ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 8

Porta dos Desesperados

Imagine-se em um programa de auditório em que 3 portas são colocadas à sua frente.

Atrás de uma delas há um bom prêmio e atrás das outras duas não há nada.

O apresentador pede que você escolha uma das 3 portas.

Após a sua escolha, ele mostra uma porta que está vazia pra você. Então ele pergunta se você quer trocar a sua porta pela outra que restou.

Qual a melhor estratégia: (1) trocar ou (2) ficar com a primeira escolha?

Você acha que há alguma diferença?

Comparando as duas estratégias através da repetição do experimento aleatório

Experimentos 2S - 2016 - ME414I

A seguir apresentamos os resultados obtidos durante a aula:

Trocou?/Ganhou?	Nao	Sim
Nao	10	3
Sim	10	17

$$P(\text{Ganhou} \mid \text{Trocou}) = 0.63$$

$$P(\text{Ganhou} \mid \text{Não Trocou}) = 0.23$$

Entre os participantes que escolheram a **estratégia de trocar de porta**, temos que 63% saíram vencedores.

Já entre os que escolheram **não trocar**, temos que 23% venceram.

Simulação computacional: comparando as duas estratégias

O experimento foi repetido poucas vezes.

O ideal seria repetirmos muitas vezes e observarmos a proporção de vencedores para cada estratégia ao final das repetições. Quanto seria "muitas vezes"?

Algo perto de infinito!

Como temos tempo e bombons finitos, podemos fazer uma simulação da "Porta dos Desesperados", através de um programa de computador.

O código a seguir (em R) apresenta a simulação de 10000 programas da **"Porta dos Desesperados"**.

```r
n <- 10000
resultadoQuandoNaoTroca <- c()
resultadoQuandoTroca <- c()
portas <- c("A","B","C")
for (i in 1:n) {
  ## número da porta com o prêmio, escolhida ao acaso pela produção do programa
  portapremio <- sample(portas, size=1)
  ## número da porta escolhida ao acaso pelo participante
  portaescolhida <- sample(portas, size=1)

  portaslivres <- portas[portas != portaescolhida & portas !=portapremio]

  ## porta mostrada pelo apresentador, escolhida ao acaso entre as portas vazias disponíveis.
  ApresentadorMostra <- sample(portaslivres, size=1)

  ## indica a porta escolhida após a troca
  trocouPorta <- portas[portas != portaescolhida & portas != ApresentadorMostra]

  resultadoQuandoNaoTroca[i] <- ifelse(portaescolhida == portapremio, "ganhou", "perdeu")
  resultadoQuandoTroca[i] <- ifelse(trocouPorta == portapremio, "ganhou", "perdeu")
  }

proporcaoManteveGanhou <- mean(resultadoQuandoNaoTroca == "ganhou")
proporcaoTrocouGanhou <- mean(resultadoQuandoTroca == "ganhou")
```

Resultados da simulação

Em 10000 vezes:

Estratégia não trocar de porta: ganha 32.53% das vezes.

Estratégia trocar de porta: ganha 67.47% das vezes.

Portanto, a estratégia trocar de porta é a que tem maior chance de ganhar.

Comparando as duas estratégias através da Teoria da Probabilidade

Qual a melhor estratégia?

