Algorithmique Avancée

Partie B. Résolution de problèmes combinatoires polynomiaux

Chap 4: Flots et Réseaux de transport

Florence Bannay

Master Informatique – Université Paul Sabatier

2020-2021

Intro

Les problèmes de flots et réseaux de transport

- Thème : Organiser de façon optimale sous contraintes, les mouvements d'un bien dans un réseau.
  - structurer le réseau
  - dimensionner le réseau
  - organiser la circulation
- Problème du flot maximal : faire circuler la plus grande quantité entre deux points du réseau sans excéder les capacités des arcs.
- Beaucoup d'applications :
  - réseau réel (routier/maritime/aérien/de communication) : création d'itinéraires de délestage, taxis de la Marne (septembre 1914), traffic maritime/aerien...
  - réseau de contraintes : affectation tâches-machines, pb des provisions, mine à ciel ouvert (open-pit mining), fermeture maximale, pb de la sélection...

I. Cycles, Flux et Flots

Rappel Chemin Chaîne

Définition (Chemin, Chaîne dans un graphe ORIENTÉ (X, U))

Chemin : suite d'au moins 2 sommets $(s_1, \dots s_p)$ *t.q.* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) *est un arc* ($\in U$)*. Un chemin représenté par séquence d'arcs.*

Chaîne : suite d'au moins 2 sommets $(s_1, \dots s_p)$ *t.q.* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) *ou* (s_{i+1}, s_i) *est un arc* ($\in U$)*.*

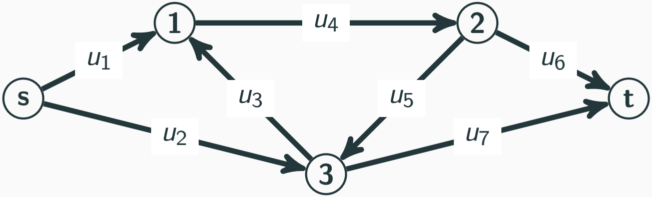
- *simple : si arcs tous différents,*
- *élémentaires : si sommets tous différents.*
- *longueur= nombre d'arcs.*

Vecteur cycle (vu la semaine dernière)

Définition (Vecteur cycle dans G avec m arcs : $u_1, \ldots, u_m$)

- *Cycle μ chaîne* **simple** *dont extrémités coincident.*
- *Vecteur cycle associé à cycle μ : $\vec{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^m)$ de $\mathbb{Z}^m$ t.q.*
  $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu^i =$
  $$\begin{cases} 0 & \text{si l'arc } u_i \text{ n'apparaît pas dans le cycle } \mu \\ 1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens de } \mu \\ -1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens opposé à } \mu \end{cases}$$

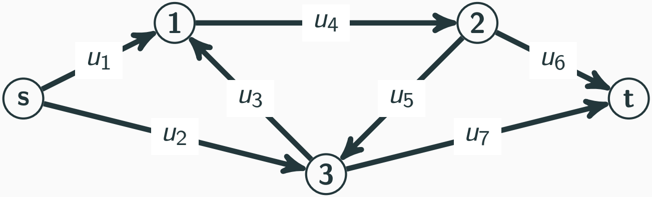
Exercice 1



Remplissez le tableau suivant avec un exemple pour chaque chose :

chemin simple et élémentaire :	chemin non simple et non élémentaire :
chemin simple et non élémentaire :	chaîne simple :
chaîne non simple :	cycle élémentaire :
cycle non élémentaire :	vecteur cycle :

Exercice 1 (solution)



Remplissez le tableau suivant avec un exemple pour chaque chose :

chemin simple et élémentaire : (u_1, u_4, u_5, u_7) s123t	chemin non simple et non élémentaire : $(u_2, u_3, u_4, u_5, u_3)$ s31231
chemin simple et non élémentaire : (u_1, u_4, u_5, u_3) s1231	chaîne simple : (u_1, u_3, u_7) s13t
chaîne non simple : (u_5, u_7, u_6, u_5) 23t23	cycle élémentaire : $\mu_1 = (u_5, u_7, u_6)$ 23t2
cycle non élémentaire : $\mu_2 = (u_7, u_6, u_5, u_3, u_1, u_2)$ 3t231s3	vecteur cycle : $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$

Cocycle

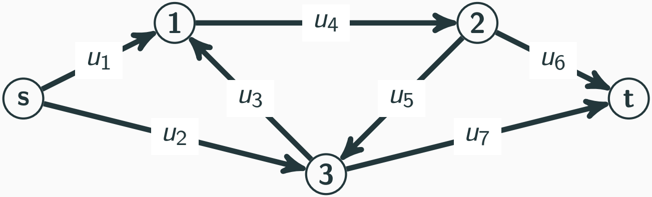
Définition (Cocycle de A dans $G = (X, U)$)

Soit A : ensemble de sommets, on note :

- $\omega^+(A) = \{(x, y) \in U | x \in A, y \notin A\}$ *: arcs sortants de A*
- $\omega^-(A) = \{(x, y) \in U | x \notin A, y \in A\}$ *: arcs entrants en A*
- $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$

Si $\omega(A)$ est non vide il est appelé cocycle de A.

