Algorithmique Avancée (avec solution)

Partie B. Chap 5. Programmation Linéaire (fin) : Dualité

Florence Bannay

Master Informatique – Université Paul Sabatier

2020-2021

Previously on Algo Avancée

Previously on Algo Avancée

nombre optimal bidons type 1 et 2 pour maximiser gain.

Var :	x : nb bidons 1 (5 or., 2 pa.. 1 fr.) y : nb bidons 2 (3 de chaque)
Objectif :	max $(z = 80x + 60y)$
Contraintes :	$5x + 3y \leq 30$ (stock jus orange) $2x + 3y \leq 24$ (stock jus pample.) $1x + 3y \leq 18$ (stock jus framb.) $x,y \geq 0$ (positivité)

Previously on Algo Avancée

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

Previously on Algo Avancée

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle
  $\max(z = 80x + 60y)$

  $$\begin{array}{ll} -5x - 3y & \geq -30 \\ 2x + 3y & \leq 24 \\ 1x + 3y - t & = 18 \\ x, y \geq 0 & t \leq 0 \end{array}$$

Previously on Algo Avancée

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\max(z = 80x + 60y)$$
$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leq 30 \\ 2x + 3y &\leq 24 \\ 1x + 3y &\leq 18 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

$$\max z = \overbrace{\begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{C} \times \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}^{X} + \overbrace{0}^{v}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}}^{B}$$

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

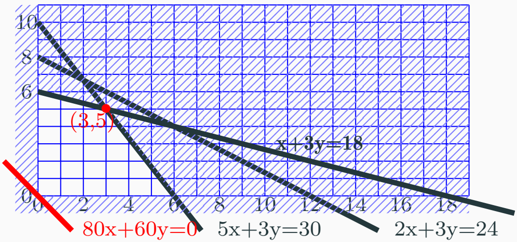
II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\max(z = 80x + 60y)$$
$$\begin{array}{ll} -5x - 3y & \geq -30 \\ 2x + 3y & \leq 24 \\ 1x + 3y - t & = 18 \\ x,y \geq 0 & t \leq 0 \end{array}$$



Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe Algébrique
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- I. Intro. par l'exemple
  1. Le barman
  2. Les formes
  3. Transformations
- II. Résolution géométrique
- III. Rés. par le Simplexe Algébrique
  1. solution de base
  2. solution voisine
  3. simplexe Tableau
  4. Théorème
- IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llll} \max z = 80x + 60y & & & \\ e_1 & = 30 & -5x & -3y \\ e_2 & = 24 & -2x & -3y \\ e_3 & = 18 & -x & -3y \\ x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

base e_1, e_2, e_3

$x = 0,\ y = 0,\ e_1 = 30,\ e_2 = 24,\ e_3 = 18,\ z = 0$

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe Algébrique
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llll} x & = 6 & -\frac{3}{5}y & -\frac{1}{5}e_1 \\ e_2 & = 12 & -\frac{9}{5}y & +\frac{2}{5}e_1 \\ e_3 & = 12 & -\frac{12}{5}y & +\frac{1}{5}e_1 \end{array}$$

$\max z = 480 + 12y - 16e_1$

$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

base x, e_2, e_3

$x = 6,\ y = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 12,\ e_3 = 12,\ z = 480$

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe Algébrique
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llll} y & = 5 & + \frac{1}{12} e_1 & - \frac{5}{12} e_3 \\ x & = 3 & - \frac{1}{4} e_1 & + \frac{1}{4} e_3 \\ e_2 & = 3 & + \frac{1}{12} e_1 & - \frac{5}{12} e_3 \end{array}$$

$\max z = 540 - 15e_1 - 5e_3$

$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

base x, y, e_2

$x = 3,\ y = 5,\ e_1 = 0,\ e_2 = 3,\ e_3 = 0,\ z = 540$

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe Tableau
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\max(z = 80x + 60y) & \\
5x + 3y + e_1 & = 30 \\
2x + 3y + e_2 & = 24 \\
1x + 3y + e_3 & = 18 \\
x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0
\end{array}}
$$

Tableau initial

variables de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
e_1 :	5	3	1	0	0	30
e_2 :	2	3	0	1	0	24
e_3 :	1	3	0	0	1	18
C, v :	80	60	0	0	0	z

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations
II. Résolution géométrique
III. Rés. par le Simplexe Tableau
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème
IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

On fait entrer x en base (e_1 sort car B/x min)

	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	3/5	1/5	0	0	6
e_2 :	0	9/5	$-2/5$	1	0	12
e_3 :	0	12/5	$-1/5$	0	1	12
C, v :	0	12	-16	0	0	$z - 480$

Solution de base : (6,0,0,12,12), z=480

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Rés. par le Simplexe Tableau
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème

IV. Dégénerescence

- forme générale/canonique/standard
- forme in extenso/matricielle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max(z = 80x + 60y) & \\ 5x + 3y + e_1 & = 30 \\ 2x + 3y + e_2 & = 24 \\ 1x + 3y + e_3 & = 18 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{array}}$$

On fait entrer y en base (e_3 sort car B/y min)

	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	0	$1/4$	0	$-1/4$	3
e_2 :	0	0	$-1/4$	1	$-3/4$	3
y :	0	1	$-1/12$	0	$5/12$	5
C, v :	0	0	-15	0	-5	$z - 540$

Coeff. de z négatifs : optimum (3,5,0,3,0), z=540

Previously on Algo Avancée

I. Intro. par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

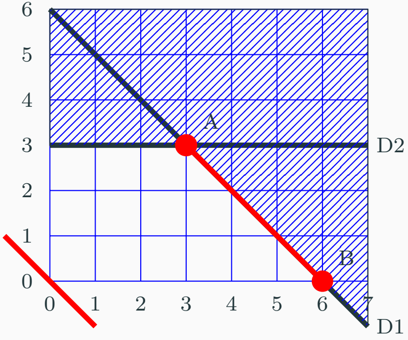
III. Rés. par le Simplexe
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. simplexe Tableau
   4. Théorème : 1 solution optimale est 1 solution de base

IV. Dégénerescence

Previously on Algo Avancée

Quand contrainte // objectif : infinité de sol

$\max(z = x + y)$
(C1) $x + y \leq 6$
(C2) $y \leq 3$
$x \geq 0$ et $y \geq 0$



V. Problème primal/dual

Le problème de maximisation du barman (primal)

Le barman désire préparer le nombre optimal de bidons de type 1 et 2 pour maximiser son gain.

VAR DECISION :	x : nb bidons 1 (5 orange, 2 pampl. 1 framb.) y : nb bidons 2 (3 de chaque)
OBJECTIF :	max $(z = 80x + 60y)$
CONTRAINTES :	$5x + 3y \leq 30$ (stock jus orange) $2x + 3y \leq 24$ (stock jus pamplemousse) $1x + 3y \leq 18$ (stock jus framboise) $x, y \geq 0$ (contraintes de positivité)

Le problème de minimisation associé du grossiste (dual)

Un grossiste veut acheter tout le stock de jus de fruits (30 l orange, 24 pampl., 18 framb.) au prix le plus bas possible. On note :

- u : prix d'un litre de jus d'orange
- v : prix d'un litre de jus de pamplemousse
- w : prix d'un litre de jus de framboise

Le grossiste payera la somme $s = 30u + 24v + 18w$.

Problème du grossiste :

- trouver u, v et w qui minimise s
- avec contrainte : s acceptable pour le barman

Exercice 10

$$\left.\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right) \text{ étant les prix au litre des jus de } \left(\begin{array}{c} \textit{orange} \\ \textit{pamplemousse} \\ \textit{framboise} \end{array}\right.$$

- La contrainte que la somme s soit acceptable pour le barman se traduit par des inéquations sur u, v et w.
- Le barman ne doit pas perdre d'argent par rapport à une vente sous forme de bidons
  - bidon type 1 (vendu 80 euros) : 5l orange, 2l pampl, 1l framb
  - bidon type 2 (vendu 60 euros) : 3l de chaque
- Écrivez les contraintes du grossiste sur u v et w.

Exercice 10 (solution)

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right) \text{ étant les prix au litre des jus de } \left(\begin{matrix} orange \\ pamplemousse \\ framboise \end{matrix}\right.$$

Traduire la contrainte que s soit acceptable pour le barman par des inéquations sur u, v et w : c'est-à-dire que le barman ne doit pas perdre d'argent par rapport à une vente sous forme de bidons

- bidon type 1 (vendu 80 euros) : 5l orange, 2 pampl, 1 framb
- bidon type 2 (vendu 60 euros) : 3l de chaque

L'acceptabilité pour le barman impose donc comme contraintes :

$$\begin{aligned} 5u + 2v + w \quad &\geq 80 \\ 3u + 3v + 3w \quad &\geq 60 \end{aligned}$$

Résumé des deux problèmes

Pb du barman	**Pb du grossiste**
2 variables	3 variables
3 contraintes	2 contraintes
$\max(z = 80x + 60y)$	$\min(s = 30u + 24v + 18w)$
$5x + 3y \leq 30$ $2x + 3y \leq 24$ $x + 3y \leq 18$	$5u + 2v + w \geq 80$ $3u + 3v + 3w \geq 60$
$x, y \geq 0$	$u, v, w \geq 0$

Le problème du grossiste est appelé Dual du problème du barman.

Dual d'un PL en forme canonique (in extenso)

Primal (max)	**Dual** (min)
m contraintes d'infériorité	n contraintes de supériorité
n variables	m variables
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \in [1, m]$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \forall j \in [1, n]$
$x_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots n$	$y_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots m$

⚠ Cette définition du dual n'est valable que pour la Forme Canonique !

Dual d'un PL en forme canonique (matriciel)

Primal (max)	Dual (min)
m contraintes	n contraintes
n variables	m variables
$\max C.X$ $A.X \leq B$ $X \geq \vec{0}$	$\min B.Y$ $A^T.Y \geq C$ $Y \geq \vec{0}$

⚠ Cette définition du dual n'est valable que pour la Forme Canonique !

Théorèmes dualité et coûts réduits

Théorème (dualité forte)

a) ***Si*** *un pb ou son dual possède une sol. optimale à valeur finie,* ***alors*** *l'autre possède une solution optimale de même valeur*

b) ***Si*** *un pb ou son dual est non borné alors le domaine réalisable de l'autre est vide.*

Théorème (coûts réduits)

Quand le problème a une solution optimale à valeur finie, cette solution s'obtient en donnant aux variables du dual les valeurs égales à l'opposé des coûts réduits des variables d'écart leur correspondant dans le tableau simplexe de la solution primale optimale.

Exercice 11

Pb du barman	**Pb du grossiste**
$\max(z = 80x + 60y)$ $5x + 3y \leq 30$ $2x + 3y \leq 24$ $x + 3y \leq 18$	$\min(s = 30u + 24v + 18w)$ $5u + 2v + w \geq 80$ $3u + 3v + 3w \geq 60$
$x, y \geq 0$	$u, v, w \geq 0$

Dernier tableau du Simplexe du barman

var. de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	0	$1/4$	0	$-1/4$	3
e_2 :	0	0	$-1/4$	1	$-3/4$	3
y :	0	1	$-1/12$	0	$5/12$	5
C, v :	0	0	-15	0	-5	$z - 540$

En déduire la solution au pb du grossiste.

Exercice 11 (solution)

Pb du barman	**Pb du grossiste**
$\max(z = 80x + 60y)$	$\min(s = 30u + 24v + 18w)$
$5x + 3y \leq 30$	$5u + 2v + w \geq 80$
$2x + 3y \leq 24$	$3u + 3v + 3w \geq 60$
$x + 3y \leq 18$	
$x, y \geq 0$	$u, v, w \geq 0$

Dernier tableau barman :

var. de base	x	y	e_1	e_2	e_3	B
x :	1	0	$1/4$	0	$-1/4$	3
e_2 :	0	0	$-1/4$	1	$-3/4$	3
y :	0	1	$-1/12$	0	$5/12$	5
C, v :	0	0	-15	0	-5	$z - 540$

- La solution pour le barman est donc $z = 540$ avec $x = 3$ et $y = 5$.
- D'après le théo de dualité forte : le prix min à payer par grossiste est $s = 540$.
- D'après le théo des coûts réduits : $u = 15$, $v = 0$ et $w = 5$.

VI Bilan. et Complexité

Bilan

Soit un PL en forme standard avec n variables et m contraintes.

Théorème (Rappel)

Si au moins une solutions optimale existe
alors il existe une solution optimale extrême

Une solution extrème correspond à 1 sommet du polyèdre encadrant les sol. réalisables :

- C'est une solution de base
- Donne des valeurs à m var parmi n, les $n - m$ restantes sont mises à 0

Il y a $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ sol. extrêmes à explorer pour trouver l'optimale.

Considérations de complexité (1)

- Raisonnement géométrique praticable pour 2 variables (voire 3).
- Problèmes industriels : milliers de variables (espace avec des milliers de dimension et calculs sur des hyperplans).
- Pour $n = 50$ variables et $m = 30$ contraintes, il y a $4.71\ 10^{13}$ sommets possibles (en calculant un million de sommets par seconde : 1 an et demi)
- Algo du simplexe : recherche la solution dans les sommets du polyèdre, mais parcours guidé vers l'optimum
- Dans l'exemple traité, on n'a exploré que 3 solutions sur les 10 ($= C_5^3$) solutions extrêmes.

Considérations de complexité (2)

- Notons que cette méthode (comme celle des flots) transforme un problème à solution réelles en problème discret : puisqu'on explore les sommets d'un polyèdre (pour les flots on modifie successivement les arcs d'une chaîne augmentante).
- L'algorithme du Simplexe n'est pas polynomial : si l'on choisit mal la variable à augmenter à chaque étape alors on peut prendre un temps exponentiel. Ainsi Klee et Minty en 1972 ont montré qu'on pouvait trouver une séquence exponentielle (en la taille du PL) de solutions réalisables t.q. le profit s'améliore strictement à chaque fois.

Considérations de complexité (3)

- En 1979, Khachian (mathématicien soviétique) a prouvé qu'il existe un algo polynomial pour les problèmes de PL en ramenant ce problème à un autre problème de résolution d'inégalités linéaires. Cet algorithme polynomial est basé sur un encadrement des solutions par des ellipses de plus en plus petites (Ellipsoid algorithm) (cf Combinatorial Optimization Papadimitriou et Steiglitz, Dover Publications Inc. 2013).