ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 12

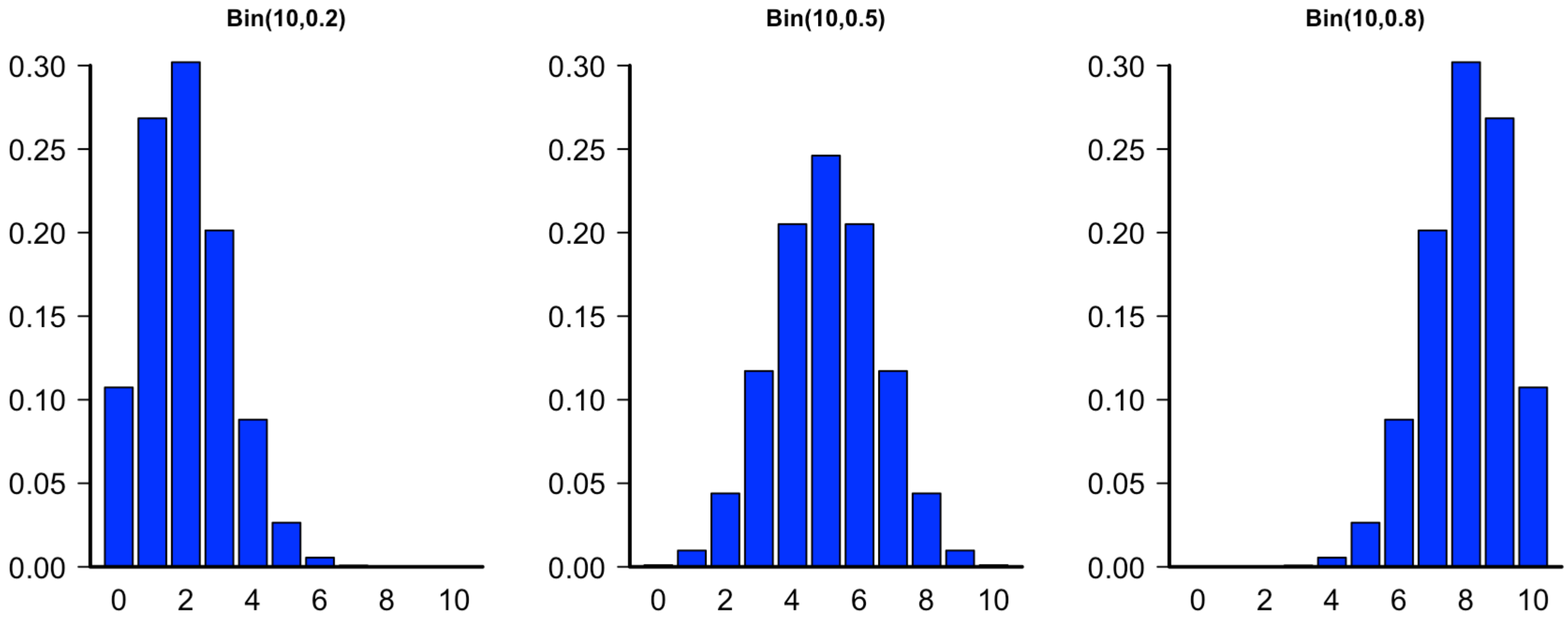
Variáveis Aleatórias Contínuas

Variáveis Aleatórias Contínuas

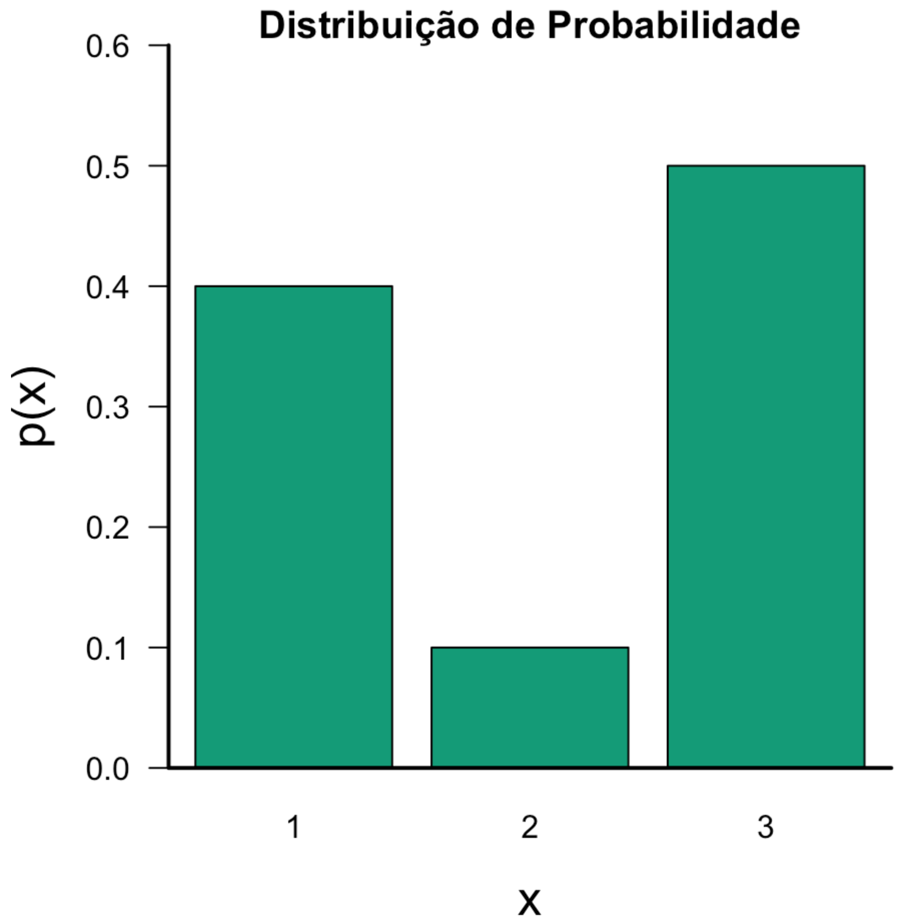
- **Variáveis aleatórias discretas:** v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- **Variáveis aleatórias contínuas:** v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc…
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.
- Surge então o conceito de **“função de densidade de probabilidade”** (f.d.p.).
- Para cada v.a. contínua, associamos uma função de densidade de probabilidade.

Exemplo: v.a. discreta

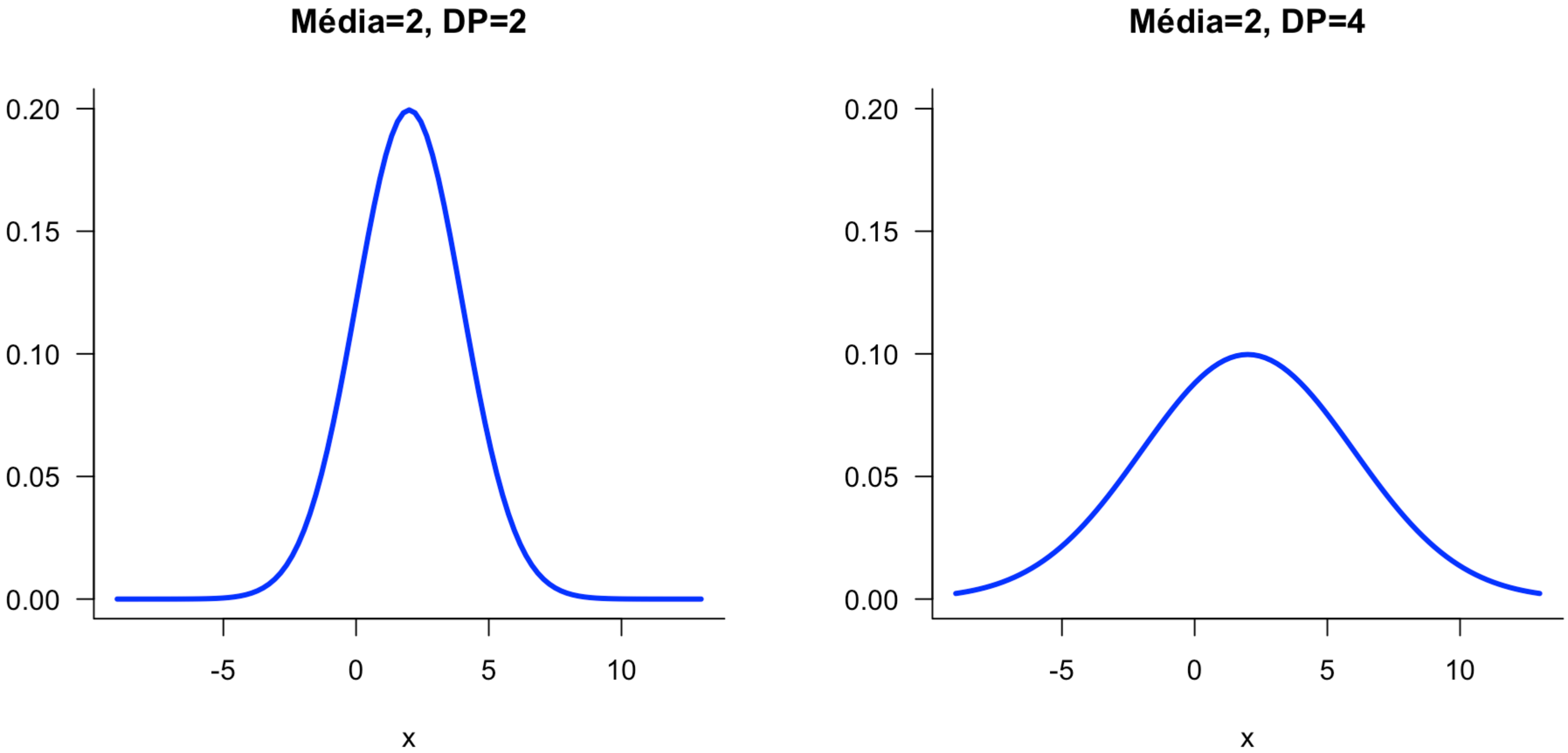
Distribuição de probabilidade de uma $Bin(10, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.



Exemplo: v.a. discreta



Exemplo: v.a. contínua



Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

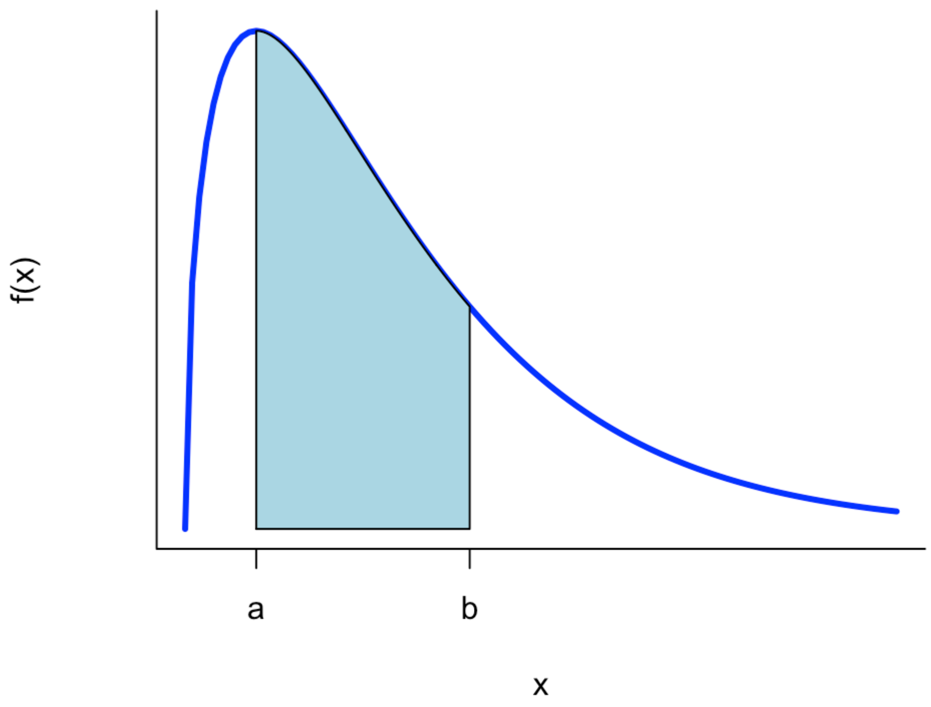
- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$; e
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável).

Toda v.a. X à qual seja possível associar uma função de densidade de probabilidade será chamada de v.a. contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



Observação: Quando X é uma v.a. contínua:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(a \leq X \leq b) \\ &= P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X.

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de **função de distribuição acumulada** (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

$$f_X(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2 - x)dx = 1\,.$$

Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \int_0^{0.8} xdx = 0.32\,.$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

A função de distribuição acumulada $F_X(x) = P(X \leq x)$:

- **caso discreto:**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i);$$

- **caso contínuo:**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

Exemplo

Dada a função

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Mostre que esta é uma função de densidade de probabilidade.
2. Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo (solução - item 1)

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; e
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x e, consequentemente, $2e^{-2x}$ também.

Resta mostrar que sua integral é 1:

$$\int 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}.$$

Exemplo (solução)

1. Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0.

   Então, a integral é:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx \\
&= \left[-e^{-2x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1.
\end{aligned}$$

2. A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}.$$

Esperança

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, a **esperança** de X é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx\ .$$

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, o k**-ésimo momento** de X é dado por:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, f_X(x) dx\ .$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $\mathbb{E}(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 .$$

E definimos como **desvio padrão**:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $\mathbb{E}(X)$.

Exemplo

Para a função f_X seguinte, calcular $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1,$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathbb{E}(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}.$$

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

1. Qual valor deve ter a constante C?
2. Faça o gráfico de $f_X(x)$.
3. Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo

Item 1 - Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

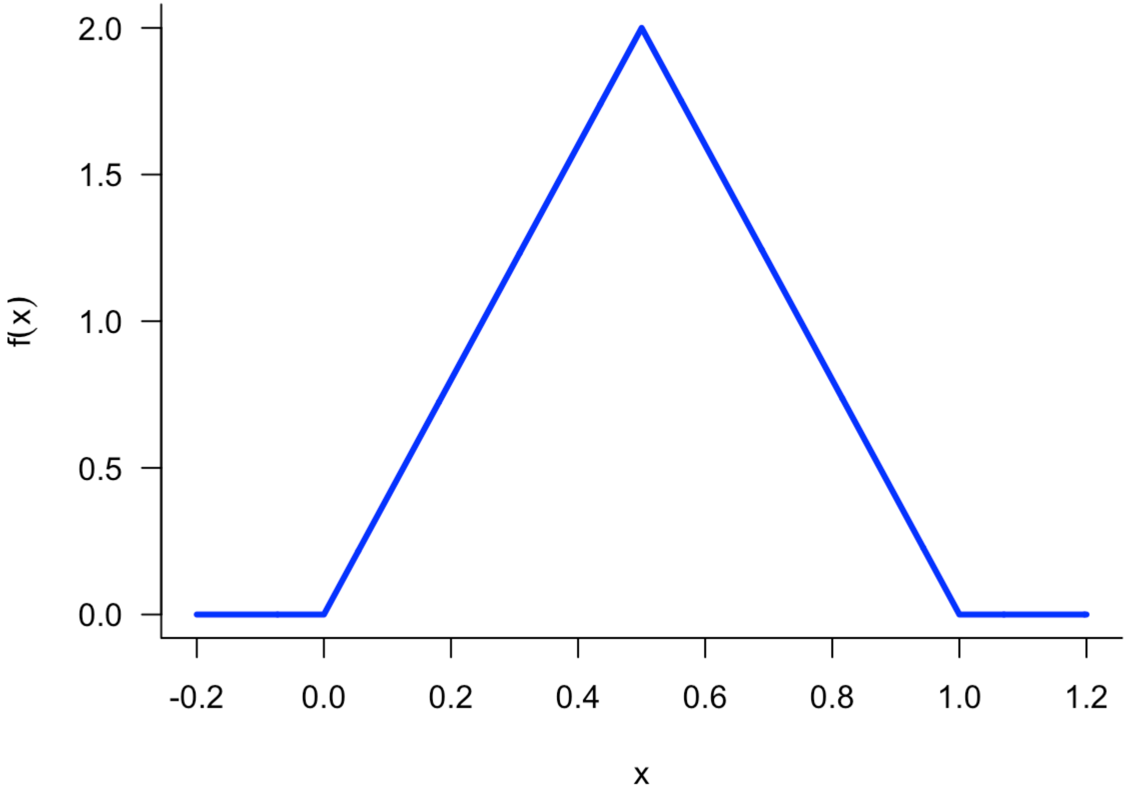
- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; e
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Pela primeira condição, temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça a segunda condição, devemos integrar $f_X(x)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1} (1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{C}{4} \\
&\Rightarrow \frac{C}{4} = 1 \\
&\therefore \ C \text{ deve ser igual a } 4.
\end{aligned}
$$

Exemplo

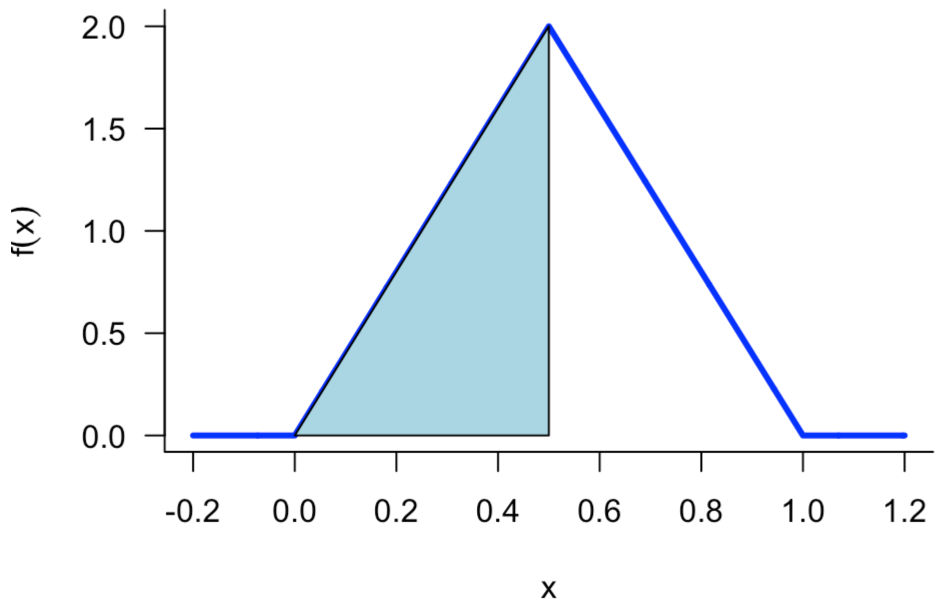
Item 2 - Função de densidade $f_X(x)$:



Exemplo

Item 3 - Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

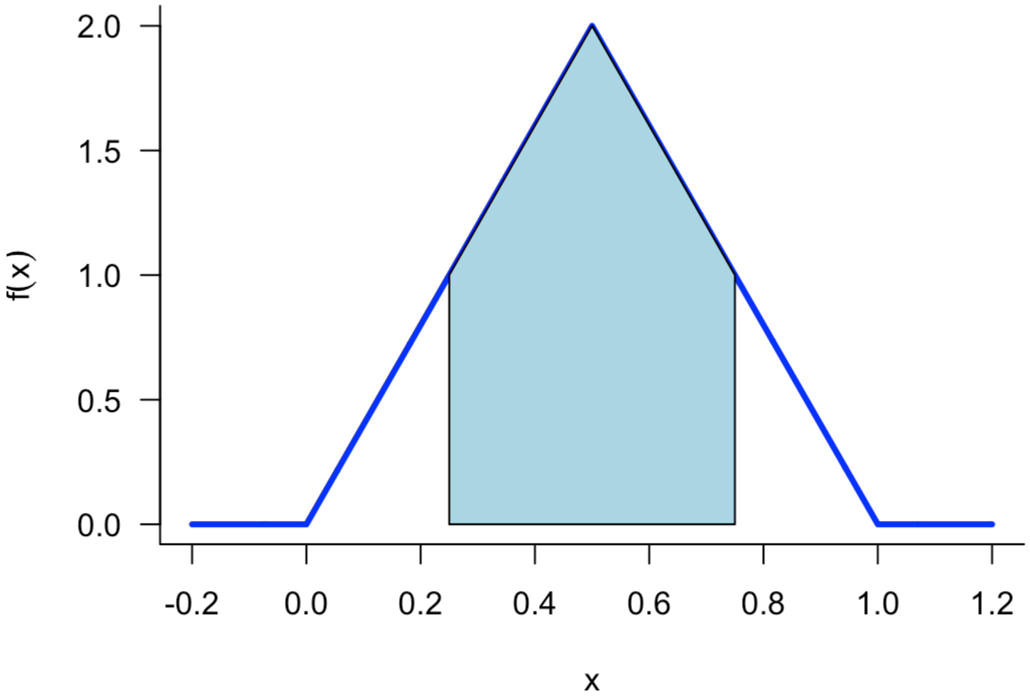
$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2 \; .$$



Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Exemplo

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f_X(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}.$$



Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

Temos que,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{1/2} x4x dx + \int_{1/2}^{1} x4(1-x) dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo

E,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 4xdx + \int_{1/2}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 4(1-x)dx \\
&= \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^{3} - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F_X(x)$ é dada por

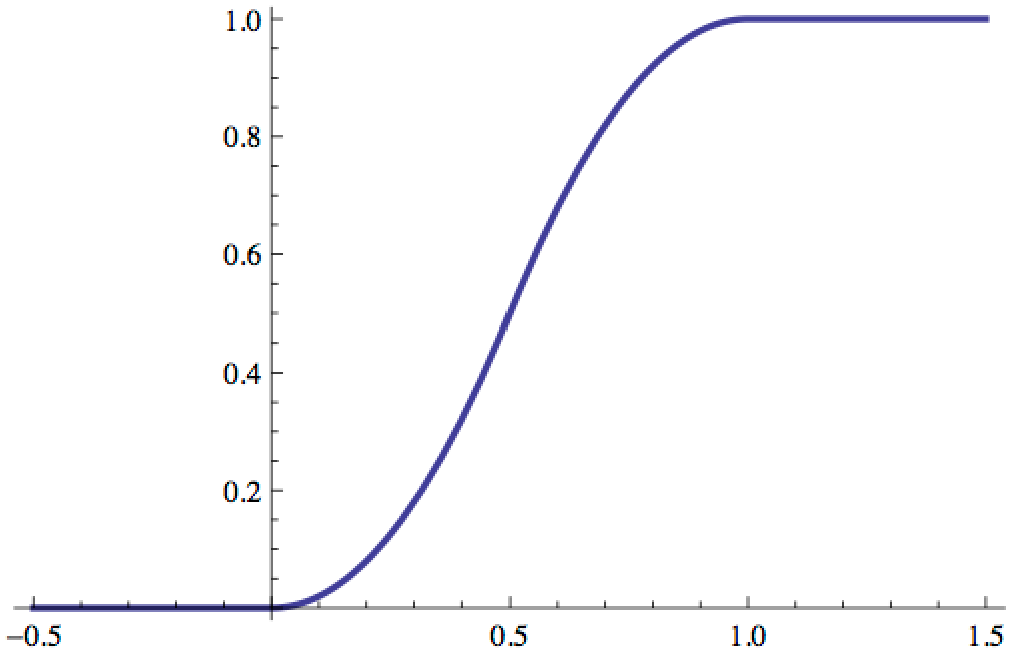
$$F_X(x) = \int_0^x 4tdt = 2x^2.$$

Para $x \in [1/2, 1]$, a acumulada é dada por

$$F_X(x) = \int_0^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1.$$

Exemplo

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de $F_X(x)$ é dado por:



Distribuição Uniforme

Uniforme

- Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

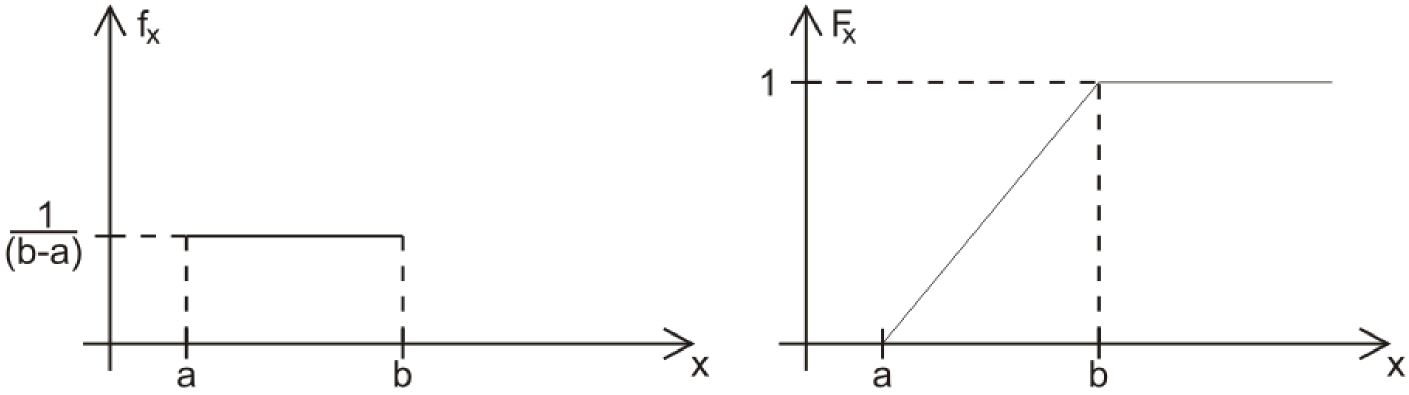
- Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$.

- Cálculo da função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Uniforme

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:



Esperança e Variância

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x\frac{1}{(b-a)}dx = \frac{(b+a)}{2}.$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2\frac{1}{(b-a)}dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3},$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

IMECC

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel. Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

A densidade de uma $U[50, 70]$ é dada por:

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20} & 50 \leq x \leq 70, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a probabilidade de uma peça ter dureza entre 55 e 60 é:

$$P(55 < H < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dh = \frac{1}{20}(60 - 55) = \frac{1}{4} .$$

Exemplo

Seja X uma variável aleatória distribuída uniformemente, com média 15 e variância 25/3.

- Encontre a função de densidade de X.
- Qual é a probabilidade que $X > 14$?

Exemplo

Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2},$$

e sua variância por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Temos, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} a+b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Exemplo

Ou simplesmente (você é capaz de dizer por que tomamos a raiz positiva apenas, neste sistema não-linear?)

$$\begin{cases} a+b &= & 30 \\ b-a &= & 10 \end{cases}$$

O sistema tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 20; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, a probabilidade de $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20-14)}{10} = 0.6\,.$$

Distribuição Exponencial

Exponencial

- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

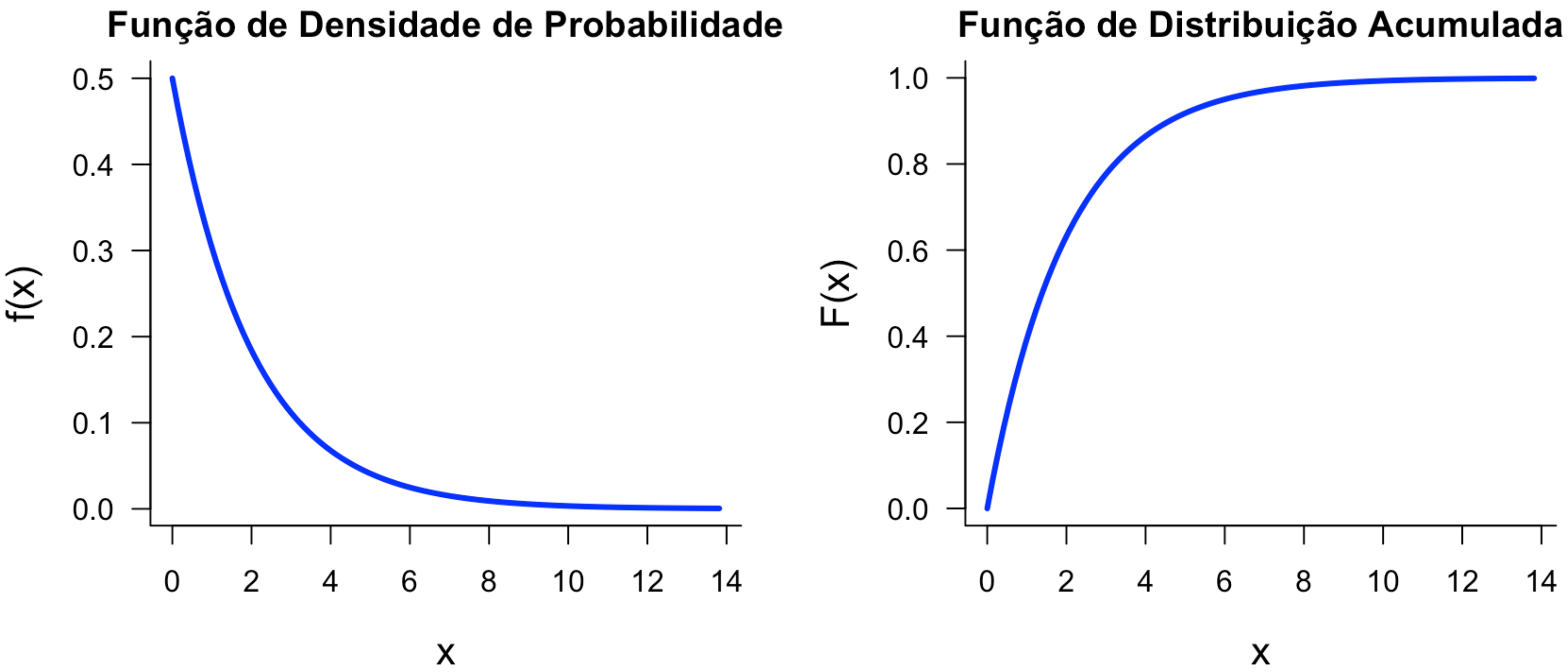
- Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

- Cálculo da função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Distribuição Exponencial

Gráficos da função de densidade de probabilidade (esquerda) e da função de distribuição acumulada (direita) de $X \sim Exp(0.5)$:



Esperança e Variância

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}\,.$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exemplo: componente eletrônico

O tempo de vida, X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0.75$.

Qual é o tempo médio de vida do componente?

Exemplo: componente eletrônico

Sabemos que se $X \sim Exp(\lambda)$, então

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

e $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$.

Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0.0013863 .$$

Concluimos então que o tempo médio de vida, $\mathbb{E}(X)$, é igual a $1/0.0013863 = 721.35$ horas, e que 75% dos componentes duram 1000 horas ou menos.

Exemplo: tubos de TV

Um antiga fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial.

Qual a probabilidade de que a fábrica tenha que substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

Como X tem distribuição exponencial com parâmetro λ e $\mathbb{E}[X] = 800$, temos:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 800 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{800}.$$

Então, a f.d.p. é dada por $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Se $X < 300$, a fábrica tem que substituir gratuitamente.

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x}{800}} \right]_0^{300} = 0.3127\,.$$

Exemplo: produto alimentício

A f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício.

O produto é consumível se este índice for menor do que 2.

O setor de fiscalização apreendeu 30 unidades do produto. Qual a probabilidade de que pelo menos 10% da amostra seja imprópria para consumo?

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se: $P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x}\, dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98$.

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Seja Y: número de unidades impróprias para consumo na amostra de 30.

Então,

$$Y \sim \text{Bin}(30, 0.02).$$

Probabilidade de que pelo menos 10% de uma amostra de 30 unidades seja imprópria:

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) \\
&= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\
&= 1 - \left[\binom{30}{0}(0.02)^0(0.98)^{30} + \binom{30}{1}(0.02)^1(0.98)^{29} + \binom{30}{2}(0.02)^2(0.98)^{28}\right] \\
&= 0.022\ .
\end{aligned}$$

Leituras

- Ross: seções 6.1 e 6.2.
- Magalhães: capítulo 6.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho