
# ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 14

# Distribuição amostral e Teorema Central do Limite

# Estimar uma proporção: Eleições para a prefeitura

- Quero saber se o candidato $A$ vai ganhar as eleições para prefeito.
- Quero saber parâmetro populacional $p$ = proporção de pessoas que votam em $A$.


- Posso esperar o resultado das eleições para saber, ou seja, teríamos as respostas de todas as pessoas da cidade.
- Posso usar uma amostra para estimar a proporção de votos para $A$.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Posso pensar no problema de duas formas: Modo 1 e Modo 2.

# Modo 1

- Cidade com $N$ pessoas.
- $X_i = 1$ se a pessoa $i$ vota em $A$
- $X_i = 0$ se a pessoa $i$ não vota em $A$.
- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$: respostas de toda a população (temos no dia da eleição).
- Média populacional:

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

# Modo 1

- Variância populacional:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - p)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i^2 - 2pX_i + p^2) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2p\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} p^2}{N} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 2p\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} p^2}{N} \\
&= \frac{Np - 2pNp + Np^2}{N} = p(1-p)
\end{aligned}
$$

# Modo 1

- $p$ = proporção de pessoas que votam em $A$ na cidade
- $\sigma^2 = p(1-p)$ é a variância da população.
- Até o dia da eleição, não sabemos $p$.
- Coletamos uma amostra aleatória de tamanho $n$ para uma pesquisa eleitoral.
- $\hat{p}$: proporção de pessoas que votam em $A$ na amostra.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Se outra pessoa também coleta uma amostra aleatória de tamanho $n$ e calcula $\hat{p}$ teremos o mesmo valor?

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

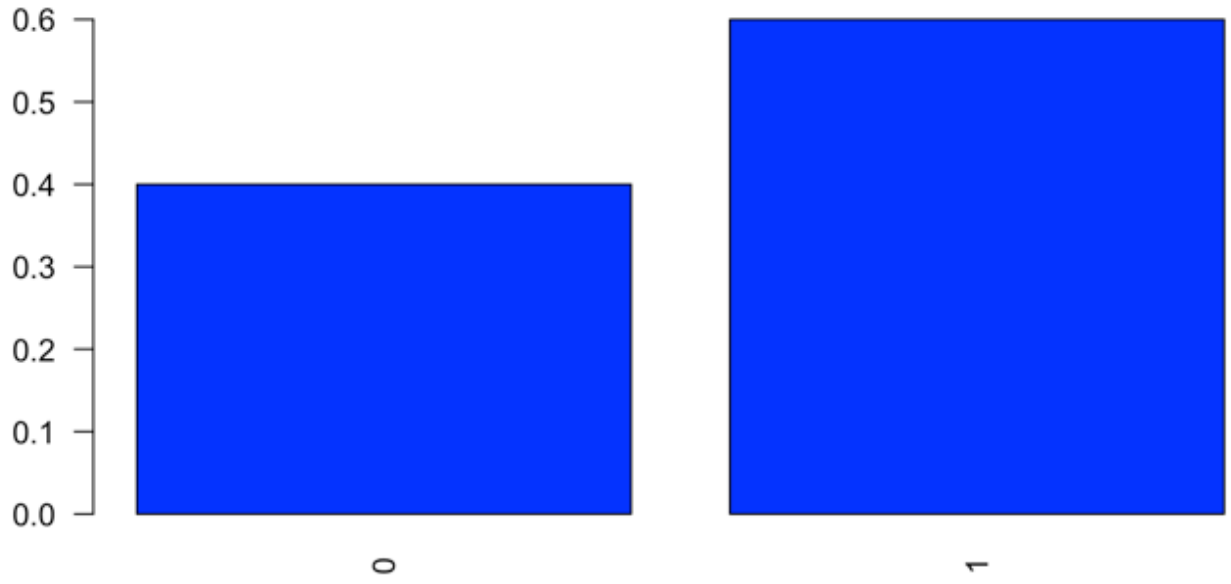
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N} (X_i - p)^2 \\
&= \frac{3 \times (1 - 0.6)^2 + 2 \times (0 - 0.6)^2}{5} \\
&= 0.24 \\
&= p(1 - p)
\end{aligned}$$

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Gráfico de barras (proporção) dos dados populacionais:



# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$N^n = 25$ amostras possíveis.

| Primeira pessoa | Segunda pessoa | $\hat{p}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.0 |
| 2 | 1 | 0.5 |
| 3 | 1 | 1.0 |
| 4 | 1 | 0.5 |
| 5 | 1 | 1.0 |
| 1 | 2 | 0.5 |
| 2 | 2 | 0.0 |
| 3 | 2 | 0.5 |
| 4 | 2 | 0.0 |
| 5 | 2 | 0.5 |
| 1 | 3 | 1.0 |
| 2 | 3 | 0.5 |
| 3 | 3 | 1.0 |
| 4 | 3 | 0.5 |
| 5 | 3 | 1.0 |
| 1 | 4 | 0.5 |
| 2 | 4 | 0.0 |
| 3 | 4 | 0.5 |
| 4 | 4 | 0.0 |
| 5 | 4 | 0.5 |
| 1 | 5 | 1.0 |
| 2 | 5 | 0.5 |
| 3 | 5 | 1.0 |
| 4 | 5 | 0.5 |
| 5 | 5 | 1.0 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

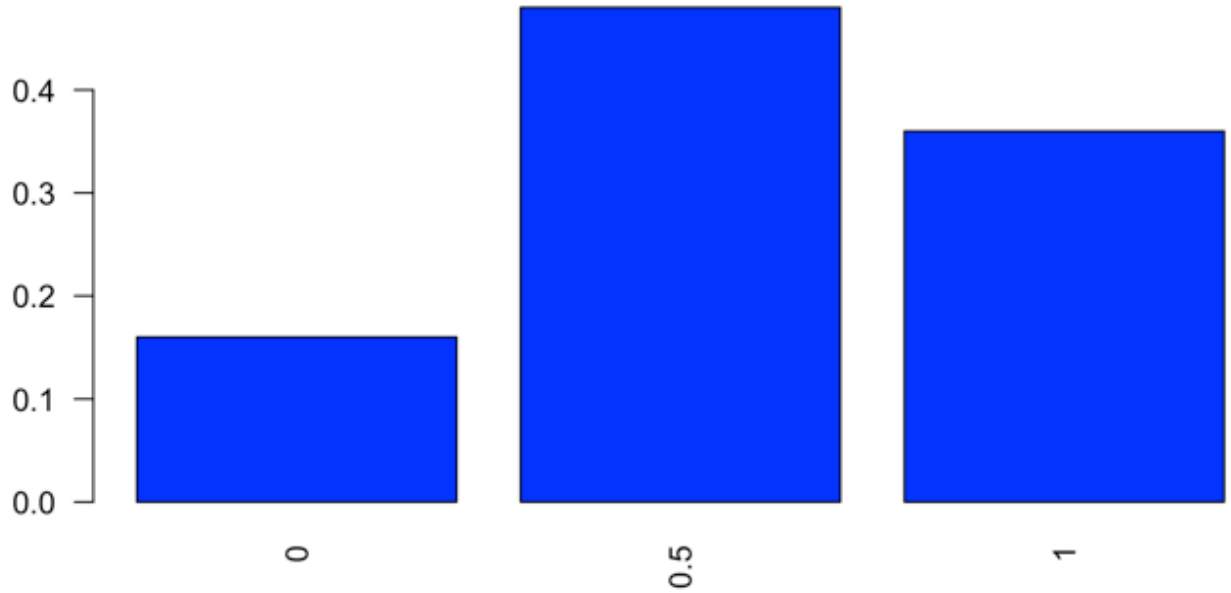
Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:

| $x$ | $P(\hat{p} = x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.16 |
| 0.5 | 0.48 |
| 1 | 0.36 |

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}) &= 0 \times 0.16 + 0.5 \times 0.48 + 1 \times 0.36 = 0.6 = p \\
Var(\hat{p}) &= E[(\hat{p} - p)^2] \\
&= 0.16 \times (0 - 0.6)^2 + 0.48 \times (0.5 - 0.6)^2 + 0.36 \times (1 - 0.6)^2 \\
&= 0.12 = \frac{0.24}{2} = \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição amostral de $\hat{p}$:



# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

$N^n = 125$ amostras possíveis.

| Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\hat{p}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1.000 |
| 2 | 1 | 1 | 0.667 |
| 3 | 1 | 1 | 1.000 |
| 4 | 1 | 1 | 0.667 |
| 5 | 1 | 1 | 1.000 |
| 1 | 2 | 1 | 0.667 |
| 2 | 2 | 1 | 0.333 |
| 3 | 2 | 1 | 0.667 |
| 4 | 2 | 1 | 0.333 |
| 5 | 2 | 1 | 0.667 |
| 1 | 3 | 1 | 1.000 |
| 2 | 3 | 1 | 0.667 |
| 3 | 3 | 1 | 1.000 |
| 4 | 3 | 1 | 0.667 |
| 5 | 3 | 1 | 1.000 |
| 1 | 4 | 1 | 0.667 |
| 2 | 4 | 1 | 0.333 |
| 3 | 4 | 1 | 0.667 |
| 4 | 4 | 1 | 0.333 |
| 5 | 4 | 1 | 0.667 |
| 1 | 5 | 1 | 1.000 |
| 2 | 5 | 1 | 0.667 |
| 3 | 5 | 1 | 1.000 |
| 4 | 5 | 1 | 0.667 |
| 5 | 5 | 1 | 1.000 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\hat{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 1 | 1 | 2 | 0.667 |
| 27 | 2 | 1 | 2 | 0.333 |
| 28 | 3 | 1 | 2 | 0.667 |
| 29 | 4 | 1 | 2 | 0.333 |
| 30 | 5 | 1 | 2 | 0.667 |
| 31 | 1 | 2 | 2 | 0.333 |
| 32 | 2 | 2 | 2 | 0.000 |
| 33 | 3 | 2 | 2 | 0.333 |
| 34 | 4 | 2 | 2 | 0.000 |
| 35 | 5 | 2 | 2 | 0.333 |
| 36 | 1 | 3 | 2 | 0.667 |
| 37 | 2 | 3 | 2 | 0.333 |
| 38 | 3 | 3 | 2 | 0.667 |
| 39 | 4 | 3 | 2 | 0.333 |
| 40 | 5 | 3 | 2 | 0.667 |
| 41 | 1 | 4 | 2 | 0.333 |
| 42 | 2 | 4 | 2 | 0.000 |
| 43 | 3 | 4 | 2 | 0.333 |
| 44 | 4 | 4 | 2 | 0.000 |
| 45 | 5 | 4 | 2 | 0.333 |
| 46 | 1 | 5 | 2 | 0.667 |
| 47 | 2 | 5 | 2 | 0.333 |
| 48 | 3 | 5 | 2 | 0.667 |
| 49 | 4 | 5 | 2 | 0.333 |
| 50 | 5 | 5 | 2 | 0.667 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\hat{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 51 | 1 | 1 | 3 | 1.000 |
| 52 | 2 | 1 | 3 | 0.667 |
| 53 | 3 | 1 | 3 | 1.000 |
| 54 | 4 | 1 | 3 | 0.667 |
| 55 | 5 | 1 | 3 | 1.000 |
| 56 | 1 | 2 | 3 | 0.667 |
| 57 | 2 | 2 | 3 | 0.333 |
| 58 | 3 | 2 | 3 | 0.667 |
| 59 | 4 | 2 | 3 | 0.333 |
| 60 | 5 | 2 | 3 | 0.667 |
| 61 | 1 | 3 | 3 | 1.000 |
| 62 | 2 | 3 | 3 | 0.667 |
| 63 | 3 | 3 | 3 | 1.000 |
| 64 | 4 | 3 | 3 | 0.667 |
| 65 | 5 | 3 | 3 | 1.000 |
| 66 | 1 | 4 | 3 | 0.667 |
| 67 | 2 | 4 | 3 | 0.333 |
| 68 | 3 | 4 | 3 | 0.667 |
| 69 | 4 | 4 | 3 | 0.333 |
| 70 | 5 | 4 | 3 | 0.667 |
| 71 | 1 | 5 | 3 | 1.000 |
| 72 | 2 | 5 | 3 | 0.667 |
| 73 | 3 | 5 | 3 | 1.000 |
| 74 | 4 | 5 | 3 | 0.667 |
| 75 | 5 | 5 | 3 | 1.000 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\hat{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 1 | 1 | 4 | 0.667 |
| 77 | 2 | 1 | 4 | 0.333 |
| 78 | 3 | 1 | 4 | 0.667 |
| 79 | 4 | 1 | 4 | 0.333 |
| 80 | 5 | 1 | 4 | 0.667 |
| 81 | 1 | 2 | 4 | 0.333 |
| 82 | 2 | 2 | 4 | 0.000 |
| 83 | 3 | 2 | 4 | 0.333 |
| 84 | 4 | 2 | 4 | 0.000 |
| 85 | 5 | 2 | 4 | 0.333 |
| 86 | 1 | 3 | 4 | 0.667 |
| 87 | 2 | 3 | 4 | 0.333 |
| 88 | 3 | 3 | 4 | 0.667 |
| 89 | 4 | 3 | 4 | 0.333 |
| 90 | 5 | 3 | 4 | 0.667 |
| 91 | 1 | 4 | 4 | 0.333 |
| 92 | 2 | 4 | 4 | 0.000 |
| 93 | 3 | 4 | 4 | 0.333 |
| 94 | 4 | 4 | 4 | 0.000 |
| 95 | 5 | 4 | 4 | 0.333 |
| 96 | 1 | 5 | 4 | 0.667 |
| 97 | 2 | 5 | 4 | 0.333 |
| 98 | 3 | 5 | 4 | 0.667 |
| 99 | 4 | 5 | 4 | 0.333 |
| 100 | 5 | 5 | 4 | 0.667 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\hat{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 101 | 1 | 1 | 5 | 1.000 |
| 102 | 2 | 1 | 5 | 0.667 |
| 103 | 3 | 1 | 5 | 1.000 |
| 104 | 4 | 1 | 5 | 0.667 |
| 105 | 5 | 1 | 5 | 1.000 |
| 106 | 1 | 2 | 5 | 0.667 |
| 107 | 2 | 2 | 5 | 0.333 |
| 108 | 3 | 2 | 5 | 0.667 |
| 109 | 4 | 2 | 5 | 0.333 |
| 110 | 5 | 2 | 5 | 0.667 |
| 111 | 1 | 3 | 5 | 1.000 |
| 112 | 2 | 3 | 5 | 0.667 |
| 113 | 3 | 3 | 5 | 1.000 |
| 114 | 4 | 3 | 5 | 0.667 |
| 115 | 5 | 3 | 5 | 1.000 |
| 116 | 1 | 4 | 5 | 0.667 |
| 117 | 2 | 4 | 5 | 0.333 |
| 118 | 3 | 4 | 5 | 0.667 |
| 119 | 4 | 4 | 5 | 0.333 |
| 120 | 5 | 4 | 5 | 0.667 |
| 121 | 1 | 5 | 5 | 1.000 |
| 122 | 2 | 5 | 5 | 0.667 |
| 123 | 3 | 5 | 5 | 1.000 |
| 124 | 4 | 5 | 5 | 0.667 |
| 125 | 5 | 5 | 5 | 1.000 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

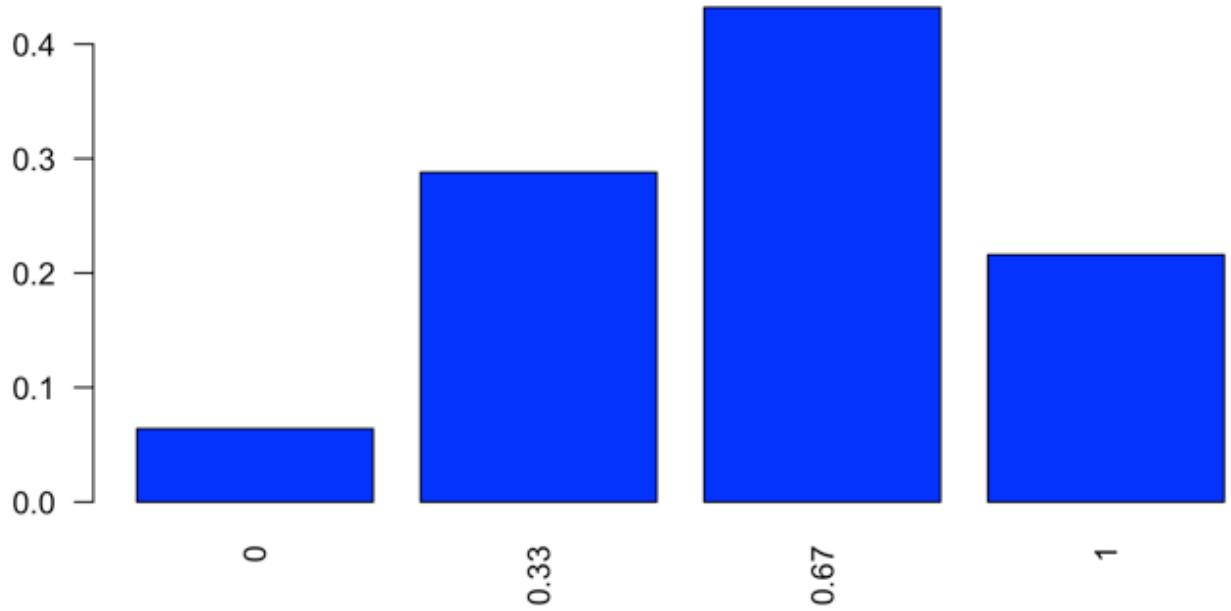
Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:

| $x$ | $P(\hat{p} = x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.064 |
| 0.333 | 0.288 |
| 0.667 | 0.432 |
| 1 | 0.216 |

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}) &= 0 \times 0.064 + 0.333 \times 0.288 + 0.667 \times 0.432 + 1 \times 0.216 \\
&= 0.6 = p \\
Var(\hat{p}) &= E[(\hat{p} - p)^2] \\
&= 0.08 = \frac{0.24}{3} = \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição amostral de $\hat{p}$:

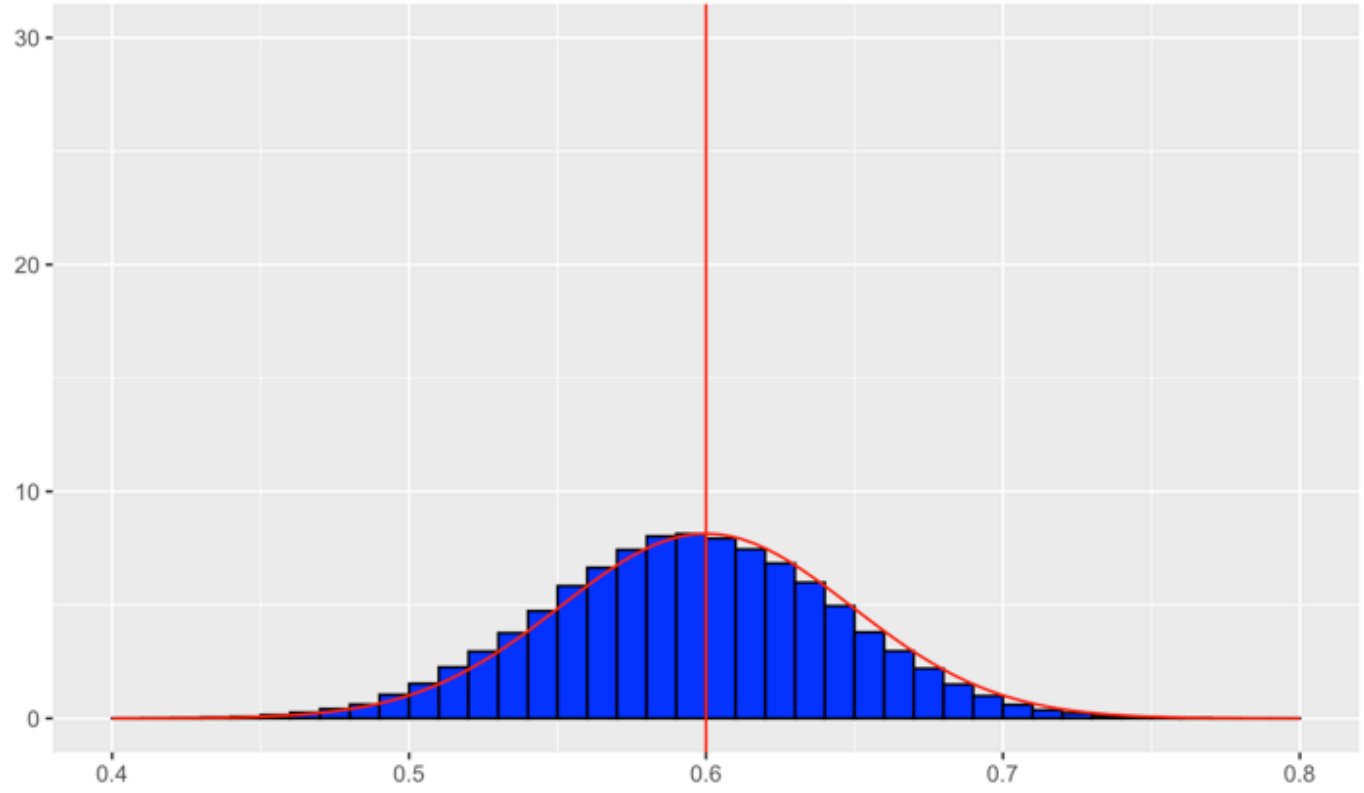


# Modo 1

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ é fixo
- Amostra aleatória de tamanho $n$
- $\hat{p}$ é v.a. (pelo processo de amostragem)
- $E(\hat{p}) = p$
- $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

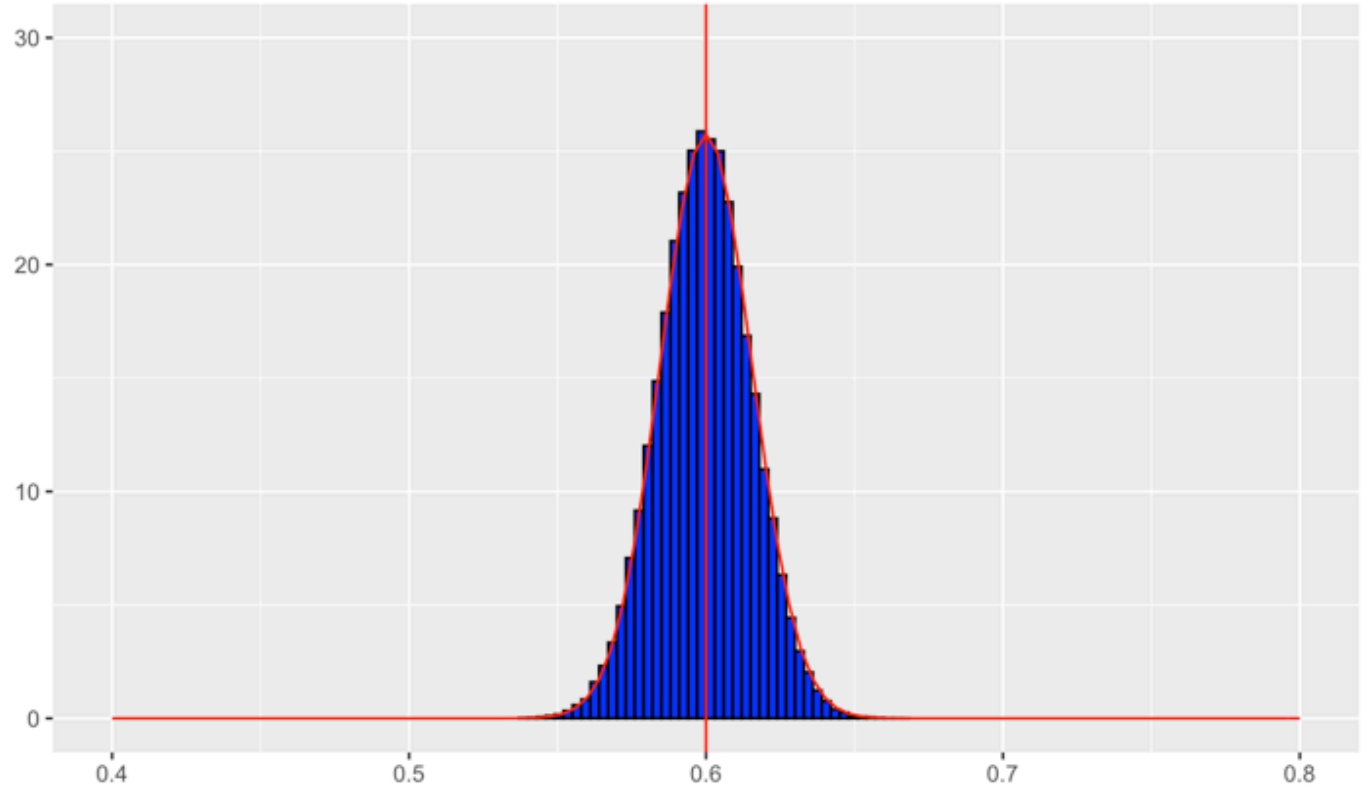
# Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 100$

$p = 0.6$. Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:



# Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 1000$

$p = 0.6$. Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:



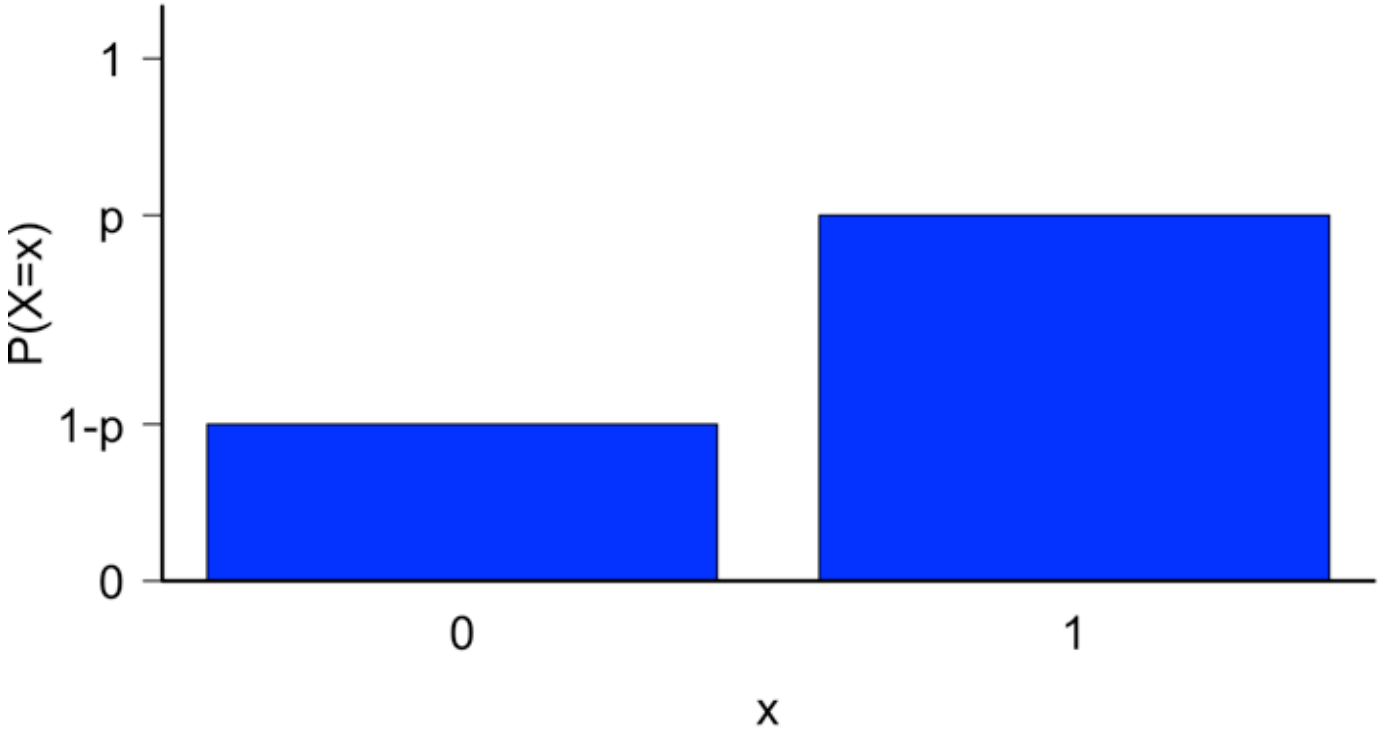
# Modo 2

Suponha que a resposta de uma pessoa da cidade sobre se vota ou não no candidato $A$ possa ser representada por uma **variável aleatória**. $X$ que assume o valor $1$ com probabilidade $p$ ou $0$ com probabilidade $1 - p$.

$$
\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(p) \\
\mathbb{E}(X) &= 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) \\
&= 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p \\
Var(X) &= \mathbb{E}[(X - p)^2] \\
&= (1 - p)^2 \times P(X = 1) + (0 - p)^2 \times P(X = 0) \\
&= p(1 - p)^2 + (1 - p)p^2 \\
&= p(1 - p)
\end{aligned}
$$

# Modo 2

Distribuição da variável $X$:



# Modo 2 - Exemplo $n = 2$

Todas as combinações possíveis de amostras com $n = 2$ são:

| Possibilidades | $(X_1 = 1, X_2 = 1)$ | $(X_1 = 1, X_2 = 0)$ | $(X_1 = 0, X_2 = 1)$ | $(X_1 = 0, X_2 = 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| $P(X_1 = i, X_2 = j)$ | $p^2$ | $p(1-p)$ | $(1-p)p$ | $(1-p)^2$ |

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = 1 \times p^2 + 0.5 \times p(1-p) + 0.5 \times (1-p)p + 0 \times (1-p)^2 = p$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{p}) &= \mathbb{E}[(\hat{p} - p)^2] \\ &= (1-p)^2 \times p^2 + (0.5-p)^2 p(1-p) + (0.5-p)^2 (1-p)p + (0-p)^2 (1-p)^2 = \frac{p(1-p)}{2} \end{aligned}$$

Note que: $\mathbb{E}(\hat{p}) = p = \mathbb{E}(X)$ e $Var(\hat{p}) = \frac{Var(X)}{n}$.

