TD 4 – Modélisation paramétrique

Exercice 1 : Approximations linéaire et non linéaire

On veut calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x, mais on ne connaît pas f explicitement. Ceci se produit typiquement lorsque f n'est connue qu'en certains points expérimentaux. On considère la fonction f dont 3 points du graphique sont connus ($f(0) = 1,\ f(1) = 3$ et $f(2) = 7$). On propose de chercher f dans la famille des polynômes. Cependant, on considère que les mesures sont entachées d'erreurs ($f(0) \approx 1,\ f(1) \approx 3$ et $f(2) \approx 7$) et on cherche une fonction f de la forme :

$$f(x) = ax + b. \tag{1}$$

Partie A : approximation linéaire

Questions

1. A priori, peut-on trouver une fonction de la forme $f(x) = ax+b$, qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?
2. **Formulation développée** du problème de minimisation aux moindres carrés :
   (a) Ecrire le problème de minimisation sous forme développée qui détermine les coefficients a et b au sens des moindres carrés :
   $$S : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{3} (y_i - f(x_i))^2$$
   (b) Résoudre le problème d'optimisation.
   (c) Calculer l'erreur commise par cette approximation.
3. **Formulation factorisée** du problème de minimisation aux moindres carrés :
   $$\min_{(a,b)} S(a, b) = \min_{\beta=[a\ \ b]^T} \|A\beta - B\|^2$$
   (a) Ecrire le problème de minimisation sous forme factorisée en identifiant la matrice A et le vecteur B.
   (b) Résoudre le problème d'optimisation factorisé.
   On utilisera la formule suivante de l'inverse d'une matrice 2x2 :
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Partie B : approximation non linéaire

On cherche maintenant une fonction g de la forme :

$$g(x) = a\sqrt{|x - 1|} + bx^2. \tag{2}$$

Questions

1. A priori, peut-on trouver une fonction de la forme $g(x) = a\sqrt{|x - 1|} + bx^2$, qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?
2. **Formulation développée** du problème de minimisation aux moindres carrés :

(a) Ecrire le problème de minimisation sous forme développée qui détermine les coefficients a et b au sens des moindres carrés :

$$S : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{3} (y_i - f(x_i))^2$$

(b) Résoudre le problème d'optimisation.

(c) Calculer l'erreur commise par cette approximation.

3. **Formulation factorisée** du problème de minimisation aux moindres carrés :

$$\min_{(a,b)} S(a, b) = \min_{\beta=[a\ \ b]^T} \|A\beta - B\|^2$$

(a) Ecrire le problème de minimisation sous forme factorisée en identifiant la matrice A et le vecteur B.

(b) Résoudre le problème d'optimisation factorisé.

Exercice 2 : Modélisation d'une réaction chimique par la méthode des moindres carrés

Dans une réaction chimique, on souhaite modéliser l'évolution de la concentration d'un réactif en fonction du temps. On a mesuré expérimentalement :

Temps (s)	7	18	27	37	56	102
Concentration	32.14	28.47	25.74	23.14	18.54	11.04

Dans la suite, on notera $(T_i)_{1\leq i\leq 6}$ la suite des temps considérés et $(C_i)_{1\leq i\leq 6}$ la suite des concentrations mesurées.
Nous souhaitons effectuer une modélisation de la réaction par une réaction chimique à l'ordre 1, c'est-à-dire, si $C(t)$ désigne la concentration en fonction du temps :

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\lambda C(t) \tag{3}$$

pour λ une constante réelle. Elle admet pour solution $C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$ où C_0 est une constante réelle.

Questions

1. Justifier que $\lambda > 0$.
2. Ecrire le problème d'optimisation aux moindres carrés non linéaires.
3. Ecrire le problème sous forme d'un problème d'optimisation aux moindres carrés linéaires.

Exercice 3 : Opérations géométriques 2D

Les opérations géométriques ont pour but de modifier la position des informations contenues dans l'image sans modifier le niveau de gris. Ces opérations peuvent s'appliquer à la totalité des points d'une image (les pixels), un objet particulier de l'image, voire à certains points spécifiques (recalage de points caractéristiques).

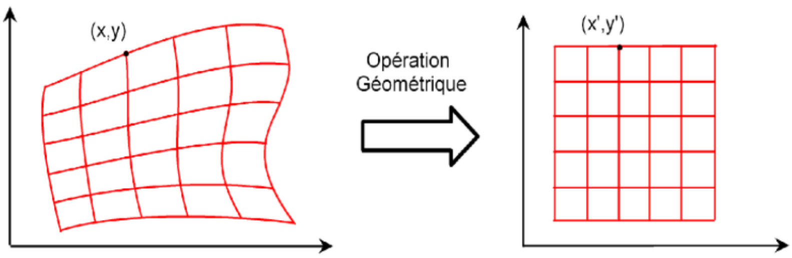
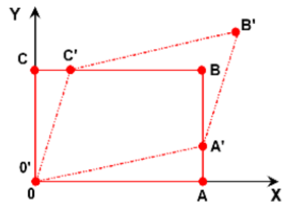


Fig 1 - Recalage géométrique d'une image

Les opérations de base permettent de réaliser des transformations géométriques simples. Elles sont visibles lorsqu'elles affectent une structure spécifique (élément carré, maillage). On considère la transformation suivante :

Cisaillement double /transvection		$\begin{cases} x' = x + \alpha y \\ y' = \beta x + y \end{cases}$

Questions

On souhaite modéliser le problème consistant à trouver la transvection liant 2 ensembles de points dans $\mathbb{R}^2$.

1. Pour un couple de points, déterminer la matrice B telle que :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

On définit maintenant $\gamma \in \mathbb{R}^2$ le vecteur de paramètres inconnus défini par : $\gamma = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \boxed{\gamma \in \mathbb{R}^2} \longrightarrow U' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f(U, \gamma) \in \mathbb{R}^2$$

2. Déterminer la matrice $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et le vecteur $d \in \mathbb{R}^2$ de la fonction $f(U, \gamma)$ définie sous la forme :

$$f(U, \gamma) = C\ \gamma + d$$

3. Ecrire le problème d'optimisation pour définir le vecteur de paramètres γ en considérant un ensemble de n points transformés par la même transvection.
4. Donner la solution théorique de ce problème d'optimisation.

Exercice 4 : calcul de la position d'un utilisateur avec le GPS

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position d'un utilisateur sur le globe terrestre en se plaçant dans le cadre de la constellation de N satellites dédiée au GPS. Le principe de fonctionnement du système est le suivant : tout utilisateur disposant d'un récepteur GPS reçoit de la part de tous les satellites visibles des informations lui permettant de se positionner correctement par triangulation.

Un **satellite** est un objet quelconque parcourant une orbite elliptique dans le repère galiléen $R(O, X, Y, Z)$ autour d'un astre (situé à un foyer de l'ellipse). Il est défini grâce à un certain nombre de paramètres orbitaux (6 précisemment). La position du satellite est calculée en appliquant un mécanisme de propagation des paramètres orbitaux en prenant en compte la dérive standard de chacun des paramètres et les effets liés à la rotation de la Terre. Le calcul de la position du satellite consiste à exprimer les coordonnées (X, Y, Z) en fonction des paramètres orbitaux.

Les informations renvoyées par le satellite S_i sont :

— la date d'émission du message t_i,

— la position du satellite au moment de l'émission (X_i, Y_i, Z_i).

L'utilisateur peut alors calculer la distance d_i qui le sépare du satellite S_i connaissant la vitesse de propagation du signal c. En combinant chacune des distances obtenues, l'utilisateur détermine sa position P par triangulation.

On introduit de plus un biais τ entre l'horloge interne des satellites H_g (horloge atomique parfaitement synchronisée) et l'horloge du récepteur h_r (horloge à quartz). Donc $H_r = H_g + \tau$.

La vitesse de propagation du signal est notée c.

Questions

En considérant que les mesures de mesure sont parfaits, c'est-à-dire pas d'erreur sur la position des satellites $(X_i, Y_i, Z_i)_{i=1,..,N}$ où N est le nombre de satellites visibles, sur la date d'émission des signaux t_i et sur la date de réception (t_{ui}).

1. Soient $P_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ la position du satellites visibles et $P_u = [X_u, Y_u, Z_u]^T$ la position de l'utilisateur à déterminer. Calculer la distance qui sépare les satellites de l'utilisateur.
2. Ecrire le problème d'optimisation pour calculer au mieux P_u au sens des moindres carrés :

$$\min_{\beta} \frac{1}{2} \|R(\beta)\|^2 \tag{4}$$

   On précisera l'espace des paramètres β ainsi que l'application "résidus" $R(\beta)$.