ME414 - Estatística para Experimentalistas

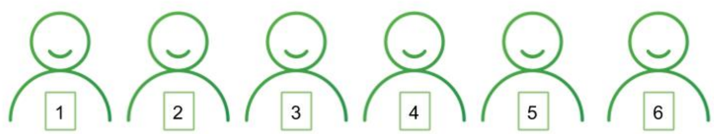
Teste de Permutação para Duas Médias

Introdução

Testes de permutação/aleatorização podem ser utilizados para avaliar hipóteses sobre efeitos de tratamentos, quando as unidades experimentais são alocadas aleatoriamente para cada tratamento.

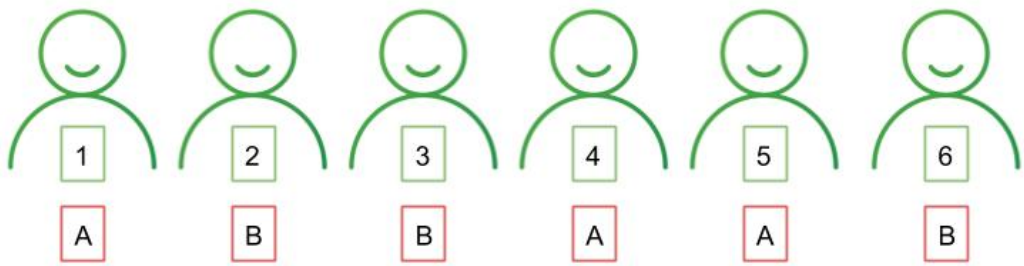
Exemplo: Um grupo de pesquisadores quer avaliar se dois tratamentos, A e B apresentam diferença com relação a uma certa resposta de interesse.

Os pesquisadores têm à disposição 6 pessoas.



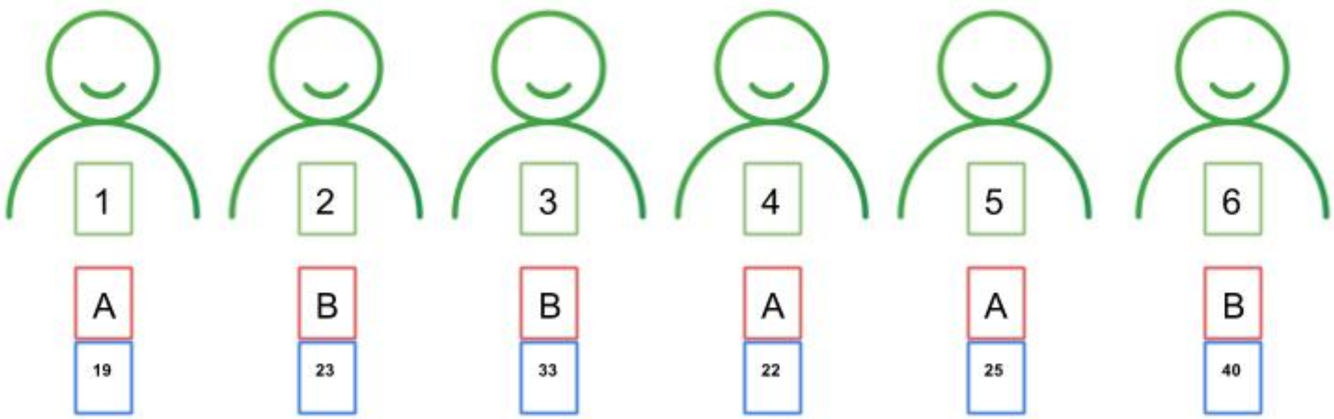
Exemplo

As 6 pessoas são alocadas, aleatoriamente, a um dos tratamentos:



Exemplo

Após aplicar o tratamento, coletamos a variável resposta de interesse em cada pessoa.



Exemplo

Dados observados:

ID	Tratamento	Resposta
1	A	19
2	B	23
3	B	33
4	A	22
5	A	25
6	B	40

Exemplo

- $\bar{x}_A = 22$
- $\bar{x}_B = 32$
- Diferença entre A e B é -10.
- Esta diferença indica que A tem média inferior à B (pensando populacionalmente, não apenas na nossa amostra)?
- Seria possível, mesmo que não houvesse diferença entre os tratamentos, observar uma diferença de -10? Isto é, a diferença observada foi devido ao acaso? Ou foi devido ao fato de realmente existir uma diferença entre os tratamentos?

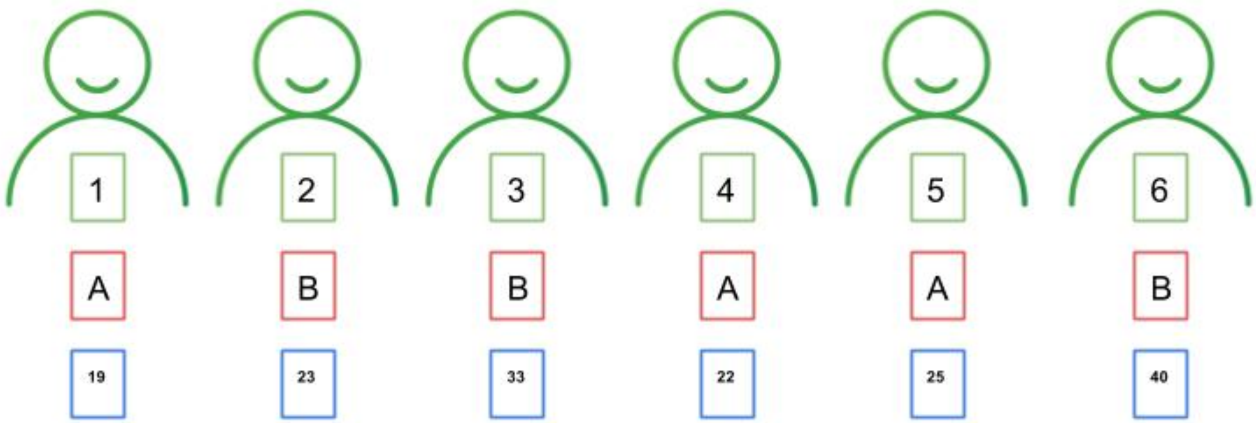
Exemplo

- H_0: não há diferença entre os tratamentos
- μ_A a verdadeira média das respostas do Tratamento A
- μ_B a verdadeira média das respostas do Tratamento B
- H_0: $\mu_A = \mu_B$.
- Como avaliar?

Exemplo

Sob H_0, não existe diferença entre os tratamentos.

Se H_0 é verdadeira, então a resposta de cada pessoa não tem ligação com o tratamento que ela recebeu.



Exemplo

Se H_0 é verdadeira, a diferença observada de -10, foi apenas consequência de uma alocação aleatória em dois grupos A e B.

Iremos, desta forma, repetir o argumento da H_0: avaliar todas as alocações aleatórias possíveis e 6 pessoas entre os Tratamentos A e B e calcular a diferença.

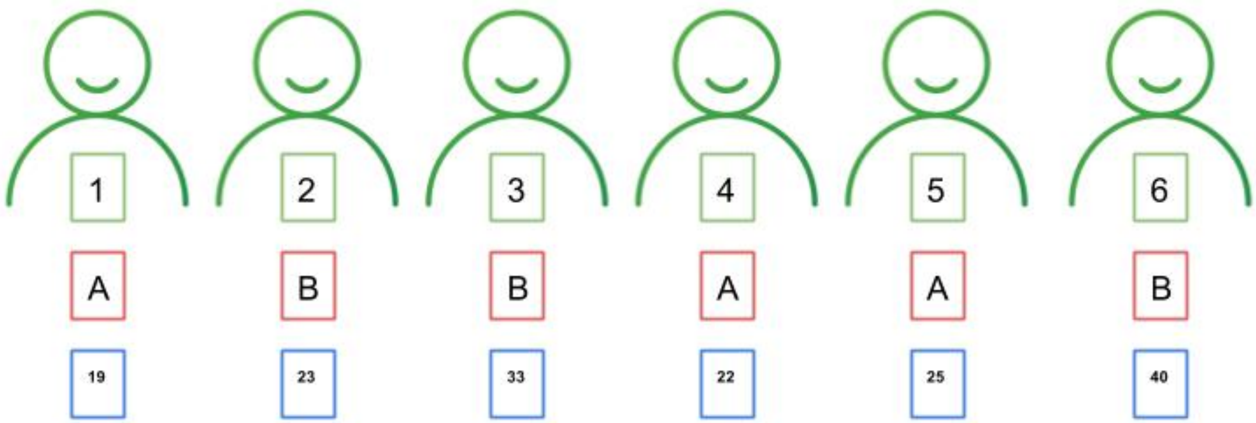
Exemplo

Quantas maneiras temos de escolher ao acaso 3 pessoas, de um grupo de 6?

$$\binom{6}{3} = 20$$

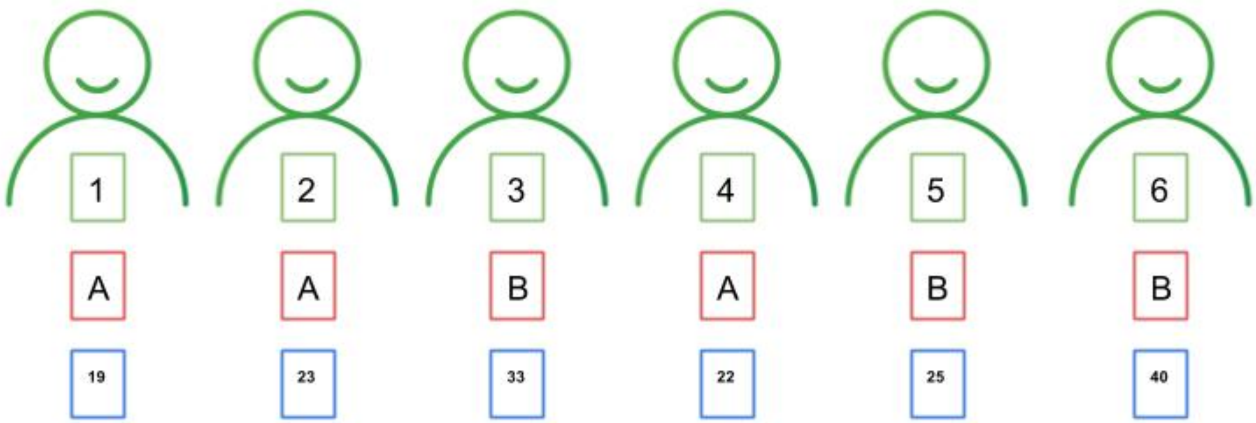
Temos 20 maneiras de alocar 3 pessoas para o tratamento A e as restantes para o tratamento B.

Exemplo



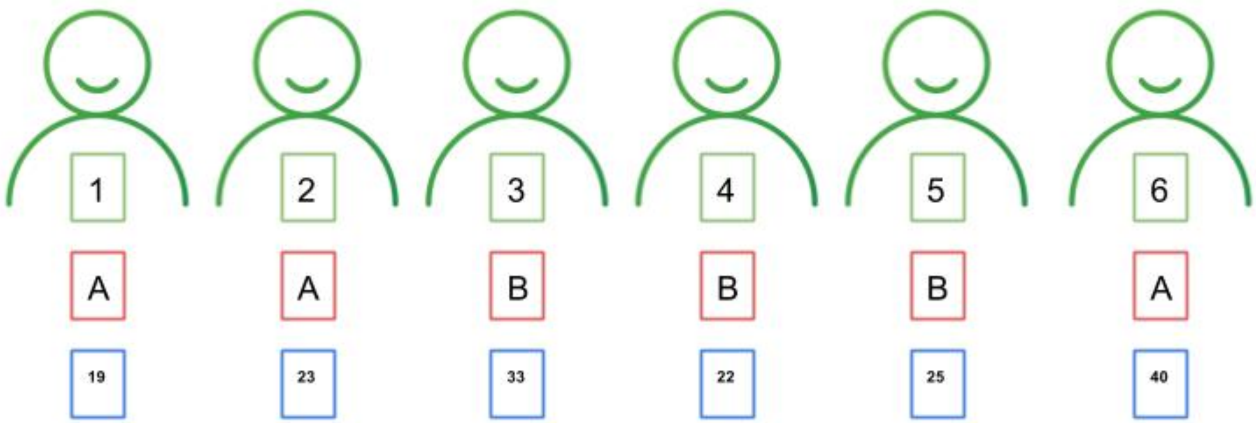
	Pessoa 1 do Trat A	Pessoa 2 do Trat A	Pessoa 3 do Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
8	1	4	5	22	32	-10

Exemplo



	Pessoa 1 do Trat A	Pessoa 2 do Trat A	Pessoa 3 do Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
2	1	2	4	21.33	32.67	-11.34

Exemplo



	Pessoa 1 do Trat A	Pessoa 2 do Trat A	Pessoa 3 do Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
4	1	2	6	27.33	26.67	0.66

Exemplo

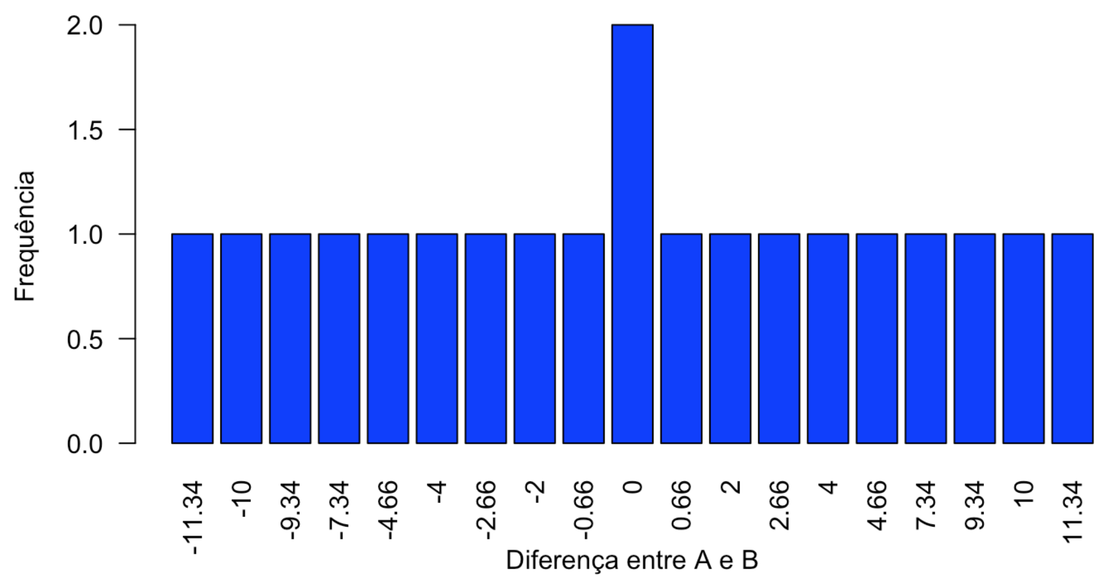
Pessoa 1 do Trat A	Pessoa 2 do Trat A	Pessoa 3 do Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
1	2	3	25.00	29.00	-4.00
1	2	4	21.33	32.67	-11.34
1	2	5	22.33	31.67	-9.34
1	2	6	27.33	26.67	0.66
1	3	4	24.67	29.33	-4.66
1	3	5	25.67	28.33	-2.66
1	3	6	30.67	23.33	7.34
1	4	5	22.00	32.00	-10.00
1	4	6	27.00	27.00	0.00
1	5	6	28.00	26.00	2.00

Exemplo

	Pessoa 1 do Trat A	Pessoa 2 do Trat A	Pessoa 3 do Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
11	2	3	4	26.00	28.00	-2.00
12	2	3	5	27.00	27.00	0.00
13	2	3	6	32.00	22.00	10.00
14	2	4	5	23.33	30.67	-7.34
15	2	4	6	28.33	25.67	2.66
16	2	5	6	29.33	24.67	4.66
17	3	4	5	26.67	27.33	-0.66
18	3	4	6	31.67	22.33	9.34
19	3	5	6	32.67	21.33	11.34
20	4	5	6	29.00	25.00	4.00

Exemplo

Todas as diferenças obtidas através de alocação ao acaso nos tratamentos:



Exemplo

A diferença observada foi de -10.

Sob H_0, obteríamos uma diferença de $|-10|$ ou ainda maior, em valor absoluto, 4 vezes.

Como temos 20 combinações possíveis e apenas 4 com valores iguais ou mais extremos ao valor de diferença observada no experimento, temos que o p-valor é:

$$\frac{4}{20} = 0.2$$

Desta maneira, uma valor de diferença como o observado ou ainda mais extremo pode ocorrer ao acaso com probabilidade 0.20. Os dados portanto não trazem evidências para rejeitar a hipótese de que não há diferença entre os tratamentos.

Exemplo

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias iguais):

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -1.9127, df = 4, p-value = 0.1283
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -24.515613   4.515613
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##              22              32
```

Exemplo

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias diferentes):

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -1.9127, df = 2.4858, p-value = 0.1704
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -28.765539   8.765539
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##              22              32
```

Exemplo 2

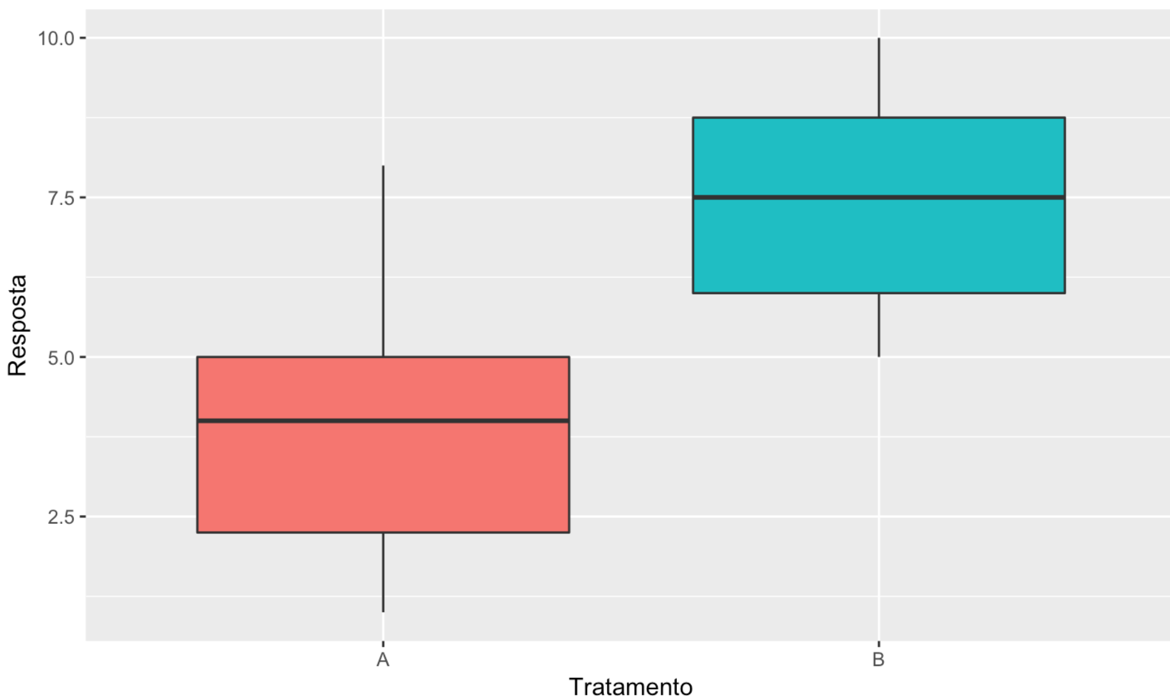
Um grupo de pesquisadores quer avaliar se dois tratamentos, A e B apresentam diferença com relação a uma certa resposta de interesse.

Os pesquisadores têm à disposição 20 pessoas.

As 20 pessoas são alocadas, aleatoriamente, a um dos tratamentos.

Após aplicar o tratamento, coletamos a variável resposta de interesse em cada pessoa.

Exemplo 2



Exemplo 2

Dados observados:

- $\bar{x}_A = 4.1$
- $\bar{x}_B = 7.4$
- Diferença entre A e B é -3.3.
- Esta diferença indica que A tem média inferior à B (pensando populacionalmente, não apenas na nossa amostra)?
- Seria possível, mesmo que não houvesse diferença entre os tratamentos, observar uma diferença de -3.3? Isto é, a diferença observada foi devido ao acaso? Ou foi devido ao fato de realmente existir uma diferença entre os tratamentos?

Exemplo 2

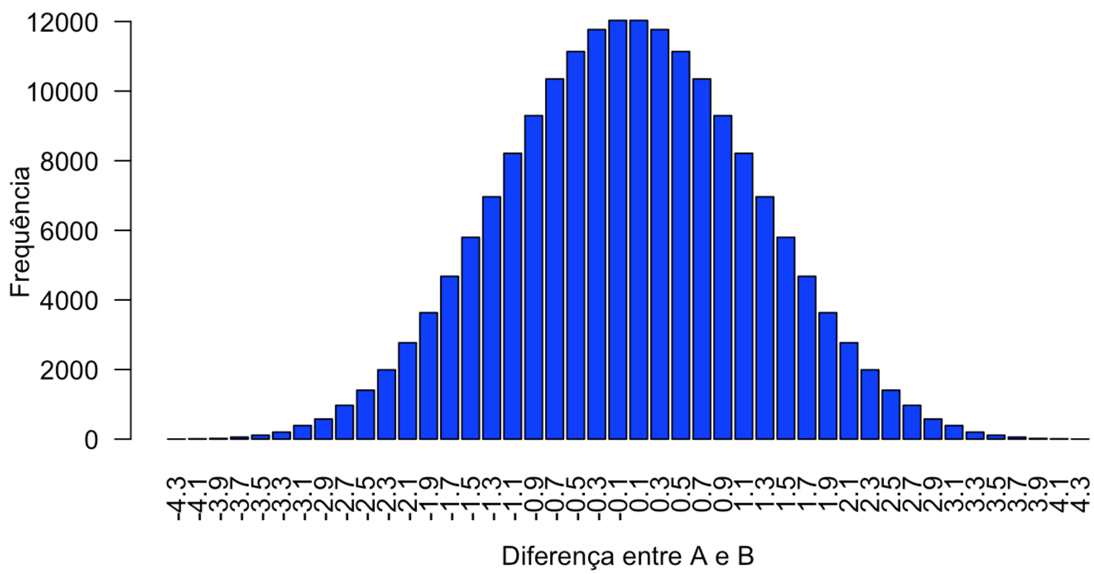
Quantas maneiras temos de escolher ao acaso 10 pessoas, de um grupo de 20?

$$\binom{20}{10} = 1.84756 \times 10^5$$

Temos 1.84756×10^5 maneiras de alocar 10 pessoas para o tratamento A e as restantes para o tratamento B.

Exemplo 2

Todas as diferenças obtidas através de alocação ao acaso nos tratamentos:



Exemplo 2

P-valor: diferenças iguais ou maiores, em valor absoluto, do que o valor absoluto da diferença observada, $|-3.3|$.

P-valor: 0.0043842

Exemplo 2

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias iguais):

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -3.5156, df = 18, p-value = 0.00247
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -5.272083 -1.327917
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##             4.1             7.4
```

Exemplo 2

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias diferentes):

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -3.5156, df = 17.418, p-value = 0.002573
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -5.27682 -1.32318
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##             4.1             7.4
```

Passo-a-passo

- H_0: $\mu_A = \mu_B$
- Aloque as pessoas em um dos dois tratamentos, aleatoriamente: m alocados ao Tratamento A e n alocados ao Tratamento B
- Calcule a média para cada tratamento: $\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$
- Calcule a diferença entre as médias: $D_{obs} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$
- Permute as $m + n$ observações entre os dois tratamentos, obtenha uma lista com todas as permutações possíveis:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

Passo-a-passo

- Para cada permutação, calcule D, a diferença entre as médias dos tratamentos.
- Encontre o p-valor:
  - $H_A: \mu_A > \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{D \geq D_{obs}\}}{\binom{m+n}{m}}$$

  - $H_A: \mu_A < \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{D \leq D_{obs}\}}{\binom{m+n}{m}}$$

  - $H_A: \mu_A \neq \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{|D| \geq |D_{obs}|\}}{\binom{m+n}{m}}$$

Leituras

- Zieffler et al.: capítulo 6.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho
- Rafael Maia