Integración numérica

Tabla de Contenidos

Regla del rectángulo simple

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla del rectángulo simple para integración definida. A partir de los valores extremos a y b se aproxima la integral de la función $f(x)$ mediante el rectángulo que se forma con los puntos $\left(a, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y $\left(b, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y el eje de las abscisas. La línea recta que se obtiene con estos puntos es la que aproximará la función f.

Deducción de la fórmula

Dada una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor através de la regla del rectángulo simple, es decir, mediante un polinomio de grado 1 el cual corresponde a una línea recta que pasa por los puntos $\left(a, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y $\left(b, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. La ecuación de est recta está dada por:

$$P_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

De esta manera,

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \int_a^b P_1(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{dx}$$

Calculando esta nueva integral se tiene que:

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{dx} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \mathrm{dx} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \end{aligned}$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Calcular $x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$;

Retorna la aproximación x

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla del rectángulo simple (punto medio) está dado por:

$$E \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24}$$

Regla del rectángulo compuesto

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla del rectángulo compuesta para integración definida. Este consiste, al igual que el caso de la regla del rectángulo simple, en generar un rectángulo para cada una de las particiones que se considere del intervalo en el que se quiere calcular la integral original. A partir de los valores extremos a y b se consideran n particiones de este intervalo y se aplica la regla del rectángulo simple para cada intervalo o partición.

Deducción del método

Dada una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor a través de la regla del rectángulo compuesto (punto medio), para esto, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, de manera que se cumpla que $x_i = a + h \cdot i$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Así,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^{a+h} f(x)\mathrm{dx} + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\mathrm{dx} + \ldots + \int_{a+(n-1)h}^{a+n\cdot h} f(x)\mathrm{dx}$$

Aplicando la regla del rectángulo simple (punto medio) a cada subintervalo se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx (a+h-a) f\left(\frac{a+a+h}{2}\right) + \ldots + (a+n\cdot\ h - (a+(n-1)h)) f\left(\frac{a+(n-1)h+a+n\cdot\ h}{2}\right)$$

Dado que todos los subintervalos tienen la misma longitud se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx h\left[f\left(\frac{2a+h}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{2a+2n\cdot h-h}{2}\right)\right]$$

La cual podemos reescribir como:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)(2i-1)}{2n}\right)$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, cantidad de subintervalos n, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Definir $i = 0$;

Calcular $h = \dfrac{b-a}{n}$;

Mientras $i \leq n$:

Sea $x_{i+1} = x_i + h \cdot f\left(\dfrac{a+h\cdot\ i}{2}\right)$;

Sea $i = i + 1$ y $x_i = x_{i+1}$;

Retorna la aproximación x.

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla del rectángulo compuesta (punto medio) está dado por:

$$E \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{24}$$

Regla del trapecio simple

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla del trapecio simple para integración definida. A partir de los valores extremos a y b se aproxima la integral de la función $f(x)$ mediante el trapecio que se forma con los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y el eje de las abscisas. La línea recta que se obtiene con estos puntos es la que aproximará la función f.

Deducción del método

Dada una integral $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor a través de la regla del trapecio, es decir, mediante un polinomio de grado 1 el cual corresponde a la línea recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La ecuación de esta recta está dada por:

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

De esta manera,

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \int_a^b P_1(x)\mathrm{dx} = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]\mathrm{dx}$$

Calculando esta nueva integral se tiene que:

$$
\begin{aligned}
I &\approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{dx} \\
&= \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}a\right]\mathrm{dx} \\
&= \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b-a}x + \frac{b\cdot\ f(a) - a\cdot f(b)}{b-a}\right]\mathrm{dx} \\
&= \frac{(f(b) - f(a))(b^2 - a^2)}{2(b-a)} + \frac{(b\cdot\ f(a) - a\cdot f(b))(b-a)}{b-a} \\
&= \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{2} + b\cdot\ f(a) - a\cdot f(b) \\
&= (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}
$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Calcular $f(a)$ y $f(b)$;

Calcular $x = (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$;

Retorna la aproximación x

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla del trapecio simple está dado por:

$$E \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$$

Regla del trapecio compuesto

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla del trapecio compuesta para integración definida. Este consiste, al igual que el caso de la regla del trapecio simple, en generar un trapecio para cada una de las particiones que se considere del intervalo en el que se quiere calcular la integral original. A partir de los valores extremos a y b se consideran n particiones de este intervalo y se aplica la regla del trapecio simple para cada intervalo o partición.

Deducción del método

Dada una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor a través de la regla del trapecio compuesta, es decir, mediante un polinomio de grado uno para cada uno de los subintervalos que se genera al hacer las n particiones. En este caso, note que la amplitud de cada intervalo está dada por $h = \dfrac{b-a}{n}$. Así,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^{a+h} f(x)\mathrm{dx} + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\mathrm{dx} + \ldots + \int_{a+(n-1)h}^{a+n\cdot h} f(x)\mathrm{dx}$$

Aplicando la regla del trapecio simple a cada uno de estos intervalos se tiene que:

$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx (a+h-a)\left[\dfrac{f(a)+f(a+h)}{2}\right] + \ldots + (a+n\cdot h-(a+(n-1)h))\left[\dfrac{f(a+(n-1)h)+f(a+n\cdot h)}{2}\right]$ Daddo que todos los subintervalos tienen la misma longitud, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

La cual podemos reescribir como:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \frac{h(f(a)+f(b))}{2} + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\cdot\ h)$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, cantidad de subintervalos n, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Definir $i = 0$;

Calcular $h = \dfrac{b-a}{n}$;

Mientras $i \leq n$:

Sea $x_{i+1} = h \cdot f(a + h \cdot i)$;

Sea $i = i + 1$ y $x_i = x_{i+1}$;

Sea $x_{i+1} = h\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + x_i$;

Retorna la aproximación x

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla del trapecio compuesta está dado por:

$$E \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{12}$$

Regla de Simpson 1/3 simple

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla de Simpson 1/3 simple para integración definida. A diferencia de la regla del trapecio que aproximaba la integral mediante un polinomio de grado 1, la regla de Simpson 1/3 lo hace con un polinomio de grado 2. A partir de los valores extremos a y b se aproxima la integral de la función $f(x)$ mediante el área bajo la curva (cuadrática) que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Deducción del método

Dada una integral $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor a través de la regla de Simpson 1/3 simple, es decir, mediante un polinomio que pase por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Para ello se considera el polinomio interpolador de Lagrange de grado 2 $P_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con $m = \frac{a+b}{2}$.

$$P_2(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

Así:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \int_a^b P_2(x)\mathrm{dx} = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(m) + f(b)]$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Calcular $f(a)$ y $f(b)$;

Calcular $m = \frac{a+b}{2}$;

Calcular $x = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(m) + f(b)]$;

Retorna la aproximación x

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla de Simpson 1/3 simple está dado por:

$$E \leq \frac{M_4(b-a)^5}{90}$$

Regla de Simpson 1/3 compuesto

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla de Simpson 1/3 compuesta para integración definida. Este consiste, al igual que la regla de Simpson 1/3 simple, en generar un polinomio de grado 2 para cada una de las particiones que se considere del intervalo en el que se quiere calcular la integral original. A partir de los valores extremos a y b se consideran n particiones de este intervalo y se aplica la regla de Simpson 1/3 simple para cada intervalo o partición.

Deducción del método

Dada una integral $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor mediante la regla de Simpson 1/3 compuesta, para esto, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, de manera que se cumpla $x_i = a + i \cdot h$, donde $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$; n par. Aplicando la regla de Simpson 1/3 simple a cada subintervalo se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}(f(x_{i+1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}))$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + f(b) \right)$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, cantidad de subintervalos n (par), función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Definir $i = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$;

Calcular $h = \dfrac{b-a}{n}$;

Mientras $i \leq \dfrac{n}{2} - 1$:

Calcular $x = x + h$;

Calcular $s_1 = s_1 + f(x)$;

Calcular $x = x + h$;

Calcular $s_2 = s_2 + f(x)$

Calcular $x = x + h$;