Bombom na porta 2

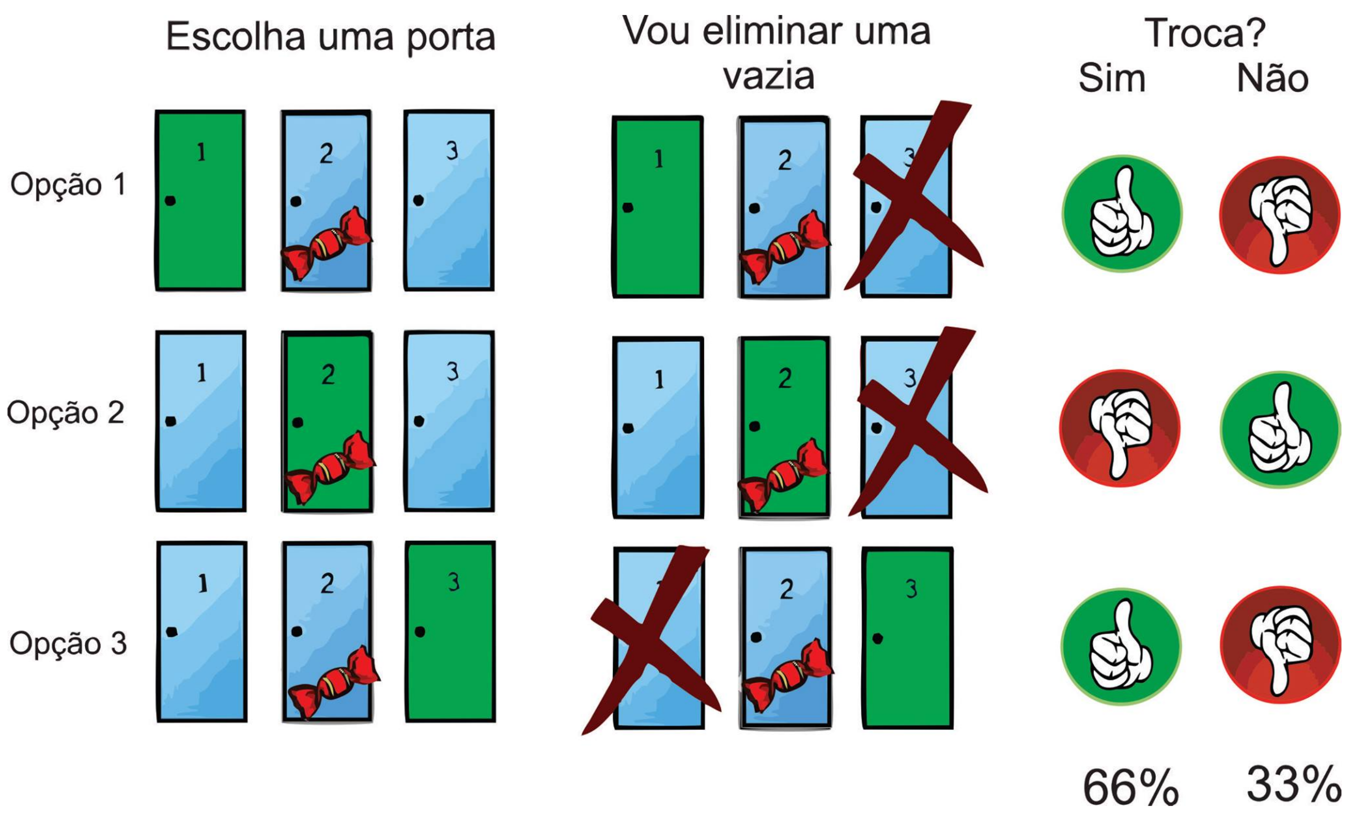
	Porta escolhida		Porta aberta	Probabilidade Total	Não troca	Troca
1/3	1	1	3	$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$	Perde	Ganha
1/3	2	1/2	1	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	Ganha	Perde
		1/2	3	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	Ganha	Perde
1/3	3	1	1	$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$	Perde	Ganha

Probabilidade de ganhar, se não trocar = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Probabilidade de ganhar, se trocar = $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

➡ É melhor trocar!

Qual a melhor estratégia?

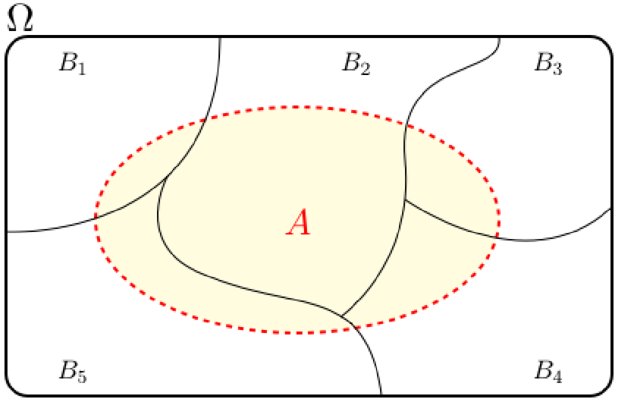


Comparando as duas estratégias através do Teorema de Bayes

Relembrando: partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ formam um partição do espaço amostral Ω se são mutuamente exclusivos e a união é Ω.

Teorema das probabilidades totais:



$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

Teorema de Bayes:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

Teorema de Bayes

Para avaliar qual a melhor estratégia, temos também a opção de fazer os cálculos através do Teorema de Bayes.

Suponha o seguinte cenário (sem perda de generalidade): o jogador escolhe a porta número 1. Considere os eventos:

- A_1: prêmio está na porta 1
- A_2: prêmio está na porta 2
- A_3: prêmio está na porta 3
- O: apresentador abre a porta 3

Temos que:

- $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$
- $P(O \mid A_1) = \frac{1}{2}$
- $P(O \mid A_2) = 1$
- $P(O \mid A_3) = 0$

Qual a melhor estratégia?

A probabilidade do prêmio estar na porta 1 (porta escolhida pelo jogador), dado que o apresentador mostra a porta 3:

$$P(A_1 \mid O) = \frac{P(O|A_1)P(A_1)}{P(O|A_1)P(A_1)+P(O|A_2)P(A_2)+P(O|A_3)P(A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

A probabilidade do prêmio estar na porta 2 (ou seja, se o jogador trocasse do porta, venceria), dado que o apresentador mostra a porta 3:

$$P(A_2 \mid O) = \frac{P(O|A_2)P(A_2)}{P(O|A_1)P(A_1)+P(O|A_2)P(A_2)+P(O|A_3)P(A_3)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

Portanto, se o jogador escolhe a porta 1 e:

- **não troca**: a probabilidade de vencer o prêmio é $1/3$
- **troca**: a probabilidade de vencer o prêmio é $2/3$

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho