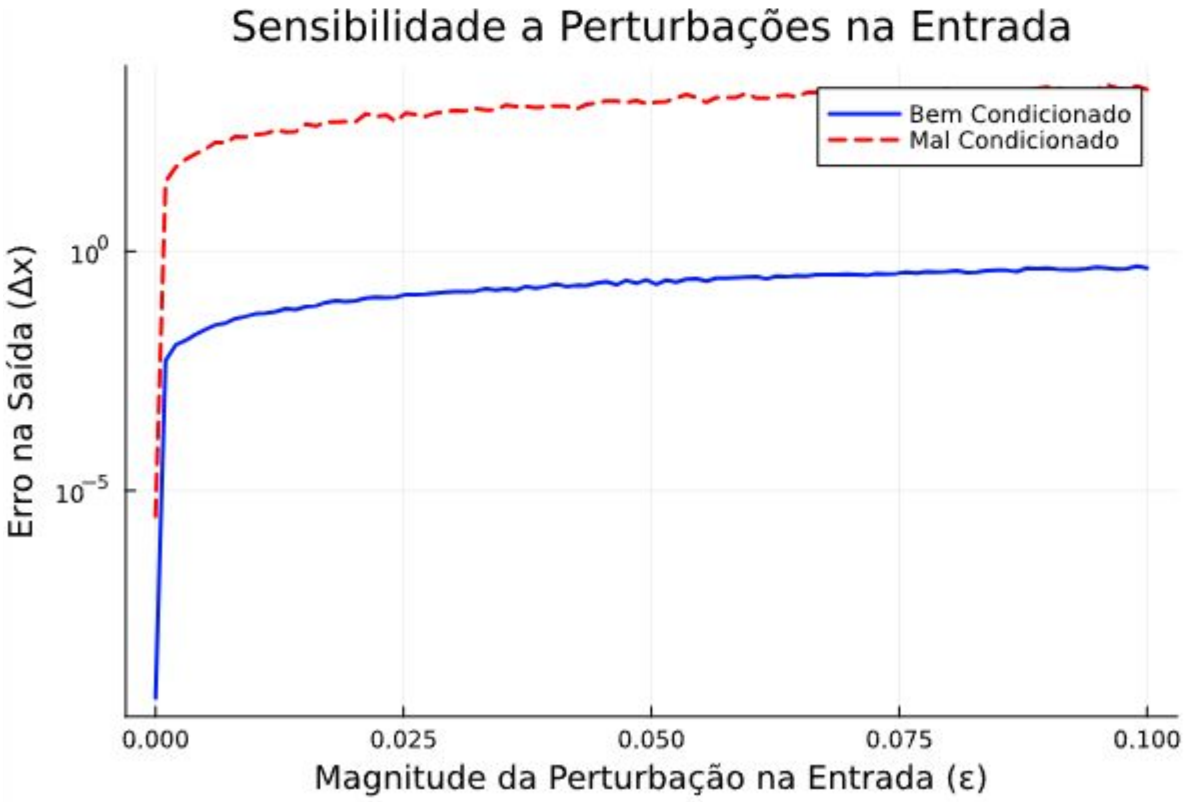
Estabilidade

Arthur Sobrinho e Matheus Duque

Revisão de Condicionamento….

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$



Formalização de Problema

"Modelo Teórico"

Problema Matemático $f : X \mapsto Y$ $\left\{ \right.$

- $Ax = b$
- Multiplicação de Matrizes

"Aplicação Prática de como aquele problema será computado"

Algoritmo $\tilde{f} : X \mapsto Y$ $\left\{ \right.$

- QR
- Algoritmo de Strassen

Ambos são mapeamentos dos dados em soluções

Erro da Máquina

Representação de um número em float com precisão dupla

$$x = \bar{x} + O(10^{-16})$$

Erro da representação numérica no computador

$$\epsilon_{Machine} \approx O(10^{-16})$$

Acurácia / Precisão

Erro Relativo, como sempre.

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}$$

Valor atingido pelo algoritmo menos valor “verdadeiro”

Se for $\approx O(\epsilon_{Machine})$ estamos bem!

mas se o problema for mal condicionado….

Estabilidade

$\tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$ para algum $\tilde{x}$ com $\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$

"O erro do algoritmo equivale ao erro de perturbar um pouco a entrada"

Algoritmos que respeitam essa propriedade são denominados *estáveis*

Exemplo de Algoritmo Estável $\rightarrow$ Produto Interno

$$\langle v, w \rangle = v_1 \cdot w_1 + \cdots + v_n \cdot w_n$$

Considerando o erro das representações

$$\langle v, w \rangle = (v_1 + \delta v_1) \cdot (w_1 + \delta w_1) + \cdots + (v_n + \delta v_n) \cdot (w_n + \delta w_n)$$

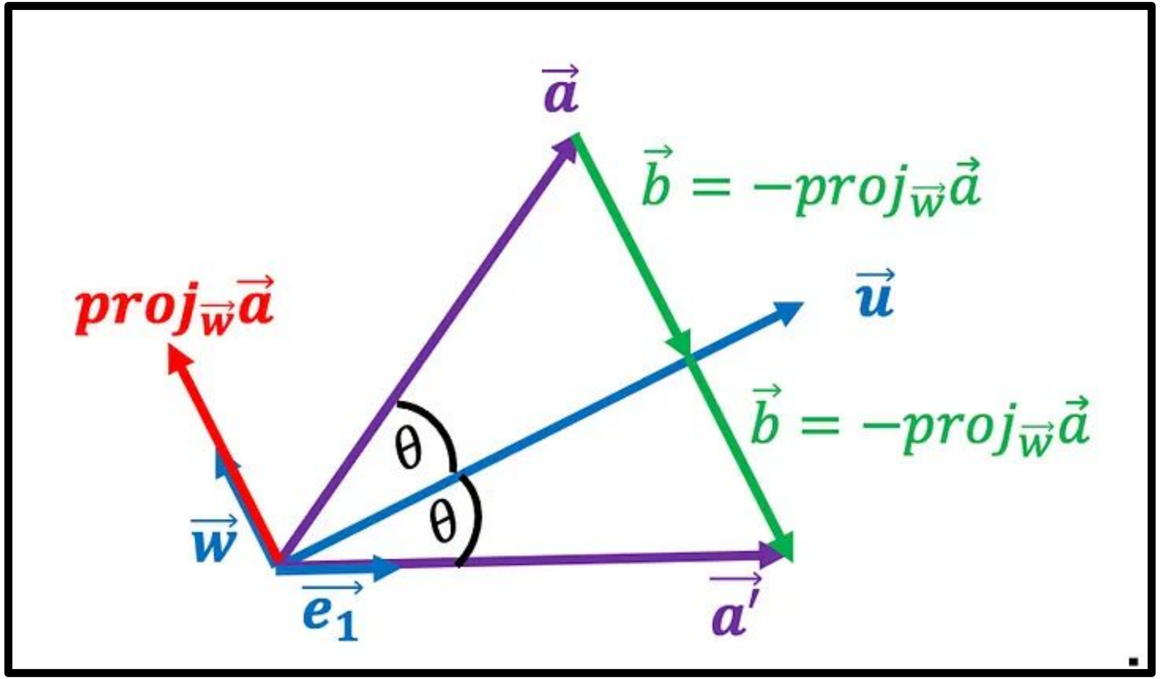
Expandindo essa expressão

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + 2\delta v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n + 2\delta v_n w_n + O(\delta^2)$$

Reorganizando

$$\langle v, w \rangle = (v_1 w_1 + 2\delta v_1 w_1) + \cdots + (v_n w_n + 2\delta v_n w_n) + O(\delta^2)$$

Householder



$$\vec{a'} = \vec{a} - 2(proj_{\vec{w}}\vec{a})$$

$$w = \frac{a - (-sign(a_{11}))\|a\|e_1}{\|a - (-sign(a_{11}))\|a\|e_1\|}$$

H_1 ou $Q_1 = (I - 2ww^T)$

$$Q_1 A = A'$$

Repetimos até Q_n

H ou Q= $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$

R=QA QR=A

Householder é Estável?

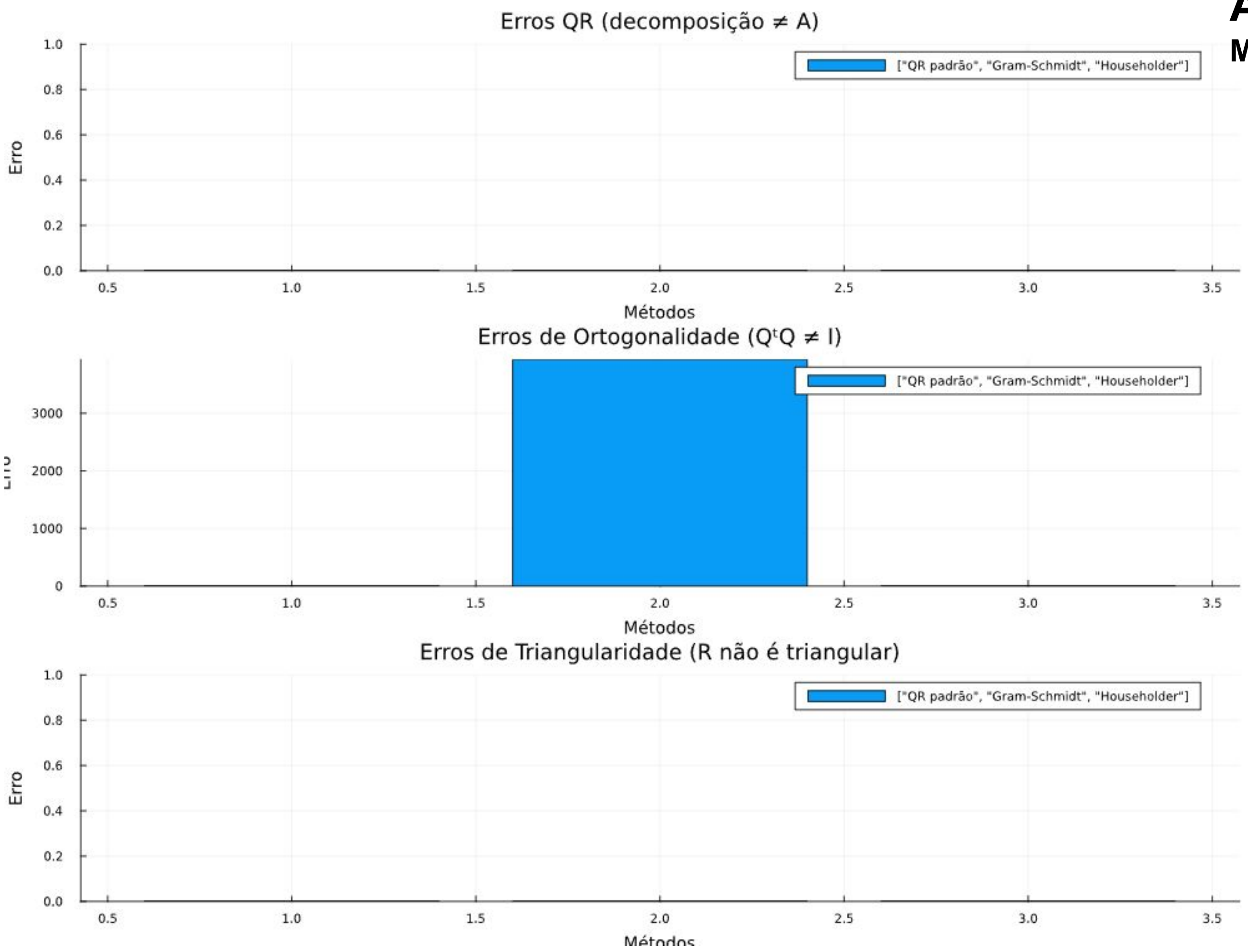
SIM!

Como as reflexões de Householder são ortogonais, os erros numéricos não são amplificados a cada passo.

$$\tilde{Q}\tilde{R} = A + \Delta A, \quad \text{com } \|\Delta A\| \leq c \cdot \varepsilon \cdot \|A\|$$

Análise do erro com A_{3x3}

Matrizes bem condicionadas



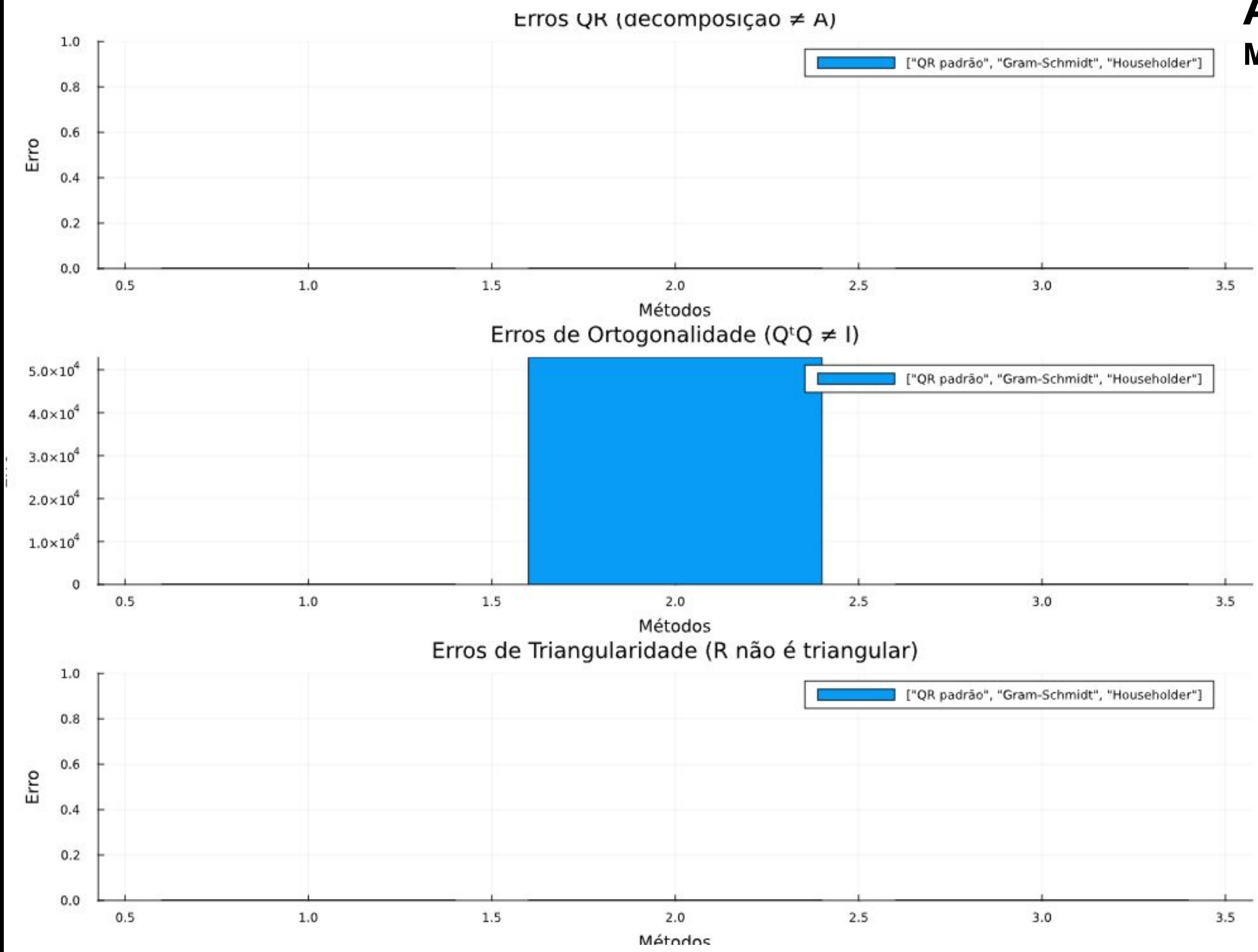
Erros QR (decomposição ≠ A) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 0 (0.0%)
Householder: 0 (0.0%)

Erros de ortogonalidade ($Q^tQ \neq I$) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 3932 (3.93%)
Householder: 0 (0.0%)

Erros de triangularidade (R não é triangular) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 0 (0.0%)
Householder: 0 (0.0%)

Análise do erro com A_{10x10}

Matrizes bem condicionadas

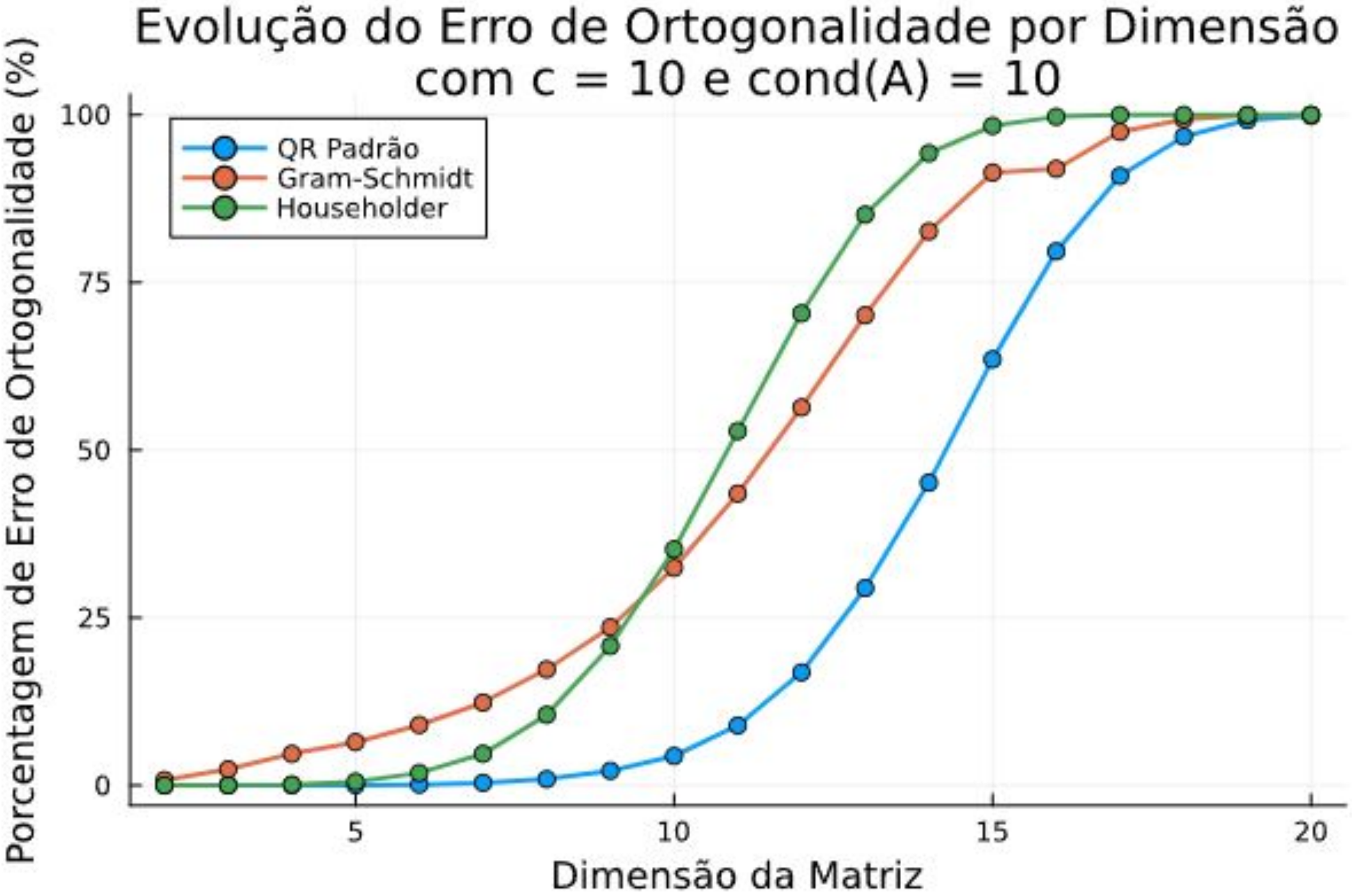


Erros QR (decomposição ≠ A) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 0 (0.0%)
Householder: 0 (0.0%)

Erros de ortogonalidade ($Q^tQ \neq I$) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 52850 (52.85%)
Householder: 0 (0.0%)

Erros de triangularidade (R não é triangular) em 100000 execuções:
QR padrão: 0 (0.0%)
Gram-Schmidt: 0 (0.0%)
Householder: 0 (0.0%)

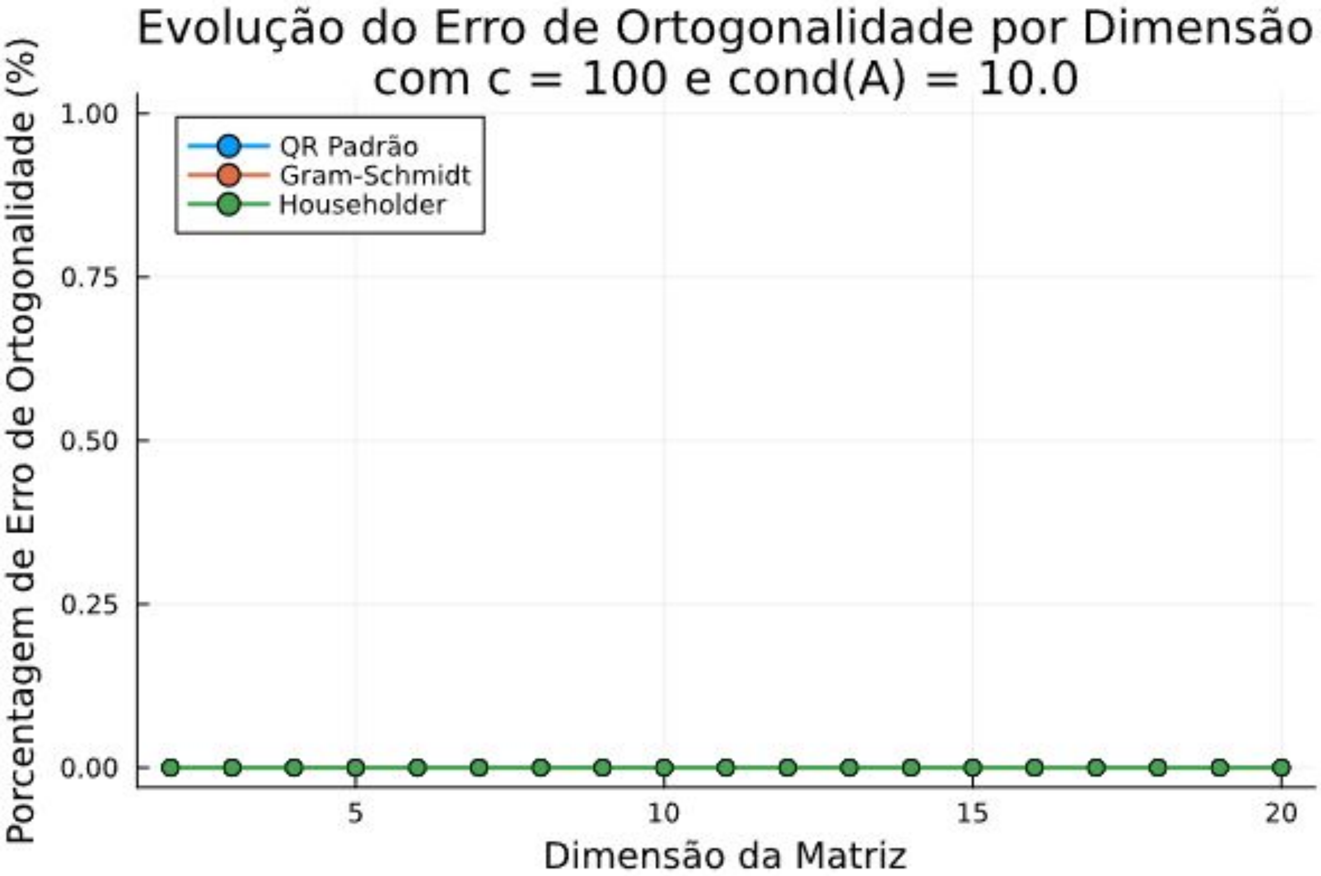
teste com 100000 repetições com matrizes bem condicionadas de 2 a 20 dimensões. (c=10 menos tolerancia em detecção de erro)



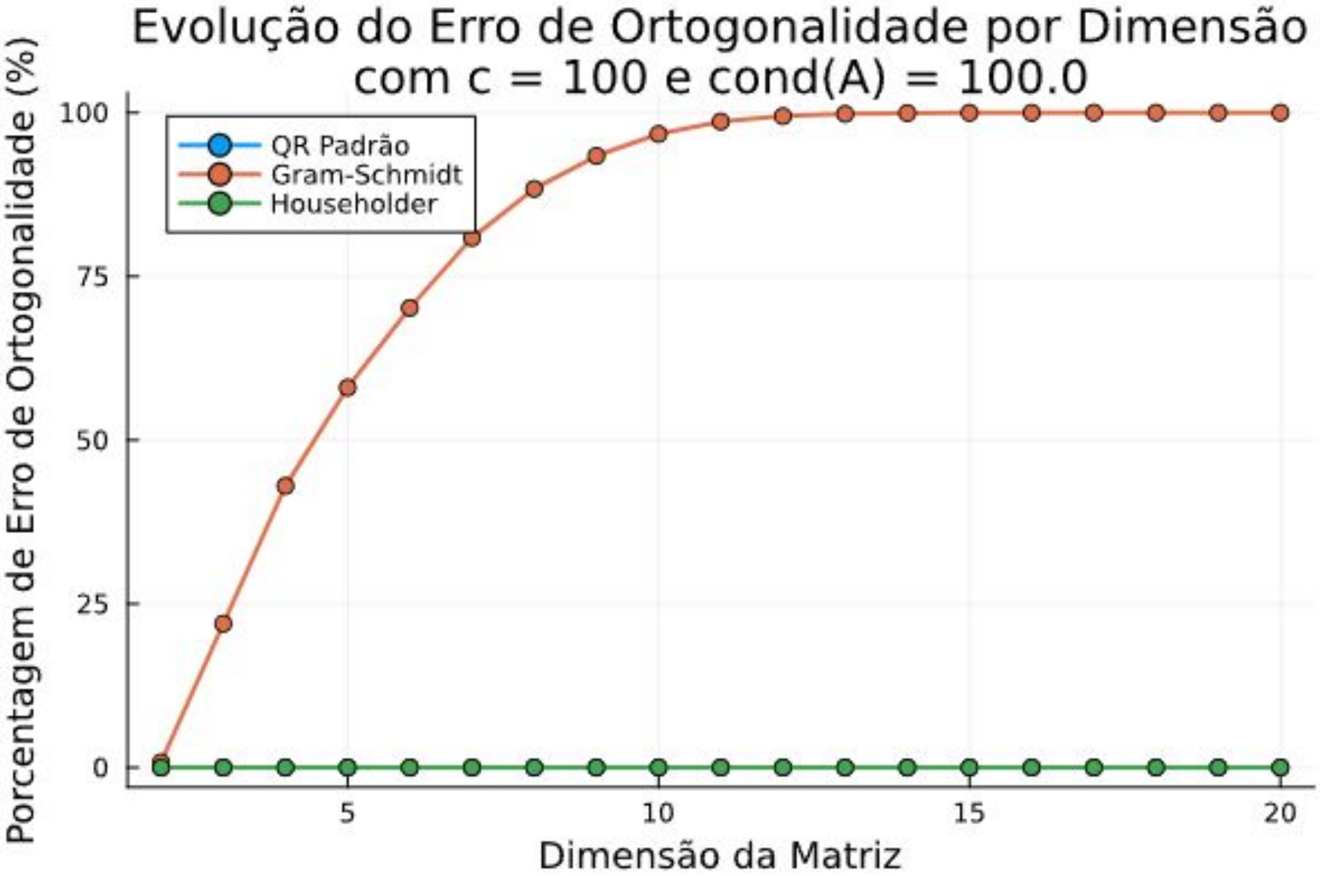
Porque $100 \cdot \epsilon$ (c=100) ?

- **Erros numéricos se acumulam** em algoritmos com muitas operações — não basta comparar com ϵ sozinho.
- **$100 \cdot \epsilon$** é um limiar prático e recomendado, que tolera a soma de vários pequenos erros sem perder rigor. **Equilibra** sensibilidade e tolerância, distinguindo erro natural de erro relevante para a análise.
- Usar apenas ϵ **geraria muitos falsos positivos** de instabilidade.

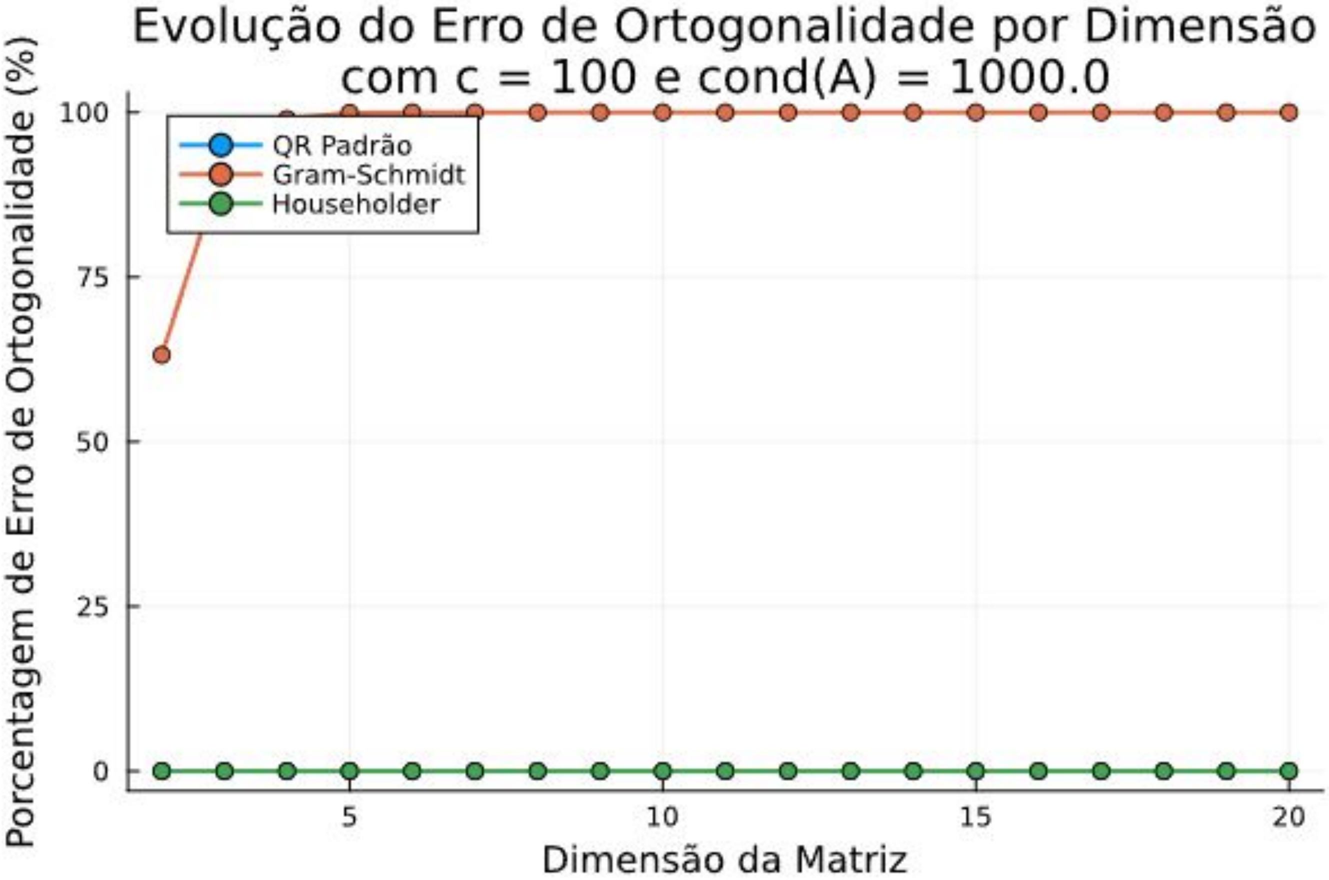
Testando a função de análise de erro de ortogonalidade com matrizes muito bem condicionadas e c ajustado para 100



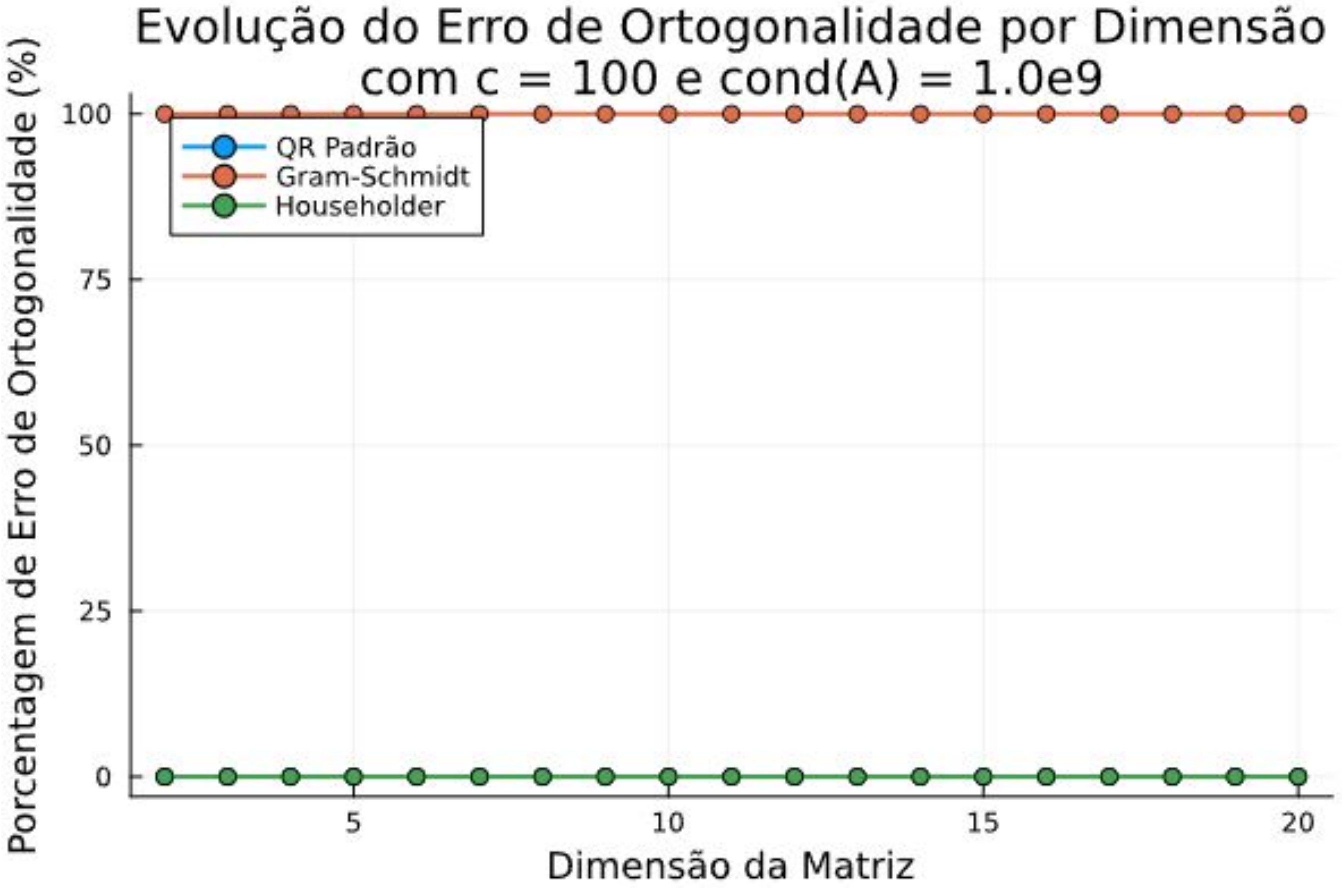
Testando a função de análise de erro de ortogonalidade com matrizes menos bem condicionadas



Testando a função de análise de erro de ortogonalidade com matrizes mal condicionadas



Testando a função de análise de erro de ortogonalidade com matrizes pessimamente condicionadas



Estabilidade de Verdade

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$$

para algum $\tilde{x}$ com $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$

Essa noção é menos intuitiva, então jogamos para baixo do tapete

“A perturbação causada pelo algoritmo em relação a perturbação na entrada deve ser proporcional ao erro da máquina”

Obrigado!!

Referencias:

https://www.stat.uchicago.edu/~lekheng/courses/309/books/Trefethen-Bau.pdf - Lecture 12~17

https://kwokanthony.medium.com/detailed-explanation-with-example-on-qr-decomposition-by-householder-transformation-5e964d7f7656

https://www.cmpe.boun.edu.tr/~cemgil/Courses/cmpe482/slides/Lecture14.pdf

GitHub

Veja nosso código!