# Resultado

Seja $X$ uma v.a. com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ e $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de $X$.

A média amostral

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem as seguintes propriedades:

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(propriedade de linearidade da esperança e da variância, esta última em caso de independência)

Ou seja, embora $\mu$ seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da média amostral é $\mu$.

Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão da média amostral para estimar $\mu$ fica cada vez menor, pois $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$ é inversamente proporcional ao tamanho amostral $n$.

# Resultado

Seja $X$ uma v.a. com distribuição de Bernoulli com parâmetro $p$. Sabe-se que $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$.

A proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem as seguintes propriedades:

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = p \qquad \text{e} \qquad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(propriedade de linearidade da esperança e da variância, esta última em caso de independência)

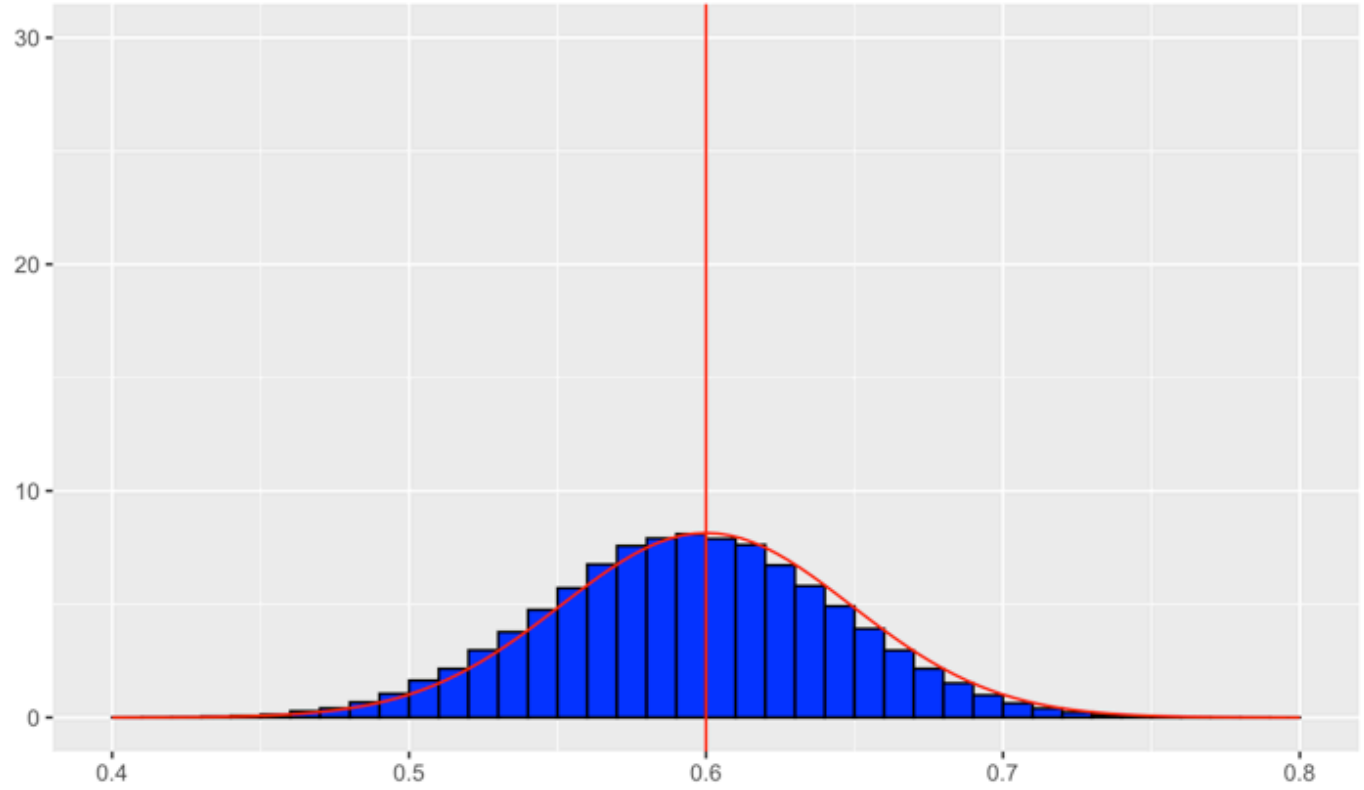
Ou seja, embora $p$ seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da proporção amostral é $p$.

Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão de $\hat{p}$ para estimar $p$ fica cada vez menor, pois $Var(\hat{p}) = p(1-p)/n$ é inversamente proporcional ao tamanho amostral $n$.

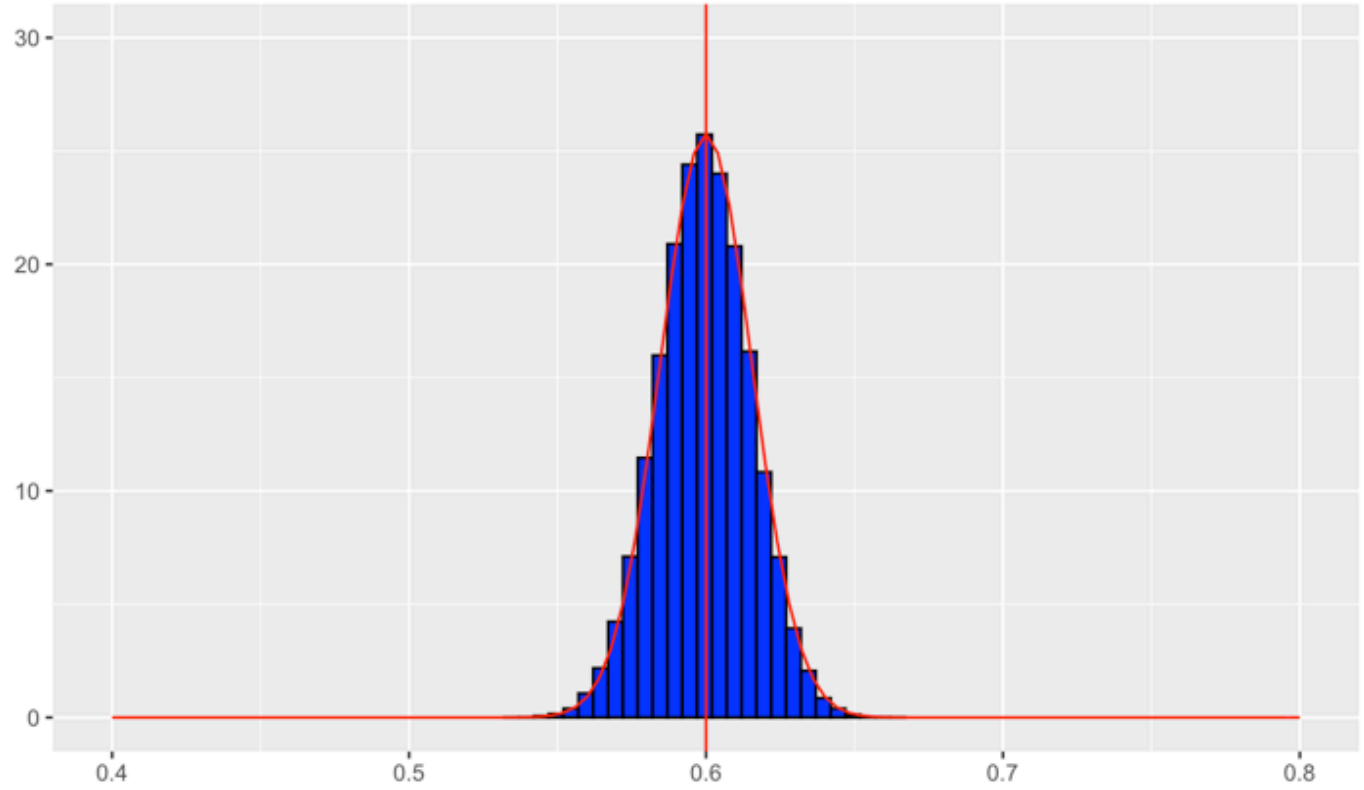
# Modo 2

- $X_i \sim Bernoulli(p)$ é v.a. (o voto ou não em $A$ é considerado uma v.a.)
- Amostra aleatória de tamanho $n$
- $\hat{p}$ é v.a. (é combinação linear de v.a.'s)
- $E(\hat{p}) = p$
- $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

# Modo 2 - Exemplo $n = 100$



# Modo 2 - Exemplo $n = 1000$



# Resumo dos exemplos

- Modo 1: repostas são “fixas”, com média populacional $p$ e variância populacional $p(1-p)$.
- Modo 2: respostas são v.a.’s $X \sim Bernoulli(p)$, $E(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$.
- Em ambos os casos, a partir do momento que retiro uma amostra aleatória de tamanho $n$, temos as mesmas propriedades e comportamento para a proporção amostral $\hat{p}$: $E(\hat{p}) = p$ e $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

E, conforme $n$ aumenta, vimos nos gráficos que: $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

# Estimar uma média: Salários

- Quero saber o salário médio das pessoas de uma certa cidade (parâmetro populacional de interesse).
- Posso usar uma amostra e estimar usando a média amostral.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Posso pensar no problema de duas formas: Modo 1 e Modo 2.

# Modo 1

- Cidade com $N$ pessoas.
- $X_i$ é o salário da pessoa $i$.
- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$: respostas de toda a população.
- Média populacional: $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$
- Variância populacional: $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$

# Modo 1

- $\mu$ = salário médio da população.
- $\sigma^2$ é a variância da população.
- Coletamos uma amostra aleatória de tamanho $n$.
- $\bar{X}$: média salarial na amostra.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Se outra pessoa também coleta uma amostra aleatória de tamanho $n$ e calcula $\bar{X}$ teremos o mesmo valor?

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

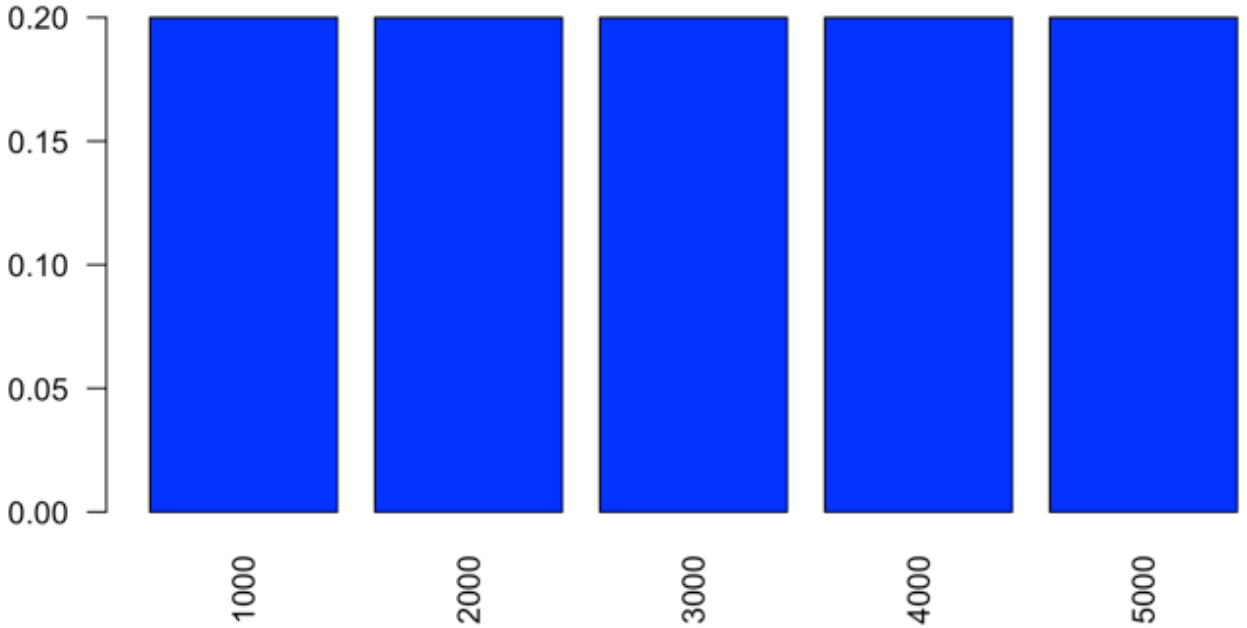
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_5) = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = 3000$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2 = 2000000$$

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Gráfico de barras (proporção) dos dados populacionais:



# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$N^n = 25$ amostras possíveis.