Calcular $s_1 = s_1 + f(x)$;

Calcular $s = \dfrac{h}{3}(f(a) + 4s_1 + 2s_2 + f(b))$;

Retorna la aproximación s

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla de Simpson 1/3 compuesta está dado por:

$$E \leq \frac{M_4(b-a)h^4}{180}$$

Regla de Simpson 3/8 simple

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla de Simpson 3/8 simple para integración definida. En este caso, a diferencia de la regla de Simpson 1/3 simple en donde se utilizan los polinomios de interpolación de Lagrange de segundo orden, se hace uso de los polinomios de interpolación de Lagrange de tercer orden. A partir de los valores extremos a y b, se aproxima la integral de la función f mediante el área bajo la curva (cúbica) que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Deducción del método

Dada una integral $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor a través de la regla de Simpson 3/8 simple, es decir, mediante un polinomio que pase por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $\left(\frac{2a+b}{3}, f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right)$ y $\left(\frac{a+2b}{3}, f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)$. Para ello se considera el polinomio interpolador de Lagrange de grado 3 $P_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y además considere $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$ y $x_3 = a$ así:

$$P_3(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Así,

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \int_a^b P_3(x)\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Calcular $f(a)$ y $f(b)$;

Calcular $x = \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$;

Retorna la aproximación x

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla de Simpson 3/8 simple está dado por:

$$E \leq \frac{3M_4h^5}{80}$$

Regla de Simpson 3/8 compuesta

En esta sección se detallan algunos de los principales aspectos relacionados con el método de la regla de Simpson 3/8 compuesta para integración definida. Este consiste, al igual que la regla de Simpson 3/8 simple, en generar un polinomio de grado 3 para cada una de las particiones que se considere del intervalo en el que se quiere calcular la integral original. A partir de los valores extremos a y b se consideran n particiones de este intervalo y se aplica la regla de Simpson 3/8 simple para cada intervalo o partición.

Algoritmo

Entrada: Extremos del intervalo de integración a y b, cantidad de subintervalos n (múltiplo de 3), función f

Salida: Aproximación de la integral x o mensaje de falla

Definir $i = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$;

Calcular $h = \dfrac{b-a}{n}$;

Mientras $i \leq n-3$:

Calcular $x = a + h \cdot i$;

Calcular $s_1 = s_1 + f(x)$;

Calcular $i = i + 3$;

Sea $i = 1$;

Mientras $i \leq n-2$:

Calcular $x = a + h \cdot i$;

Calcular $s_2 = s_2 + f(x)$;

Calcular $i = i + 3$;

Sea $i = 2$;

Mientras $i \leq n-1$:

Calcular $x = a + h \cdot i$;

Calcular $s_3 = s_3 + f(x)$;

Calcular $i = i + 3$;

Calcular $s = \dfrac{3h}{8}[f(a) + f(b) + 2s_1 + 3s_2 + 3s_3]$;

Retorna la aproximación s

Deducción del método

Dada una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ se quiere aproximar su valor mediante la regla de Simpson 3/8 compuesta, para esto, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, de manera que se cumpla $x_i = a + i \cdot h$, donde

$h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$; n múltiplo de 3. Aplicando la regla de Simpson 3/8 simple a cada subintervalo se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\mathrm{dx} + \int_{x_3}^{x_6} f(x)\mathrm{dx} + \ldots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)\mathrm{dx}$$

$$\approx \frac{3h}{8}\{[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + \ldots + [f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$

Teorema de error

El error que se genera al aproximar una integral $I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ en un intervalo $[a, b]$ con el método de la regla de Simpson 3/8 compuesta está dado por:

$$E \leq \frac{M_4(b-a)h^4}{80}$$

Referencias

- Burden, A., Burden, R. y Faires, J. (2017). *Análisis Numérico* (10a ed.). México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chapra, S.C. y Canale, R. (2007). M*étodos numéricos para Ingenieros* (5a ed.). México. Editorial MacGraw-Hill.
- Chavarría, J. (2014). *Métodos numéricos*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.