TD 5 – Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 : Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A ($i.e$ $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).
2. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
3. Soit $B = U^T A L^T$. Sans calcul supplémentaire, donner la décomposition LU de la matrice B.

Exercice 2

1. Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

2. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
3. Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2 z = b$.

Exercice 3 : Décomposition de Cholesky

Donner la factorisation de Cholesky de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4 : calcul de l'inverse d'une matrice A

En utilisant la décomposition LU, expliquer comment calculer l'inverse d'une matrice A inversible de taille $n \times n$.