| Primeira pessoa | Segunda pessoa | $\bar{X}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1000 |
| 2 | 1 | 1500 |
| 3 | 1 | 2000 |
| 4 | 1 | 2500 |
| 5 | 1 | 3000 |
| 1 | 2 | 1500 |
| 2 | 2 | 2000 |
| 3 | 2 | 2500 |
| 4 | 2 | 3000 |
| 5 | 2 | 3500 |
| 1 | 3 | 2000 |
| 2 | 3 | 2500 |
| 3 | 3 | 3000 |
| 4 | 3 | 3500 |
| 5 | 3 | 4000 |
| 1 | 4 | 2500 |
| 2 | 4 | 3000 |
| 3 | 4 | 3500 |
| 4 | 4 | 4000 |
| 5 | 4 | 4500 |
| 1 | 5 | 3000 |
| 2 | 5 | 3500 |
| 3 | 5 | 4000 |
| 4 | 5 | 4500 |
| 5 | 5 | 5000 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:

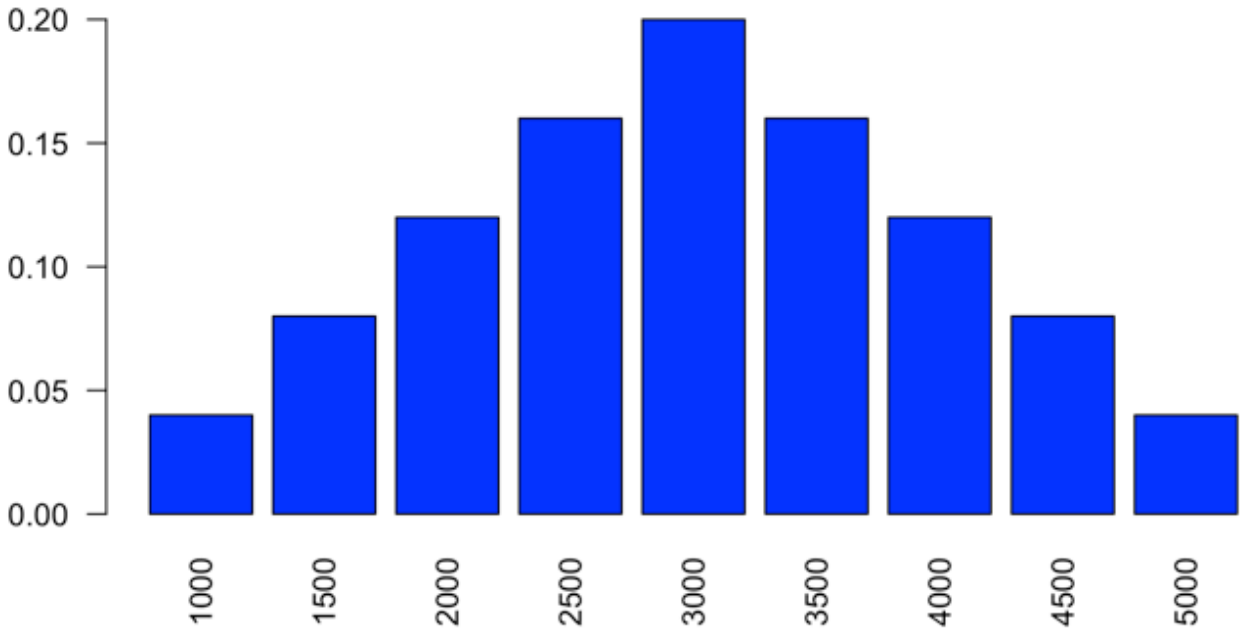
| $x$ | $P(\bar{X} = x)$ |
|---|---|
| 1000 | 0.04 |
| 1500 | 0.08 |
| 2000 | 0.12 |
| 2500 | 0.16 |
| 3000 | 0.20 |
| 3500 | 0.16 |
| 4000 | 0.12 |
| 4500 | 0.08 |
| 5000 | 0.04 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$$
\begin{aligned}
E(\bar{X}) &= 3000 = \mu \\
Var(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - \mu)^2] = 10^6 \\
&= \frac{2000000}{2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição amostral de $\bar{X}$:



# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

$N^n = 125$ amostras possíveis.

| Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1000.000 |
| 2 | 1 | 1 | 1333.333 |
| 3 | 1 | 1 | 1666.667 |
| 4 | 1 | 1 | 2000.000 |
| 5 | 1 | 1 | 2333.333 |
| 1 | 2 | 1 | 1333.333 |
| 2 | 2 | 1 | 1666.667 |
| 3 | 2 | 1 | 2000.000 |
| 4 | 2 | 1 | 2333.333 |
| 5 | 2 | 1 | 2666.667 |
| 1 | 3 | 1 | 1666.667 |
| 2 | 3 | 1 | 2000.000 |
| 3 | 3 | 1 | 2333.333 |
| 4 | 3 | 1 | 2666.667 |
| 5 | 3 | 1 | 3000.000 |
| 1 | 4 | 1 | 2000.000 |
| 2 | 4 | 1 | 2333.333 |
| 3 | 4 | 1 | 2666.667 |
| 4 | 4 | 1 | 3000.000 |
| 5 | 4 | 1 | 3333.333 |
| 1 | 5 | 1 | 2333.333 |
| 2 | 5 | 1 | 2666.667 |
| 3 | 5 | 1 | 3000.000 |
| 4 | 5 | 1 | 3333.333 |
| 5 | 5 | 1 | 3666.667 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 1 | 1 | 2 | 1333.333 |
| 27 | 2 | 1 | 2 | 1666.667 |
| 28 | 3 | 1 | 2 | 2000.000 |
| 29 | 4 | 1 | 2 | 2333.333 |
| 30 | 5 | 1 | 2 | 2666.667 |
| 31 | 1 | 2 | 2 | 1666.667 |
| 32 | 2 | 2 | 2 | 2000.000 |
| 33 | 3 | 2 | 2 | 2333.333 |
| 34 | 4 | 2 | 2 | 2666.667 |
| 35 | 5 | 2 | 2 | 3000.000 |
| 36 | 1 | 3 | 2 | 2000.000 |
| 37 | 2 | 3 | 2 | 2333.333 |
| 38 | 3 | 3 | 2 | 2666.667 |
| 39 | 4 | 3 | 2 | 3000.000 |
| 40 | 5 | 3 | 2 | 3333.333 |
| 41 | 1 | 4 | 2 | 2333.333 |
| 42 | 2 | 4 | 2 | 2666.667 |
| 43 | 3 | 4 | 2 | 3000.000 |
| 44 | 4 | 4 | 2 | 3333.333 |
| 45 | 5 | 4 | 2 | 3666.667 |
| 46 | 1 | 5 | 2 | 2666.667 |
| 47 | 2 | 5 | 2 | 3000.000 |
| 48 | 3 | 5 | 2 | 3333.333 |
| 49 | 4 | 5 | 2 | 3666.667 |
| 50 | 5 | 5 | 2 | 4000.000 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| 51 | 1 | 1 | 3 | 1666.667 |
| 52 | 2 | 1 | 3 | 2000.000 |
| 53 | 3 | 1 | 3 | 2333.333 |
| 54 | 4 | 1 | 3 | 2666.667 |
| 55 | 5 | 1 | 3 | 3000.000 |
| 56 | 1 | 2 | 3 | 2000.000 |
| 57 | 2 | 2 | 3 | 2333.333 |
| 58 | 3 | 2 | 3 | 2666.667 |
| 59 | 4 | 2 | 3 | 3000.000 |
| 60 | 5 | 2 | 3 | 3333.333 |
| 61 | 1 | 3 | 3 | 2333.333 |
| 62 | 2 | 3 | 3 | 2666.667 |
| 63 | 3 | 3 | 3 | 3000.000 |
| 64 | 4 | 3 | 3 | 3333.333 |
| 65 | 5 | 3 | 3 | 3666.667 |
| 66 | 1 | 4 | 3 | 2666.667 |
| 67 | 2 | 4 | 3 | 3000.000 |
| 68 | 3 | 4 | 3 | 3333.333 |
| 69 | 4 | 4 | 3 | 3666.667 |
| 70 | 5 | 4 | 3 | 4000.000 |
| 71 | 1 | 5 | 3 | 3000.000 |
| 72 | 2 | 5 | 3 | 3333.333 |
| 73 | 3 | 5 | 3 | 3666.667 |
| 74 | 4 | 5 | 3 | 4000.000 |
| 75 | 5 | 5 | 3 | 4333.333 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 1 | 1 | 4 | 2000.000 |
| 77 | 2 | 1 | 4 | 2333.333 |
| 78 | 3 | 1 | 4 | 2666.667 |
| 79 | 4 | 1 | 4 | 3000.000 |
| 80 | 5 | 1 | 4 | 3333.333 |
| 81 | 1 | 2 | 4 | 2333.333 |
| 82 | 2 | 2 | 4 | 2666.667 |
| 83 | 3 | 2 | 4 | 3000.000 |
| 84 | 4 | 2 | 4 | 3333.333 |
| 85 | 5 | 2 | 4 | 3666.667 |
| 86 | 1 | 3 | 4 | 2666.667 |
| 87 | 2 | 3 | 4 | 3000.000 |
| 88 | 3 | 3 | 4 | 3333.333 |
| 89 | 4 | 3 | 4 | 3666.667 |
| 90 | 5 | 3 | 4 | 4000.000 |
| 91 | 1 | 4 | 4 | 3000.000 |
| 92 | 2 | 4 | 4 | 3333.333 |
| 93 | 3 | 4 | 4 | 3666.667 |
| 94 | 4 | 4 | 4 | 4000.000 |
| 95 | 5 | 4 | 4 | 4333.333 |
| 96 | 1 | 5 | 4 | 3333.333 |
| 97 | 2 | 5 | 4 | 3666.667 |
| 98 | 3 | 5 | 4 | 4000.000 |
| 99 | 4 | 5 | 4 | 4333.333 |
| 100 | 5 | 5 | 4 | 4666.667 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

| | Pessoa amostrada 1 | Pessoa amostrada 2 | Pessoa amostrada 3 | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| 101 | 1 | 1 | 5 | 2333.333 |
| 102 | 2 | 1 | 5 | 2666.667 |
| 103 | 3 | 1 | 5 | 3000.000 |
| 104 | 4 | 1 | 5 | 3333.333 |
| 105 | 5 | 1 | 5 | 3666.667 |
| 106 | 1 | 2 | 5 | 2666.667 |
| 107 | 2 | 2 | 5 | 3000.000 |
| 108 | 3 | 2 | 5 | 3333.333 |
| 109 | 4 | 2 | 5 | 3666.667 |
| 110 | 5 | 2 | 5 | 4000.000 |
| 111 | 1 | 3 | 5 | 3000.000 |
| 112 | 2 | 3 | 5 | 3333.333 |
| 113 | 3 | 3 | 5 | 3666.667 |
| 114 | 4 | 3 | 5 | 4000.000 |
| 115 | 5 | 3 | 5 | 4333.333 |
| 116 | 1 | 4 | 5 | 3333.333 |
| 117 | 2 | 4 | 5 | 3666.667 |
| 118 | 3 | 4 | 5 | 4000.000 |
| 119 | 4 | 4 | 5 | 4333.333 |
| 120 | 5 | 4 | 5 | 4666.667 |
| 121 | 1 | 5 | 5 | 3666.667 |
| 122 | 2 | 5 | 5 | 4000.000 |
| 123 | 3 | 5 | 5 | 4333.333 |
| 124 | 4 | 5 | 5 | 4666.667 |
| 125 | 5 | 5 | 5 | 5000.000 |

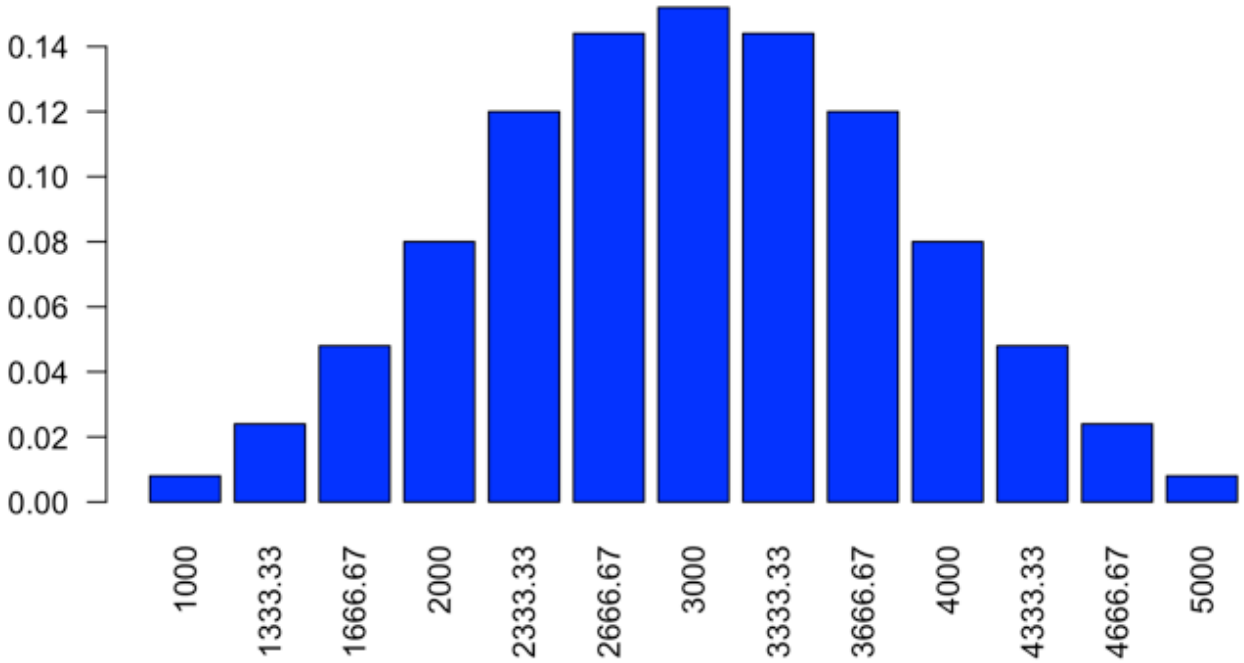
# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:

| $x$ | $P(\bar{X} = x)$ |
|---|---|
| 1000 | 0.008 |
| 1333.333 | 0.024 |
| 1666.667 | 0.048 |
| 2000 | 0.080 |
| 2333.333 | 0.120 |
| 2666.667 | 0.144 |
| 3000 | 0.152 |
| 3333.333 | 0.144 |
| 3666.667 | 0.120 |
| 4000 | 0.080 |
| 4333.333 | 0.048 |
| 4666.667 | 0.024 |
| 5000 | 0.008 |

# Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição amostral de $\bar{X}$:

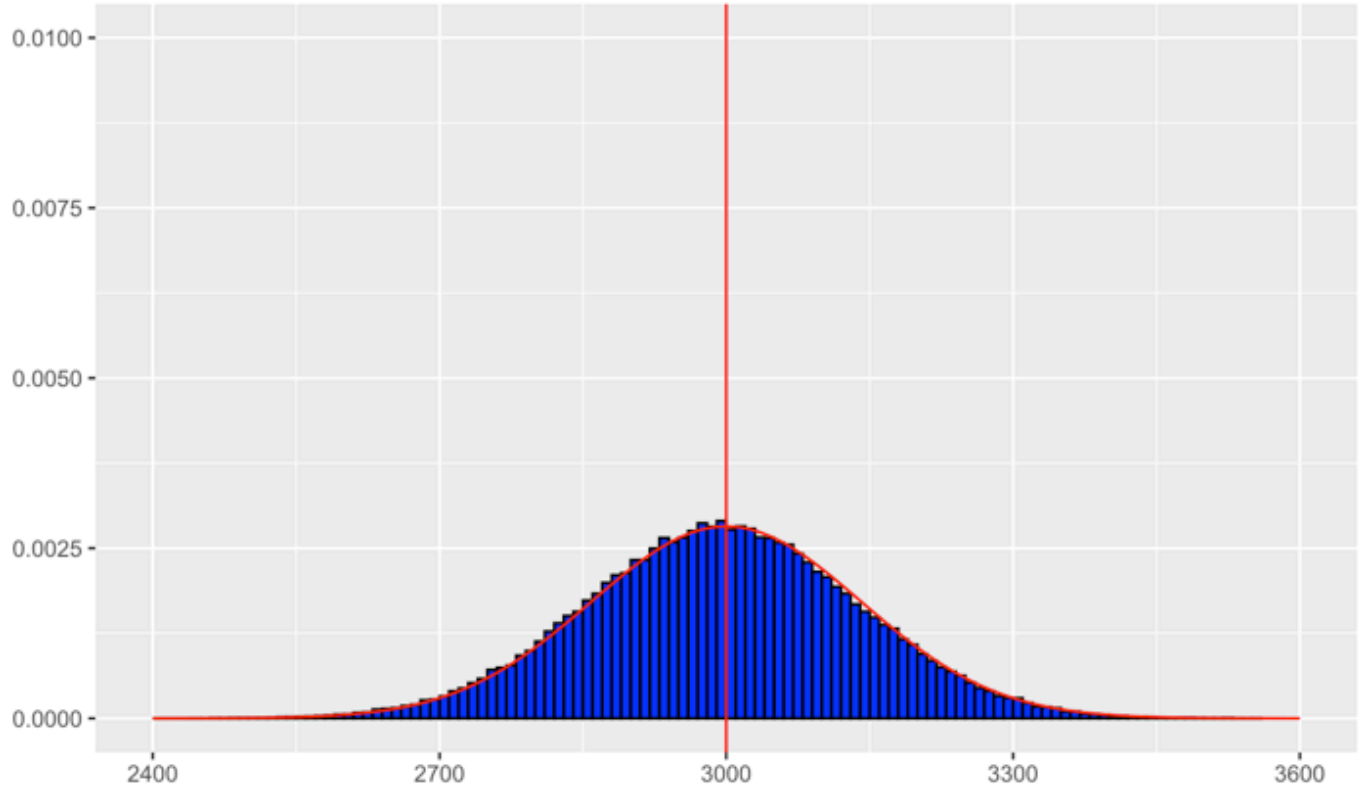


# Modo 1

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ é fixo
- Amostra aleatória de tamanho $n$
- $\bar{X}$ é v.a.
- $E(\bar{X}) = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

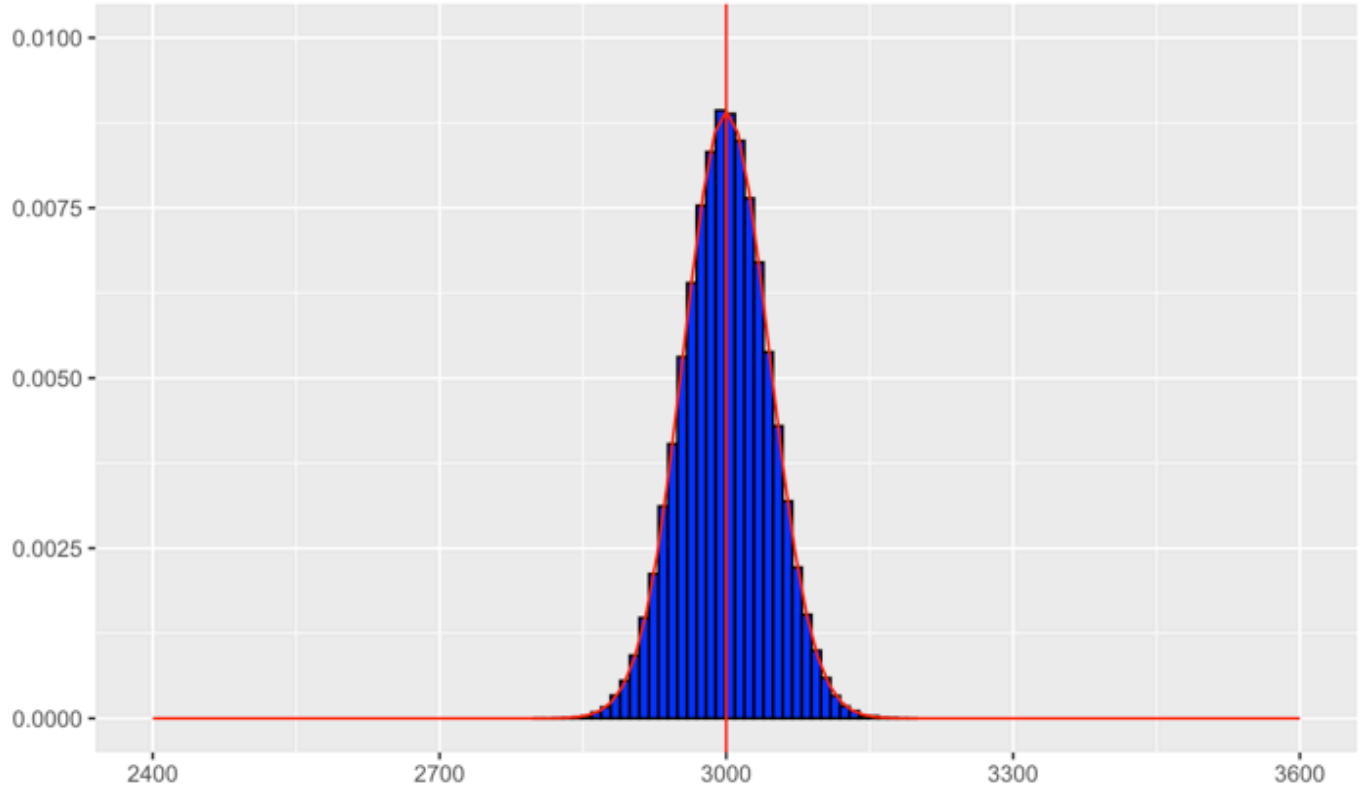
# Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 100$

$\mu = 3000$. Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:



# Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 1000$

$\mu = 3000$. Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:



# Modo 2

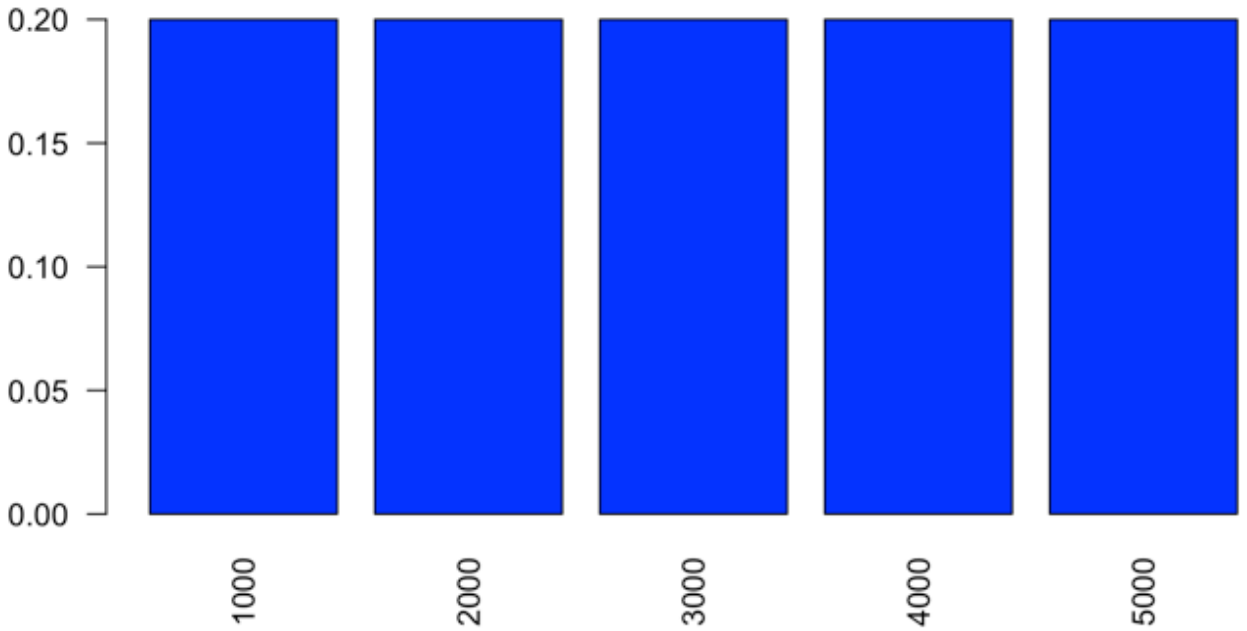
Suponha que o salário de uma pessoa possa ser representado por uma **variável aleatória** uniforme discreta assumindo os valores 1000,2000, 3000, 4000 ou 5000.

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1000 + 2000 + 3000 + 4000 + 5000}{5} = 3000$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{5}[&(1000 - 3000)^2 + (2000 - 3000)^2 + (3000 - 3000)^2 \\ &+ (4000 - 3000)^2 + (5000 - 3000)^2] \\ &= 2000000\end{aligned}$$

# Modo 2

Distribuição da variável $X$ (do salário de cada indivíduo da população):



# Modo 2 - Exemplo $n = 2$

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = E(X) = \mu = 3000$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = 1000000$$

(propriedades de linearidade da esperança e variância (a.a.))

# Resultado

Seja $X$ uma v.a. com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ e $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de $X$.

A média amostral

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem as seguintes propriedades:

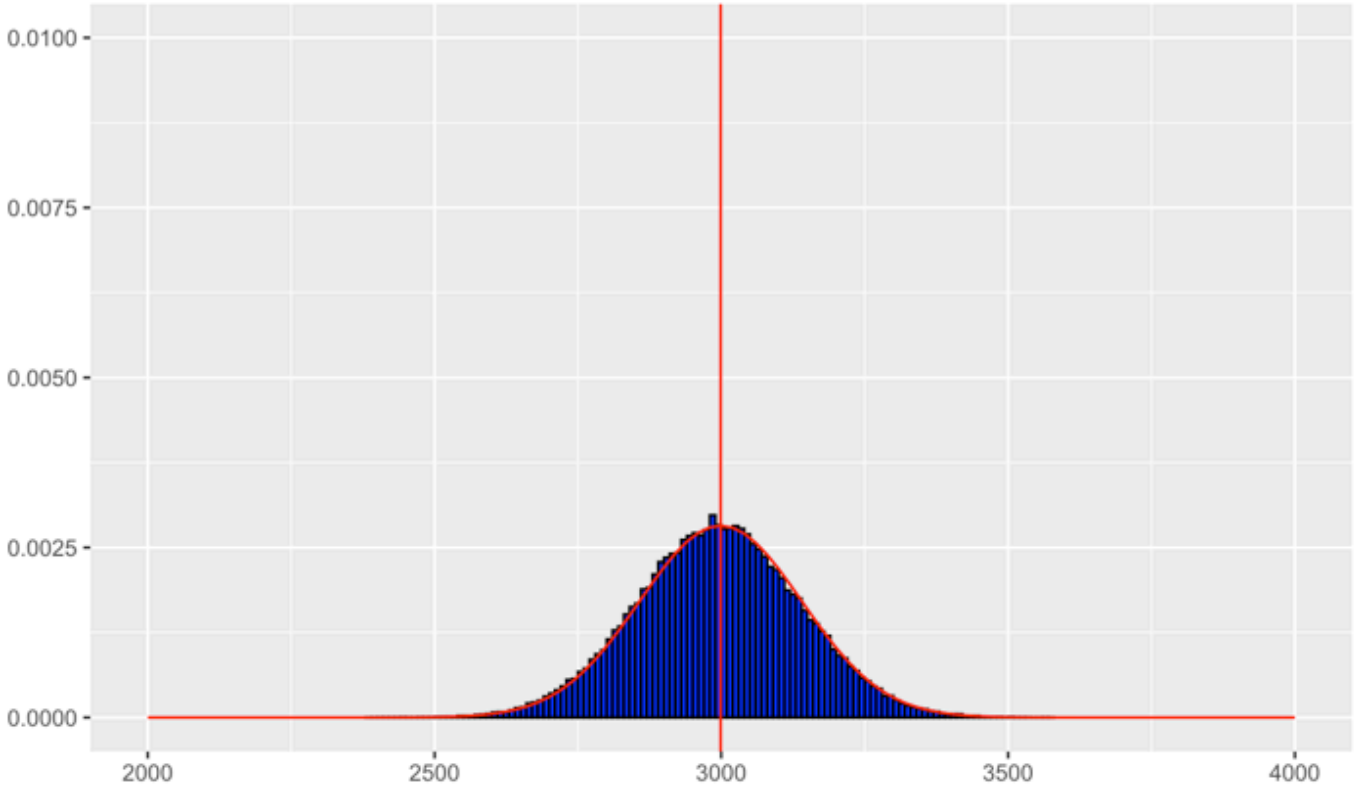
$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(propriedade de linearidade da esperança e da variância, esta última em caso de independência)

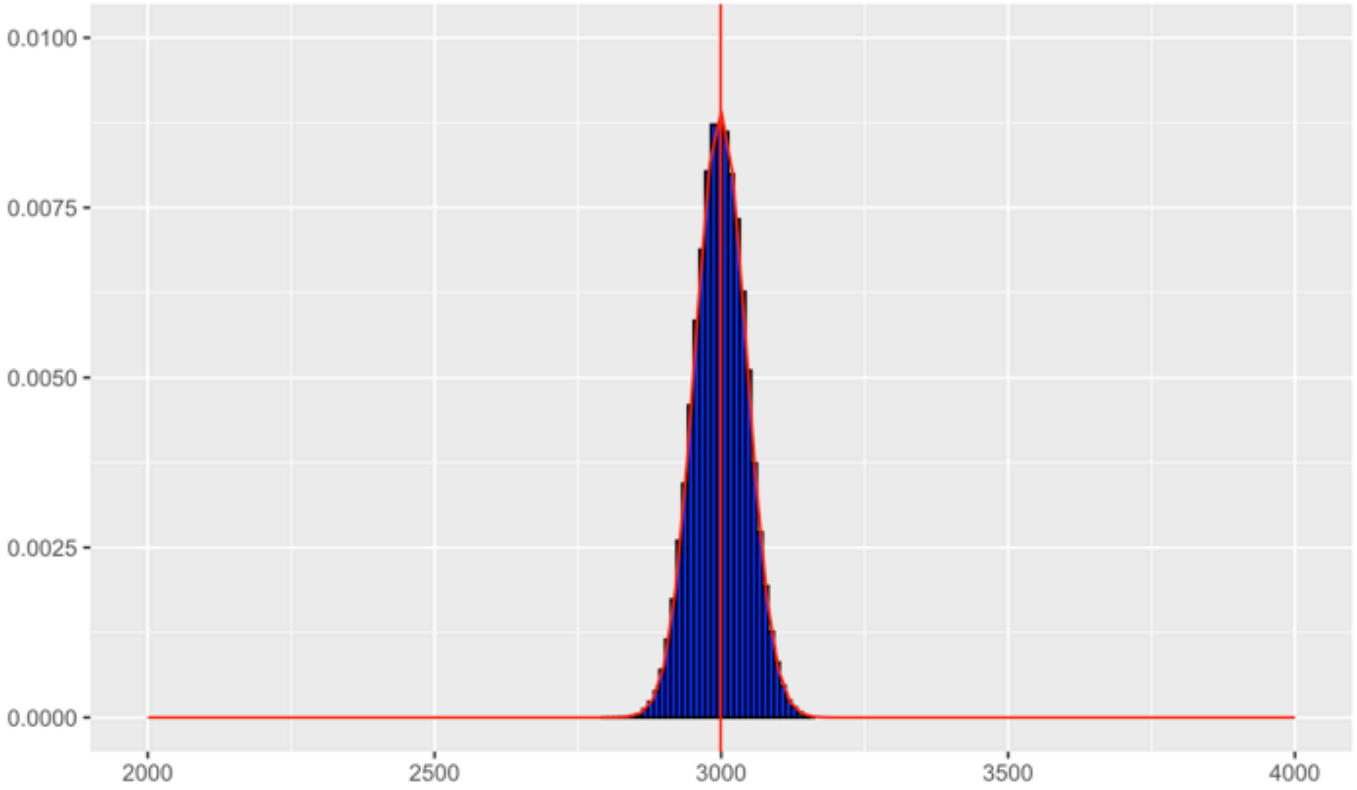
Ou seja, embora $\mu$ seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da média amostral é $\mu$.

Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão da média amostral para estimar $\mu$ fica cada vez menor, pois $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$ é inversamente proporcional ao tamanho amostral $n$.

# Modo 2 - Exemplo $n = 100$



# Modo 2 - Exemplo $n = 1000$



# Resultados

Temos uma população com média (proporção) $\mu$ ($p$) e variância $\sigma^2$ desconhecida.

Retira-se uma amostra aleatória de tamanho $n$ e calcula-se a média (ou proporção) amostral $\bar{X}$ (ou $\hat{p}$) para estimar o parâmetro populacional desconhecido $\mu$ (ou $p$).

Temos as propriedades:

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(\hat{p}) = p \qquad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

##

E, conforme $n$ aumenta, pelos gráficos, *parece* que a distribuição amostral de $\bar{X}$ e $\hat{p}$ se aproxima da normal:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

# Teorema do Limite Central

Temos os resultados:

- $\bar{X}$: $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- $\hat{p}$: $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$ e $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

No exemplos, vimos também a distribuição amostral de $\bar{X}$ ou $\hat{p}$, mas isso só foi possível porque tínhamos informação de todos os valores possíveis na população.

Os exemplos anteriores foram casos hipotéticos apenas para demonstrar como $\bar{X}$ e $\hat{p}$ se comportam quando realizamos a amostragem.

Na prática, não teremos informações suficientes para de fato descrevermos de fato a distribuição de $\bar{X}$ e $\hat{p}$ (se tivermos, nem é preciso fazer amostragem!)

# Teorema do Limite Central

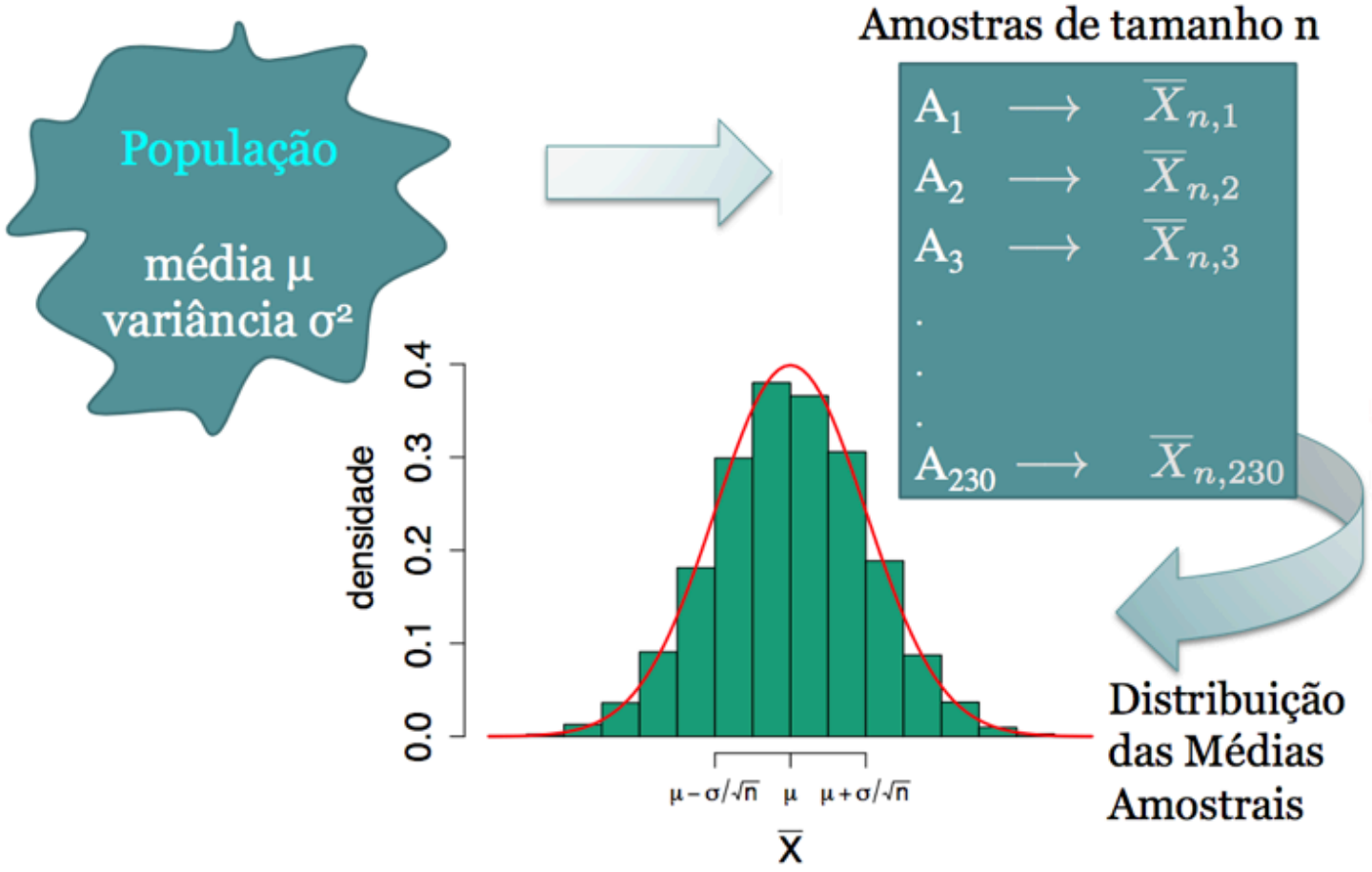
**Resultado**

- Para uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ coletada de uma população com média $\mu$ e variância $\sigma^2$
- a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ aproxima-se de uma **distribuição Normal** de média $\mu$ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando $n$ for suficientemente grande:

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

# Teorema do Limite Central



# Exemplo

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho $n$ tal que $X \sim Exp(2)$:

$$f_{X_i}(x) = 2e^{-2x}, \qquad \text{para } x \geq 0$$

Então $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ e $Var(X_i) = \frac{1}{4}$.

Suponha que $X_i$ modela o tempo de vida de um transistor em horas. Os tempos de vida de 100 transistores são coletados. Desejamos estudar a variável aleatória $\bar{X}_{100}$ (média amostral de uma amostra de tamanho 100).

Sabemos:

$$\mathbb{E}(\bar{X}_{100}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{100}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$$

# Exemplo

$$Var(\bar{X}_{100}) = \frac{1/4}{100} = \frac{1}{400}$$

Pelo TLC, temos que: $\bar{X}_n \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right)$

# Exemplo - lançamento de dados

$X =$ resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x) = P(X = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + \ldots + (6 - 3.5)^2] = \frac{17.5}{6} = 2.92$$

- $X_i$: resultado do $i$-ésimo lançamento de um dado honesto.
- $X_i$ tem distribuição uniforme discreta.
- $\mu = \mathbb{E}(X_i) = 3.5$ e $\sigma^2 = Var(X_i) = 2.92$

# Exemplo - lançamento de dados

Se temos uma amostra aleatória simples de tamanho $n$: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, pelo TLC sabemos que a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ é aproximadamente Normal$\left(3.5, \frac{2.92}{n}\right)$.

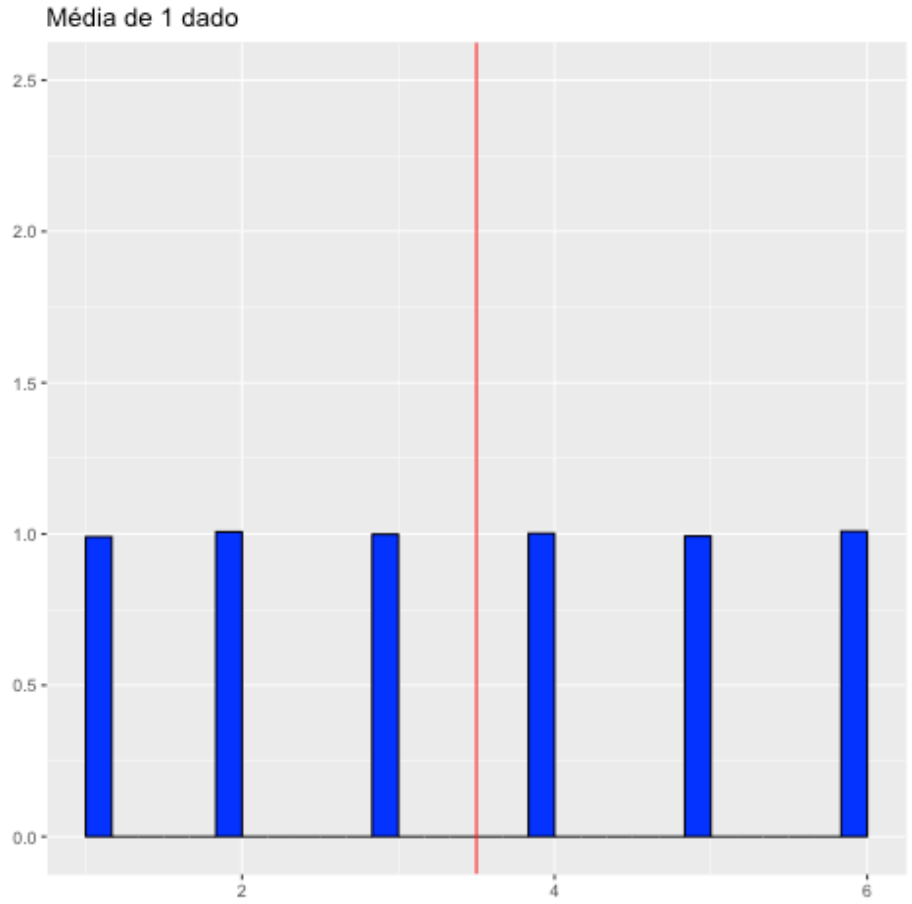
O primeiro histograma a seguir mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar o resultado do lançamento de 1 dado. Repare que é muito próximo de uma distribuição uniforme discreta (chance 1/6 para cada resultado).

O segundo histograma mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 2 dados.

