Ecuaciones diferenciales ordinarias con una condición inicial

Tabla de contenidos

Método de Euler

Deducción

Considere el problema de valores iniciales:

$$\begin{gathered} y(a) = y_0 \\ y' = f(x,y); x \in [a,b] \end{gathered}$$

teniendo que cuenta que $y = y(x)$. Según la serie de Taylor se tiene que:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3}{6} + \frac{y^{(iv)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^4}{24} + \ldots$$

Cuando se considera particularmente Taylor de orden 1 se obtiene el método de Euler, así:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2}; \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\Rightarrow y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{y''(\xi_i)h^2}{2}; \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Finalmente:

$$w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i)$$

Algoritmo (Método Euler)

Entradas: a, b, f, n, y_0

Salida: Aproximación de la solución de la ecuación w_i o mensaje de falla.

Definir $i = 1, x_i = y_0$;

Calcular $h = \frac{b-a}{n}$;

Mientras que $i \leq n$:

Calcular $w_i = w_i + hf(x_i, w_i)$;

Calcular $x_i = a + hi$;

Calcular $i = i + 1$;

Retorna la aproximación x.

Método de Taylor de orden 2 y 3

Deducción

Considere el problema de valores iniciales:

$$\begin{array}{c} \{ y(a) = y_0 \\ y' = f(x, y); x \in [a, b] \end{array}$$

teniendo que cuenta que $y = y(x)$. Según la serie de Taylor se tiene que:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \dots$$
$$\dots + \frac{y'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3}{6} + \frac{y^{(iv)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^4}{24} + \dots$$

de donde se tiene que:

$$w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i) + \frac{h^2 f'(x_i, w_i)}{2} + \frac{h^3 f''(x_i, w_i)}{6} + \dots + \frac{h^n f^{(n-1)}(x_i, w_i)}{n!}$$

con $i = 0, 1, 2, \dots$.

Algoritmo (Método Taylor de orden 2)

Entradas: a, b, f, n

Salida: Aproximación de la solución de la ecuación w_i o mensaje de falla.

Definir $i = 1$, $x_i = a$;

Calcular $h = \frac{b-a}{n}$;

Mientras que $i \leq n$:

Calcular $w_i = w_i + hf(x_i, w_i) + \frac{h^2 f'(x_i, w_i)}{2}$;

Calcular $x_i = a + hi$;

Calcular $i = i + 1$;

Retorna la aproximación x.

Algoritmo (Método Taylor de orden 3)

Entradas: a, b, f, n

Salida: Aproximación de la solución de la ecuación w_i o mensaje de falla.

Definir $i = 1$, $x_i = a$;

Calcular $h = \frac{b-a}{n}$;

Mientras que $i \leq n$:

Calcular $w_i = w_i + hf(x_i, w_i) + \frac{h^2 f'(x_i, w_i)}{2} + \frac{h^3 f''(x_i, w_i)}{6}$;

Calcular $x_i = a + hi$;

Calcular $i = i + 1$;

Retorna la aproximación x.

Runge Kutta

En esta sección se detallarán algunos de los principales apsectos relacionados a los métodos de Runge Kutta para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos métodos se basan en el desarrollo de las potencias de Taylor para funciones en dos variables, de esta manera,

$$f(x+h, y+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y)$$

Si se supone que el orden de las derivadas parciales es indiferente $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$ se obtienen los siguientes casos:

$$\begin{aligned} f(x+h, y) &= f + h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ f(x, y+k) &= f + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

Método de Runge Kutta de orden 2

Considere el problema de valores iniciales con solución única dado por:

$$y' = f(x, y) \quad \text{sujeto a la condición} \quad y_o = y(x_o)$$

Este método consiste en la existencia de las constantes a, b, α, β de manera que cumplan:

$$y_{n+1} = y_n + (ak_1 + bk_2)h$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \;\; k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

Esta constantes deben cumplir $a + b = 1; \quad b\alpha = \frac{1}{2}; \quad b\beta = \frac{1}{2}$

Al ser un sistemas de 3 ecuaciones y cuatro variables, se obtienen infinitas soluciones:

- Para $b = \frac{1}{2}$ se obtiene el método de Heun con un solo corrector el cual corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \text{ donde } k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

- Para $b = 1$ se obtiene el método del punto medio el cual corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \text{ donde } k_1 = f(x_i, y_i),\; k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

- Para $b = \frac{2}{3}$ se obtiene el método de Ralston el cual corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h \text{ donde } k_1 = f(x_i, y_i),\; k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Método de Runge Kutta de orden 4

Considere el problema de valor inicial con solución única dado por

$$y' = f(x, y) \text{ sujeto a la condición } y_o = y(x_o)$$

Este método consiste en la existencia de constantes $a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ de manera que cumplan

$$y_{n+1} = y_n + (ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4)h$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3)$$

Al igual que en el caso de Runge Kutta de orden 2, se tienen infinitas soluciones en el sistema de ecuaciones que se genera. El método comúnmente utilizado, llamado método clásico RK de cuarto orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Referencias

- Burden, A., Burden, R. y Faires, J. (2017). *Análisis Numérico* (10a ed.). México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chapra, S.C. y Canale, R. (2007). M*étodos numéricos para Ingenieros* (5a ed.). México. Editorial MacGraw-Hill.
- Chavarría, J. (2014). *Métodos numéricos*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.