Raíces de ecuaciones en una variable

Tabla de Contenidos

Raíces de ecuaciones en una variable........1
Método de bisección o búsqueda binaria........1
Algoritmo (Bisección)........1
Teorema sobre la aproximación del error........2
Teorema sobre la convergencia del método........2
Método de la Recta Secante........2
Algoritmo (Recta secante)........2
Teorema de convergencia........3
Método de Falsa Posición........3
Algoritmo (Falsa posición)........3
Convergencia........4
Método de Newton Raphson........4
Algoritmo (Newton Raphson)........4
Teorema de convergencia global y cota de error........5
Teorema de convergencia local........5
Método de Punto Fijo........6
¿Qué es un punto fijo?........6
Algoritmo (Punto fijo)........6
Teorema de existencia y unicidad........6
Teorema de convergencia global y cota de error........6
Teorema de convergencia local........7
Referencias........7

Método de bisección o búsqueda binaria

En esta sección se detallan los aspectos más importantes del método de bisección el cual se fundamenta principalmente en el Teorema del Valor Medio. Lo que se busca con este método es hallar una aproximación de la solución de una función f en un intervalo $[a, b]$. Es importante resaltar que para utilizar este método es necesario que se satisfaga la condición de cambio de signo, así se garantiza la existencia de dicha solución en el intervalo dado.

Algoritmo (Bisección)

Entrada: a, b, f, TOL (Tolerancia), N_0 (Iteraciones máximas)

Salida: Aproximación p de la raíz o mensaje de falla

Definir $i = 0$, $\quad Error = TOL + 1$;

Sea $Fa = f(a)$ y $Fb = f(b)$;

Si $Fa \cdot Fb < 0$ entonces:

Mientras $i \leq N_0$ y $Error > TOL$:

Sea $p = \dfrac{a+b}{2}$ y $Fp = f(p)$;

Si $Fa \cdot Fb < 0$:

Sea $a = p$ y $Fa = Fp$;

Si no

Sea $b = p$ y $Fb = Fp$;

Sea $i = i + 1$;

Retorna la aproximación p.

Detenerse (No se cumple la condición de cambio de signo)

Teorema sobre la aproximación del error

Suponga que $f \in C[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima a un cero de p de f, tal que

$$E = |p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

donde $n \geq 1$ corresponde al número de iteración.

Teorema sobre la convergencia del método

El método de bisección tiene una convergencia lineal, es decir, $\alpha = 1$.

Método de la Recta Secante

En esta sección se detallan aspectos importantes relacionados al método de las rectas secantes. En este método se consideran aproximaciones iniciales p_0 y p_1 de la solución de una función f con el fin de obtener una aproximación nueva p_2. Esta aproximación se obtiene de la intersección de la recta que pasa por los puntos $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$ con el eje de las abscisas. Ahora, con esta nueva aproximación se calcula la intersección de la recta que pasa por los puntos $(p_1, f(p_1))$ y $(p_2, f(p_2))$ con el eje de las abscisas dando origen a la aproximación p_3. Así sucesivamente se genera una mejor aproximación para la solución.

Se debe tener presente que en este método se generan problemas cuando la recta tiende a ser horizontal (pendiente nula) ya que en este caso, las imágenes de las aproximaciones tienden a ser iguales, generando problemas al momento de calcular la pendiente de la recta.

Algoritmo (Recta secante)

Entrada: Aproximaciones iniciales x_0, x_1, función f, tolerancia TOL, iteraciones máximas N_0

Salida: Aproximación de la solución x_{i+1} o mensaje de falla

Definir $i = 1, \text{Error} = \text{TOL} + 1$;

Si $x_0 \neq x_1$:

Mientras $i \leq N_0$ y $\text{Error} > \text{TOL}$:

Sea $x_{i+1} = x_i - f(x_i)\dfrac{x_{i-1} - x_i}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$;

Sea $i = i + 1$;

Retorna la aproximación x_{i+1};

Si no:

Detenerse (Las aproximaciones iniciales indefinen el método);

Teorema de convergencia

El orden de convergencia del método de la recta secante es superlineal y corresponde a $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Método de Falsa Posición

En esta sección se detallan algunos aspectos relacionados al método de falsa posición, también conocido como Regula Falsi. Este método constituye una mezcla entre el método de bisección y el método de la recta secante ya que se consideran dos aproximaciones iniciales p_0 y p_1 y se considera la condición del valor medio $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$. La nueva aproximación p_2 se genera de la misma manera en la que se genera en el método de la recta secante. Para decidir qué linea secante utilizar para aproximar p_3, se considera con cual se cumple la condición del valor medio, si con $f(p_2) \cdot f(p_1) < 0$ o con $f(p_2) \cdot f(p_0) < 0$.

El método de falsa posición, al ser una mezcla de los métodos de bisección y secante, cumple propiedades que también cumplen estos otros métodos. Por ejemplo, el orden de convergencia oscila entre el orden de convergencia del método de bisección (lineal) y el de la secante (superlineal).

Algoritmo (Falsa posición)

Entrada: Aproximaciones iniciales p_0 y p_1, función f, tolerancia TOL, iteraciones máximas N_0

Salida: Aproximación de la solución p o mensaje de falla

Definir $i = 2$, $\text{Error} = \text{TOL} + 1$;

Sea $q_0 = f(p_0), q_1 = f(p_1)$;

Mientras que $i \leq N_0$ y $\text{Error} > \text{TOL}$

Sea $p = p_1 - q_1 \dfrac{p_1 - p_0}{q_1 - q_0}$;

Sea $i = i + 1$ y $q = f(p)$;

Si $q \cdot q_1 < 0$:

Defina $p_0 = p_1$, $q_0 = q_1$;

Si no

Defina $p_1 = p$, $q_1 = q$;

Retorna la aproximación de p.

Convergencia

*Con respecto a la convergencia de este método, al ser una mezcla del método de bisección y del método de rectas tangentes, esta oscila entre lineal y superlineal, es decir, $1 \leq \alpha < 2$.

Método de Newton Raphson

En esta sección se detallan aspectos relacionados con el método de Newthon Raphson. Este método considera una aproximación inicial x_0 a la cual se calcula la imagen en la función f para obtener el punto $(x_0, f(x_0))$. La aproximación x_1 estará dada por la intersección de la recta tangente a f en el punto dado con el eje de las abscisas. La aproximación x_2 se obtiene que hallar la intersección de la recta tangente a la función f en $(f(x_0), f(f(x_0)))$ con el eje de las abscisas. De esta manera se van generando las aproximaciones.

Algoritmo (Newton Raphson)

Entrada: x_0, f, tolerancia TOL, iteraciones máximas N_0

Salida: Aproximación de la solución x_{i+1} de la raíz o mensaje de falla

Definir $i = 0, \quad Error = TOL + 1$;

Mientras $i \leq N_0$ y $Error > TOL$:

Sea $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_{i+1})}{f'(x_i)}$;

Sea $i = i + 1$ y $x_i = x_{i+1}$;

Retorna la aproximación x_{i+1}.

Teorema de convergencia global y cota de error

Sean $a, b \in R$, con $a < b$ y $f \in C^2([a,b])$ tal que:

a) $f(a) \cdot f(b) < 0$

b) $f'(x) \neq 0, \forall\, x \in [a,b]$

c) El signo de $f''(x)$ es constante $\forall\, x \in [a,b]$

d) Si $c \in \{a,b\}$ cumple que $|f'(c)| = \min(|f'(a)|, |f'(b)|)$ entonces $\dfrac{|f(c)|}{|f'(c)|} \leq b - a$

Entonces:

a) $\exists\, !\alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$ (Raíz única)

b) $\forall x_0 \in [a,b] : \{x_k\}_{k \geq 0} \subset [a,b]$ (Método bien definida)

c) $\forall x_0 \in [a,b] : \lim(x_k) = \alpha$ existe (Global convergente)

d) El método tiene convergencia al menos cuadrática en $[a,b]$. Además, si se cumple que :

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}|f'(x)| \text{ y } M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

entonces, el error absoluto tiene las siguientes cotas:

$$\left|x_{k+1} - \alpha\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left|x_k - \alpha\right|^2 \qquad \forall k \geq 0$$

$$\left|x_{k+1} - \alpha\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left|x_{k+1} - x_k\right|^2 \qquad \forall k \geq 0$$

Teorema de convergencia local

Dado el intervalo $]a,b[$ y una función $f \in C^2]a,b[$, suponga que existe $\alpha \in]a,b[$ tal que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces el método de Newton es locamente convergente en $]a,b[$, esto equivale a decir que $\exists\, \rho > 0$ tal que el método está bien definido en $\text{en } [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ y es convergente a α en $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. Además, se cumple que , o existe $k_o \geq 0$ tal que $x_k = \alpha, \forall\, k \geq k_0$, o, $x_k \neq \alpha, \forall\, k \geq 0$ y

$$\lim \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}, \forall\, x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] - \{\alpha\}$$

De est manera, el método converge a α con un orden al menos cuadrático. Si $f''(\alpha) \neq 0$ entonces el método tiene convergencia cuadrática exactamente.

Método de Punto Fijo

En esta sección se detallan algunos aspectos relacionados con el método de Punto fijo también conocido como método de aproximaciones sucesivas. Este método considera una aproximación inicial x_0 a la cual se le calcula la imagen en la función f. La aproximación x_1 está dada por la coordenada de la abscisa del punto que se encuentra sobre la recta identidad y que tiene la misma ordenada que el punto $(x_0, f(x_0))$. Para obtener la aproximación x_2, se repite el proceso anterior, es decir, se calcula la imagen de x_1 en f, luego de esto, x_2 estará dada por la coordenada de la abscisa del punto que se encuentra sobre la recta identidad y que tiene la misma ordenada que el punto $(x_1, f(x_1))$. De esta manera se van generando las aproximaciones. Se debe tener cuidado al utilizar este método ya que en el algunas ocasiones, las aproximaciones presentan un comportamiento oscilatorio o divergente.

¿Qué es un punto fijo?

Sea $\alpha \in [a, b]$. Se dice que α es punto fijo de una función g si $g(\alpha) = \alpha$.

Algoritmo (Punto fijo)

Entrada: Aproximación inicial x_0, función f, tolerancia TOL, iteraciones máximas N_0.

Salida Aproximación de la solución x_{i+1} o mensaje de falla

Definir $i = 1$, $\mathrm{Error} = \mathrm{TOL} + 1$;

Mientras $i \leq N_0$ y $\mathrm{Error} > \mathrm{TOL}$:

Sea $x_{i+1} = f(x_i)$;

Sea $i = i + 1$;

Retorna la aproximación x_{i+1}

Teorema de existencia y unicidad

Sean $a, b \in R$, con $a < b$ y $g : [a, b] \to R$ una función continua en $[a, b]$. Suponga que se cumple que:

$$(g(a) - a)(g(b) - b) \leq 0$$

entonces existe al menos un $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = \alpha$. Además, si g es contractiva, α único.

Teorema de convergencia global y cota de error

Sean $a, b \in R$ con $a < b$ y $g : [a, b] \to R$ una función. Suponga que $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ y que g es contractiva en $[a, b]$ con constante de contractividad $L \in]0, 1[$, Entonces:

a) $\forall x_0 \in [a,b] : \{x_k\}_{k\geq 0} \subset [a,b]$

b) El orden de convergencia global es al menos lineal ($\alpha \geq 1$)

c) El error absoluto tiene las siguientes cotas:

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \forall\, x_0 \in [a,b]$$
$$\left|x_k - \alpha\right| \leq \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|, \forall\, k \geq 0\,, \forall\, x_0 \in [a,b]$$

Teorema de convergencia local

Sea $I \subset R$un intervalo y $g : I \to R$ tal que $\exists\, \alpha \in I : g(\alpha) = \alpha$. Suponga que existe $\delta > 0$ tal que $]\alpha - \delta\,, \alpha + \delta\,[\subset I$ y $g \in C^1[\alpha - \delta\,, \alpha + \delta\,]$ además se cumple $|g'(x)| < 1$. Entonces α es un punto atractivo para el método de punto fijo, es decir, existe $\rho \in]0, \delta[$ tal que para cualquier $x_{0x} \in [\alpha - \rho\,.\,\alpha + \rho\,]$ el método está bien definido y genera una sucesión $\{x_k\}_{k\geq 0}$ que satisface $\lim(x_k) = \alpha$. Además, existe una constante $L \in [0,1]$ (que depende de ρ y $|g'(\alpha\,)|$) tal que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha\,|, \forall\, k \geq 0, \forall\, x_0 \in [\alpha - \rho\,, \alpha + \rho\,]$$
$$\left|x_k - \alpha\right| \leq \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|, \forall\, k \geq 1, \forall\, x_0\, \in [\alpha - \rho\,, \alpha + \rho\,]$$

Referencias

- Burden, A., Burden, R. y Faires, J. (2017). *Análisis Numérico* (10a ed.). México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chapra, S.C. y Canale, R. (2007). M*étodos numéricos para Ingenieros* (5a ed.). México. Editorial MacGraw-Hill.
- Chavarría, J. (2014). *Métodos numéricos*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.