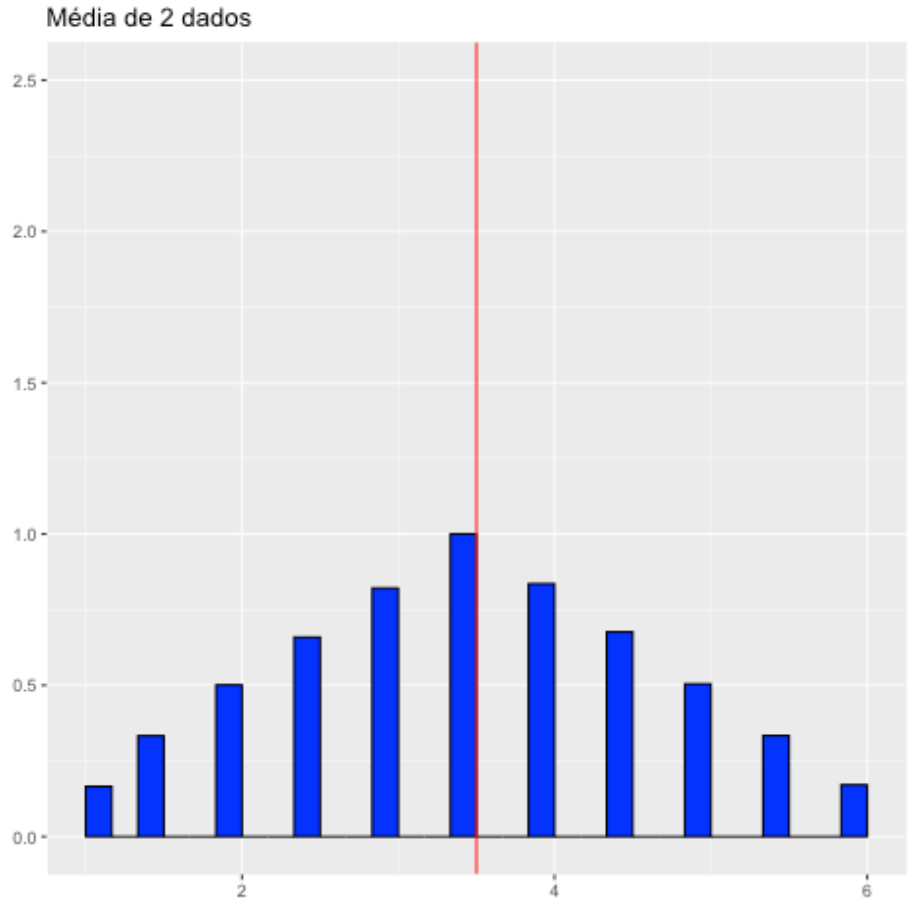
O último histograma mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 100 dados.

Repare que conforme o número de dados (tamanho amostral) aumenta, a distribuição da média amostral se aproxima da distribuição normal com média 3.5 e variância cada vez menor (2.92/n).

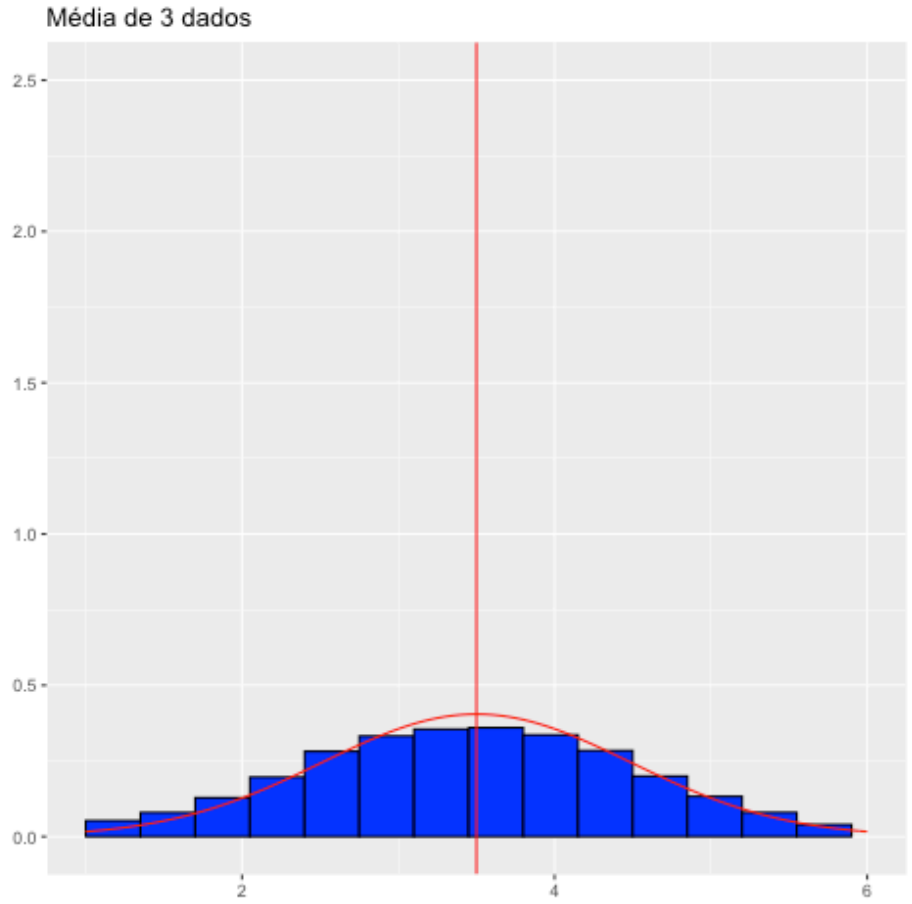
# Exemplo - lançamento de dados



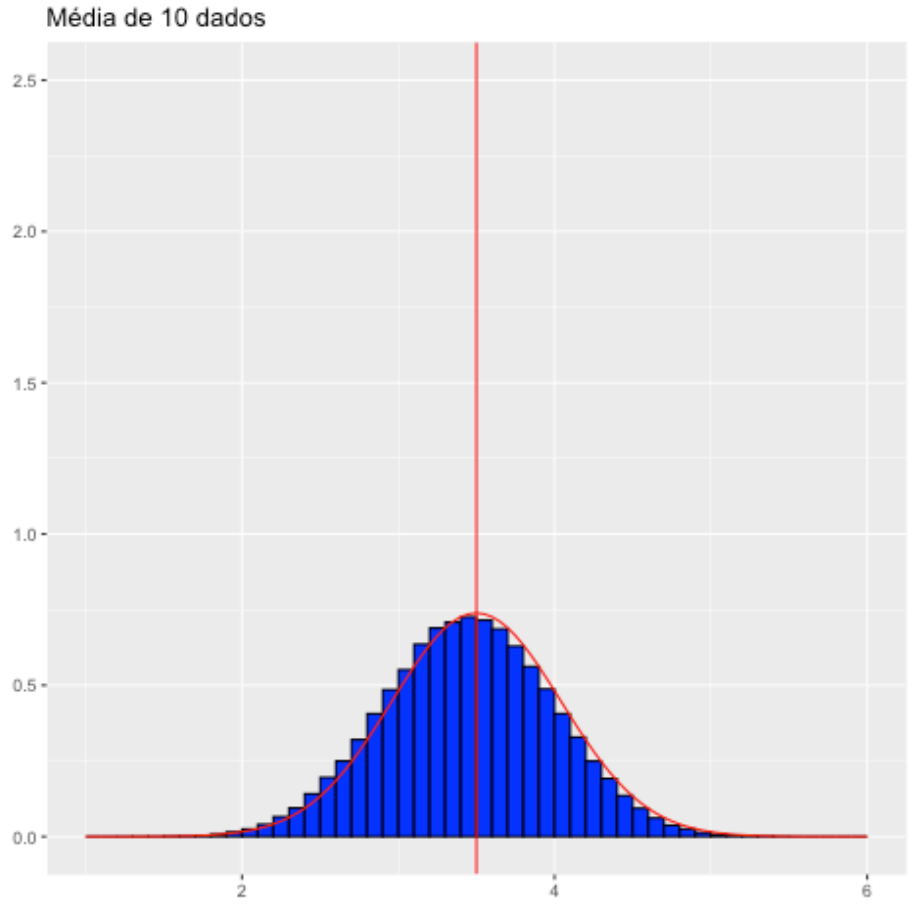
# Exemplo - lançamento de dados



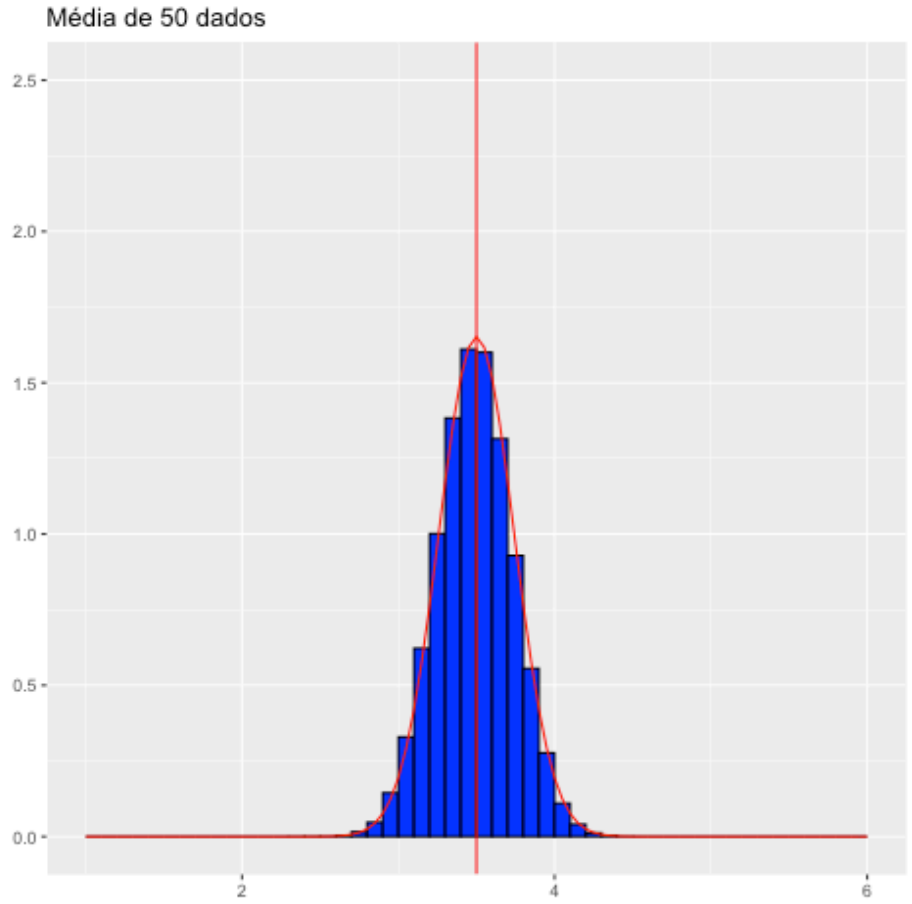
# Exemplo - lançamento de dados



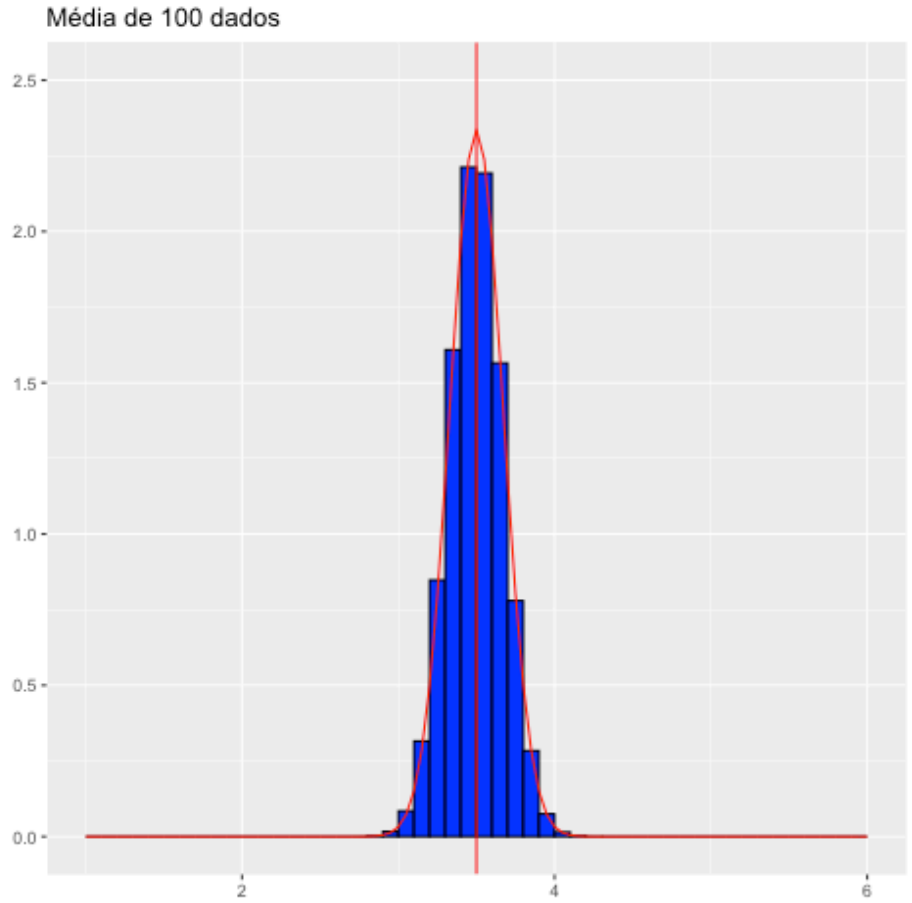
# Exemplo - lançamento de dados



# Exemplo - lançamento de dados



# Exemplo - lançamento de dados



# Teorema do Limite Central (TLC)

Você pode verificar o comportamento de $\bar{X}$ para várias distribuições de $X$:

TCL para proporções

TCL para médias

# Aproximação da Binomial pela Normal

# Aproximação da Binomial pela Normal

Consideremos uma população em que a proporção de indivíduos portadores de uma certa característica seja $p$.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo i possui a característica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Veja que $X_i \sim Bernoulli(p)$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se as observações são independentes: $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim Bin(n, p)$.

Após a coleta de uma amostra aleatória simples de $n$ indivíduos, podemos considerar que um estimador de $p$ é dado por:

$$\widehat{p} = \frac{S_n}{n} \quad \text{(média amostral)}.$$

# Aproximação da Binomial pela Normal

Utilizando a distribuição exata (n pequeno):

$$P\left(\widehat{p} = \frac{k}{n}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = P\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Utilizando a aproximação para a Normal (n grande):

$$\widehat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

# Exemplo

Se $p$ for a proporção de fumantes no estado de SP ($p = 0.2$) e tivermos coletado uma amostra aleatória simples de 500 indivíduos:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo i é fumante} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que termos observado não mais que 25% de fumantes na amostra?

O estimador de $p$ é: $\widehat{p} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} X_i$.

Pela aproximação Normal, $\widehat{p} \sim N\left(0.2, \frac{0.2 \times 0.8}{500}\right) = N\left(0.2, 0.00032\right)$

$$P\left(\widehat{p} \leq 0.25\right) = P\left(Z \leq 2.795\right) = \Phi\left(2.795\right) = 0.9974$$

# Aproximação da Binomial pela Normal

Se $\quad \hat{p} = \frac{S_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad S_n = n\hat{p}.$

Quando $n$ é grande o suficiente: $\quad \hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Nesse caso, qual a distribuição de $S_n$?

Vimos que $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim Bin(n, p)$

Pelas propriedades da distribuição Normal:

$$S_n = n\hat{p} \sim N\left(np, np(1-p)\right)$$

Portanto, quando $n$ é grande, $Bin(n, p) \approx N\left(np, np(1-p)\right)$

# Exemplo

Seja $X \sim Bin(100, 0.4)$.

Qual a probabilidade de $X$ ser menor ou igual a $50$?

Sabemos que:

- $\mathbb{E}(X) = 100 \times 0.4 = 40$
- $Var(X) = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$

Como $n$ é grande, podemos usar a aproximação $X \approx N(40, 24)$. Portanto,

$$P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{\sqrt{24}}\right) \approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\right) = \Phi(2.04) \approx 0.9793$$

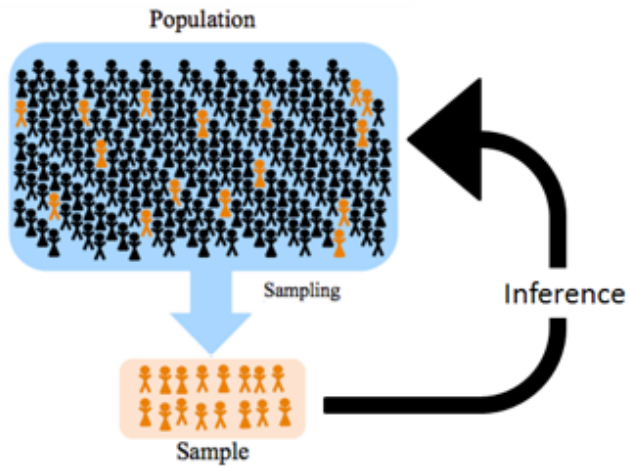
# Fundamentos de Inferência

# Introdução

Um dos principais objetivos da Estatística é tirar conclusões a partir dos dados.

Dados em geral consistem de uma amostra de elementos de uma população de interesse.

Usar a amostra para tirar conclusões sobre a população.

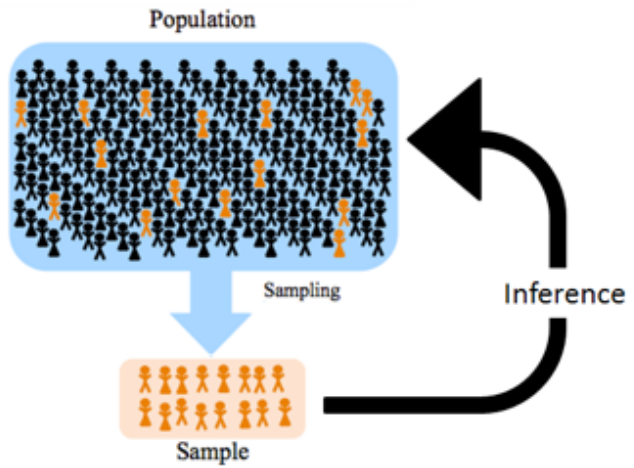



Quão confiável será utilizar a informação obtida apenas de uma amostra para concluir algo sobre a população?

# Introdução

**População**: todos os elementos ou resultados de um problema que está sendo estudado.

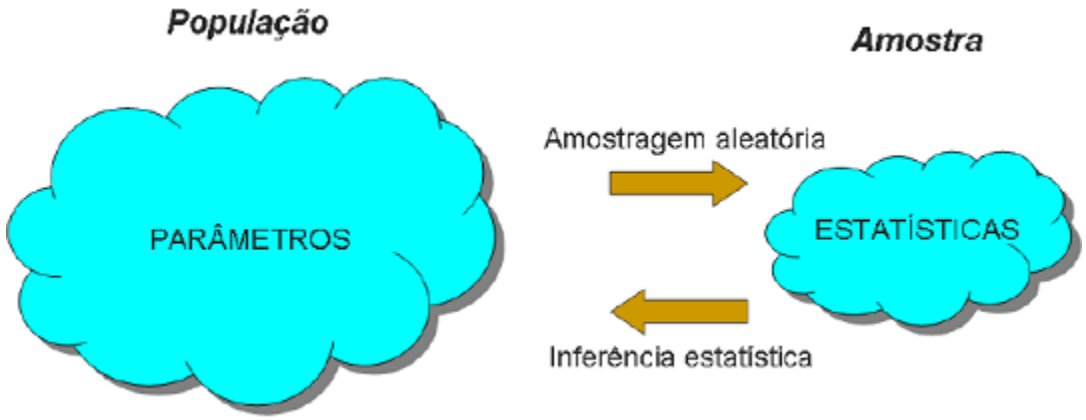
**Amostra:** subconjunto da população de interesse.



# Inferência Estatística

**Variável**: Característica numérica do resultado de um experimento.

**Parâmetros**: Característica numérica (desconhecida) da distribuição dos elementos da população.

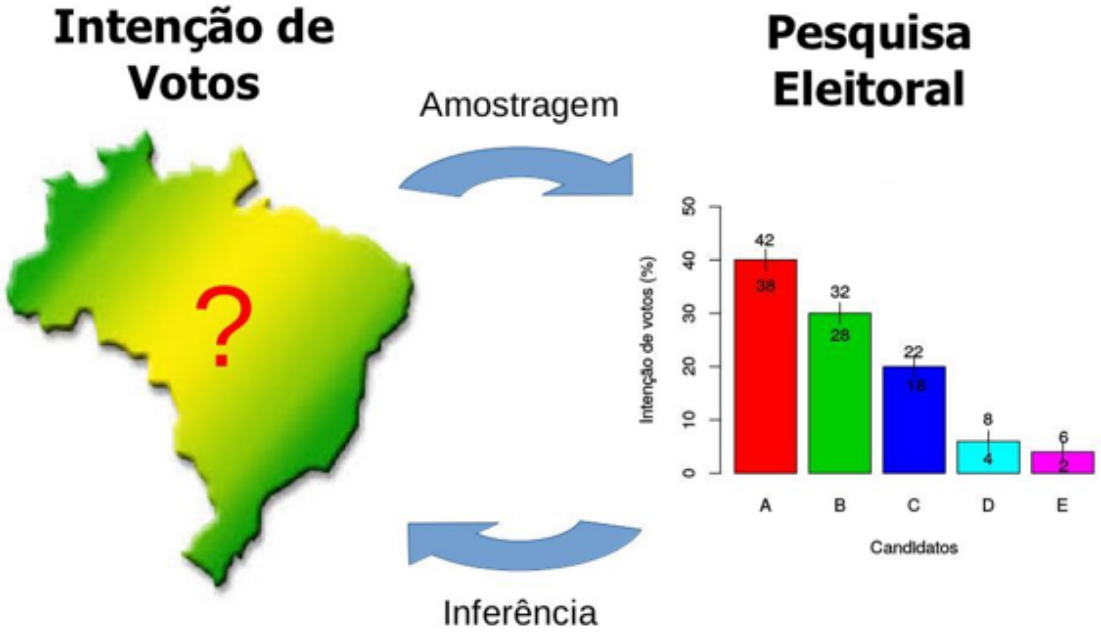



**Estimador/Estatística**: Função da amostra, construída com a finalidade de representar, ou estimar um parâmetro de interesse na população.

**Estimativa**: Valor numérico que um estimador assume para uma dada amostra.

**Erro amostral:** é a diferença entre um estimador e o parâmetro que se quer estimar.

# Inferência Estatística

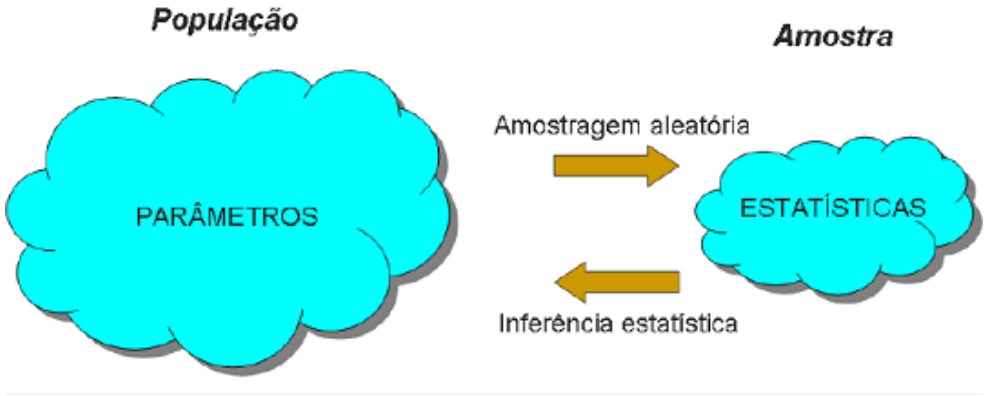


# Estatística

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra e

$$T = f(X_1, \ldots, X_n)$$

é uma estatística.




**Exemplos:**

- $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$
- $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ou $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$
- $X_{(i)}$ é o i-ésimo valor da amostra ordenada

Note que uma estatística é uma função que em uma determinada amostra assume um valor específico (estimativa).

# Estatística

Para que serve uma estatística?

Para “estimar” características de uma população.

**População:**

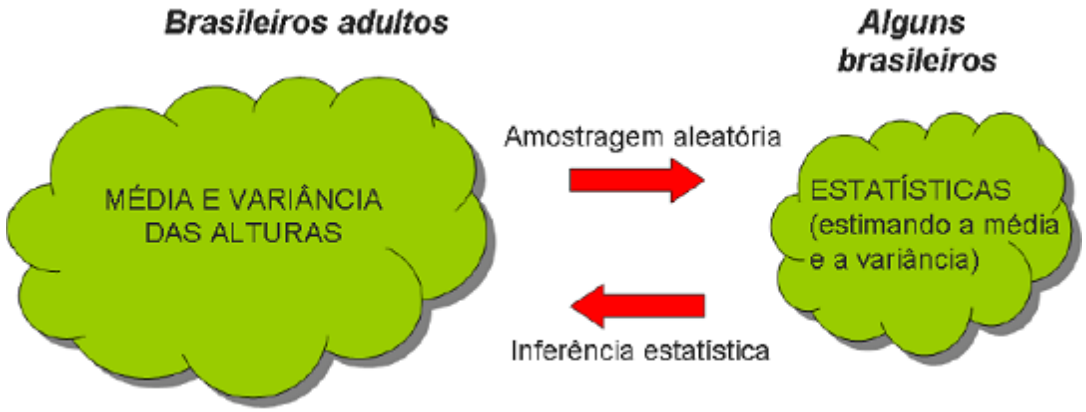
- Média $\mu$
- Variância $\sigma^2$

**Amostra:**

- Média Amostral $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Variância Amostral $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

# Exemplo

Temos interesse em saber a média e a variância da altura dos brasileiros: $\mu$ e $\sigma^2$.



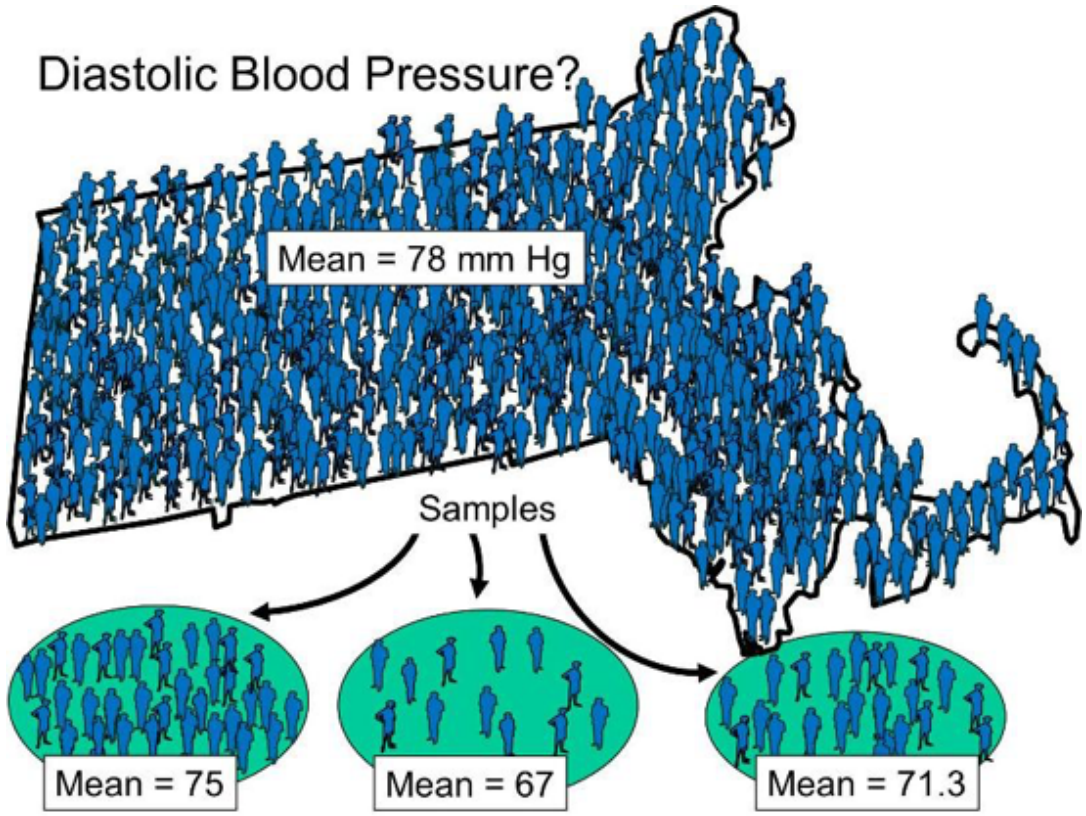

**Solução 1:** Medir a altura de todos os brasileiros.

**Solução 2:** Selecionar de forma aleatória alguns brasileiros (amostra), analisá-la e inferir propriedades para toda a população.

# Parâmetro

- Cada quantidade de interesse (como $\mu$ e $\sigma^2$ no exemplo anterior) é chamada de parâmetro da população.
- Para apresentar uma estimativa de um parâmetro ($\widehat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$), devemos escolher uma estatística ($T$).
- Note que da maneira que o plano amostral foi executado (amostra aleatória simples), a estatística $T$ é uma variável aleatória, visto que cada vez que executarmos o plano amostral poderemos obter resultados diversos.
- Portanto, a estatística $T$ possui uma distribuição de probabilidade, chamada de **distribuição amostral** de T.

# Distribuição amostral da estatística usada para estimar o parâmetro de interesse



# Leituras

- Ross: capítulo 7.
- OpenIntro: seção 4.1.
- Magalhães: capítulo 7.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho