à z une valeur maximale parmi toutes les solutions réalisables.*

II. Résolution géométrique

Interpréter les contraintes :

- $5x + 3y \leq 30$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$ délimité par la droite $5x + 3y = 30$
- $2x + 3y \leq 24$ demi-plan délimité par $2x + 3y = 24$
- $1x + 3y \leq 18$ demi-plan délimité par $x + 3y = 18$
- $x \geq 0, y \geq 0$ demi-plans

Sol. réalisables= $\cap$ demi-plans.
Sol. optimale $\in$ // $80x + 60y = 0$ dans réalisables.



Exercice 6

- Donnez deux points de la droite 5x + 3y =30.
- Le point (0,0) est-il dans le demi plan $5x + 3y \leq 30$?

Exercice 7

- Donnez deux points de la droite 2x + 3y =24.
- Le point (0,0) est-il dans le demi plan $2x + 3y \leq 24$?

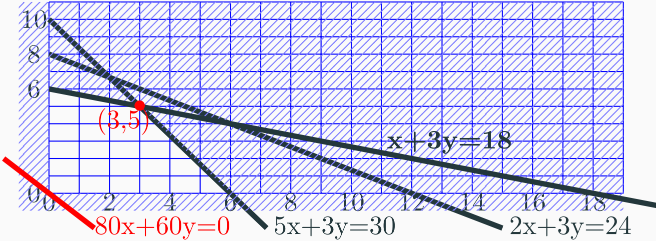
Solution optimale pour le barman

Contraintes :

- $5x + 3y \leq 30$. droite $5x + 3y = 30$ passe par $(0, 10)$ et $(6, 0)$
- $2x + 3y \leq 24$. droite $2x + 3y = 24$ passe par $(0, 8)$ et $(12, 0)$
- $1x + 3y \leq 18$. droite $x + 3y = 18$ passe par $(0, 6)$ et $(18, 0)$
- $x \geq 0, y \geq 0$ demi-plans

Sol. réalisables= $\cap$ demi-plans.

Sol. optimale $\in$ // $80x + 60y = 0$ dans réalisables.



III. Résolution algébrique et Simplexe Tableau

Résolution algébrique

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Système 1 : } \max(z = 80x + 60y) \\ \\ &\qquad \text{tel que : } 5x + 3y + e_1 = 30 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad 2x + 3y + e_2 = 24 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad x + 3y + e_3 = 18 \end{aligned}}$$

- système à 3 équations et 5 inconnues
- donc plusieurs solutions (sauf si équations incompatibles)
- deux inconnues en trop

$\Rightarrow$ choisir deux inconnues quelconques et exprimer les autres avec

Exercice 8 : complétez les équations

Système initial :

$\max(z = 80x + 60y)$

$$\begin{aligned} \text{tel que : } 5x + 3y + e_1 &= 30 \\ 2x + 3y + e_2 &= 24 \\ x + 3y + e_3 &= 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Système 1 (on choisit : x et y)

$\max(z = ...x + ...y)$

$$\begin{aligned} \text{tel que : } e_1 &= \text{...} \ \text{...}x \ \text{...}y \\ e_2 &= \text{...} \ \text{...}x \ \text{...}y \\ e_3 &= \text{...} \ \text{...}x \ \text{...}y \\ x, y, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En déduire une solution réalisable évidente.

Présentation sous-forme de Tableau

- n variables (y compris m var d'écart), m contraintes
- X_{out} "variables hors-base" : $n - m$ var que l'on fixe à 0
- X_{in}"variables de base" : les m autres

Définition (Tableau(P))

- *Le prog. linéaire P caractérisé par X_{in},A,B,C et v*
- *où v = valeur de z quand var de X_{out} nulles*

$$Tableau(P)[1..(m+1), 1..(n+1)] = \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m & \dots & m,n \end{bmatrix} & B \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} \\ C \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \end{bmatrix} & z - v \end{pmatrix}$$

où chaque ligne i se lit $\sum_{j=1}^{n} T[i,j]X[j] = T[i, m+1]$

$Tableau(Barman)$:

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
e_1 :	5	3	1	0	0	30
e_2 :	2	3	0	1	0	24
e_3 :	1	3	0	0	1	18
C, v :	80	60	0	0	0	z

Lecture du tableau :

- $5x + 3y + e_1 = 30$,
- $2x + 3y + e_2 = 24$,
- $x + 3y + e_3 = 18$,
- $80x + 60y = z$.

Solution de base et bases voisines

Définition

Une solution de base associée à l'écriture d'un programme linéaire selon une base X_{in} *est la solution particulière obtenue en posant* $X_{out} = 0$*, ce qui implique* $X_{in} = B$.

Définition

Une base X_{in} *est voisine d'une autre base* X'_{in} *ssi il existe une variable dite sortante* s *de* X_{in} *et une variable dite entrante de* X_{out} *telle que* $X'_{in} = X_{in} \setminus \{s\} \cup \{e\}$.

Exercice 9 : Première itération algébrique

Système 1

$\max(z = 80x + 60y)$

$$\text{tel que : } \begin{aligned} e_1 &= 30 - 5x - 3y \\ e_2 &= 24 - 2x - 3y \\ e_3 &= 18 - x - 3y \end{aligned}$$

$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

solution de base : $z = 0$

$$\begin{array}{ccccc} \text{x} & \text{y} & e_1 & e_2 & e_3 \\ (0, & 0, & 30, & 24, & 18) \end{array}$$

- Faire croître au maximum z
- Augmenter x car son coefficient est le plus fort dans z.
- De combien peut-on augmenter x sans violer les contraintes de positivité $(e_1, e_2, e_3 \geq 0)$?

Exercice 10 : nouvelle solution réalisable

Système 1

$\max(z = 80x + 60y)$

$$\begin{aligned} \text{tel que : } e_1 &= 30 - 5x - 3y \\ e_2 &= 24 - 2x - 3y \\ e_3 &= 18 - x - 3y \end{aligned}$$

$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

- En remplaçant x par 6 et y par 0 dans le système 1.
- Quelle solution obtient-on ?

solution de base : $z=$ ...

x	y	e_1	e_2	e_3
(...,	...,	...,	...,	...)

Deuxième itération

Système 1

$$\max(z = 80x + 60y)$$

$$\begin{aligned} \text{tel que : } e_1 &= 30 - 5x - 3y \\ e_2 &= 24 - 2x - 3y \\ e_3 &= 18 - x - 3y \end{aligned}$$

$$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

- Pour savoir si la solution est maximale
- On reformule le Système 1 en fonction de y et e_1
- C'est à dire qu'on fait entrer x en base et sortir e_1
- Le pivot vaut 5 (coef de x dans l'équation de e_1).

Exercice 11 : Pivoter le Système 1 sur x et e_1

Compléter le tableau :

Système 1 : base e_1, e_2, e_3	Système 2 : base x, e_2, e_3
$\max(z = 80x + 60y)$	$\max(z = \ldots\ \ldots y\ \ldots e_1)$
tel que : $e_1 = 30 - 5x - 3y$	tel que : $x = \ldots\ \ldots y \ldots e_1$
$e_2 = 24 - 2x - 3y$	$e_2 = \ldots\ \ldots y\ \ldots e_1$
$e_3 = 18 - x - 3y$	$e_3 = \ldots\ \ldots y\ \ldots e_1$
$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$	$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

- Retrouvez la solution de base associée.

Première itération version Tableau :

Définition (choix du pivot)

- *Colonne du pivot (variable entrante) = coeff. de z le plus positif*
- *Ligne du pivot (variable sortante), min rapport B/ col pivot > 0*

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
e_1 :	5	3	1	0	0	30
e_2 :	2	3	0	1	0	24
e_3 :	1	3	0	0	1	18
C, v :	80	60	0	0	0	z

Première itération sur le tableau :

Définition (choix du pivot)

- *Colonne du pivot (variable entrante) = coeff. de z le plus positif*
- *Ligne du pivot (variable sortante), min rapport B/ col pivot* > 0

var de base	x : var entrante	y	e_1	e_2	e_3	B	B/col pivot
e_1 :	5	3	1	0	0	30	6
e_2 :	2	3	0	1	0	24	12
e_3 :	1	3	0	0	1	18	18
C, v :	80 : coef max	60	0	0	0	z	

Première itération sur le tableau :

Définition (choix du pivot)

- *Colonne du pivot (variable entrante) = coeff. de z le plus positif*
- *Ligne du pivot (variable sortante), min rapport $B/$ col pivot > 0*

var de base	x : var entrante	y	e_1	e_2	e_3	B	$B/$col pivot
e_1 : *sortante*	5	3	1	0	0	30	6
e_2 :	2	3	0	1	0	24	12
e_3 :	1	3	0	0	1	18	18
C, v :	80 : coef max	60	0	0	0	z	

Définition (Pivotage sur entrante e et sortante s)

La valeur du pivot est $A[s,e]$ et la réécriture du programme selon la base voisine revient à

1. *Diviser la (ligne s) du pivot par le pivot $A[s,e]$:*
   $(nouvelle\_ligne\ s) = \frac{(ligne\ s)}{pivot}$
2. *Pour toute ligne i autre que s :*
   $(nouvelle\_ligne\ i) = (ligne\ i) - A[i,e] \times (nouvelle\_ligne\ s)$

⚠ On soustrait à la nouvelle ligne s.

Définition (Algo du simplexe)

Faire un choix de pivot puis pivoter vers la base voisine tant que C contient des coef. positifs.

Faire pivoter le Système 1 sur entrante=x et sortante=e_1.

var de base	x : var entrante	y	e_1	e_2	e_3	B	B/col pivot
e_1 : *sortante*	5	3	1	0	0	30	6
e_2 :	2	3	0	1	0	24	12
e_3 :	1	3	0	0	1	18	18
C, v :	80 : coef max	60	0	0	0	z	

Système 2 :

	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	...	...	...	...	...	...
e_2 :	...	...	...	...	...	...
e_3 :	...	...	...	...	...	...
C, v :	...	...	...	...	...	...

Théorèmes d'optimalité

Théorème

S'il existe une solution réalisable pour un programme linéaire borné alors il existe une solution optimale de base réalisable pour ce programme.

Théorème

Soit X_{in} une base réalisable non dégénérée $(B > 0)$ d'un programme linéaire caractérisé par A, B, C et v, X_{in} est une base réalisable optimale ssi $\forall j \in I_{out},\ C[j] \leq 0$.

$C[j]$ est appelé le coût réduit de la variable hors-base x_j.

Exercice 13 : Simplexe Tableau

On part maintenant du Système 2 :

	x	y	e_1	e_2	e_3	B	$B[i]/pivot$
x :	1	3/5	1/5	0	0	6	$30/3 = 10$
e_2 :	0	9/5	$-2/5$	1	0	12	$20/3 = 6.66$
e_3 :	0	12/5	$-1/5$	0	1	12	5
C, v :	0	12	-16	0	0	$z - 480$	

- Donnez le tableau suivant selon l'algo. du Simplexe version Tableau.

var. de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
... :	...	...	...	...	...	...
... :	...	...	...	...	...	...
... :	...	...	...	...	...	...
C, v :	...	...	...	...	...	...