Devoir 1

1. Considérer deux variables aléatoires U et V indépendantes ayant les fonctions de probabilités suivantes

$$p_U(0) = \frac{1}{3} \qquad p_V(1) = \frac{1}{2}$$
$$p_U(1) = \frac{1}{3} \qquad p_V(2) = \frac{1}{2}$$
$$p_U(2) = \frac{1}{3}$$

a) (7 points) Déterminer la fonction de probabilité de la somme $U + V$.
b) (7 points) Déterminer les moyennes de U, V et $U + V$.

2. Considérer la variable aléatoire X ayant la fonction de densité de probabilité suivante

$$f(x) = \begin{cases} Rx^{R-1} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $R > 0$ est un paramètre fixé.
a) (7 points) Déterminer la fonction de distribution cumulative $F(x)$.
b) (7 points) Déterminer la moyenne de X.

3. Un élément se déplace autour d'un cercle en des points identifiés 0, 1, 2, 3, 4 dans le sens des aiguilles d'une montre (i.e., le point 4 est voisin du point 0). L'élément est au point 0 au départ. À chaque étape du processus, l'élément se déplace au point voisin dans le sens des aiguilles d'une montre avec une probabilité de 0.5 ou au point voisin dans le sens contraire des aiguilles d'une montre aussi avec une probabilité de 0.5. Dénotons par X_n la position de l'élément après n itérations. Alors $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov.
a) (12 points) Déterminer la matrice des transitions P.
b) (4 points) Déterminer aussi P^2 et P^3.
c) (4 points) Combien y a-t-il de classes?
d) (4 points) Quels sont les états récurrents?
e) (4 points) Quels sont les états transients?
f) (3 points) Quels sont les états absorbants?

4. Considérer la matrice des transitions P suivante pour une chaîne de Markov ayant les quatre états suivants 0, 1, 2, 3:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) (4 points) Déterminer les classes de cette chaîne de Markov.
b) (4 points) Déterminer celles qui sont récurrentes et celles qui sont transientes.
c) (15 points) Déterminer les probabilités à l'état d'équilibre.

5. Supposons que la probabilité qu'il pleuve demain est de α $(0 < \alpha < 1)$ s'il pleut aujourd'hui, et supposons également qu'il fasse beau (i.e., ne pleut pas) demain est de β $(0 < \beta < 1)$ s'il fait beau aujourd'hui. De plus supposons que $\alpha + \beta = 1$. Supposons également que ces probabilités ne changent pas si l'information sur la température des jours précédents est connue.

a) (3 points) Préciser les états de cette chaîne de Markov et sa matrice de transitions.

b) (10 points) Déterminer les probabilités au stage d'équilibre.