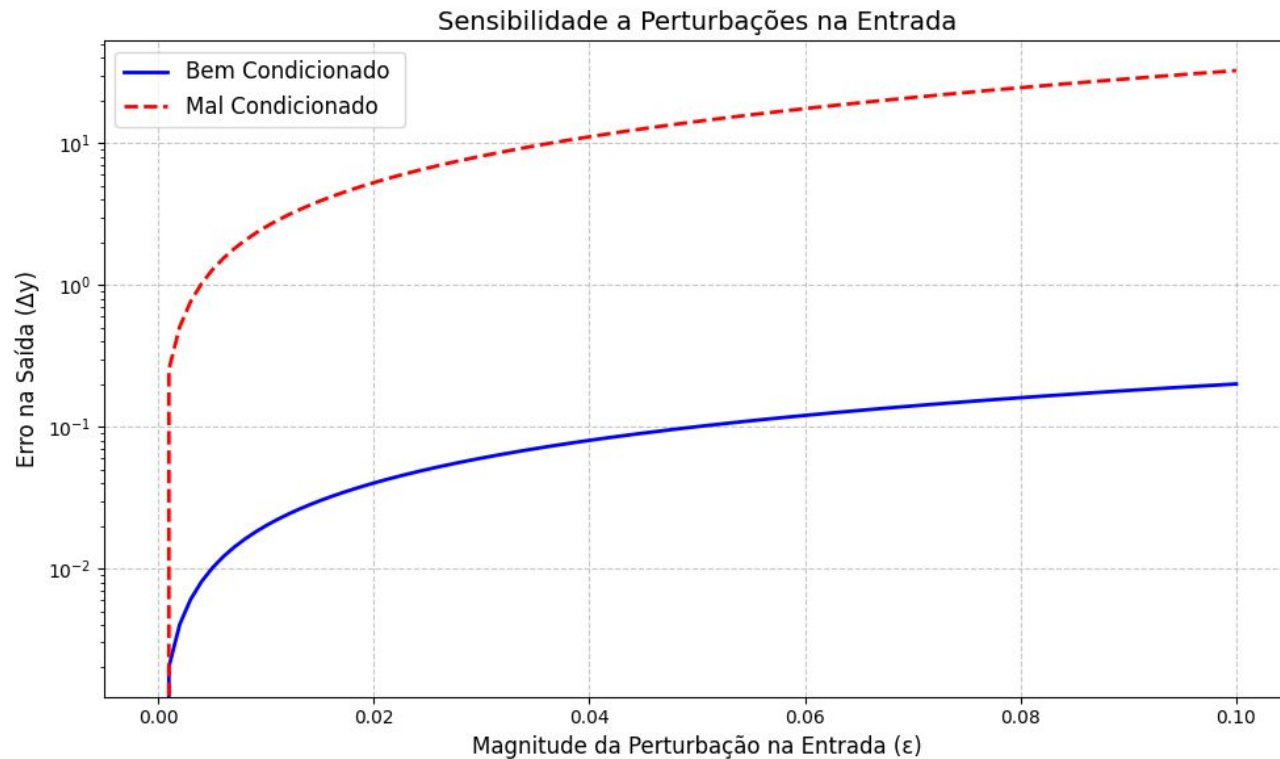


Estabilidade

Revisão de Condicionamento....

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$



Formalização de Problema

“Modelo Teórico”

Problema Matemático $f : X \mapsto Y$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet Ax = b \\ \bullet \text{ Multiplicação de Matrizes} \end{array} \right.$

“Aplicação Prática de como aquele problema será computado”

Algoritmo $\tilde{f} : X \mapsto Y$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ QR} \\ \bullet \text{ Algoritmo de Strassen} \end{array} \right.$

Ambos são mapeamentos dos dados em soluções

Erro da Máquina

Representação de um número em float com precisão dupla

$$x = \bar{x} + O(10^{-16})$$

Erro da representação numérica no computador

$$\epsilon_{Machine} \approx O(10^{-16})$$

Acurácia / Precisão

Erro Relativo, como sempre.

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}$$

Valor atingido pelo algoritmo menos valor “verdadeiro”

Se for $\approx O(\epsilon_{Machine})$ estamos bem!

mas se o problema for mal condicionado....

Estabilidade

$$\tilde{f}(x) = f(\tilde{x}) \quad \text{para algum } \tilde{x} \text{ com } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$$

“O erro do algoritmo equivale ao erro de perturbar um pouco a entrada”

Algoritmos que respeitam essa propriedade são denominados estáveis

Exemplo de Algoritmo Estável \rightarrow Produto Interno

$$\langle v, w \rangle = v_1 \cdot w_1 + \cdots + v_n \cdot w_n$$

Considerando o erro das representações

$$\langle v, w \rangle = (v_1 + \delta v_1) \cdot (w_1 + \delta w_1) + \cdots + (v_n + \delta v_n) \cdot (w_n + \delta w_n)$$

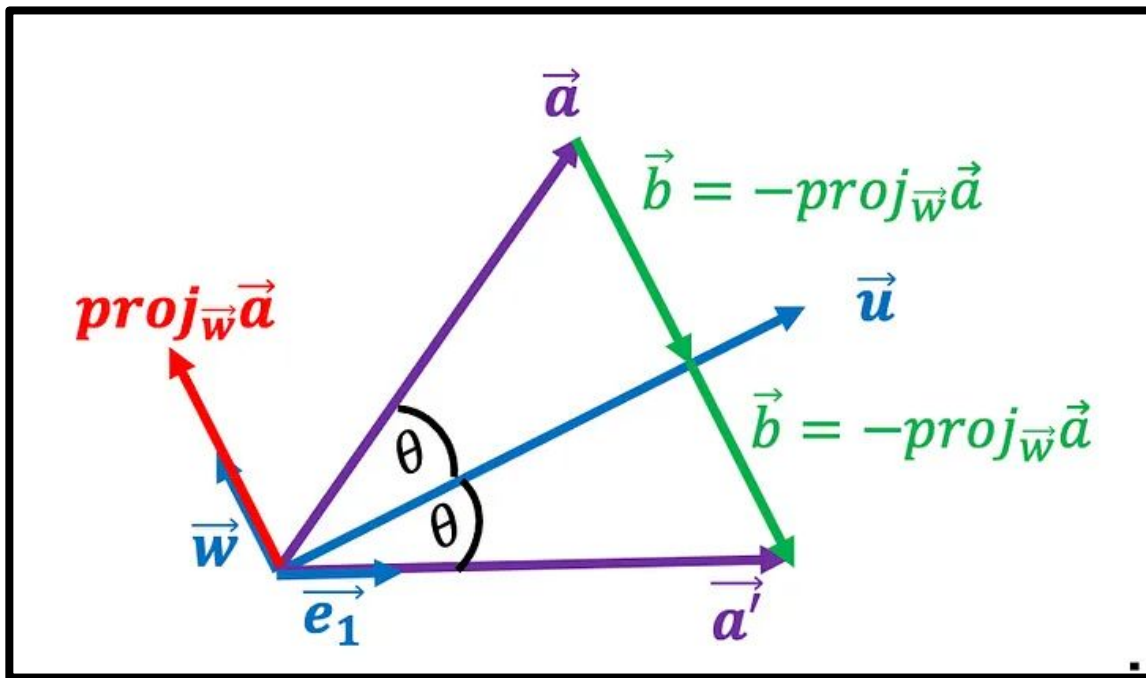
Expandindo essa expressão

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + 2\delta v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n + 2\delta v_n w_n + O(\delta^2)$$

Reorganizando

$$\langle v, w \rangle = (v_1 w_1 + 2\delta v_1 w_1) + \cdots + (v_n w_n + 2\delta v_n w_n) + O(\delta^2)$$

Householder



$$\vec{a'} = \vec{a} - 2(\text{proj}_{\vec{w}} \vec{a})$$

$$\vec{w} = \frac{\vec{a} - (-\text{sign}(a_{11}))\|\vec{a}\|\vec{e}_1}{\|\vec{a} - (-\text{sign}(a_{11}))\|\vec{a}\|\vec{e}_1\|}$$

$$H_1 \text{ ou } Q_1 = (I - 2\vec{w}\vec{w}^T)$$

$$Q_1 A = A'$$

Repetimos até Q_n

$$H \text{ ou } Q = Q_1 Q_2 \dots Q_n$$

$$R = QA \quad QR = A$$

Householder é Estável?

