

Terra em  $N$  pedacinhos de  $1 \text{ km}^2$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{n pedacinho } i \text{ tem água} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\underline{X} \leftarrow (X_1, X_2, \dots, X_N) \quad \text{"vetor populacional"}$$

$$\text{média}(\underline{X}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} = p \quad (\text{proporção de água na Terra})$$

$$\text{variância}(\underline{X}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \overbrace{\text{média}(\underline{X})}^p)^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i^2 - 2pX_i + p^2)}{N-1} =$$

$$= \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^N X_i^2}_{\sum_{i=1}^N X_i \text{ pois } X_i \in \{0,1\}} - 2p \underbrace{\sum_{i=1}^N X_i}_{Np} + Np^2 \right] / N-1$$

$$= [Np - 2Np^2 + Np^2] / N-1$$

$$= \frac{Np(1-p)}{N-1} = S^2$$

Portanto a média do "vetor populacional" é  $p$   
e a variância é  $S^2$

Amostra de  $n$  pedacinhos de  $1 \text{ km}^2$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se pedacinho amostrado tem água} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Amostra de  $n$  elementos:  $\underline{K} = (K_1, K_2, \dots, K_n)$   
 $K_i \in \{1, 2, \dots, N\}$

Ex:  $N=5$   $m=3$

$$\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$S^2 = \frac{N}{N-1} p(1-p) = \frac{5}{4} 0.6 \times 0.4 = 0.3$$

p/ cada amostra, calculamos  $p^* = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}$

amostra possível		$p^*$	Prob da amostra ocorrer
$\Delta_1$	1 2 3	$2/3$	$1/10$
$\Delta_2$	1 2 4	$1/3$	$1/10$
$\Delta_3$	1 2 5	$2/3$	$1/10$
$\Delta_4$	1 3 4	$2/3$	$1/10$
$\Delta_5$	1 3 5	$3/3$	$1/10$
$\Delta_6$	2 3 4	$1/3$	$1/10$
$\Delta_7$	2 3 5	$2/3$	$1/10$
$\Delta_8$	3 4 5	$2/3$	$1/10$
$\Delta_9$	1 4 5	$2/3$	$1/10$
$\Delta_{10}$	2 4 5	$1/3$	$1/10$

(caso sem reposição)



Portanto  $p^*$  é variável aleatória com valores possíveis:

$x$	$1/3$	$2/3$	$3/3$
$P(p^*=x)$	$3/10$	$6/10$	$1/10$

$$\begin{aligned} E(p^*) &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{10} + \frac{3}{3} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(p^*) &= \left(\frac{1}{3} - p\right)^2 \times \frac{3}{10} + \left(\frac{2}{3} - p\right)^2 \times \frac{6}{10} \\ &\quad + \left(\frac{3}{3} - p\right)^2 \times \frac{1}{10} \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

Em geral  $\text{Var}(p^*) = \frac{S^2(1-f)}{n}$

onde  $f = \frac{n}{N}$  (fração amostral)

(caso sem reposição)