Algorithmique Avancée (avec solution)

Partie B. Chap 5. Programmation Linéaire (suite) : Dégénerescence et dualité

Florence Bannay

Master Informatique – Université Paul Sabatier

2020-2021

Ce qu'on a déjà vu

I. Introduction par l'exemple
   1. Le barman
   2. Les formes : générale/canonique/standard ; in extenso/matricielle
   3. Transformations

II. Résolution géométrique

III. Résolution algébrique et Simplexe Tableau
   1. solution de base
   2. solution voisine
   3. pivot et algorithme du simplexe
   4. théorème : solution optimale = solution de base

IV. Dégénérescence

Exercice 1

$$\max(z = x + y)$$

$$x + y \leq 6 \qquad \text{(contrainte C1)}$$
$$y \leq 3 \qquad \text{(contrainte C2)}$$

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

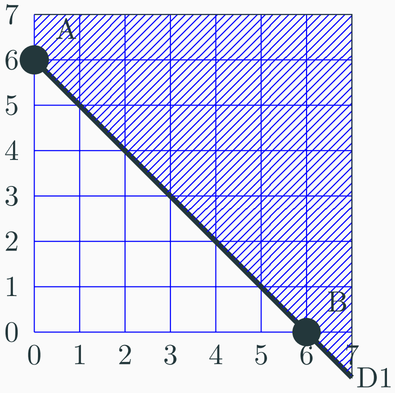
Tracez la zone qui satisfait C1 :

- La droite $D1 : x + y = 6$ passe par : $A(0, .?.)$ et $B(.?., 0)$.
- Le point (0,0) satisfait-il C1 ? (oui/non)
- Le demi-plan délimité par D1 et contenant (0,0) contient-il des solutions réalisables ? (oui/non)

Exercice 1 (solution)

$$\max(z = x + y)$$
$$(\text{C1})\ x + y \leq 6$$
$$(\text{C2})\ y \leq 3$$
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

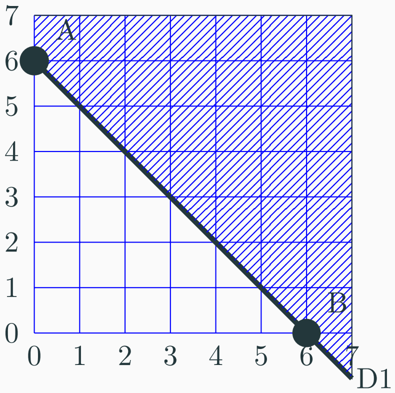
Tracez la zone qui satisfait C1 :



- La droite $D1 : x + y = 6$ passe par : $A(0, 6)$ et $B(6, 0)$.
- (0,0) satisfait C1
- le demi-plan non-hachuré contient des solutions réalisables.

Exercice 2

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(z = x + y) \\ \text{(C1) } x + y \leq 6 \\ \text{(C2) } y \leq 3 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array}}$$



Tracez la zone qui satisfait C2 :

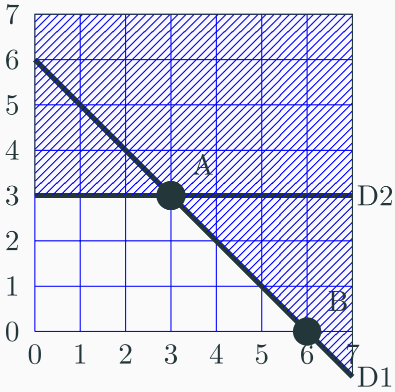
Tracez d'abord la droite D2 : y=3

- (0,0) satisfait-il C2 ? (oui/non)
- Le demi-plan délimité par D2 et contenant (0,0) contient-il des solutions réalisables ? (oui/non)

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(z = x + y) \\ (\text{C1})\ x + y \leq 6 \\ (\text{C2})\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array}}$$

Tracez la zone qui satisfait C2 :

Tracez d'abord la droite D2 : y=3



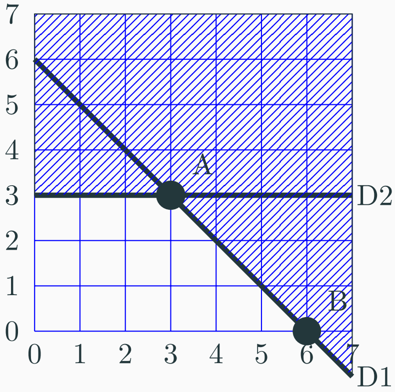
- (0,0) satisfait C2
- la zone non-hachurée contient des solutions réalisables.

$$\max(z = x + y)$$

(C1) $x + y \leq 6$
(C2) $y \leq 3$

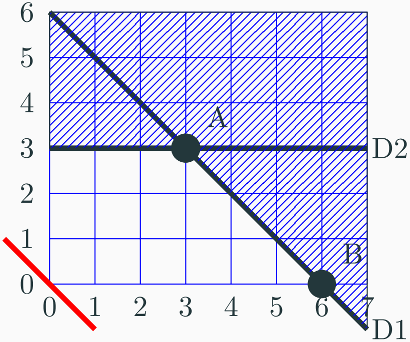
$x \geq 0$ et $y \geq 0$

Calcul de l'optimum :



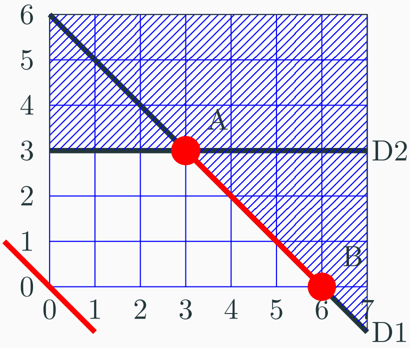
- Tracez la droite x+y=0 elle passe par (-1, ? ?) et (? ?, -1)
- Quelle est la solution optimale pour ce programme linéaire ?

$$\max(z = x + y)$$
$$\text{(C1) } x + y \leq 6$$
$$\text{(C2) } y \leq 3$$
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$



- La droite x+y=0 elle passe par (-1, 1) et D(1, -1)

$$\max(z = x + y)$$
$$(C1)\ x + y \leq 6$$
$$(C2)\ y \leq 3$$
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$



- La droite x+y=0 elle passe par (-1, 1) et D(1, -1)
- Il y a une infinité de solutions optimales : le segment [A,B]
- Toutes ces solutions ont pour valeur $z = 6$.
- Dégénerescence : l'objectif est parallèle à une contrainte

Exercice 4 : résolution par le Simplexe

$$\max(z = x + y)$$
$$(\text{C1})\ x + y \leq 6$$
$$(\text{C2})\ y \leq 3$$
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

Décrire le tableau initial :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
e_1 :					
e_2 :					
$C, z - v$:					z

Exercice 4 (solution)

$$\max(z = x + y)$$
$$(\text{C1})\ x + y \leq 6$$
$$(\text{C2})\ y \leq 3$$
$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
e_1 :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	1	1	0	0	z

Exercice 5

variables de base	x	y	e_1	e_2	B	rapport $B/$ entrante
e_1 :	1	1	1	0	6	
e_2 :	0	1	0	1	3	
$C, z - v$:	1	1	0	0	z	/

On choisit de faire entrer x. Donnez la variable sortante.

Exercice 5 (solution)

variables de base	x	y	e_1	e_2	B	B$/x$
e_1 :	1	1	1	0	6	$6/1 = 6$
e_2 :	0	1	0	1	3	$3/0 = +\infty$
$C, z - v$:	1	1	0	0	z	/

entrante : x, sortante : e_1 (variable t.q. $B/entrante$ min)

Exercice 6

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
e_1 :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	1	1	0	0	z

Pivotez ce tableau en faisant entrer x et sortir e_1. Rappel :

- **ligne pivot** : on divise la ligne du pivot par le pivot
- **autre ligne** : ligne $-$ coef col pivot $\times$ nouvelle ligne pivot

Exercice 6 (solution)

Second tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

Exercice 6 (solution)

Second tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

- Tous les coefficients de z sont nuls ou négatifs
- donc l'optimum est atteint

Exercice 7

Second tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

En déduire une solution optimale.

Exercice 7 (solution)

Second tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

- Tous les coefficients de z sont nuls ou négatifs
- Donc l'optimum est atteint
- La solution de base associée est $z = 6$ pour $x = 6$ et $y = 0$.
- L'algo du Simplexe s'arrêterait là

Exercice 8

Second tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	1	1	0	6
e_2 :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

- On peut choisir de faire entrer y en base,
- Quelle variable doit sortir ? calculez le nouveau tableau.

Il faut absolument sortir $e2$: critère de sortie ($B/entrante$ minimal) obligatoire pour que solution réalisable.

Second tableau

var. base	x	y	e_1	e_2	B	B/y
x :	1	1	1	0	6	6
e_2 :	0	1	0	1	3	3
$C, z-v$:	0	0	-1	0	$z-6$	/

Troisième tableau

var. base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	0	1	-1	3
y :	0	1	0	1	3
$C, z-v$:	0	0	-1	0	$z-6$

Exercice 9

Troisième tableau :

var. base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	0	1	-1	3
y :	0	1	0	1	3
$C, z-v$:	0	0	-1	0	$z-6$

- L'optimum est-il atteint ?
- Donnez la solution de base associée

Exercice 9 (solution)

Troisième tableau :

variables de base	x	y	e_1	e_2	B
x :	1	0	1	-1	3
y :	0	1	0	1	3
$C, z - v$:	0	0	-1	0	$z - 6$

- L'optimum est encore atteint (les coeffs dans z sont tous négatifs ou nuls)
- La solution de base associée est $z = 6$ avec $x = 3$ et $y = 3$.

Problème primal/dual

Le problème de maximisation du barman (primal)

Le barman désire préparer le nombre optimal de bidons de type 1 et 2 pour maximiser son gain.

VAR DECISION :	x : nb bidons 1 (5 orange, 2 pampl. 1 framb.) y : nb bidons 2 (3 de chaque)
OBJECTIF :	max ($z = 80x + 60y$)
CONTRAINTES :	$5x + 3y \quad \leq 30$ (stock jus orange) $2x + 3y \quad \leq 24$ (stock jus pamplemousse) $1x + 3y \quad \leq 18$ (stock jus framboise) $x, y \quad \geq 0$ (contraintes de positivité)

Le problème de minimisation associé du grossiste (dual)

Un grossiste veut acheter tout le stock de jus de fruits (30 l orange, 24 pampl., 18 framb.) au prix le plus bas possible. On note :

- u : prix d'un litre de jus d'orange
- v : prix d'un litre de jus de pamplemousse
- w : prix d'un litre de jus de framboise

Le grossiste payera la somme $s = 30u + 24v + 18w$.

Problème du grossiste :

- trouver u, v et w qui minimise s
- avec contrainte : s acceptable pour le barman

Exercice 10

$$\left.\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right) \text{étant les prix au litre des jus de } \left(\begin{array}{c} \textit{orange} \\ \textit{pamplemousse} \\ \textit{framboise} \end{array}\right.$$

- La contrainte que la somme s soit acceptable pour le barman se traduit par des inéquations sur u, v et w.
- Le barman ne doit pas perdre d'argent par rapport à une vente sous forme de bidons
  - bidon type 1 (vendu 80 euros) : 5l orange, 2l pampl, 1l framb
  - bidon type 2 (vendu 60 euros) : 3l de chaque
- Écrivez les contraintes du grossiste sur u v et w.

Exercice 10 (solution)

Suspense ...