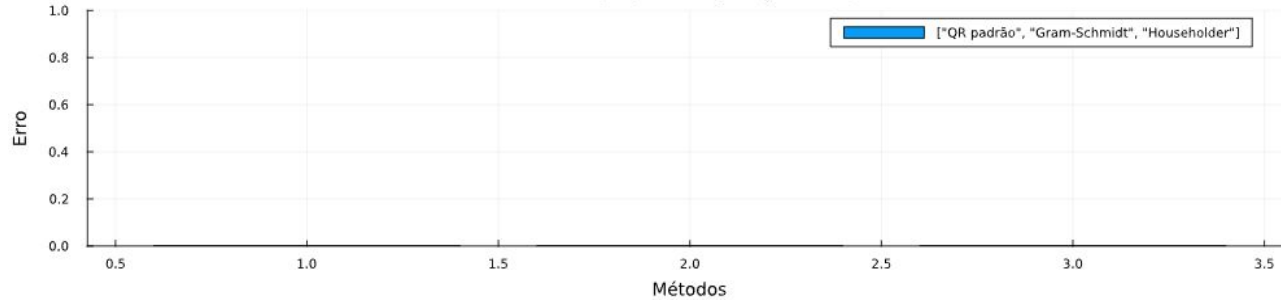
SIM!

Como as reflexões de Householder são ortogonais, os erros numéricos não são amplificados a cada passo.

$$\tilde{Q}\tilde{R} = A + \Delta A, \quad \text{com } \|\Delta A\| \leq c \cdot \varepsilon \cdot \|A\|$$

Análise do erro com $A_{3 \times 3}$

Erros QR (decomposição $\neq A$)



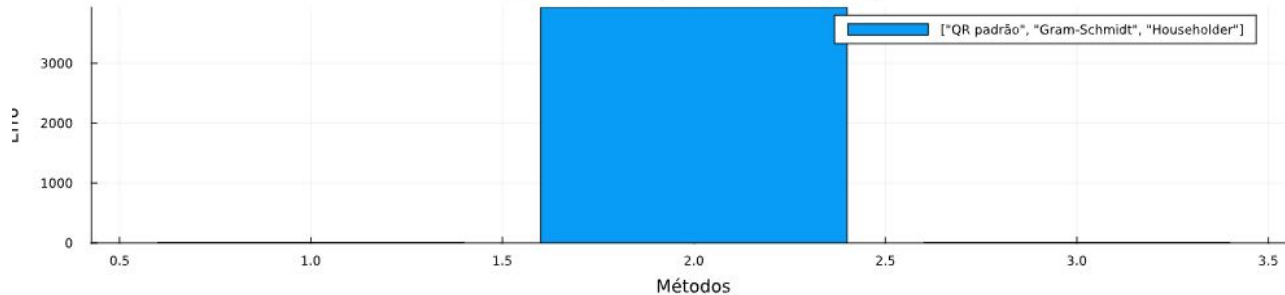
Erros QR (decomposição $\neq A$) em 100000 execuções:

QR padrão: 0 (0.0%)

Gram-Schmidt: 0 (0.0%)

Householder: 0 (0.0%)

Erros de Ortogonalidade ($Q^t Q \neq I$)



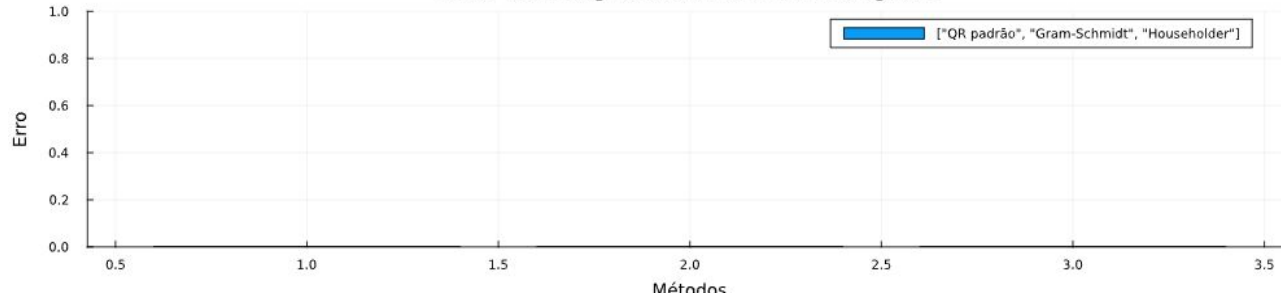
Erros de ortogonalidade ($Q^t Q \neq I$) em 100000 execuções:

QR padrão: 0 (0.0%)

Gram-Schmidt: 3932 (3.93%)

Householder: 0 (0.0%)

Erros de Triangularidade (R não é triangular)



Erros de triangularidade (R não é triangular) em 100000 execuções:

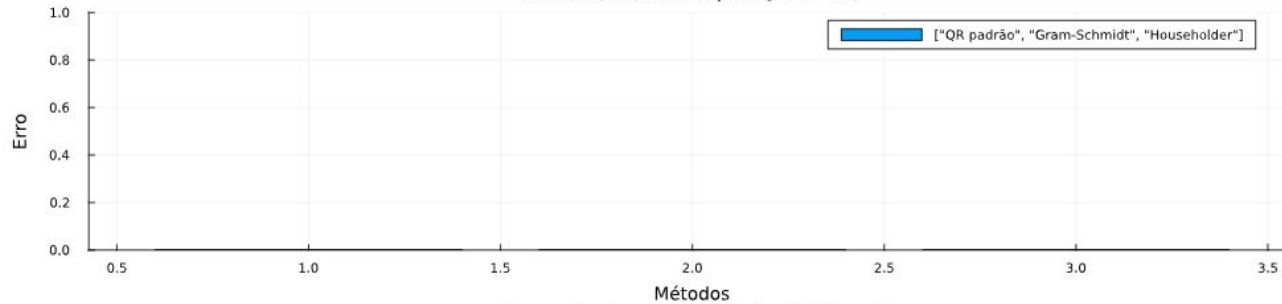
QR padrão: 0 (0.0%)

Gram-Schmidt: 0 (0.0%)

Householder: 0 (0.0%)

Análise do erro com $A_{10 \times 10}$

Erros QR (decomposição $\neq A$)



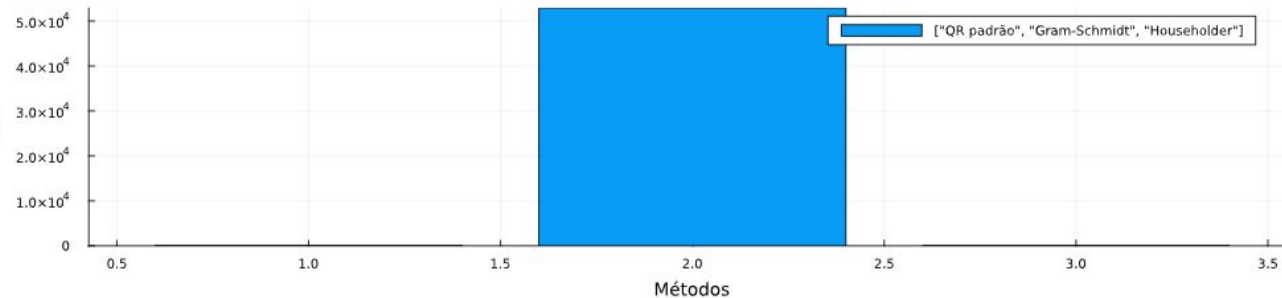
Erros QR (decomposição $\neq A$) em 100000 execuções:

QR padrão: 0 (0.0%)

Gram-Schmidt: 0 (0.0%)

Householder: 0 (0.0%)

Erros de Ortogonalidade ($Q^t Q \neq I$)



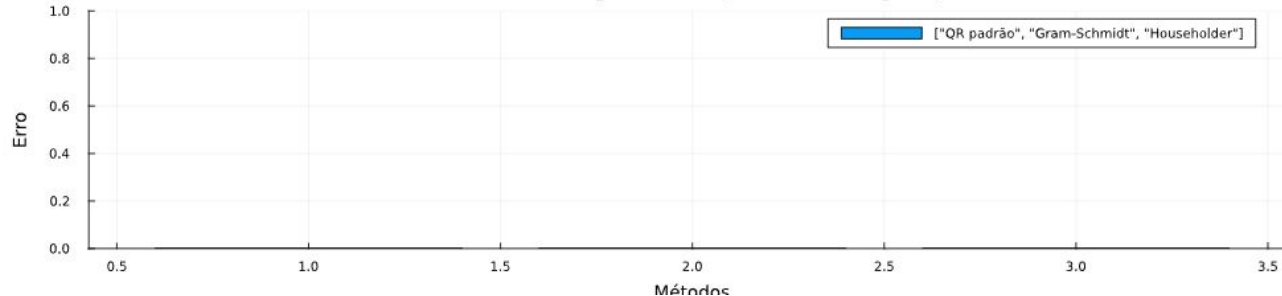
Erros de ortogonalidade ($Q^t Q \neq I$) em 100000 execuções:

QR padrão: 0 (0.0%)

Gram-Schmidt: 52850 (52.85%)

Householder: 0 (0.0%)

Erros de Triangularidade (R não é triangular)



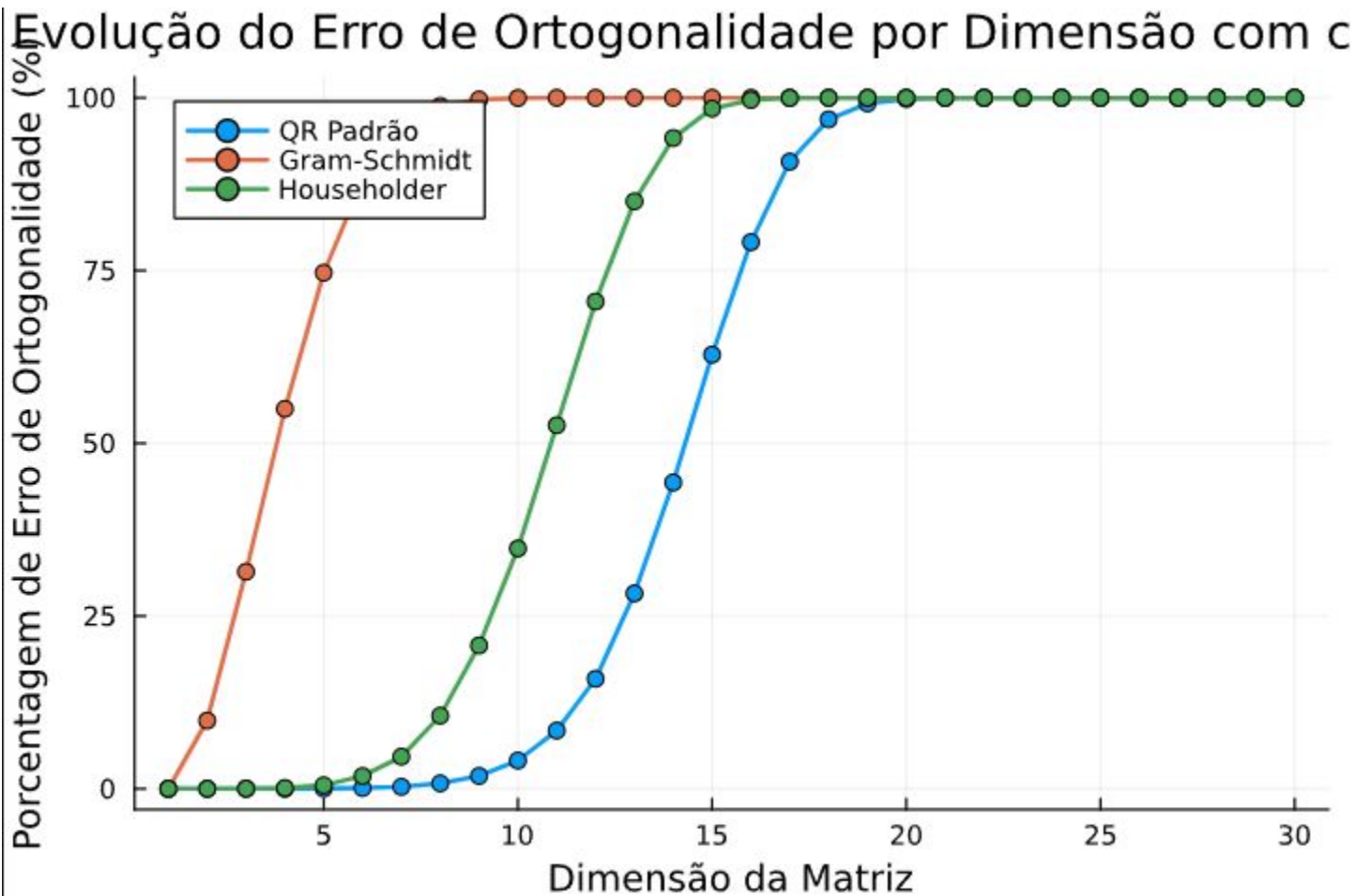
Erros de triangularidade (R não é triangular) em 100000 execuções:

QR padrão: 0 (0.0%)

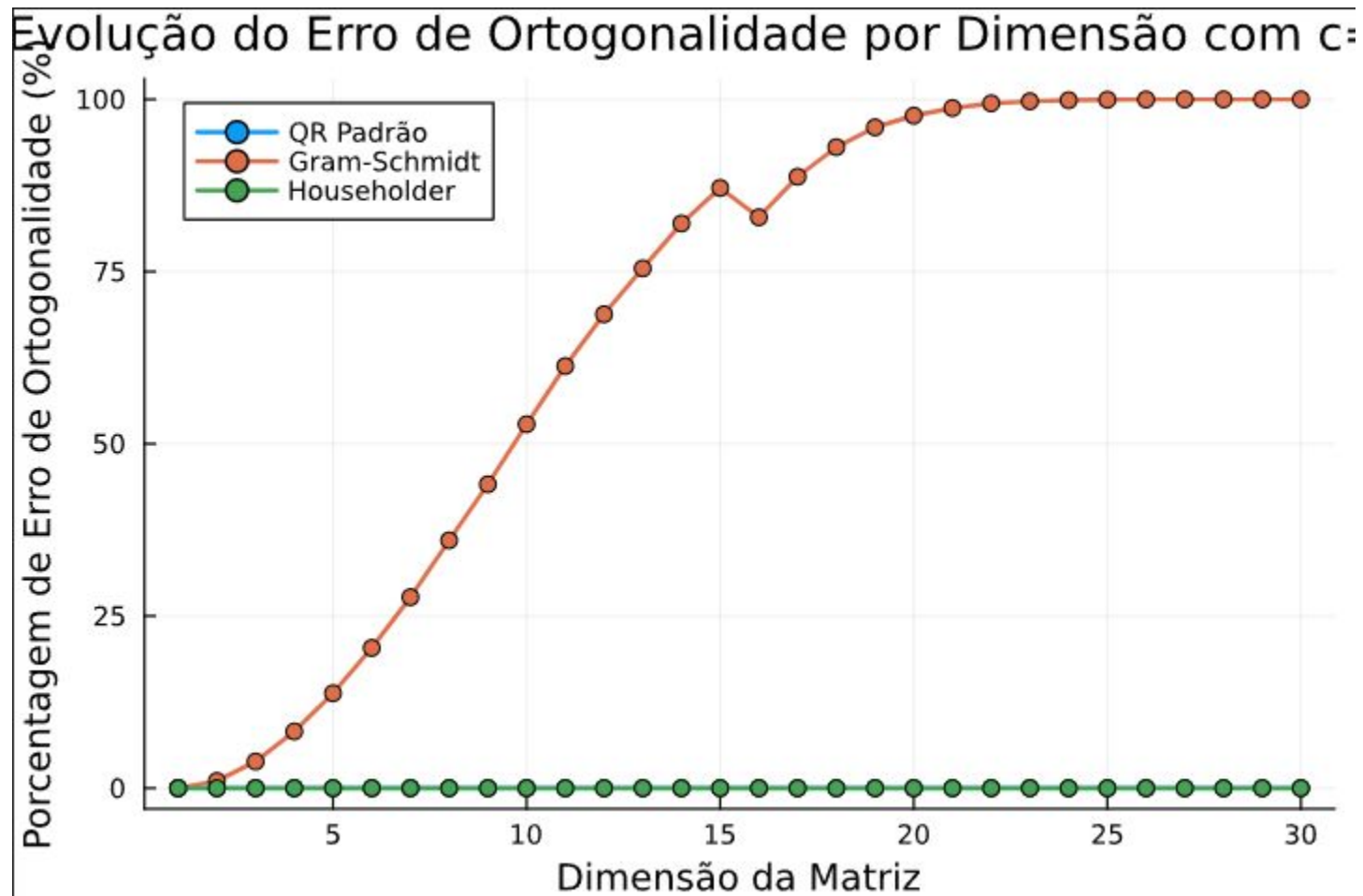
Gram-Schmidt: 0 (0.0%)

Householder: 0 (0.0%)

`analyze_orthogonality_error(100000, 30, 10)`



`analyze_orthogonality_error(100000, 30, 100)`



Estabilidade de Verdade

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$$

$$\text{para algum } \tilde{x} \text{ com } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \approx O(\epsilon_{Machine})$$

Essa noção é menos intuitiva, então jogamos para baixo do tapete

“A perturbação causada pelo algoritmo em relação a perturbação na entrada deve ser proporcional ao erro da máquina”

Obrigado!!

Referencias:

<https://www.stat.uchicago.edu/~lekheng/courses/309/books/Trefethen-Bau.pdf> - Lecture 12~17

<https://kwokanthony.medium.com/detailed-explanation-with-example-on-gr-decomposition-by-householder-transformation-5e964d7f7656>

<https://www.cmpe.boun.edu.tr/~cemgil/Courses/cmpe482/slides/Lecture14.pdf>



Veja nosso código!