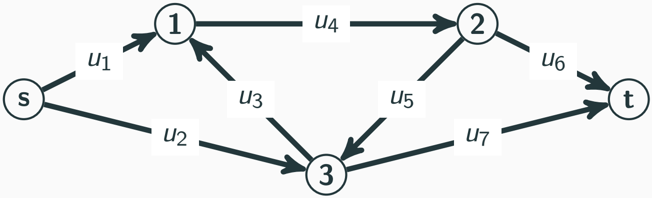
Exercice 2



Remplissez le tableau suivant :

$\omega^+(\{s,1\})$:	$\omega^-(\{s,1\}$:	$\omega(\{s,1\})$:
$\omega^+(\{s\})$:	$\omega^-(\{s\}$:	$\omega(\{s\})$:
$\omega^+(\{1,3,t\})$:	$\omega^-(\{1,3,t\}$:	$\omega(\{1,3,t\})$:
$\omega^+(\{1,2,3,t\})$:	$\omega^-(\{1,2,3,t\}$:	$\omega(\{1,2,3,t\})$:

Exercice 2 (solution)



Remplissez le tableau suivant :

$\omega^+(\{s,1\})$: $\{u_2, u_4\}$	$\omega^-(\{s,1\}$: $\{u_3\}$	$\omega(\{s,1\})$: $\{u_2, u_3, u_4\}$
$\omega^+(\{s\})$: $\{u_1, u_2\}$	$\omega^-(\{s\}$: $\emptyset$	$\omega(\{s\})$: $\{u_1, u_2\}$
$\omega^+(\{1,3,t\})$: $\{u_4\}$	$\omega^-(\{1,3,t\}$: $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$	$\omega(\{1,3,t\})$: $\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$
$\omega^+(\{1,2,3,t\})$: $\emptyset$	$\omega^-(\{1,2,3,t\}$: $\{u_1, u_2\}$	$\omega(\{1,2,3,t\})$: $\{u_1, u_2\} = \omega(\{s\})$

Flux et Flots

Définition (Flot)

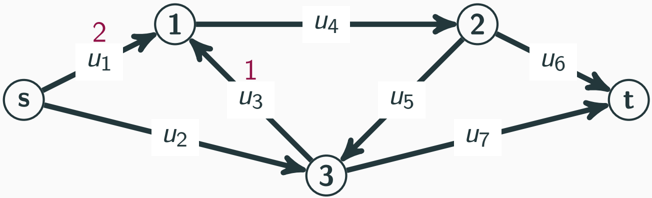
Un flot sur un graphe est un vecteur $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ *de* $\mathbb{Z}^m$ *qui vérifie*

$$\forall x \in X, \sum_{u_i \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u_i) = \sum_{u_i \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u_i) \quad \textit{(loi de Kirchhoff)}$$

$\varphi^i = \varphi(u_i)$ *est le flux dans l'arc* u_i *: quantité qui circule sur* u_i

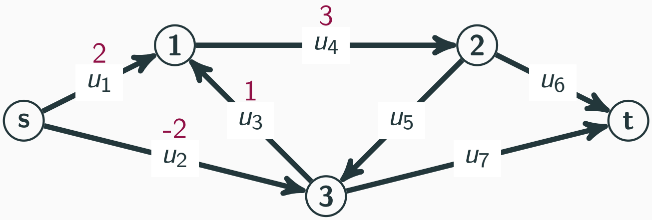
Kirchhoff : en tout sommet, somme flux entrants = somme flux sortants.

Exercice 3



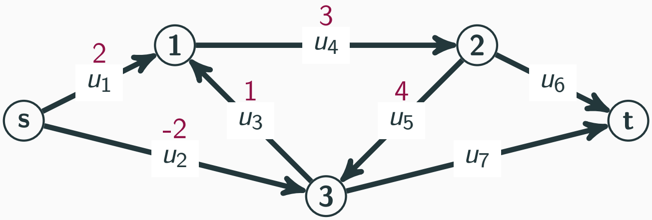
Supposons que le flot φ a un flux de 2 sur u_1 et 1 sur u_3, quel flux doit-il avoir sur u_4 ? et sur u_2 ?

Exercice 3 (solution)



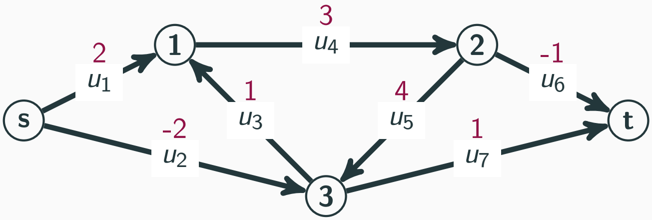
Supposons que le flot φ a un flux de 2 sur u_1 et 1 sur u_3. $\varphi(u_4) = 3$, $\varphi(u_2) = -2$.

Exercice 4



On a maintenant $\varphi(u_1) = 2$, $\varphi(u_2) = -2$, $\varphi(u_3) = 1$, et $\varphi(u_4) = 3$. On pose $\varphi(u_5) = 4$. Quels flux peut-on mettre sur u_6 et u_7 ? Écrivez le flot φ.

Exercice 4 (solution)

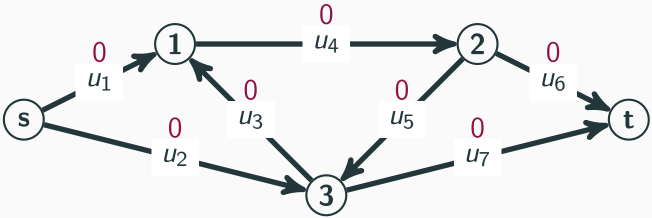


On a maintenant $\varphi(u_1) = 2$, $\varphi(u_2) = -2$, $\varphi(u_3) = 1$, $\varphi(u_4) = 3$, $\varphi(u_5) = 4$. Donc $\varphi(u_6) = -1$ et $\varphi(u_7) = 1$.

$$\varphi = (2, -2, 1, 3, 4, -1, 1)$$

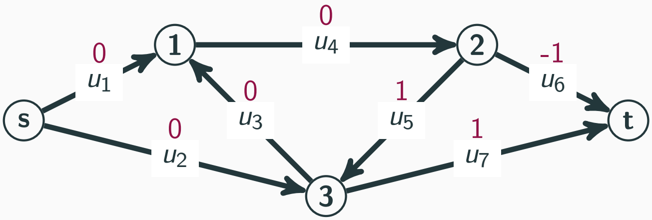
Le flot nul

Le flot nul $(0, 0, \ldots, 0)$ est un flot sur tout graphe !

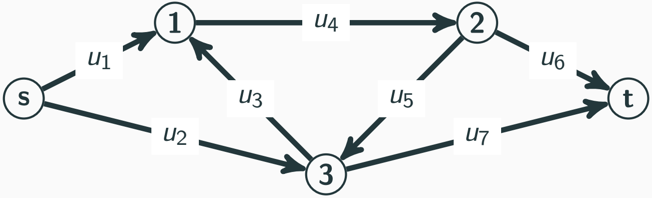


Le cycle $\mu_1 = (u_5, u_7, u_6)$ (23t2)

Son vecteur cycle est $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$

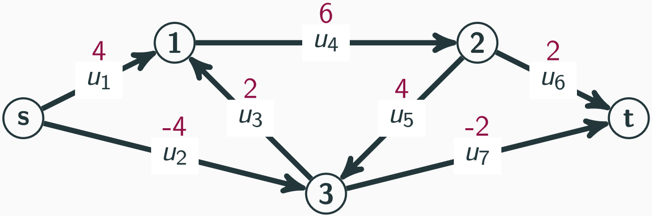


Le vecteur cycle $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ est un flot.



- Le vecteur $\varphi = (2, -2, 1, 3, 4, -1, 1)$ est un flot sur ce graphe.
- Le vecteur cycle $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ aussi
- Soit $v = 2\varphi - 4\vec{\mu_1}$ (combinaison linéaire)
- Décrivez v, est-ce un flot ?

Exercice 5 : combinons 2 flots (solution)



- Le vecteur $\varphi = (2, -2, 1, 3, 4, -1, 1)$ est un flot sur ce graphe.
- Le vecteur cycle $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ aussi
- Soit $v = 2\varphi - 4\vec{\mu_1}$ (combinaison linéaire)
- $v = (4, -4, 2, 6, 4, 2, -2)$, c'est bien un flot (il vérifie Kirchhoff).

Propriétés à montrer (travail personnel + TD)

Propriété

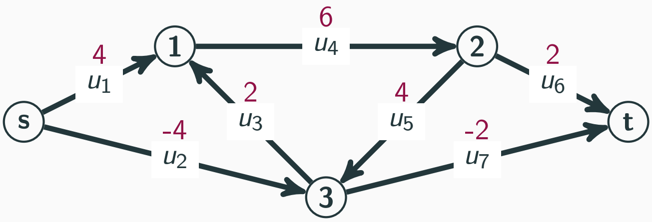
1. *Le vecteur nul de* $\mathbb{Z}^m$ *est un flot sur tout graphe* G *(dit "flot nul")*
2. *Tout vecteur cycle de* G *est un flot sur* G
3. *Toute combinaison linéaire de flots sur* G *définit un flot sur* G

Propriété

φ *est un flot sur* G *ssi*

$$\forall \emptyset \subset A \subset X, \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi(u) \quad \textit{(loi de Kirchhoff généralisée)}$$

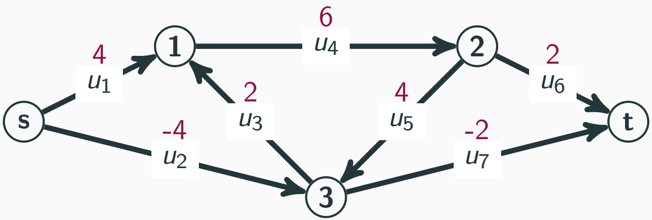
Exercice 6



On considère le vecteur $v = (4, -4, 2, 6, 4, 2, -2)$. Remplissez le tableau :

	$\sum_{u \in \omega^+(A)} v(u)$	$\sum_{u \in \omega^-(A)} v(u)$
$A = \{s, 1\}$		
$A = \{s\}$		
$A = \{1, 3, t\}$		
$A = \{1, 2, 3, t\}$		

Exercice 6 (solution)



On considère le vecteur $v = (4, -4, 2, 6, 4, 2, -2)$. Remplissez le tableau :

	$\sum_{u \in \omega^+(A)} v(u)$	$\sum_{u \in \omega^-(A)} v(u)$
$A = \{s, 1\}$	-4+6	2
$A = \{s\}$	4-4	0
$A = \{1, 3, t\}$	6	4-4+4+2
$A = \{1, 2, 3, t\}$	0	4-4

flot = Kirchhoff (en tout sommet) $\Leftrightarrow$ Kirchhoff généralisée (en tout A)

II. Flots compatibles dans un Réseau de transport

Réseau de transport

Définition (réseau de transport)

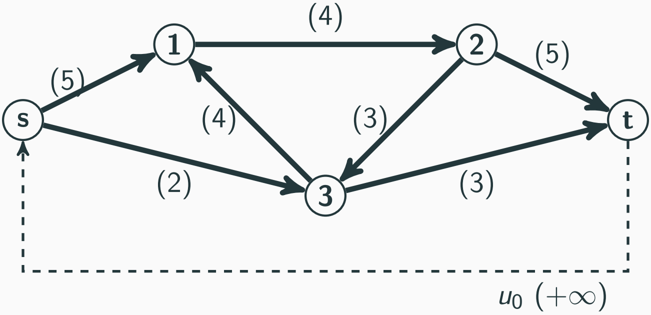
Un réseau de transport est un graphe orienté connexe $R = (X, U = \{u_1, \dots u_m\})$ avec

- *un sommet sans prédecesseur appelé entrée noté s ($\Gamma^-(s) = \emptyset$)*
- *un sommet sans successeur appelé sortie noté t ($\Gamma^+(t) = \emptyset$)*
- *une application capa : $U \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ qui à chaque arc u associe sa capacité capa$(u) \geq 0$.*

On ajoute un arc fictif $u_0 = (t, s)$ avec capa infinie appelé arc de retour.

Exemple

Soit le réseau suivant avec les capacités indiquées entre parenthèses.



C'est un réseau de transport.

⚠ Capacités viennent du monde réel (ne vérifient pas forcément Kirchhoff)

Flot compatible sur un réseau de transport

Définition (flot compatible sur réseau $R = (X, U = \{u_1, \ldots, u_m\}))$

C'est un vecteur φ de $\mathbb{Z}^{m+1}$ t.q. :

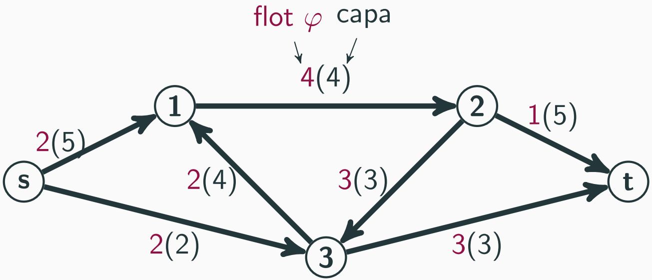
- *φ : flot sur $R \cup \{u_0\}$: $\forall x \in X$, $\sum_{u \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u)$ (Loi de Kirchhoff)*
- *φ : compatible avec capacités : $\forall u \in U, \quad 0 \leq \varphi(u) \leq capa(u)$*

Définition (Valeur du flot)

$v(\varphi) =$	$\varphi(u_0)$	$=$	$\sum_{u \in \omega^+(\{s\})} \varphi(u)$	$=$	$\sum_{u \in \omega^-(\{t\})} \varphi(u)$
	flux sur arc de retour		*somme des flux sortant de s*		*somme des flux arrivant en t*

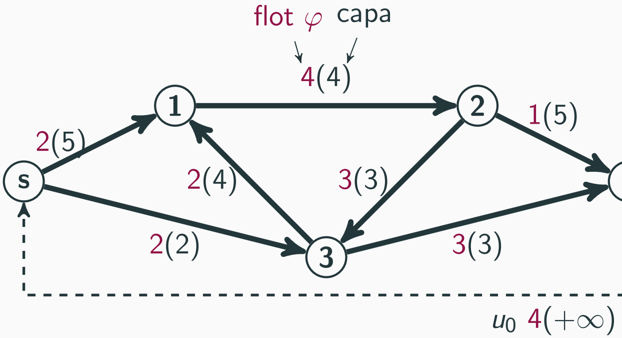
- Si $\varphi(u) = c(u)$: u est saturé.
- Flot de valeur max : maximise $v(\varphi)$ parmi tous les flots compatibles

Exercice 7



Est-ce un flot compatible, quelle est sa valeur ? Y-a-t'il des arcs saturés ? si oui lesquels ?

Exercice 7 (solution)



- Flot : seulement si on ajoute u_0 !
- Compatible : oui (pour tout arc u, $\varphi(u) \geq 0$ et $\varphi(u) \leq capa(u)$)
- Valeur : 4
- (s,3), (1,2), (2,3), (3,t) sont saturés.

III. Théorème de la coupe

Coupe dans réseau de transport (X, U) d'entrée s de sortie t

Définition (Coupe)

Une coupe cp séparant s et t est une partition des sommets en deux :

$$cp = (A, \quad X \setminus A) \text{ tel que } A \subset X, s \in A \text{ et } t \notin A$$

Définition (arcs de la coupe)

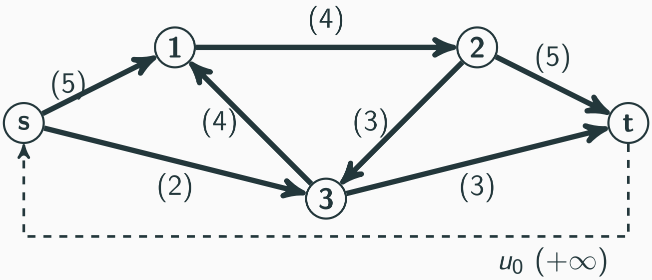
Les arcs de la coupe $cp = (A, X \setminus A)$
sont les arcs de $\omega^+(A)$: c'est-à-dire les arcs sortants de A

Définition (capacité d'une coupe)

La capacité d'une coupe cp est la somme des capacités des arcs de cp

$$capa(cp) = \sum_{u \in \omega^+(A)} capa(u)$$

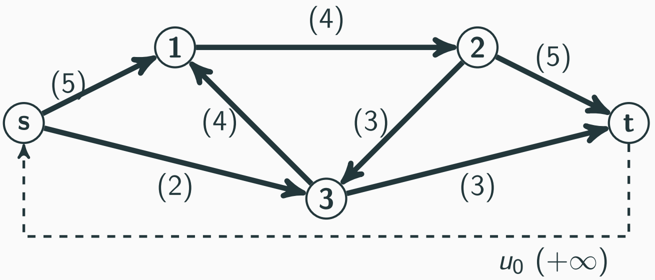
Exercice 8



Complétez le tableau en créant les coupes $cp = (A, X \setminus A)$ pour chaque A :

	coupe cp	arcs de cp	capacité de cp
$A = \{s, 1\}$			
$A = \{s\}$			
$A = \{1, 3, t\}$			
$A = \{s, 1, 3, t\}$			

Exercice 8 (solution)



Complétez le tableau en créant les coupes $cp = (A, X \setminus A)$ pour chaque A :

	coupe cp	arcs de cp	capacité de cp
$A = \{s, 1\}$	({s,1},{2,3,t})	{(s,3),(1,2)}	6
$A = \{s\}$	({s},{1,2,3,t})	{(s,1),(s,3)}	7
$A = \{1, 3, t\}$	pas de coupe : $s \notin A$	/	/
$A = \{s, 1, 3, t\}$	non plus : $t \in A$	/	/

Théorème de la coupe (à montrer en travail personnel)

Remarque

Le retrait dans un réseau R de tous les arcs d'une coupe supprime tous les chemins de s à t.

Théorème (de la coupe)

Pour tout flot φ compatible sur R et pour toute coupe cp séparant s et t la valeur du flot est inférieure à la capacité de cette coupe :

$$v(\varphi) \leq capa(cp)$$

Calcul d’un flot Maximum : Principe de Ford-Fulkerson

Principe de marquage Ford-Fulkerson

- principe de marquage relatif à un flot compatible φ
- NB : si on n'a pas de flot compatible on peut choisir le flot nul.

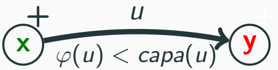
Définition (Marquage de Ford-Fulkerson)

On marque s puis

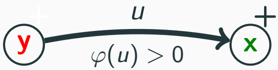
x étant marqué, y marquable depuis x ssi

- *y n'est pas marqué ET*
- $\begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \text{ et } \varphi(u) < capa(u) & \textit{marquage direct} \quad \textit{OU} \\ \exists u = (y, x) \in R \text{ et } \varphi(u) > 0 & \textit{marquage indirect} \end{cases}$

marquage direct



marquage indirect



Principe de marquage de Ford-Fulkerson

- principe de marquage relatif à un flot compatible φ
- NB : si on n'a pas de flot compatible on peut choisir le flot nul.

Définition (Marquage Ford-Fulkerson)

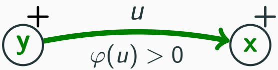
On marque s puis

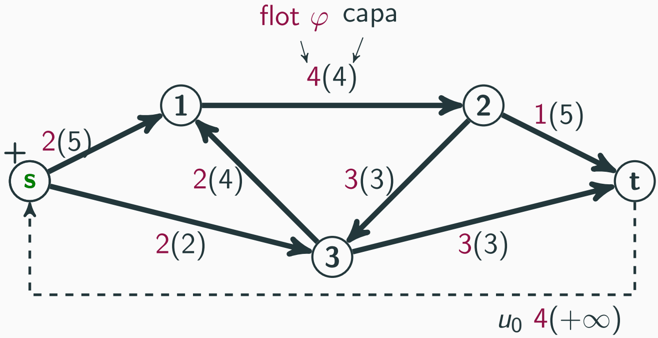
x étant marqué, y marquable depuis x ssi

- *y n'est pas marqué ET*
- $\begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \text{ et } \varphi(u) < capa(u) & \textit{marquage direct} \quad \textit{OU} \\ \exists u = (y, x) \in R \text{ et } \varphi(u) > 0 & \textit{marquage indirect} \end{cases}$

marquage direct

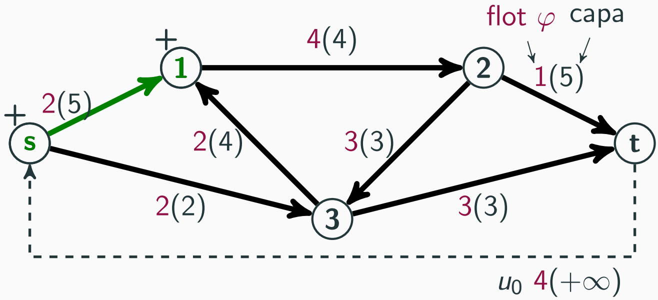
marquage indirect





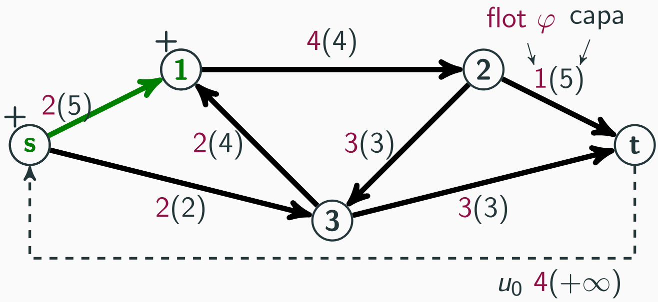
On marque d'abord s. Depuis s, quels sommets peut-on marquer ?
S'agit-il de marquages directs ou indirects ?

Exercice 9 (solution)



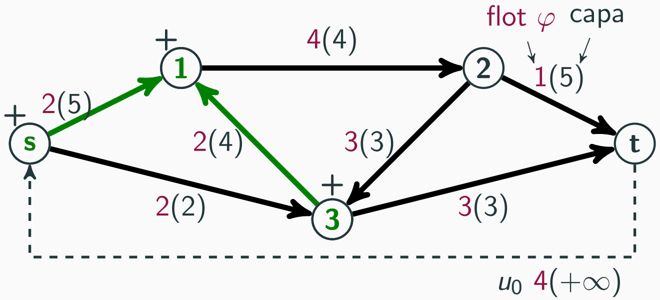
- on peut marquer 1 par marquage direct : 1 n'était pas marqué et $\varphi(s, 1) < capa(s, 1)$: on peut augmenter le flux sur cet arc.
- on ne peut pas marquer 3 par marquage direct car $(s, 3)$ est saturé : le flux de cet arc ne peut pas être augmenté.
- on ne peut pas marquer t car u_0 ne permet pas le marquage ($u_0 \notin R$).

Exercice 10



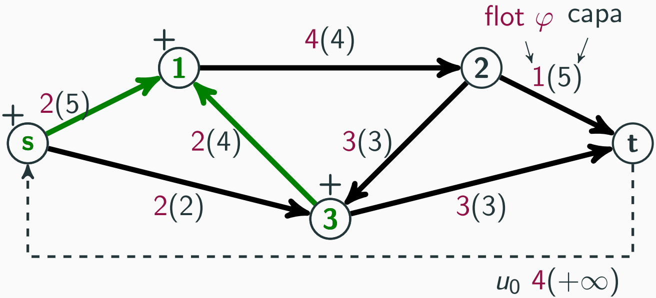
Quels sommets peut-on marquer maintenant ?

Exercice 10 (solution)



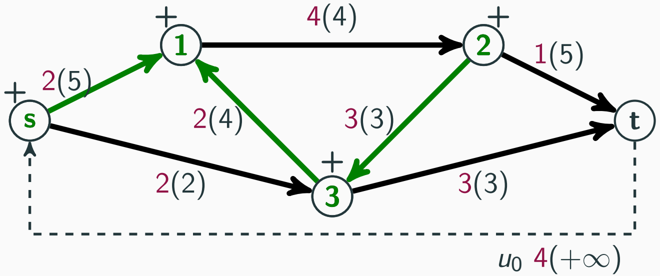
- on ne peut pas marquer 2 par marquage direct : car $(1, 3)$ est saturé
- on peut marquer 3 par marquage indirect : car 3 n'est pas marqué, et le flux sur l'arc (1,3) est > 0 : on peut diminuer le flux revenant vers 1

Exercice 11



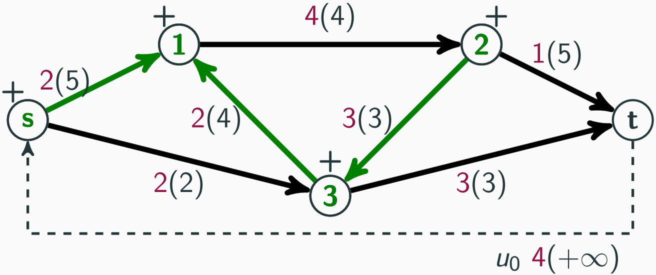
Et maintenant ?

Exercice 11 (solution)



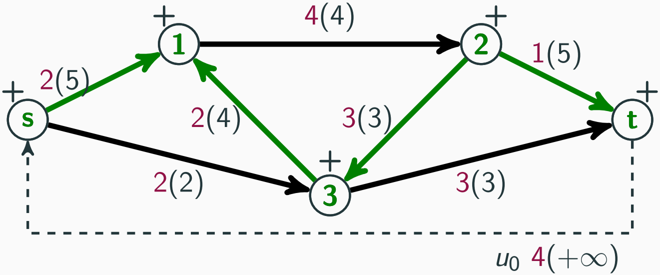
On peut marquer 2 depuis 3 en marquage indirect. (on ne peut pas marquer t depuis 3 car $(3, t)$ saturé).

Exercice 12



Et ensuite ?

Exercice 12 (solution)



On peut marquer t depuis 2 en marquage direct.

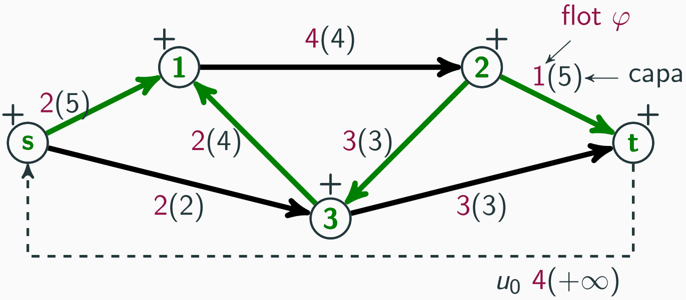
Fin du marquage

Propriété

Si à la fin de la procédure de marquage basée sur le flot φ

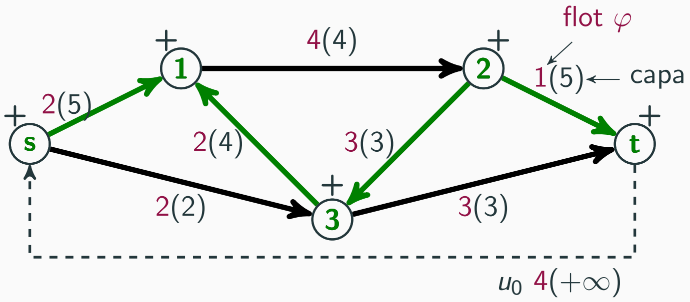
1. *on parvient à marquer **t** grâce à une chaîne **ch***
   - *alors on peut **augmenter** la valeur du flot*
   - *ch est appelée **chaîne augmentante***
   - *soit $ch^+ =$ arcs de ch utilisés pour marquage direct,*
   - *soit $ch^- =$ arcs de ch utilisés pour marquage indirect,*
   - $k = \min(\min_{u \in ch^+} capa(u) - \varphi(u), \min_{u \in ch^-(u)} \varphi(u))$
   - $\varphi' = \varphi + k\vec{\mu}$ *où $\mu =$ cycle $(ch + u_0)$*
     - *augmentation de k sur ch^+ et u_0*
     - *diminution de k sur arcs de ch^-*
2. *on ne parvient pas à marquer t alors **flot maximum***

Exercice 13



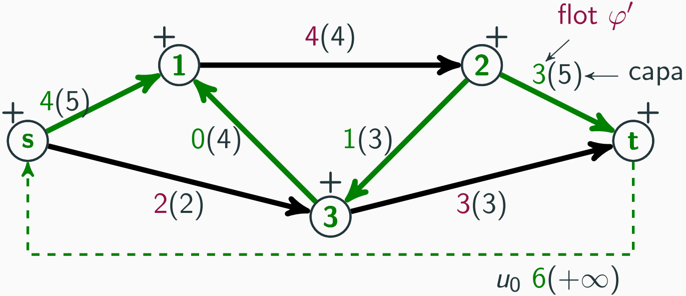
- Donnez la chaîne augmentante *ch* correspondant au marquage :
- Quels sont les arcs de ch^+ ?
- Quels sont les arcs de ch^- ?
- Combien vaut k ?

Exercice 13 (solution)



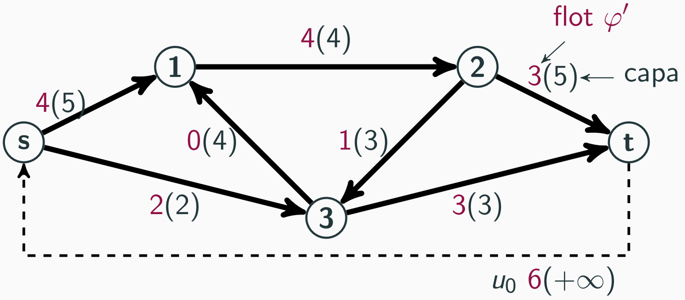
- chaîne augmentante *ch* correspondant au marquage : s132t
- arcs de ch^+ : (s,1) et (2,t)
- arcs de ch^- : (3,1) et (2,3)
- k vaut : $\min(5-2, 2, 3, 5-1) = 2$

Exercice 14



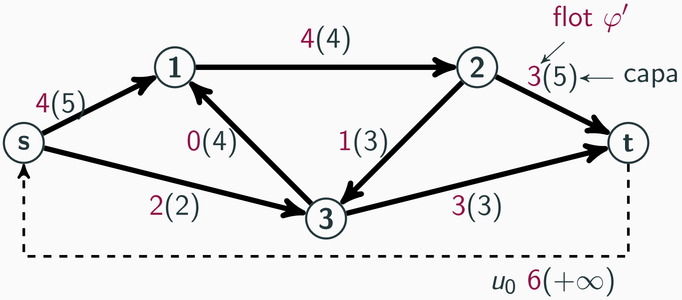
- $\varphi' = \varphi + 2.(s132ts)$, valeur : $v(\varphi') = 6$
- Pourquoi φ' est-il un flot ? pourquoi est-il compatible ?

Exercice 14 (solution)



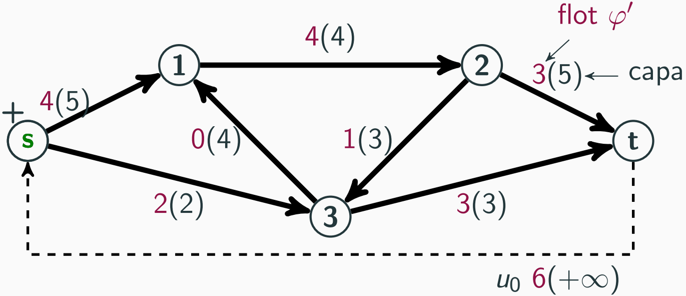
- Dans le cas général : $\varphi' = \varphi + k.(\vec{\mu})$ où μ est le cycle composé de *ch* et u_0,
- $\vec{\mu}$ est un vecteur cycle donc un flot,
- φ' est une combinaison linéaire de flots, donc un flot.
- φ' est compatible par définition de k :
  - on a augmenté de k sur les arcs directs (sans dépasser les capacités)
  - et diminué de k sur les arcs indirects (sans devenir négatif).

Exercice 15



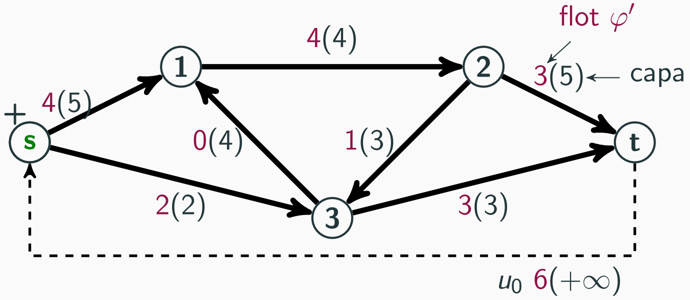
- Comment savoir si le flot φ' est maximum ?

Exercice 15 (solution)



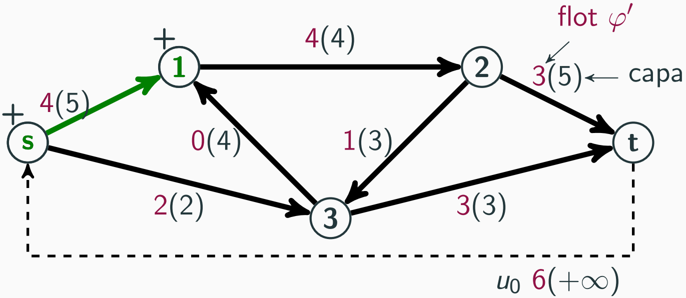
- Pour savoir si φ' est maximum : on refait un marquage.
- On marque s

Exercice 16



- On marque s.
- Quels sommets peut-on marquer depuis s en faisant un marquage complet exhaustif ?

Exercice 16 (solution)



- Pour savoir si φ' est maximum : on refait un marquage.
- On marque s puis on marque 1.
- On ne peut plus rien marquer : φ' est maximum. Les sommets marqués donnent une coupe cp de capa min séparant s et t : $cp = (\{s,1\},\{2,3,t\})$.
- les arcs de cp sont $\omega^+(\{s,1\}) = \{(s,3),(1,2)\}$
- $capa(cp) = capa(s,3) + capa(1,2) = 2 + 4 = 6$
- $v(\varphi') = capa(cp)$ donc φ' est de valeur max et cp de capa min

Théorème du flot maximum (Ford Fulkerson 1957)

Théorème

Soit F l'ensemble des flots compatibles et K l'ensemble des coupes dans un réseau de transport,

$$\max_{\varphi \in F} v(\varphi) = \min_{cp \in K} capa(cp)$$

La valeur maximum du flot est égale à la capacité minimum d'une coupe.

Complexité : polynomiale

- Dinic en 1970, puis Edmond et Karp en 1972 ont montré que
  - si recherche des chemins de s à t en largeur d'abord (plus courts chemins en nombre d'arcs).
  - alors Ford Fulkerson polynomial en $O(n.m^2)$
- Complexité réduite par Dinic et Karzamov en 1974 $O(n^3)$.
- Complexité encore réduite par Orlin en 2013 $O(nm)$:
  - structures de données plus performantes (arbres dynamiques)
  - "compactification" de graphes.

Autres notions à propos des flots (à voir en TD)

- Graphes d'écart.
- Flots sur des réseaux avec capacités et coûts de transport.