ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 2

Análise Descritiva

Análise Descritiva Univariada

Na aula passada trabalhamos na análise descritiva univariada para variáveis categóricas (nominal e ordinal) e quantitativas (discreta e contínua).

Relembrando, a análise descritiva univariada consiste em:

- classificar a variável quanto ao seu tipo
- obter tabela, gráfico e/ou medidas resumo apropriados

Na aula de hoje, falaremos sobre **estatísticas sumárias** ou **medidas resumo**, tanto de posição quanto de dispersão.

Medidas Resumo

Vimos na aula anterior como usar gráficos e tabelas de frequência para resumir os dados.

Podemos também usar **estatísticas sumárias** (ou **medidas resumo**): quantidades numéricas calculadas a partir dos dados.

Por exemplo, podemos estar interessados em encontrar qual seria um valor “típico” do conjunto de dados.

Podemos então usar uma estatística que descreva o centro da distribuição dos dados.

Objetivo: resumir os dados, através de valores que representem o conjunto de dados em relação à alguma característica (posição, dispersão).

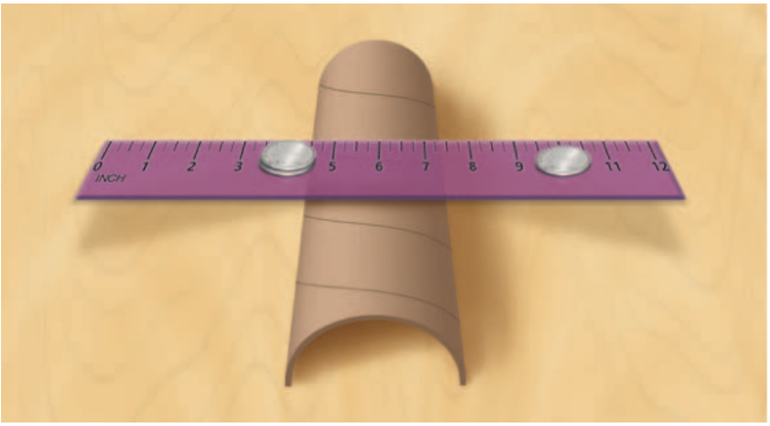
Medidas de Posição Central

Média Aritmética

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as n observações, a média aritmética é:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

A média pode ser interpretada como o ponto de equilíbrio de uma distribuição.



Exemplo: Cereais matinais

Temos cereias matinais de várias marcas e observamos a quantidade de calorias e carboidratos em porções de 30g.

Calorias e Carboidratos (Porções de 30g)

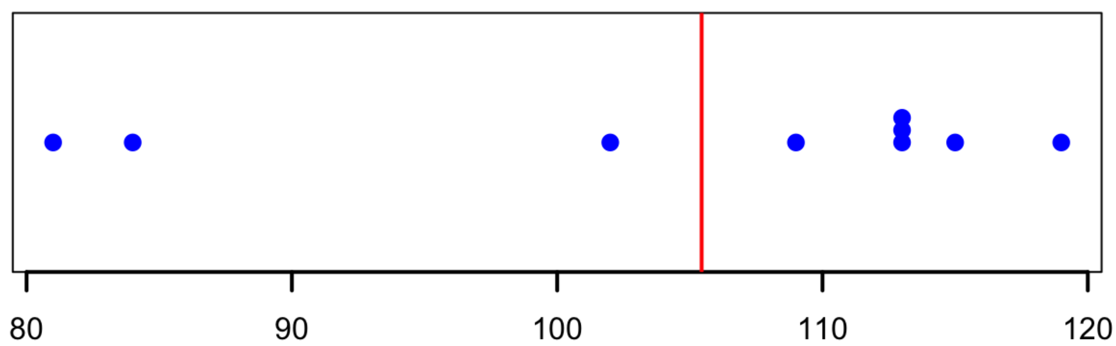
Cereal	Calorias	Carboidratos
Sucrilhos	109	26.0
All Bran	81	13.5
Nesfit	102	21.0
Nescau	115	23.0
Snow	113	25.0
Crunch	119	23.0
Moça	113	25.0
Fibra Mais	84	15.0
Froot Loops	113	25.0

Exemplo: Cereais matinais

Calorias dos 9 cereais: 109, 81, 102, 115, 113, 119, 113, 84, 113
x_i: calorias do cereal i.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 105.44$$

No gráfico de pontos abaixo, os pontos azuis representam as observações e a linha vermelha representa a média.



Mediana

Mediana: valor que separa os dados em dois grupos de tamanhos iguais, ou seja, 50% das observações em cada, de acordo com seus valores ordenados.

Para determinar a mediana (também conhecida como Q_2), ordene as n observações: $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}, \ldots, x_{(n)}$

- Se n é **ímpar**: a mediana é o valor do meio, na sequência ordenada.
- Se n é **par**: a mediana, por convenção, é a média aritmética das duas observações que caem no meio da sequência ordenada.

A fórmula da mediana pode ser escrita como:

$$Q_2 = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplo: Cereais matinais

Calorias dos 9 cereais:
109, 81, 102, 115, 113, 119, 113, 84, 113

Calorias em ordem crescente:
81, 84, 102, 109, 113, 113, 113, 115, 119

A mediana é 5ª observação, ou seja, **113**.

Se descartássemos o maior valor, 119, teríamos oito observações e aí a mediana seria:

$$\text{mediana} = \frac{109 + 113}{2} = 111.$$

Moda

A moda é o valor com maior número de ocorrências nos dados.

Calorias dos 9 cereais:
109, 81, 102, 115, 113, 119, 113, 84, 113

Tabela de frequências:

81	84	102	109	113	115	119
1	1	1	1	3	1	1

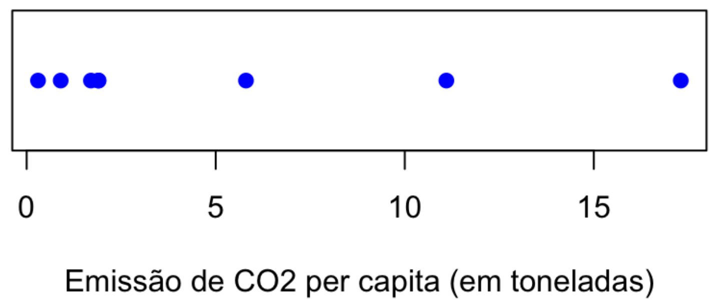
Portanto, a moda de calorias dos cereias é 113.

Exemplo: Emissão de CO_2

Veja a tabela com dados da emissão de CO_2 per capita (em toneladas) para 8 países, em 2009.

País	Emissão CO2
China	5.8
Índia	1.7
EUA	17.3
Indonésia	1.9
Brasil	1.9
Rússia	11.1
Paquistão	0.9
Bangladesh	0.3

Fonte: http://data.worldbank.org



Média: $\bar{x} = \dfrac{40.9}{8} \approx 5.11$

Dados Ordenados: 0.3, 0.9, 1.7, 1.9, 1.9, 5.8, 11.1, 17.3
Mediana = 1.9

A mediana é bem menor do que a média.

Exemplo: Emissão de CO_2

Veja a tabela com dados da emissão de CO_2 per capita (em toneladas) para 8 países, em 2009.

País	Emissão CO2
China	5.8
Índia	1.7
~~EUA~~	~~17.3~~
Indonésia	1.9
Brasil	1.9
Rússia	11.1
Paquistão	0.9
Bangladesh	0.3

Fonte: http://data.worldbank.org

Se desconsiderarmos os EUA (maior valor):

Média: $\bar{x} = \frac{23.6}{7} \approx 3.37$

Dados Ordenados: 0.3, 0.9, 1.7, 1.9, 1.9, 5.8, 11.1
Mediana = 1.9

Mediana é menos afetada por valores muito extremos (muito diferentes do resto das observações) que a média.

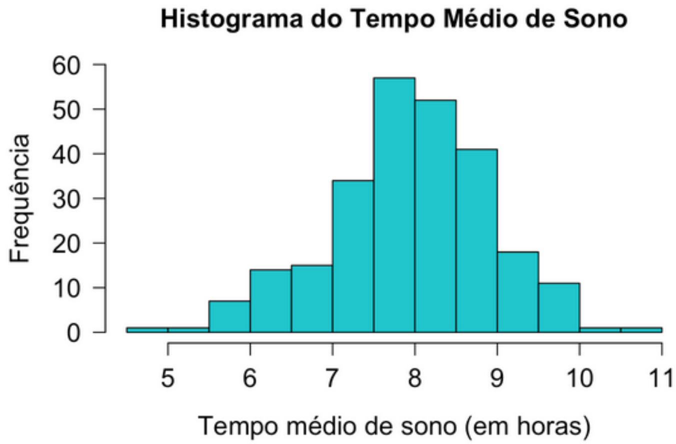
Dizemos que a mediana é mais **robusta** que a média.

Exemplo: `SleepStudy`

Vamos voltar no exemplo `SleepStudy`: amostra de 253 alunos universitários que fizeram testes para medir função cognitiva, além de outras informações sobre hábitos relacionados ao sono.

Considere a variável `AverageSleep`, a média de horas de sono em todos os dias.

Como são muitos valores, podemos usar um software (R, Excel, etc) para calcular a média e mediana:



Média = 7.97 e **Mediana** = 8

Será que o fato desses valores serem próximos é uma coincidência?

Exemplo: número de casamentos

Os dados abaixo referem-se ao número de vezes que homens e mulheres se casaram.

Número de Casamentos	Mulheres	Homens
0	5861	7074
1	2773	1561
2	105	43
Total	**8739**	**8678**

Você acha que existe diferença entre homens e mulheres quato ao número de casamentos ?

Qual medida de posição você usaria para apresentar a diferença entre homens e mulheres: **média, mediana ou moda**?

Moda
A moda entre os homens é: 0
A moda entre as mulheres é: 0

Fonte: http://www.census.gov/prod/2002pubs/p70-80.pdf

Exemplo: número de casamentos

Número de Casamentos	Mulheres	Homens
0	5861	7074
1	2773	1561
2	105	43
Total	**8739**	**8678**

Mediana

Para as mulheres, a amostra ordenada é:

$$\underbrace{0\,0\,0\ \ldots 0}_{5861\text{ 0's}}\quad \underbrace{1\,1\,1\ \ldots 1}_{2773\text{ 1's}}\quad \underbrace{2\,2\,2\ \ldots 2}_{105\text{ 2's}}$$

Como $n = 8739$ é ímpar, a observação central está na posição $(1 + 8739)/2 = 4370$ e essa observação é 0. Portanto, a mediana é 0 para as mulheres.

Para os homens, analogamente, a mediana também é 0.

Para dados discretos com poucos valores diferentes, a mediana ignora muita informação.

Exemplo: número de casamentos

Número de Casamentos	Mulheres	Homens
0	5861	7074
1	2773	1561
2	105	43
Total	**8739**	**8678**

Média

Para as mulheres, a média é:

$$\bar{x} = \frac{0 \times 5861 + 1 \times 2773 + 2 \times 105}{8739} = 0.34$$

Para os homens, a média é:

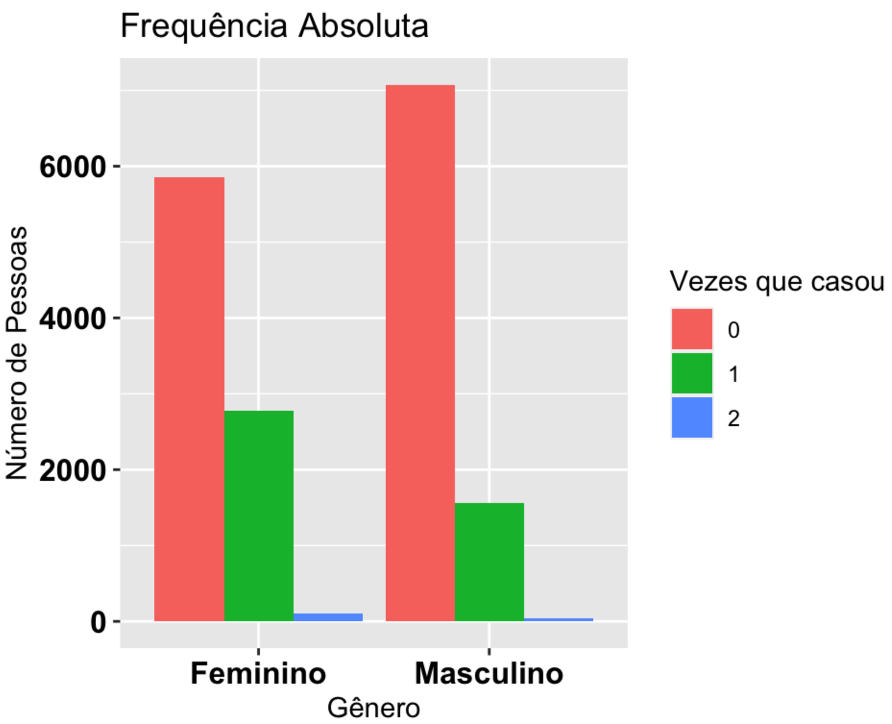
$$\bar{x} = \frac{0 \times 7074 + 1 \times 1561 + 2 \times 43}{8678} = 0.19$$

Nesse caso, temos que a média é a medida de posição que consegue diferenciar homens e mulheres quanto ao número de casamentos.

Exemplo: número de casamentos

Como o número de casamentos assume apenas os valores 0, 1 e 2, podemos apresentar os dados usando um gráficos de barra.

Número de Casamentos	Mulheres	Homens
0	5861	7074
1	2773	1561
2	105	43
Total	**8739**	**8678**



Mediana é resistente a observações discrepantes

Considere os três conjuntos de dados abaixo:

$$A : 8, 9, 10, 11, 12$$

$$B : 8, 9, 10, 11, 100$$

$$C : 8, 9, 10, 11, 1000$$

Para cada conjunto, calcule a média e a mediana e compare-as.

Média de A: 10 Mediana de A: 10

Média de B: 27.6 Mediana de B: 10

Média de C: 207.6 Mediana de C: 10

Exemplo: Transporte

Uma empresária cuja empresa está localizada na Av. Paulista, em São Paulo, está preocupada com a quantidade de gasolina gasta pelos seus funcionários. Ela quer promover o uso de transporte público entre seus funcionários. Ela decide investigar a extensão, em km, do trajeto percorrido por cada funcionário caso usassem transporte público durante um dia típico.

Para seus 10 funcionários, os valores são:

$$1, 1, 4, 1, 1, 1, 10, 1, 6, 1$$

Encontre a média, a mediana e a moda.

Média é 2.7.

Valores ordenados: 1,1,1,1,**1**,**1**,1,4,6,10.

Mediana e moda são iguais a 1.

Exemplo: Transporte

A empresária acabou de contratar um novo funcionário. Ele percorre 90 km em transporte público. Recalcule a média e a mediana.

$$1, 1, 4, 1, 1, 1, 10, 1, 6, 1, 90$$

Valores ordenados: 1, 1, 1, 1, 1, **1**, 1, 4, 6, 10, 90.

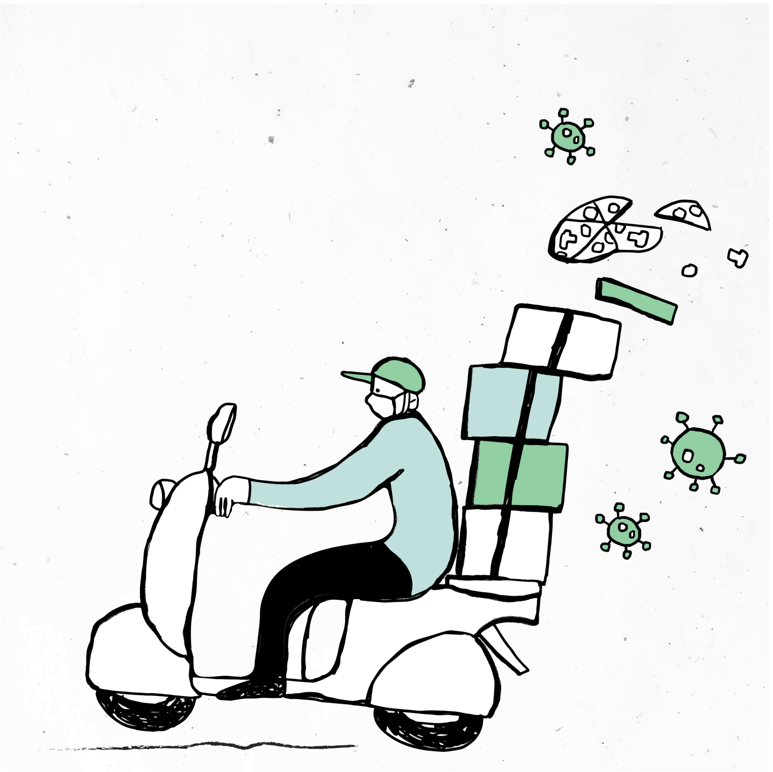
Mediana é 1.
Média é 10.64.

Qual medida de posição representa melhor a distância do grupo de funcionários?

Exemplo: Acidentes com Moto

Dados: entrevistas com 60 pessoas, em que cada uma relata o número de acidentes com moto que sofreu no último ano.

Por que a média seria provavelmente mais útil do que a mediana para resumir os dados?



Exemplo: Salários

A **média** salarial anual em 1998 nos EUA para pessoas com ensino superior era $528.200.

A **mediana** do salário anual em 1998 nos EUA para pessoas com ensino superior era $146.400.

Reflita sobre as estatísticas sumárias apresentadas e responda:

1. Por que a média e a mediana diferem tanto?
2. Qual medida de posição você acredita que retrata de maneira mais realística um salário típico de pessoas com ensino superior nos EUA em 1998?

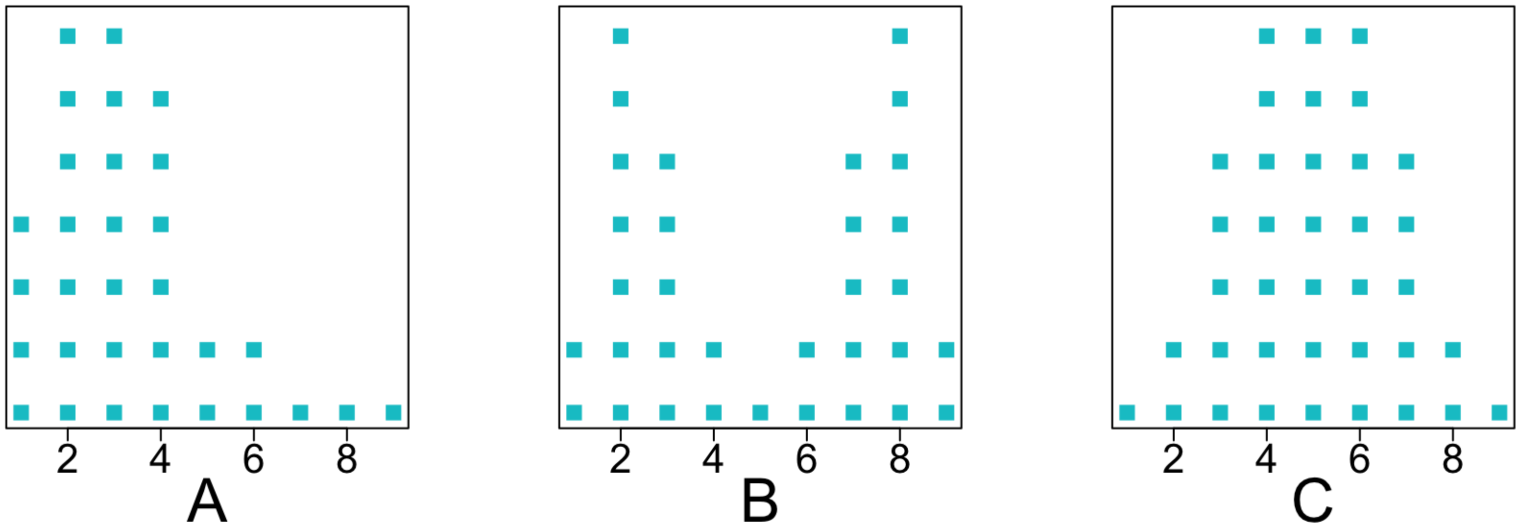
Exemplo: Sindicato

O sindicato dos trabalhadores está reivindicando aumento de salário em uma certa fábrica.

Explique por que o sindicato poderia usar a mediana dos salários de todos os empregados para justificar um aumento, enquanto que o gerente da fábrica poderia usar a média para argumentar que um aumento não é necessário?

Média, mediana e a distribuição dos dados

A figura a seguir mostra gráficos para três conjuntos de dados: A, B e C.



O que você esperaria da relação entre média e mediana para esses dados?

Média, mediana e a distribuição dos dados

Para cada uma das distribuições (A, B, C), qual medida seria maior: média ou mediana?

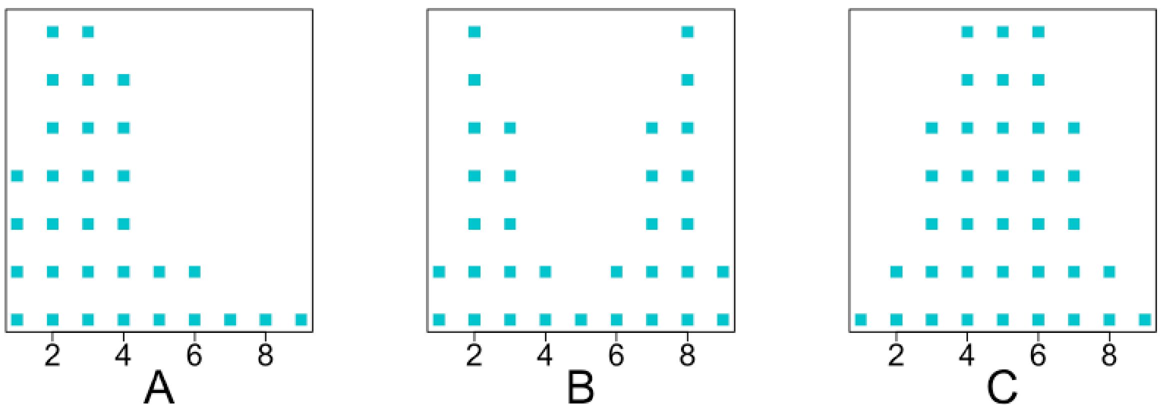
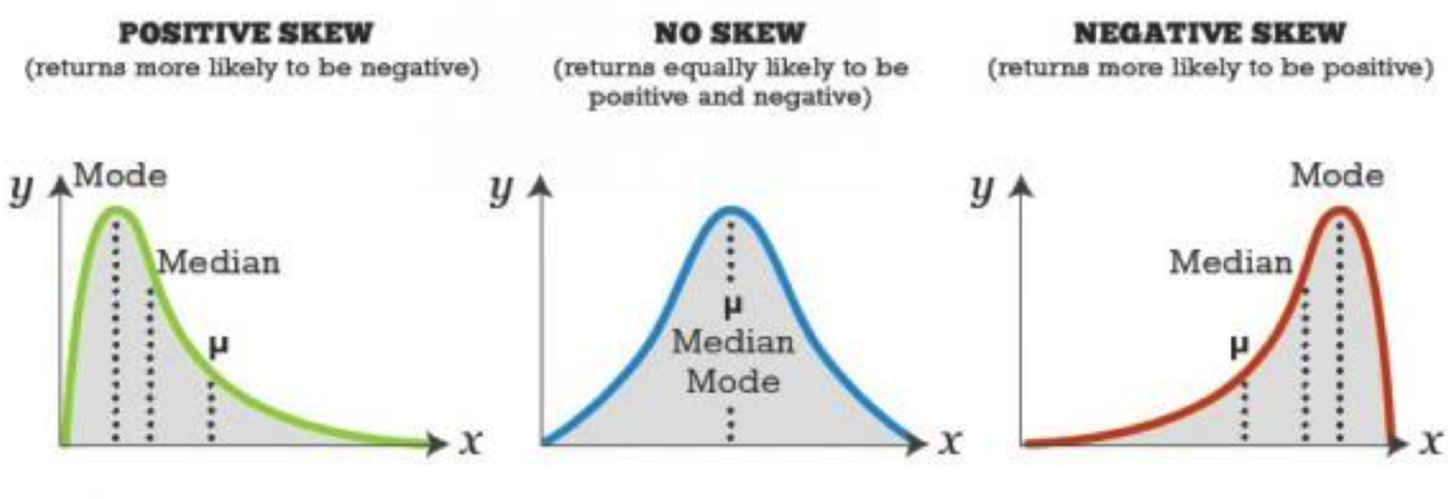


Gráfico A: média é 3.36, mediana é 3.

Gráfico B: média é 5, mediana é 5.

Gráfico C: média é 5, mediana é 5.

Assimetria (Caso Unimodal)



Se os dados são simétricos, a média coincide com a mediana e a moda.

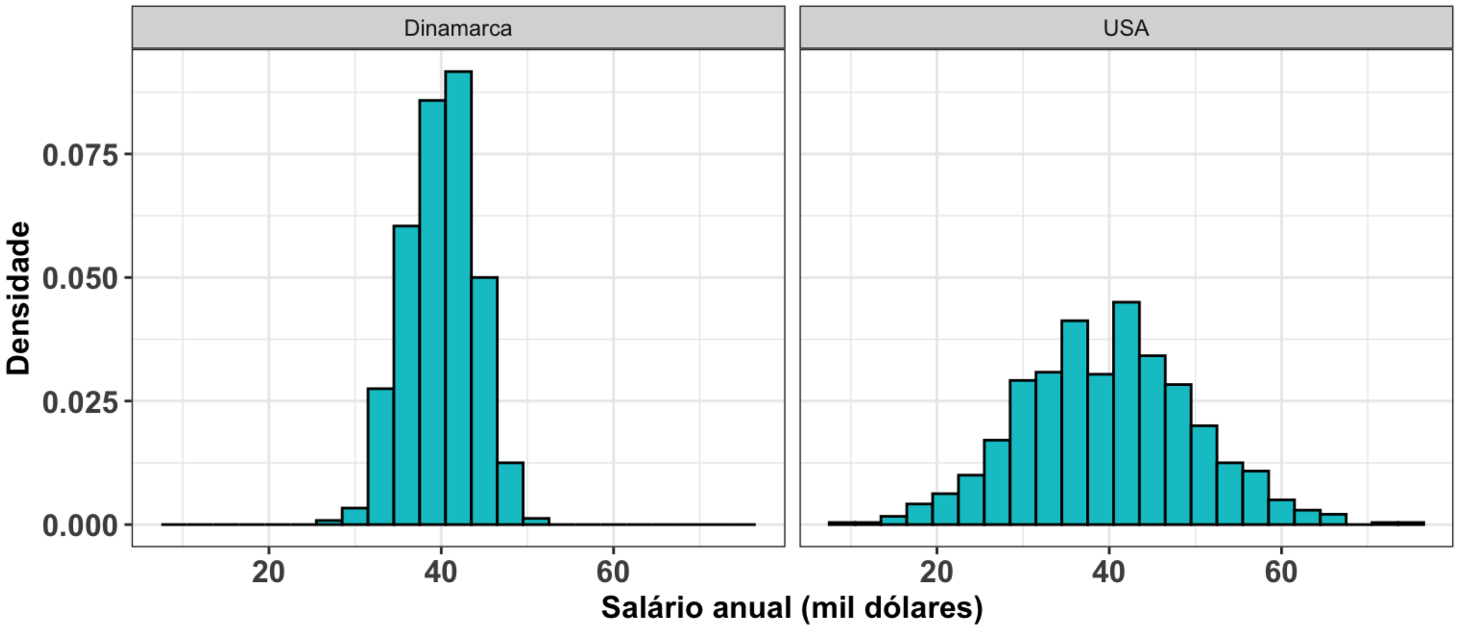
Assimetria à direita (positiva): Média > Mediana > Moda

Assimetria à esquerda (negativa): Média < Mediana < Moda

Medidas de Dispersão

Exemplo: Salário professor de música

Salário anual hipotético de professores de música na Dinamarca (esquerda) e nos EUA (direita).



Média salarial Dinamarca: 40.02. Média salarial EUA: 39.87.

Amplitude

Uma medida de dispersão é **amplitude**: a diferença entre o maior e o menor valor observado na amostra.

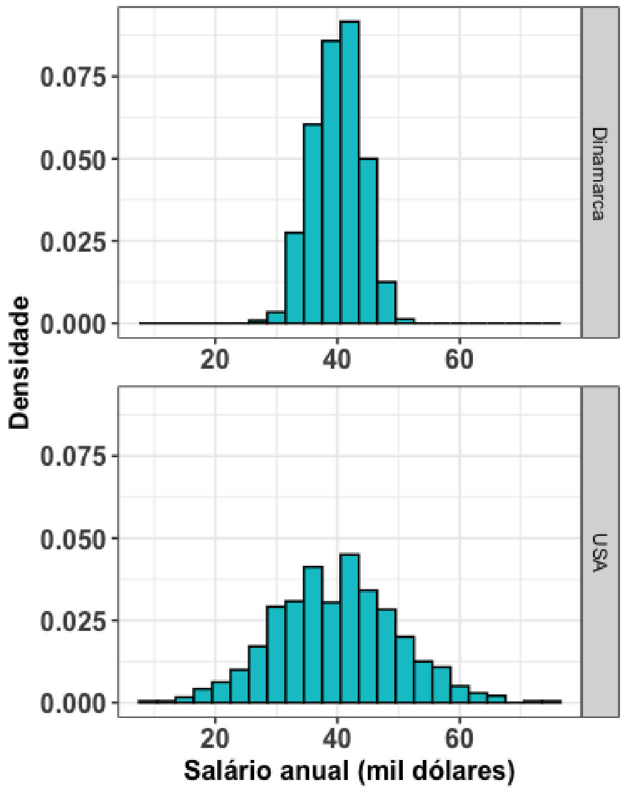
Na Dinamarca:

- Salários variam de 27 a 52.
- Amplitude = 52 − 27=25.

Nos EUA:

- Salários variam de 9 a 75.
- Amplitude = 75 − 9 = 66.

Problema com a amplitude: utiliza apenas duas observações (a máxima e a mínima).



Medidas de Dispersão

Considere dois conjuntos de dados:

$A = \{1, 2, 5, 6, 6\}$ e $B = \{-40, 0, 5, 20, 35\}$

Ambos com média 4 e mediana 5.

No entanto, claramente temos que os valores de B são mais dispersos do que em A.

Que medida podemos usar para considerar essa característica dos dados?

Medidas de Dispersão

Podemos observar quão afastadas de uma determinada medida de posição estão as observações.

Desvio de uma observação x_i da média $\bar{x}$ é a diferença entre a observação e a média dos dados: $(x_i - \bar{x})$.

- O desvio é negativo quando a observação tem valor menor do que a média.
- O desvio é positivo quando a observação tem valor maior do que a média.

Estamos interessados nos desvios de todos os pontos x_i's, então poderia-se propor a seguinte medida de dispersão: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$.

Qual o problema?

- A média representa o ponto de balanço dos dados, então os desvios irão se contrabalancear, ou seja: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

Medidas de Dispersão

Além do mais, uma medida de dispersão onde os desvios positivos e negativos se cancelam, não seria útil.

Queremos que se leve em conta cada desvio, independente do sinal.

Alternativas:

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} | \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Ambas alternativas evitam que desvios iguais em módulo, mas com sinais opostos, se anulem.

Nota: Veja que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$.

Variância e Desvio padrão

A média dos desvios ao quadrado é denominada **variância**:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Interpretação: distância típica entre uma observação e a média dos dados.

Quanto maior s, maior a dispersão dos dados.

Exemplo A

Conjunto de dados $A : \{1, 2, 5, 6, 6\}$.

A média é $\bar{x} = \dfrac{20}{5} = 4$.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	−3	9
2	−2	4
5	1	1
6	2	4
6	2	4

Então, a variância é:

$$s^2 = \frac{9 + 4 + 1 + 4 + 4}{5 - 1} = 5.5,$$

e o desvio padrão:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5.5} = 2.35.$$

Exemplo B

Conjunto de dados $B : \{-40, 0, 5, 20, 35\}$.

A média é $\bar{x} = \dfrac{20}{5} = 4$.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
−40	−44	1936
0	−4	16
5	1	1
20	16	256
35	31	961

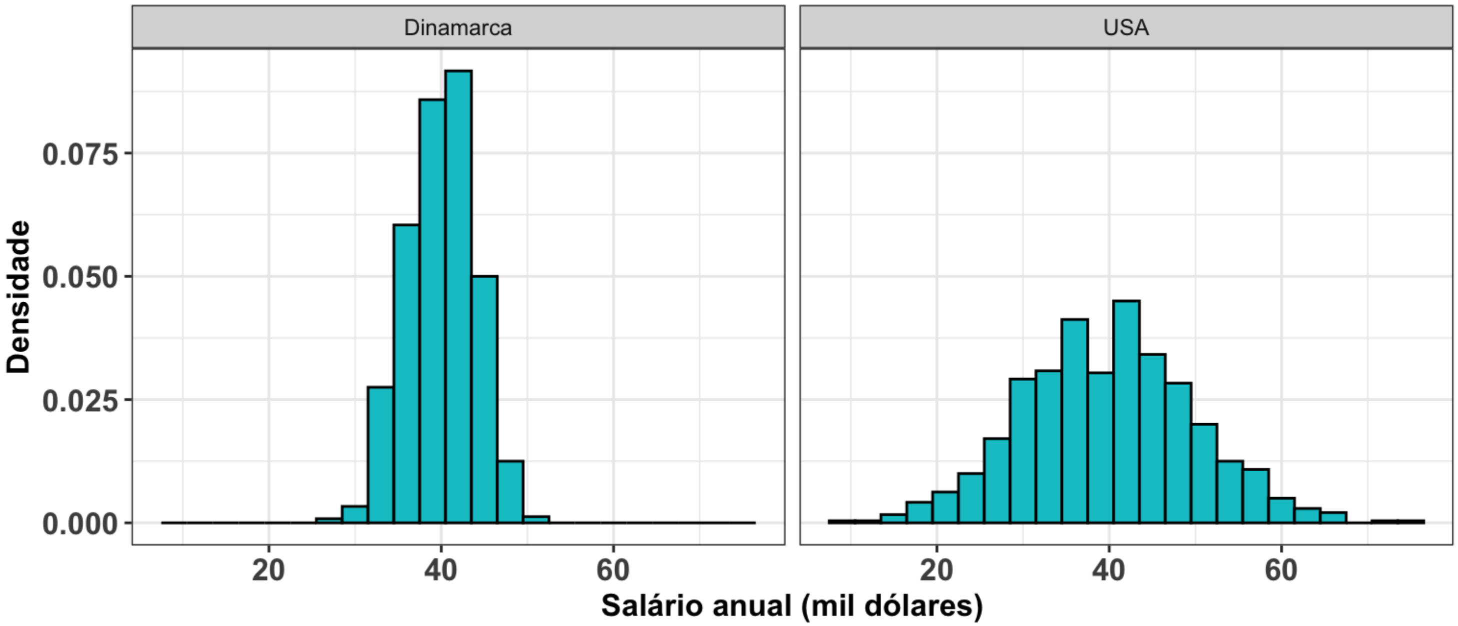
Então, a variância é:

$$s^2 = \frac{1936 + 16 + 1 + 256 + 961}{5 - 1} = 792.5,$$

e o desvio padrão:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{792.5} = 28.15.$$

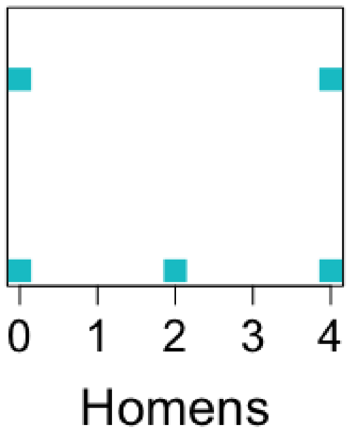
Exemplo: Salário professor de música

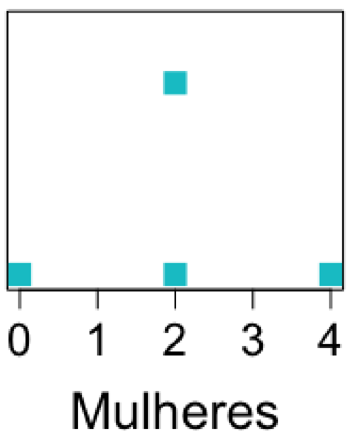


Salários na Dinamarca: média = 40.02 e variância= 15.76.

Salários nos EUA: média = 39.87 e variância= 99.5.

Exemplo: “Qual o número ideal de filhos?”





Homens: 0, 0, 0, 4, 4, 4, 2
Mulheres: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 4

Média: 2 (para ambos os sexos)
Amplitude: 4 (para ambos os sexos)

Para homens, desvio típico da média parece estar em torno de 2
Desvio padrão: $s = 2$

Para mulheres, desvio típico da média é menor do que o dos homens, pois a grande maioria das observações coincide com a própria média.
Desvio padrão: $s = 1.15$

Exemplo: Prova 1 de ME414

A primeira prova de ME414 teve um total de 100 pontos. Suponha que a média tenha sido 80.

Qual seria um valor plausível para o desvio padrão das notas da classe? s: 0, 10 ou 50.

- $s = 0$: todos os alunos tiraram a mesma nota.
- $s = 50$: uma nota típica da classe estaria 50 pontos distante da média, ou seja, 30 ou 130 pontos.
- $s = 10$: notas típicas seriam de 70 ou 90.

Leitura

- Ross: seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5
- Khan Academy: Por que $n-1$ no cálculo de s^2?
- Simulação mostrando o porque de usarmos $n-1$ no cálculo de s^2

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho
- Larissa Matos