ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 14

Distribuição amostral e Teorema Central do Limite

Estimar uma proporção: Eleições para a prefeitura

- Quero saber se o candidato A vai ganhar as eleições para prefeito.

- Quero saber parâmetro populacional p = proporção de pessoas que votam em A.
- Posso esperar o resultado das eleições para saber, ou seja, teríamos as respostas de todas as pessoas da cidade.
- Posso usar uma amostra para estimar a proporção de votos para A.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Posso pensar no problema de duas formas: Modo 1 e Modo 2.

Modo 1

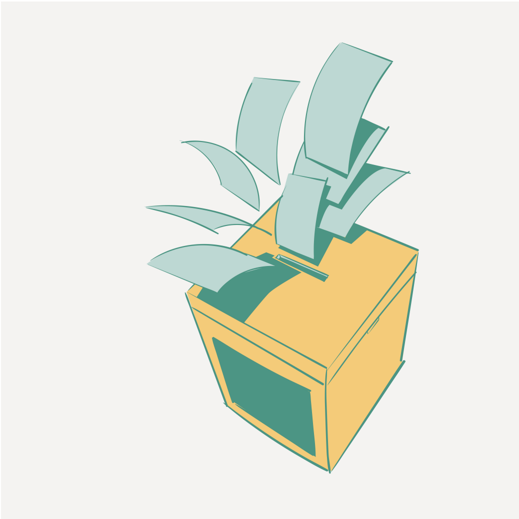
- Cidade com N pessoas.
- $X_i = 1$ se a pessoa i vota em A
- $X_i = 0$ se a pessoa i não vota em A.
- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$: respostas de toda a população (temos no dia da eleição).
- Média populacional:

$$p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Modo 1

- Variância populacional:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - p)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i^2 - 2pX_i + p^2) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2p\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} p^2}{N} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 2p\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} p^2}{N} \\
&= \frac{Np - 2pNp + Np^2}{N} = p(1-p)
\end{aligned}
$$



Modo 1

- p = proporção de pessoas que votam em A na cidade
- $\sigma^2 = p(1-p)$ é a variância da população.
- Até o dia da eleição, não sabemos p.
- Coletamos uma amostra aleatória de tamanho n para uma pesquisa eleitoral.
- $\hat{p}$: proporção de pessoas que votam em A na amostra.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Se outra pessoa também coleta uma amostra aleatória de tamanho n e calcula $\hat{p}$ teremos o mesmo valor?

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

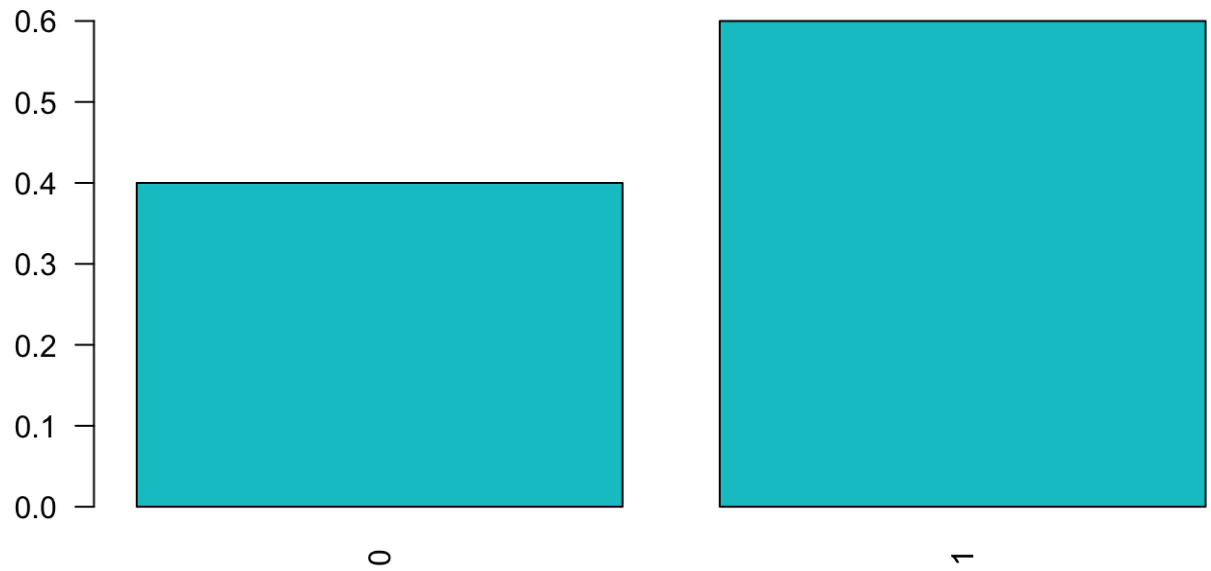
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N} (X_i - p)^2 \\
&= \frac{3 \times (1 - 0.6)^2 + 2 \times (0 - 0.6)^2}{5} \\
&= 0.24 \\
&= p(1 - p)
\end{aligned}$$

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Gráfico de barras (proporção) dos dados populacionais:



Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$N^n = 25$ amostras possíveis.

Primeira pessoa	Segunda pessoa	$\hat{p}$
1	1	1.0
2	1	0.5
3	1	1.0
4	1	0.5
5	1	1.0
1	2	0.5
2	2	0.0
3	2	0.5
4	2	0.0
5	2	0.5
1	3	1.0
2	3	0.5
3	3	1.0
4	3	0.5
5	3	1.0
1	4	0.5
2	4	0.0
3	4	0.5
4	4	0.0
5	4	0.5
1	5	1.0
2	5	0.5
3	5	1.0
4	5	0.5
5	5	1.0

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

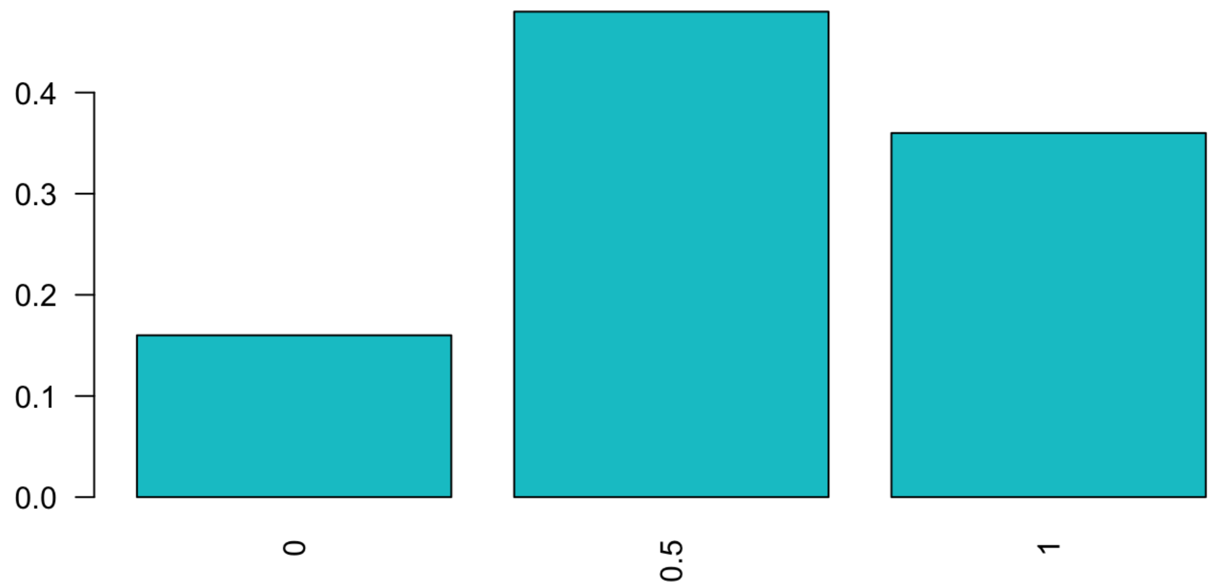
Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:

x	$P(\hat{p} = x)$
0	0.16
0.5	0.48
1	0.36

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}) &= 0 \times 0.16 + 0.5 \times 0.48 + 1 \times 0.36 = 0.6 = p \\
Var(\hat{p}) &= E[(\hat{p} - p)^2] \\
&= 0.16 \times (0 - 0.6)^2 + 0.48 \times (0.5 - 0.6)^2 + 0.36 \times (1 - 0.6)^2 \\
&= 0.12 = \frac{0.24}{2} = \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição amostral de $\hat{p}$:



Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

$N^n = 125$ amostras possíveis.

Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\hat{p}$
1	1	1	1.000
2	1	1	0.667
3	1	1	1.000
4	1	1	0.667
5	1	1	1.000
1	2	1	0.667
2	2	1	0.333
3	2	1	0.667
4	2	1	0.333
5	2	1	0.667
1	3	1	1.000
2	3	1	0.667
3	3	1	1.000
4	3	1	0.667
5	3	1	1.000
1	4	1	0.667
2	4	1	0.333
3	4	1	0.667
4	4	1	0.333
5	4	1	0.667
1	5	1	1.000
2	5	1	0.667
3	5	1	1.000
4	5	1	0.667
5	5	1	1.000

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\hat{p}$
26	1	1	2	0.667
27	2	1	2	0.333
28	3	1	2	0.667
29	4	1	2	0.333
30	5	1	2	0.667
31	1	2	2	0.333
32	2	2	2	0.000
33	3	2	2	0.333
34	4	2	2	0.000
35	5	2	2	0.333
36	1	3	2	0.667
37	2	3	2	0.333
38	3	3	2	0.667
39	4	3	2	0.333
40	5	3	2	0.667
41	1	4	2	0.333
42	2	4	2	0.000
43	3	4	2	0.333
44	4	4	2	0.000
45	5	4	2	0.333
46	1	5	2	0.667
47	2	5	2	0.333
48	3	5	2	0.667
49	4	5	2	0.333
50	5	5	2	0.667

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\hat{p}$
51	1	1	3	1.000
52	2	1	3	0.667
53	3	1	3	1.000
54	4	1	3	0.667
55	5	1	3	1.000
56	1	2	3	0.667
57	2	2	3	0.333
58	3	2	3	0.667
59	4	2	3	0.333
60	5	2	3	0.667
61	1	3	3	1.000
62	2	3	3	0.667
63	3	3	3	1.000
64	4	3	3	0.667
65	5	3	3	1.000
66	1	4	3	0.667
67	2	4	3	0.333
68	3	4	3	0.667
69	4	4	3	0.333
70	5	4	3	0.667
71	1	5	3	1.000
72	2	5	3	0.667
73	3	5	3	1.000
74	4	5	3	0.667
75	5	5	3	1.000

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\hat{p}$
76	1	1	4	0.667
77	2	1	4	0.333
78	3	1	4	0.667
79	4	1	4	0.333
80	5	1	4	0.667
81	1	2	4	0.333
82	2	2	4	0.000
83	3	2	4	0.333
84	4	2	4	0.000
85	5	2	4	0.333
86	1	3	4	0.667
87	2	3	4	0.333
88	3	3	4	0.667
89	4	3	4	0.333
90	5	3	4	0.667
91	1	4	4	0.333
92	2	4	4	0.000
93	3	4	4	0.333
94	4	4	4	0.000
95	5	4	4	0.333
96	1	5	4	0.667
97	2	5	4	0.333
98	3	5	4	0.667
99	4	5	4	0.333
100	5	5	4	0.667

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\hat{p}$
101	1	1	5	1.000
102	2	1	5	0.667
103	3	1	5	1.000
104	4	1	5	0.667
105	5	1	5	1.000
106	1	2	5	0.667
107	2	2	5	0.333
108	3	2	5	0.667
109	4	2	5	0.333
110	5	2	5	0.667
111	1	3	5	1.000
112	2	3	5	0.667
113	3	3	5	1.000
114	4	3	5	0.667
115	5	3	5	1.000
116	1	4	5	0.667
117	2	4	5	0.333
118	3	4	5	0.667
119	4	4	5	0.333
120	5	4	5	0.667
121	1	5	5	1.000
122	2	5	5	0.667
123	3	5	5	1.000
124	4	5	5	0.667
125	5	5	5	1.000

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

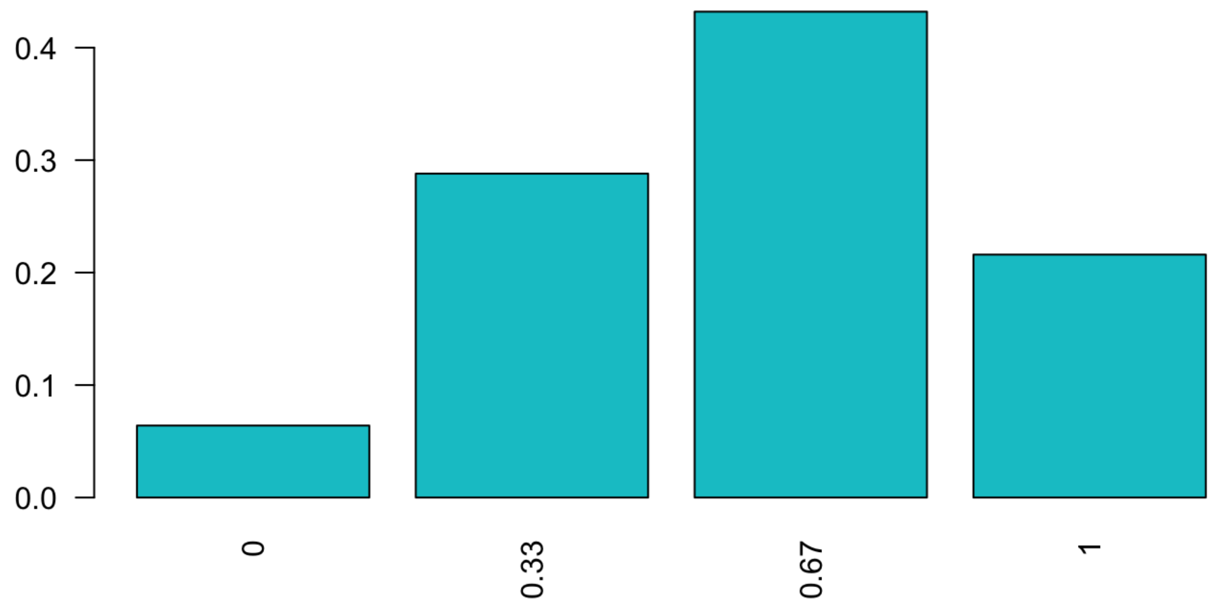
Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:

x	$P(\hat{p} = x)$
0	0.064
0.333	0.288
0.667	0.432
1	0.216

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}) &= 0 \times 0.064 + 0.333 \times 0.288 + 0.667 \times 0.432 + 1 \times 0.216 \\
&= 0.6 = p \\
Var(\hat{p}) &= E[(\hat{p} - p)^2] \\
&= 0.08 = \frac{0.24}{3} = \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

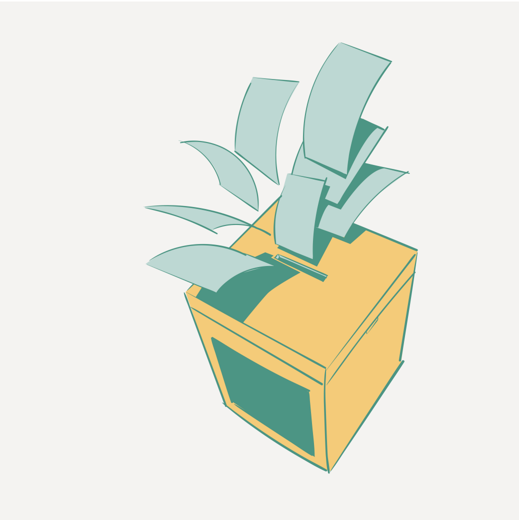
Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição amostral de $\hat{p}$:



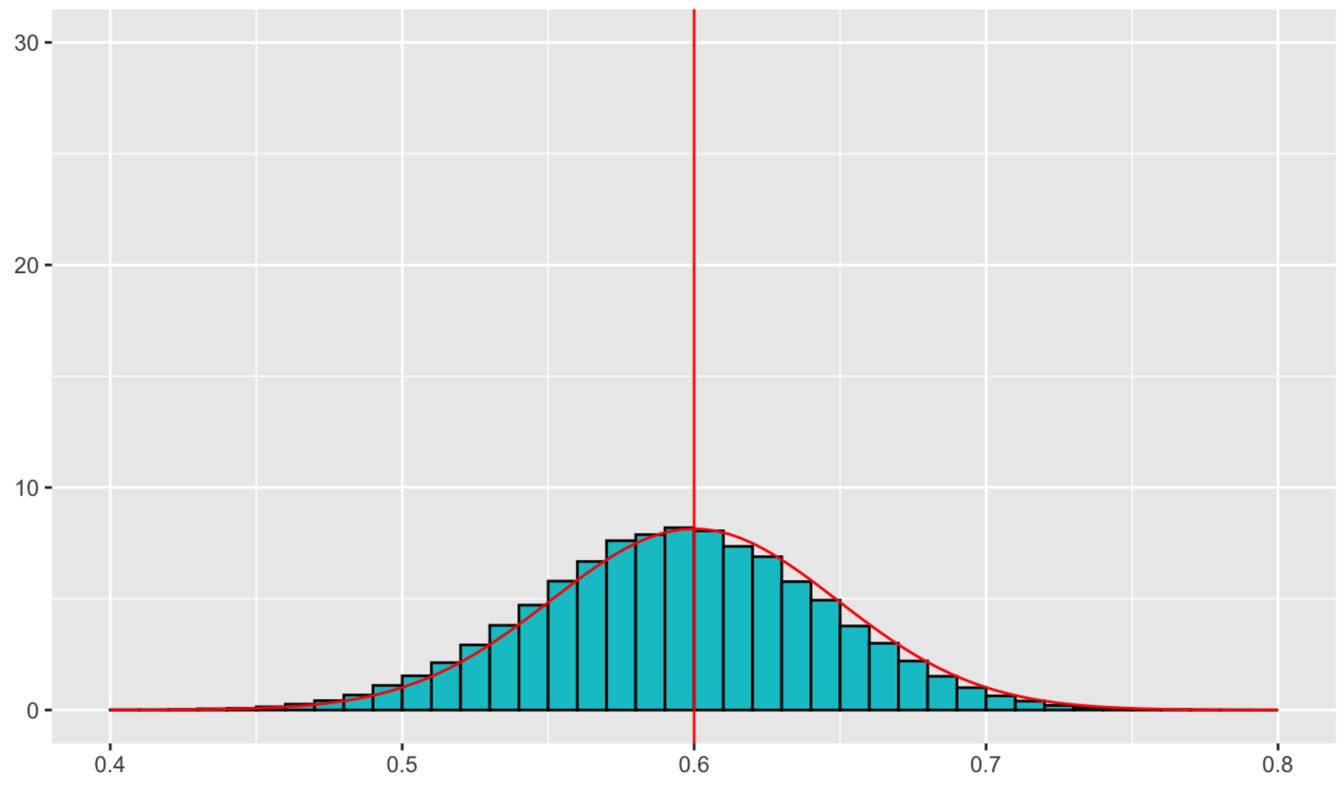
Modo 1

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ é fixo
- Amostra aleatória de tamanho n
- $\hat{p}$ é v.a. (pelo processo de amostragem)
- $E(\hat{p}) = p$
- $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$



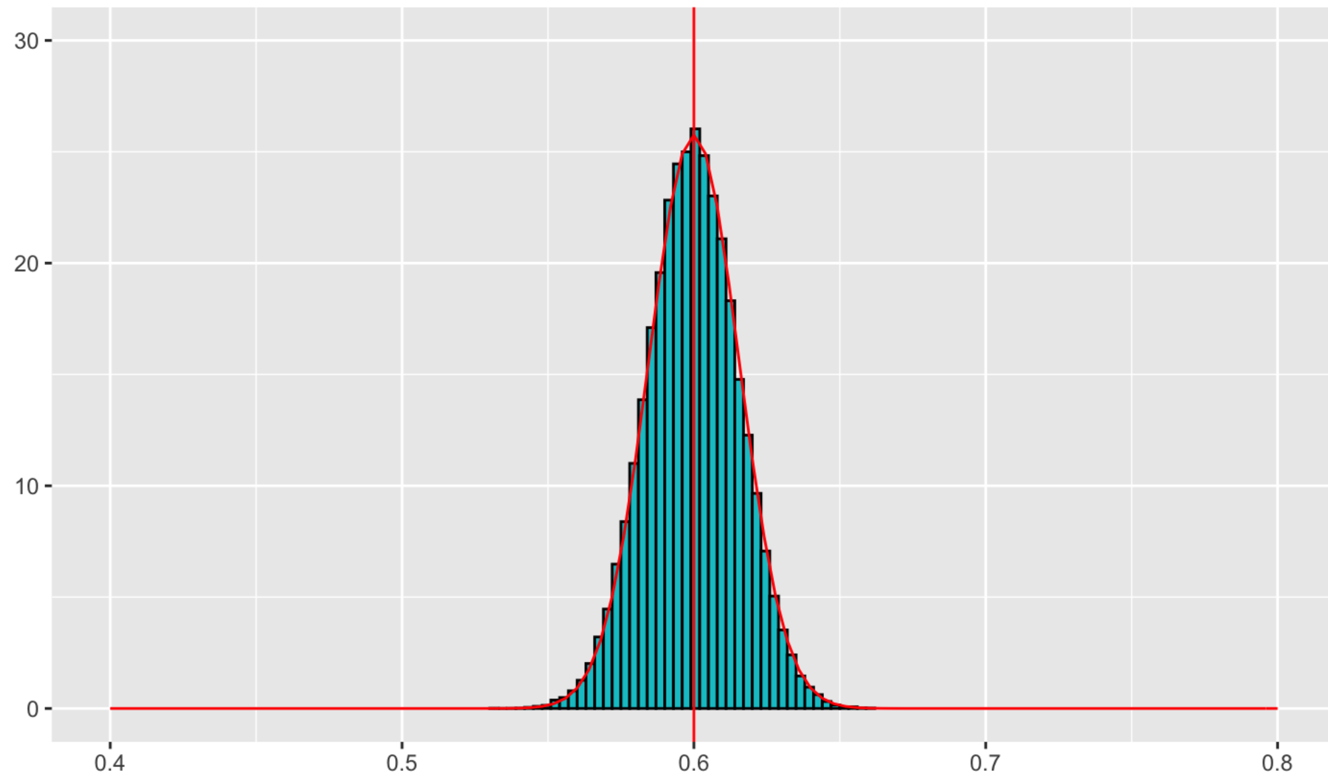
Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 100$

$p = 0.6$. Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:



Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 1000$

$p = 0.6$. Distribuição **amostral** de $\hat{p}$:



Modo 2

Suponha que a resposta de uma pessoa da cidade sobre se vota ou não no candidato A possa ser representada por uma **variável aleatória**. X que assume o valor 1 com probabilidade p ou 0 com probabilidade $1 - p$.

$$
\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(p) \\
\mathbb{E}(X) &= 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) \\
&= 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p \\
Var(X) &= \mathbb{E}[(X - p)^2] \\
&= (1 - p)^2 \times P(X = 1) + (0 - p)^2 \times P(X = 0) \\
&= p(1 - p)^2 + (1 - p)p^2 \\
&= p(1 - p)
\end{aligned}
$$

Modo 2 - Exemplo $n = 2$

Todas as combinações possíveis de amostras com $n = 2$ são:

Possibilidades	$(X_1 = 1, X_2 = 1)$	$(X_1 = 1, X_2 = 0)$	$(X_1 = 0, X_2 = 1)$	$(X_1 = 0, X_2 = 0)$
$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	1	0.5	0.5	0
$P(X_1 = i, X_2 = j)$	p^2	$p(1-p)$	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

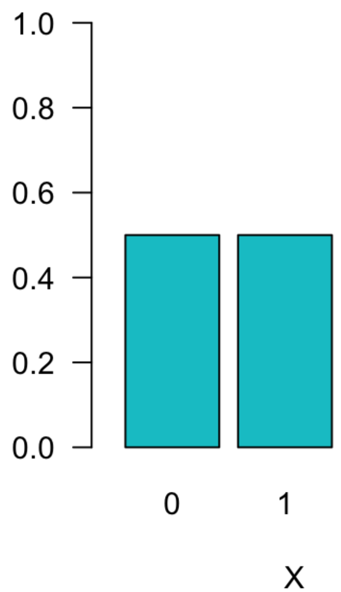
$$\mathbb{E}(\hat{p}) = 1 \times p^2 + 0.5 \times p(1-p) + 0.5 \times (1-p)p + 0 \times (1-p)^2 = p$$

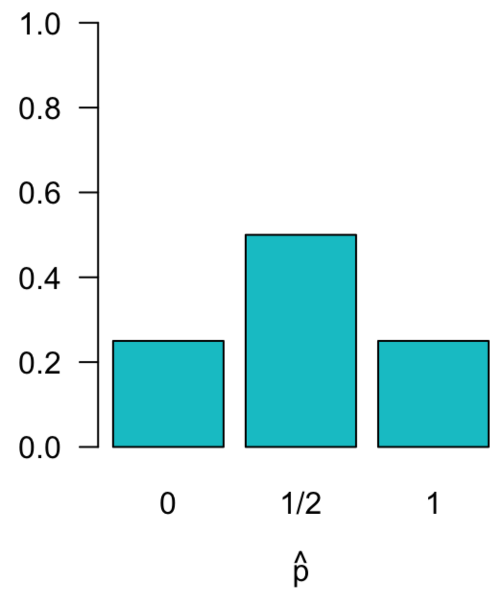
$$\begin{aligned} Var(\hat{p}) &= \mathbb{E}[(\hat{p} - p)^2] \\ &= (1-p)^2 \times p^2 + (0.5-p)^2 p(1-p) + (0.5-p)^2(1-p)p + (0-p)^2(1-p)^2 \\ &= \frac{p(1-p)}{2} \end{aligned}$$

Note que: $\mathbb{E}(\hat{p}) = p = \mathbb{E}(X)$ e $Var(\hat{p}) = \dfrac{Var(X)}{n}$.

Modo 2 - Exemplo $n = 2$

Veja os gráficos das distribuições de probabilidade de $X \sim Bernoulli(p = 0.5)$ e $\hat{p}$, respectivamente.





Resultado

Seja X uma v.a. com distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Sabe-se que $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$. Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ de X.

A proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem as seguintes propriedades:

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = p \qquad \text{e} \qquad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

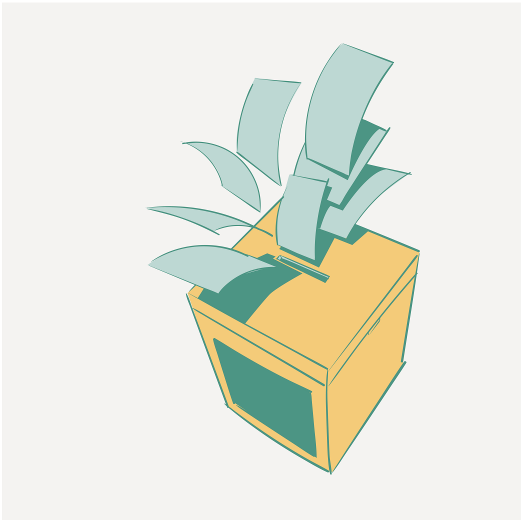
(propriedade de linearidade da esperança e da variância, esta última em caso de independência)

Ou seja, embora p seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da proporção amostral é p.

Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão de $\hat{p}$ para estimar p fica cada vez menor, pois $Var(\hat{p}) = p(1-p)/n$ é inversamente proporcional ao tamanho amostral n.

Modo 2

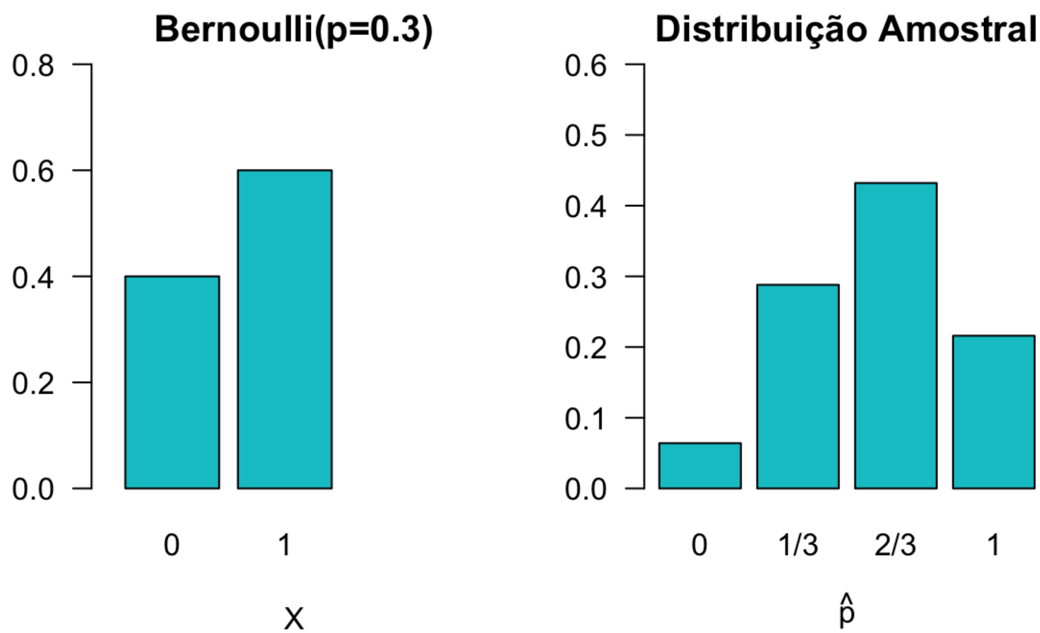
- $X_i \sim Bernoulli(p)$ é v.a. (o voto ou não em A é considerado uma v.a.)
- Amostra aleatória de tamanho n
- $\hat{p}$ é v.a. (é combinação linear de v.a.'s)
- $E(\hat{p}) = p$
- $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$



Modo 2 - Exemplo $n = 3$

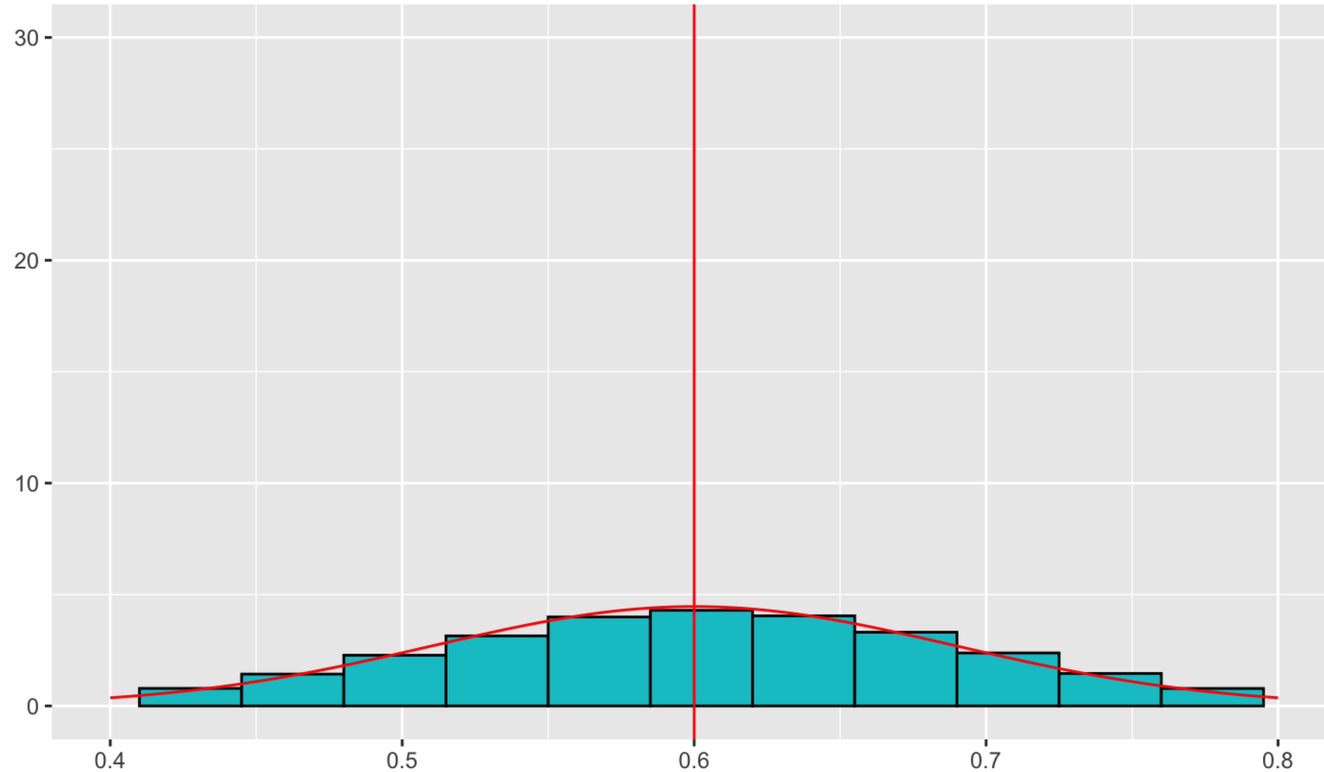
Amostra aleatória $n = 3$ de $X \sim Bernoulli(p = 0.6)$.

- $p = \mathbb{E}(X) = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(\hat{p}) = 0.6$
- $p(1-p) = Var(X) = p(1-p) = 0.24 \quad \Rightarrow \quad Var(\hat{p}) = \frac{0.24}{3} = 0.08$



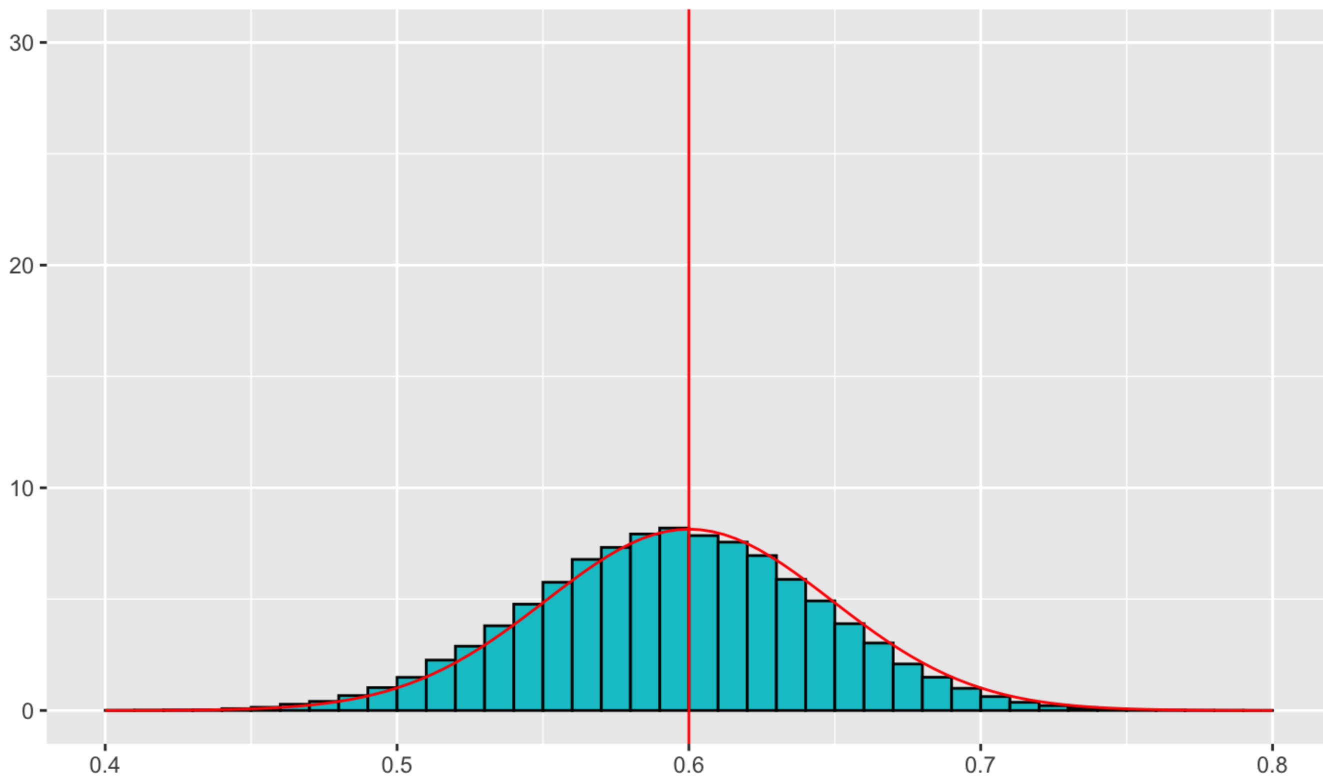
Modo 2 - Exemplo $n = 30$

$p = 0.6$



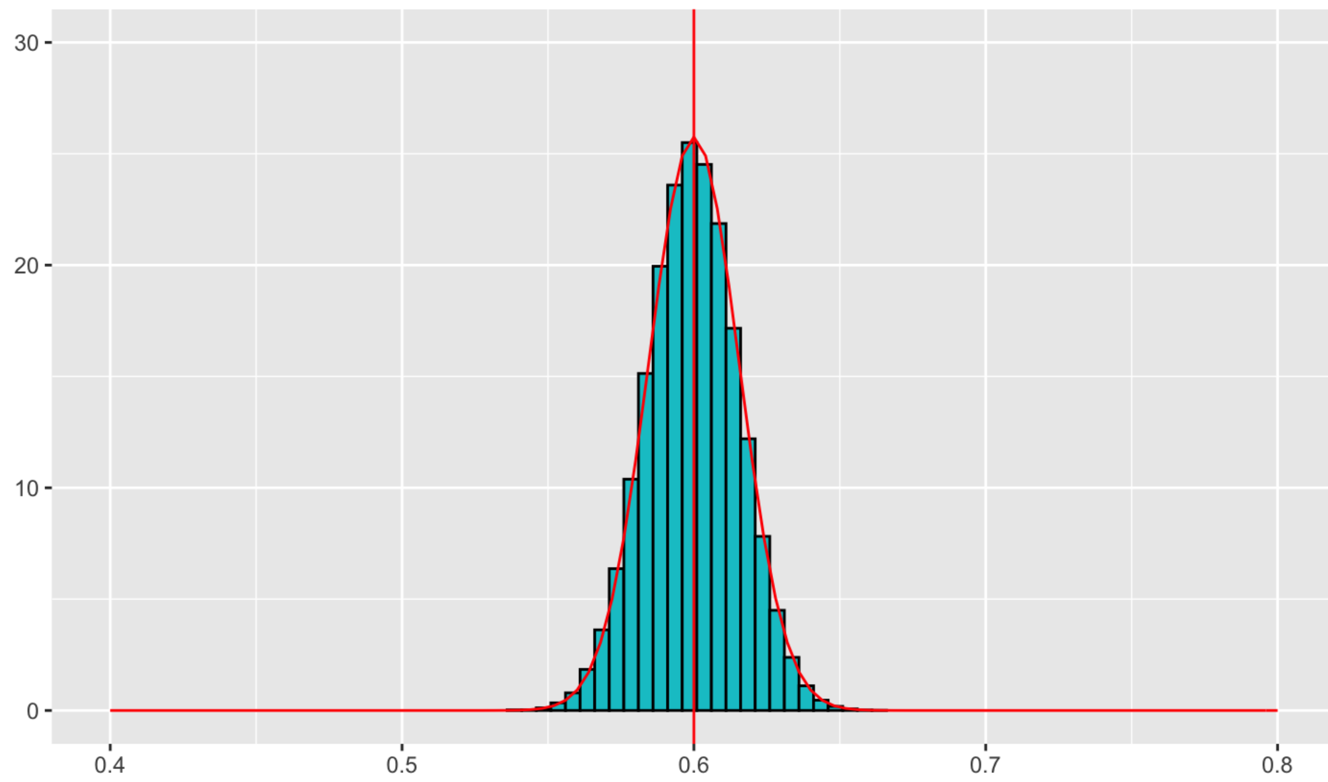
Modo 2 - Exemplo $n = 100$

$p = 0.6$



Modo 2 - Exemplo $n = 1000$

$p = 0.6$



Resumo dos exemplos

- Modo 1: repostas são “fixas”, com média populacional p e variância populacional $p(1-p)$.
- Modo 2: respostas são v.a.’s $X \sim Bernoulli(p)$, $E(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$.
- Em ambos os casos, a partir do momento que retiro uma amostra aleatória de tamanho n, temos as mesmas propriedades e comportamento para a proporção amostral $\hat{p}$: $E(\hat{p}) = p$ e $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

E, conforme n aumenta, vimos nos gráficos que: $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Estimar uma média: Salários

- Quero saber o salário médio das pessoas de uma certa cidade (parâmetro populacional de interesse).
- Posso usar uma amostra e estimar usando a média amostral.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Posso pensar no problema de duas formas: Modo 1 e Modo 2.

Modo 1

- Cidade com N pessoas.
- X_i é o salário da pessoa i.
- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$: respostas de toda a população.
- Média populacional: $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$
- Variância populacional: $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$

Modo 1

- μ = salário médio da população.
- σ^2 é a variância da população.
- Coletamos uma amostra aleatória de tamanho n.
- $\bar{X}$: média salarial na amostra.
- Quão boa é a estimativa? É precisa?
- Se outra pessoa também coleta uma amostra aleatória de tamanho n e calcula $\bar{X}$ teremos o mesmo valor?

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

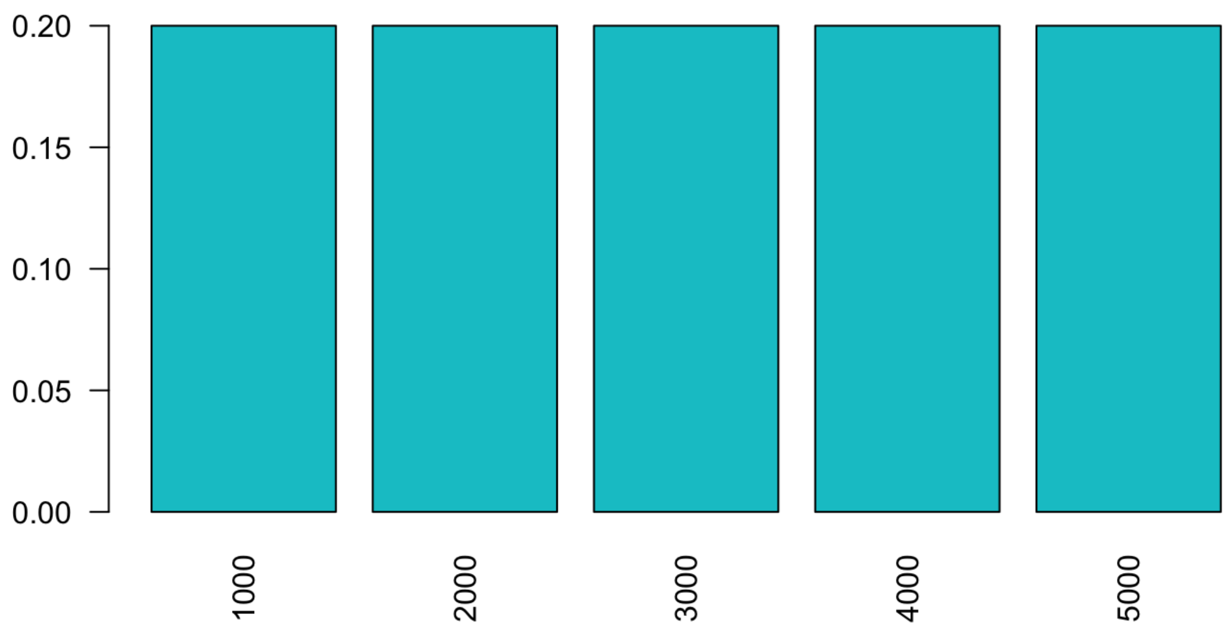
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_5) = (1000, 2000, 3000, 4000, 5000)$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = 3000$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 = 2000000$$

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Gráfico de barras (proporção) dos dados populacionais:



Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$N^n = 25$ amostras possíveis.

Primeira pessoa	Segunda pessoa	$\bar{X}$
1	1	1000
2	1	1500
3	1	2000
4	1	2500
5	1	3000
1	2	1500
2	2	2000
3	2	2500
4	2	3000
5	2	3500
1	3	2000
2	3	2500
3	3	3000
4	3	3500
5	3	4000
1	4	2500
2	4	3000
3	4	3500
4	4	4000
5	4	4500
1	5	3000
2	5	3500
3	5	4000
4	5	4500
5	5	5000

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:

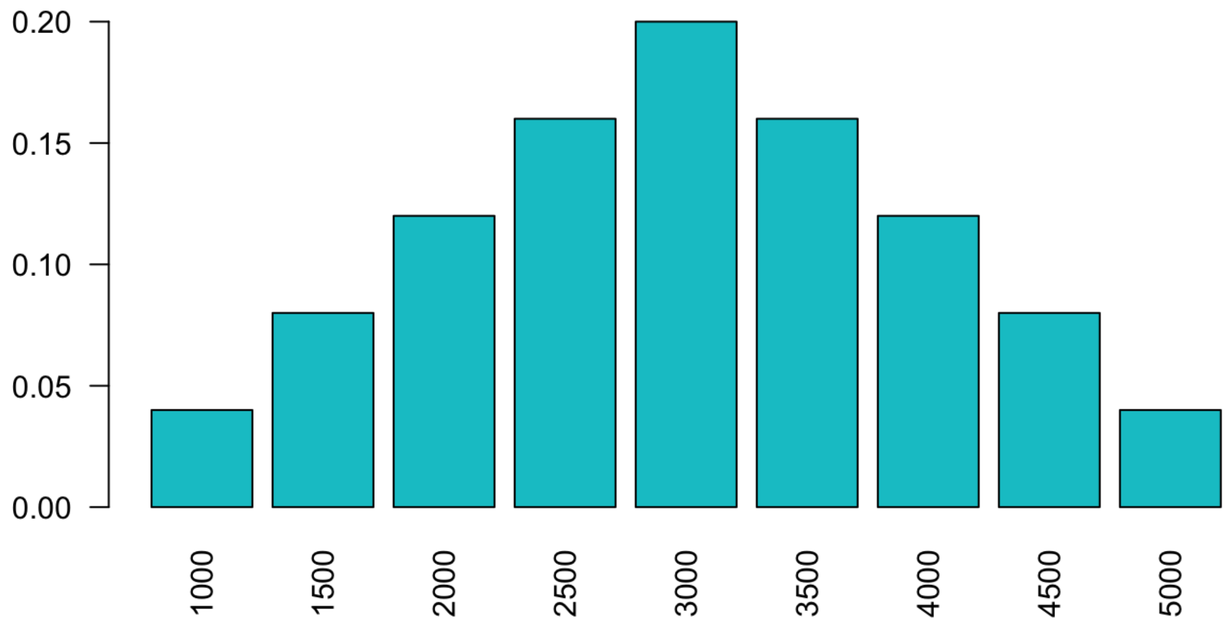
x	$P(\bar{X} = x)$
1000	0.04
1500	0.08
2000	0.12
2500	0.16
3000	0.20
3500	0.16
4000	0.12
4500	0.08
5000	0.04

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

$$
\begin{aligned}
E(\bar{X}) &= 3000 = \mu \\
Var(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - \mu)^2] = 10^6 \\
&= \frac{2000000}{2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 2$

Distribuição amostral de $\bar{X}$:



Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

$N^n = 125$ amostras possíveis.

Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\bar{X}$
1	1	1	1000.000
2	1	1	1333.333
3	1	1	1666.667
4	1	1	2000.000
5	1	1	2333.333
1	2	1	1333.333
2	2	1	1666.667
3	2	1	2000.000
4	2	1	2333.333
5	2	1	2666.667
1	3	1	1666.667
2	3	1	2000.000
3	3	1	2333.333
4	3	1	2666.667
5	3	1	3000.000
1	4	1	2000.000
2	4	1	2333.333
3	4	1	2666.667
4	4	1	3000.000
5	4	1	3333.333
1	5	1	2333.333
2	5	1	2666.667
3	5	1	3000.000
4	5	1	3333.333
5	5	1	3666.667

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\bar{X}$
26	1	1	2	1333.333
27	2	1	2	1666.667
28	3	1	2	2000.000
29	4	1	2	2333.333
30	5	1	2	2666.667
31	1	2	2	1666.667
32	2	2	2	2000.000
33	3	2	2	2333.333
34	4	2	2	2666.667
35	5	2	2	3000.000
36	1	3	2	2000.000
37	2	3	2	2333.333
38	3	3	2	2666.667
39	4	3	2	3000.000
40	5	3	2	3333.333
41	1	4	2	2333.333
42	2	4	2	2666.667
43	3	4	2	3000.000
44	4	4	2	3333.333
45	5	4	2	3666.667
46	1	5	2	2666.667
47	2	5	2	3000.000
48	3	5	2	3333.333
49	4	5	2	3666.667
50	5	5	2	4000.000

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\bar{X}$
51	1	1	3	1666.667
52	2	1	3	2000.000
53	3	1	3	2333.333
54	4	1	3	2666.667
55	5	1	3	3000.000
56	1	2	3	2000.000
57	2	2	3	2333.333
58	3	2	3	2666.667
59	4	2	3	3000.000
60	5	2	3	3333.333
61	1	3	3	2333.333
62	2	3	3	2666.667
63	3	3	3	3000.000
64	4	3	3	3333.333
65	5	3	3	3666.667
66	1	4	3	2666.667
67	2	4	3	3000.000
68	3	4	3	3333.333
69	4	4	3	3666.667
70	5	4	3	4000.000
71	1	5	3	3000.000
72	2	5	3	3333.333
73	3	5	3	3666.667
74	4	5	3	4000.000
75	5	5	3	4333.333

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\bar{X}$
76	1	1	4	2000.000
77	2	1	4	2333.333
78	3	1	4	2666.667
79	4	1	4	3000.000
80	5	1	4	3333.333
81	1	2	4	2333.333
82	2	2	4	2666.667
83	3	2	4	3000.000
84	4	2	4	3333.333
85	5	2	4	3666.667
86	1	3	4	2666.667
87	2	3	4	3000.000
88	3	3	4	3333.333
89	4	3	4	3666.667
90	5	3	4	4000.000
91	1	4	4	3000.000
92	2	4	4	3333.333
93	3	4	4	3666.667
94	4	4	4	4000.000
95	5	4	4	4333.333
96	1	5	4	3333.333
97	2	5	4	3666.667
98	3	5	4	4000.000
99	4	5	4	4333.333
100	5	5	4	4666.667

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

	Pessoa amostrada 1	Pessoa amostrada 2	Pessoa amostrada 3	$\bar{X}$
101	1	1	5	2333.333
102	2	1	5	2666.667
103	3	1	5	3000.000
104	4	1	5	3333.333
105	5	1	5	3666.667
106	1	2	5	2666.667
107	2	2	5	3000.000
108	3	2	5	3333.333
109	4	2	5	3666.667
110	5	2	5	4000.000
111	1	3	5	3000.000
112	2	3	5	3333.333
113	3	3	5	3666.667
114	4	3	5	4000.000
115	5	3	5	4333.333
116	1	4	5	3333.333
117	2	4	5	3666.667
118	3	4	5	4000.000
119	4	4	5	4333.333
120	5	4	5	4666.667
121	1	5	5	3666.667
122	2	5	5	4000.000
123	3	5	5	4333.333
124	4	5	5	4666.667
125	5	5	5	5000.000

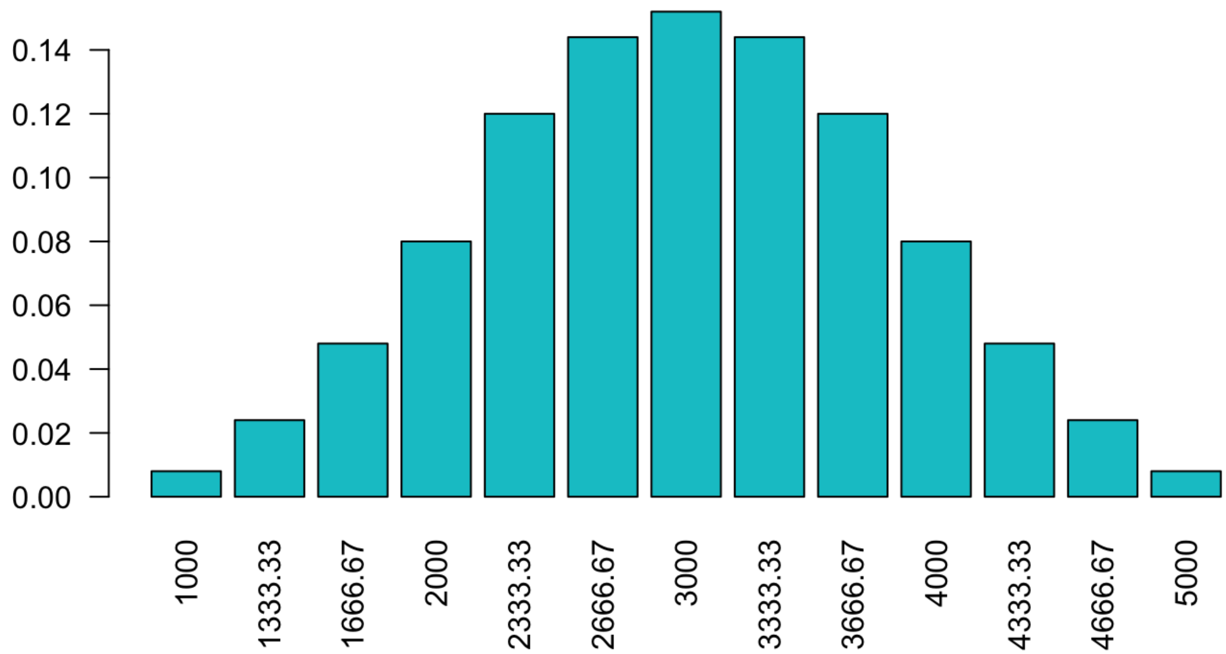
Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:

x	$P(\bar{X} = x)$
1000	0.008
1333.333	0.024
1666.667	0.048
2000	0.080
2333.333	0.120
2666.667	0.144
3000	0.152
3333.333	0.144
3666.667	0.120
4000	0.080
4333.333	0.048
4666.667	0.024
5000	0.008

Modo 1 - Exemplo $N = 5$ e $n = 3$

Distribuição amostral de $\bar{X}$:

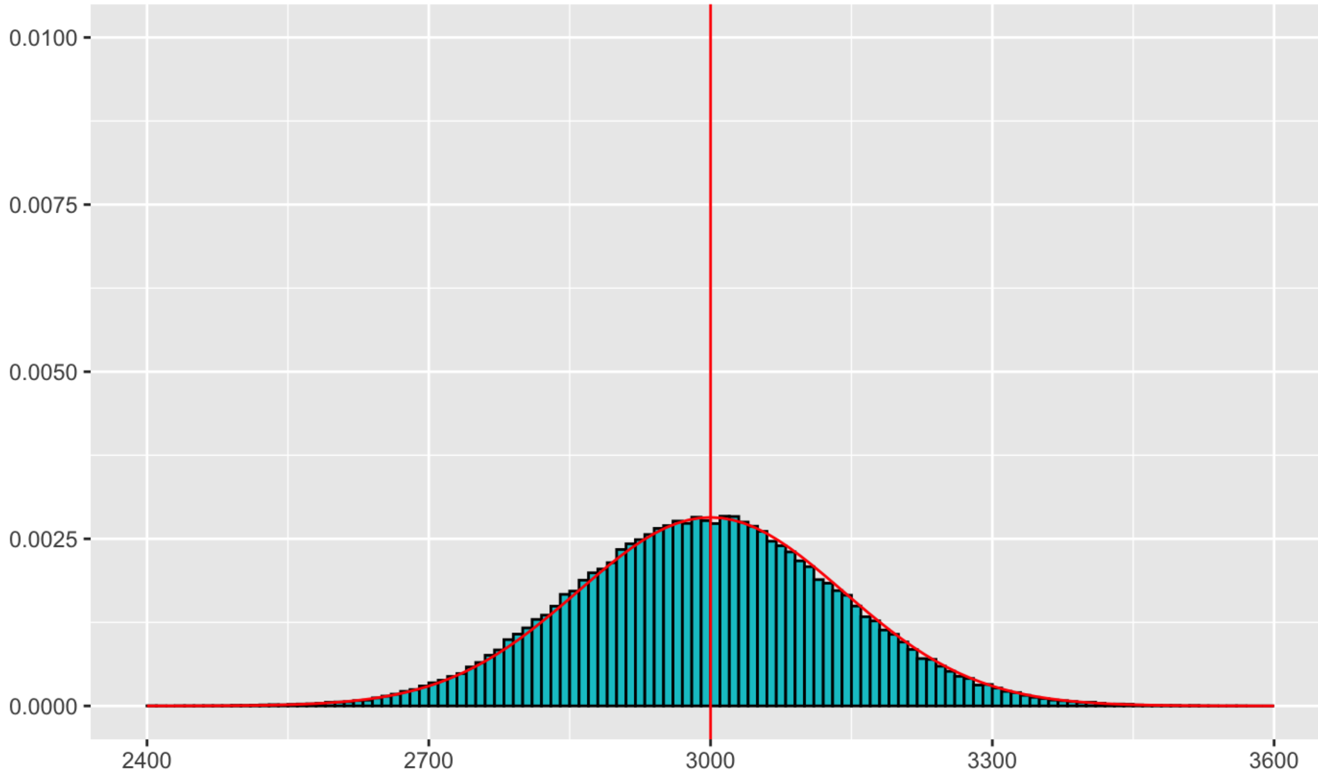


Modo 1

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ é fixo
- Amostra aleatória de tamanho n
- $\bar{X}$ é v.a.
- $E(\bar{X}) = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

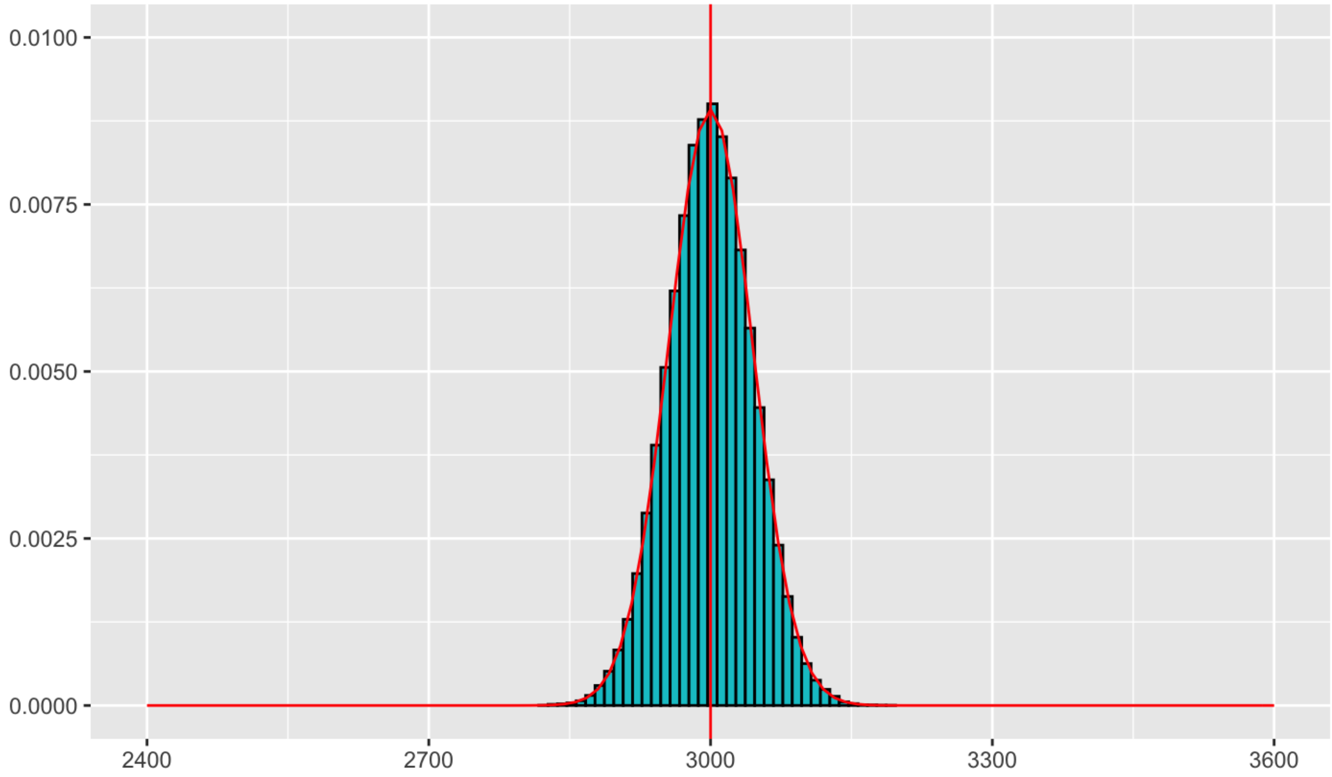
Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 100$

$\mu = 3000$. Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:



Modo 1 - Exemplo $N = 1000000$ e $n = 1000$

$\mu = 3000$. Distribuição **amostral** de $\bar{X}$:



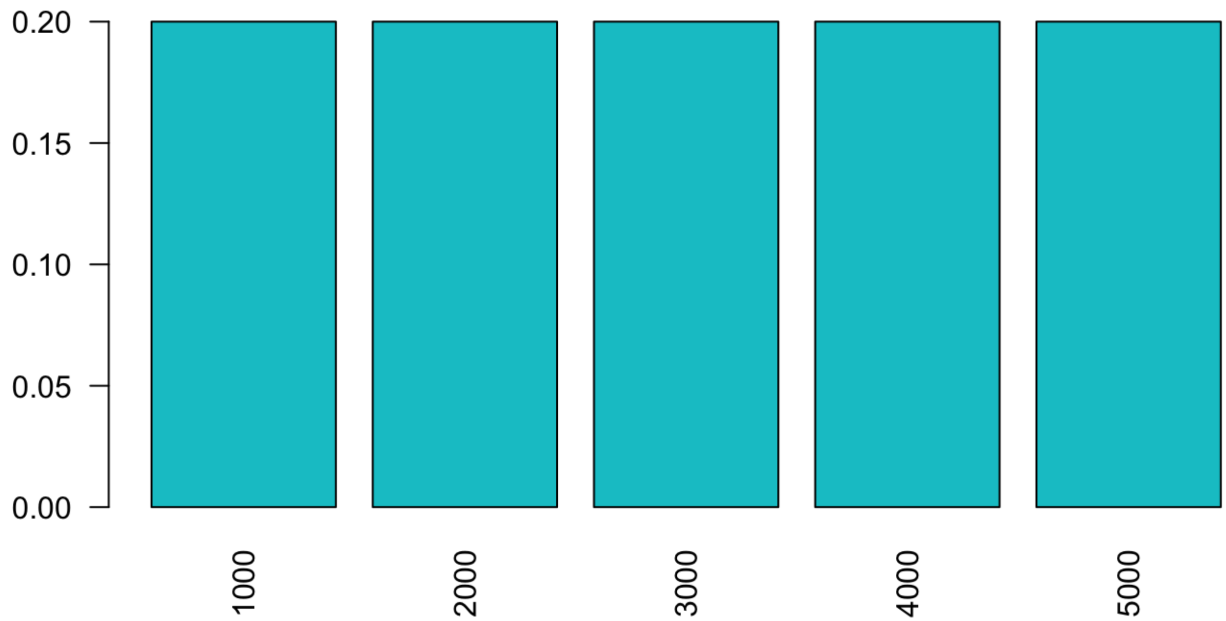
Modo 2

Suponha que o salário de uma pessoa possa ser representado por uma **variável aleatória** uniforme discreta assumindo os valores 1000, 2000, 3000, 4000 ou 5000.

$$
\begin{aligned}
\mu = \mathbb{E}(X) &= \frac{1000 + 2000 + 3000 + 4000 + 5000}{5} = 3000 \\
\sigma^2 = Var(X) &= \frac{1}{5}[(1000 - 3000)^2 + (2000 - 3000)^2 + (3000 - 3000)^2 \\
&\quad + (4000 - 3000)^2 + (5000 - 3000)^2] \\
&= 2000000
\end{aligned}
$$

Modo 2

Distribuição da variável X (do salário de cada indivíduo da população):



Modo 2 - Exemplo $n = 2$

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = E(X) = \mu = 3000$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = 1000000$$

(propriedades de linearidade da esperança e variância (a.a.))

Resultado

Seja X uma v.a. com média μ e variância σ^2 e $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de X.

A média amostral

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem as seguintes propriedades:

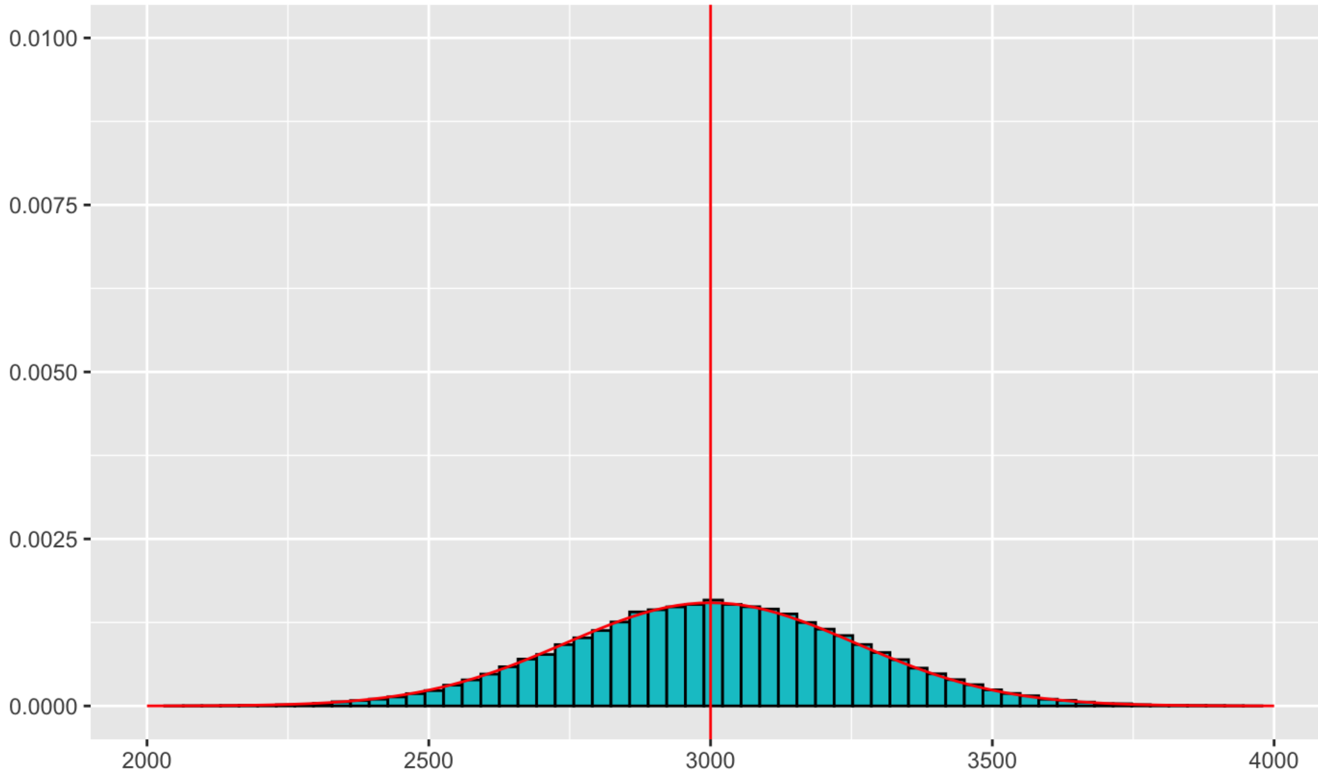
$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(propriedade de linearidade da esperança e da variância, esta última em caso de independência)

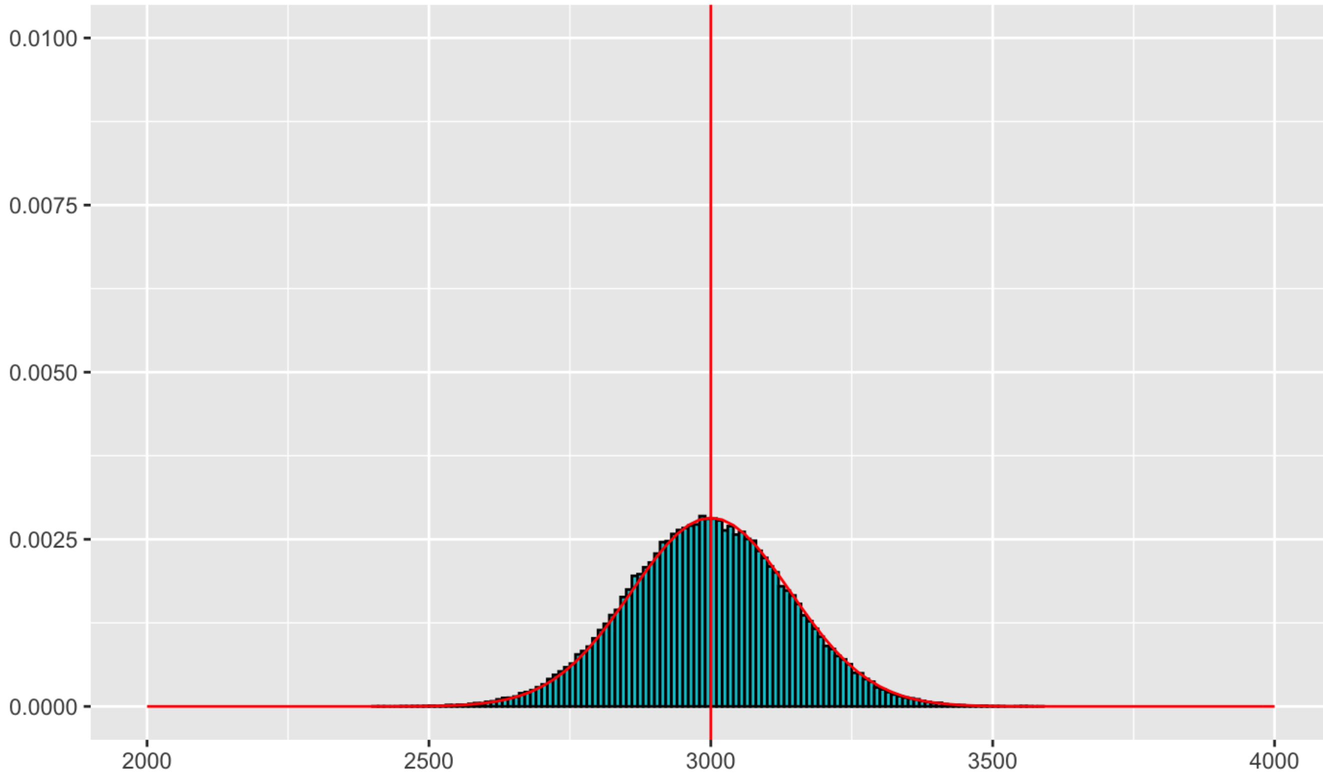
Ou seja, embora μ seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da média amostral é μ.

Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão da média amostral para estimar μ fica cada vez menor, pois $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$ é inversamente proporcional ao tamanho amostral n.

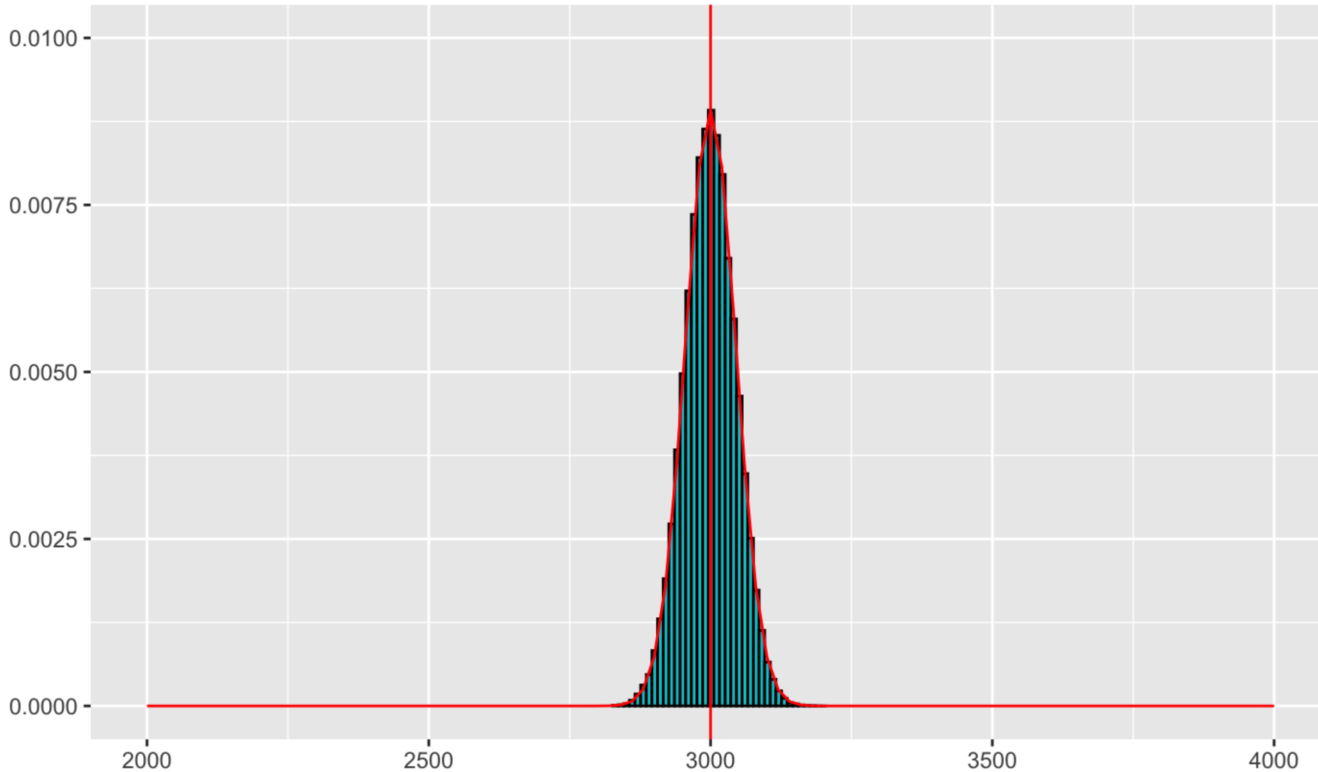
Modo 2 - Exemplo $n = 30$



Modo 2 - Exemplo $n = 100$



Modo 2 - Exemplo $n = 1000$



Resultados

Temos uma população com média (proporção) μ (p) e variância σ^2 desconhecida.

Retira-se uma amostra aleatória de tamanho n e calcula-se a média (ou proporção) amostral $\bar{X}$ (ou $\hat{p}$) para estimar o parâmetro populacional desconhecido μ (ou p).

Temos as propriedades:

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(\hat{p}) = p \qquad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

E, conforme n aumenta, pelos gráficos, *parece* que a distribuição amostral de $\bar{X}$ e $\hat{p}$ se aproxima da normal:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Teorema do Limite Central

Temos os resultados:

- $\bar{X}$: $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- $\hat{p}$: $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$ e $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

No exemplos, vimos também a distribuição amostral de $\bar{X}$ ou $\hat{p}$, mas isso só foi possível porque tínhamos informação de todos os valores possíveis na população.

Os exemplos anteriores foram casos hipotéticos apenas para demonstrar como $\bar{X}$ e $\hat{p}$ se comportam quando realizamos a amostragem.

Na prática, não teremos informações suficientes para de fato descrevermos a distribuição amostral exata de $\bar{X}$ e $\hat{p}$ (se tivermos, nem é preciso fazer amostragem!)

Teorema do Limite Central

Resultado

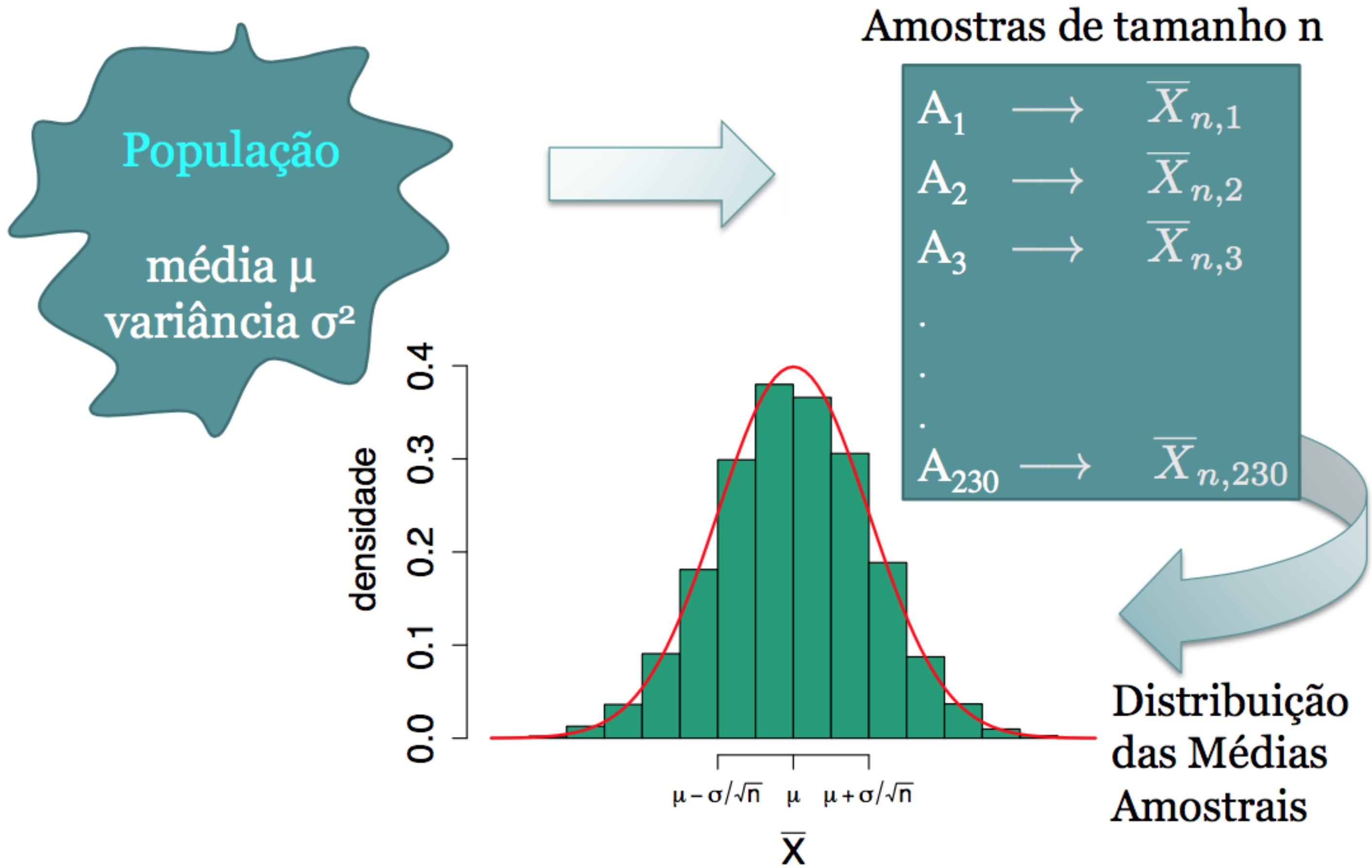
- Para uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ coletada de uma população com média μ e variância σ^2

- a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ aproxima-se de uma **distribuição Normal** de média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando n for suficientemente grande:

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

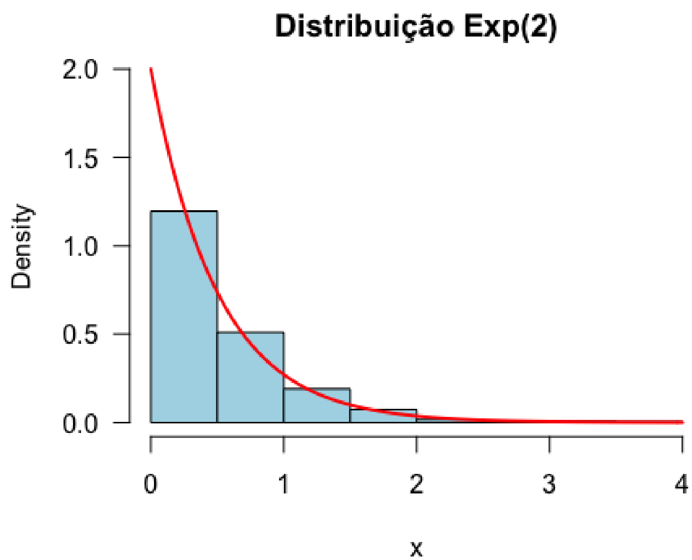
Teorema do Limite Central



Exemplo - Transistor

Suponha que X denota o tempo de vida de um transistor (em horas) e seu comportamento pode ser representado por uma distribuição Exponencial, tal que $X \sim Exp(2)$, ou seja:

$$f_X(x) = 2e^{-2x}, \qquad \text{para } x \geq 0.$$



Sem maiores detalhes, pode-se mostrar que:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{4}$$

Exemplo - Transistor

Os tempos de vida de 100 transistores são coletados e a média dos tempos é calculada, denotada por $\bar{X}_{100}$.

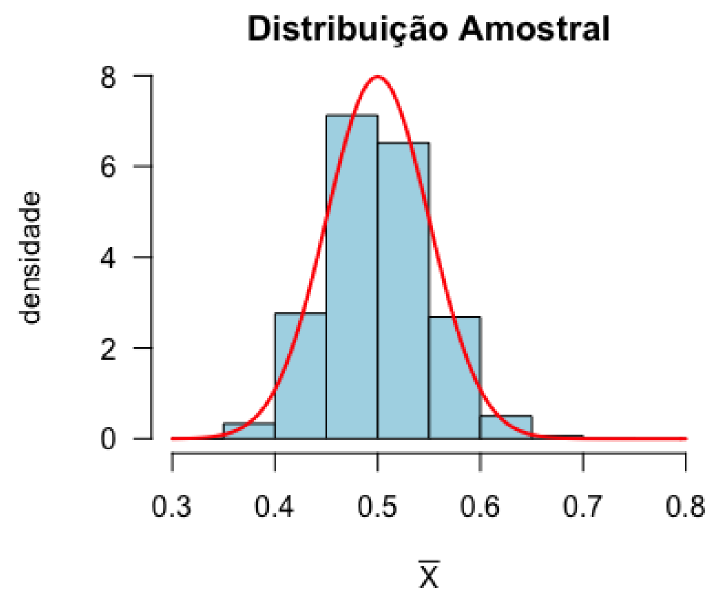
Desejamos estudar a variável aleatória $\bar{X}_{100}$.

Sabemos que:

$$\mathbb{E}(\bar{X}_{100}) = \frac{1}{2} \text{ e } Var(\bar{X}_{100}) = \frac{1/4}{100} = \frac{1}{400}$$

Então, pelo TLC:

$$\bar{X}_{100} \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right).$$



Exemplo - lançamento de dados

$X =$ resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + \ldots + (6 - 3.5)^2] = \frac{17.5}{6} = 2.92$$

- X_i: resultado do i-ésimo lançamento de um dado honesto.
- X_i tem distribuição uniforme discreta.
- $\mu = \mathbb{E}(X_i) = 3.5$ e $\sigma^2 = Var(X_i) = 2.92$

Exemplo - lançamento de dados

Se temos uma amostra aleatória simples de tamanho n: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, pelo TLC sabemos que a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ é aproximadamente Normal$\left(3.5, \frac{2.92}{n}\right)$.

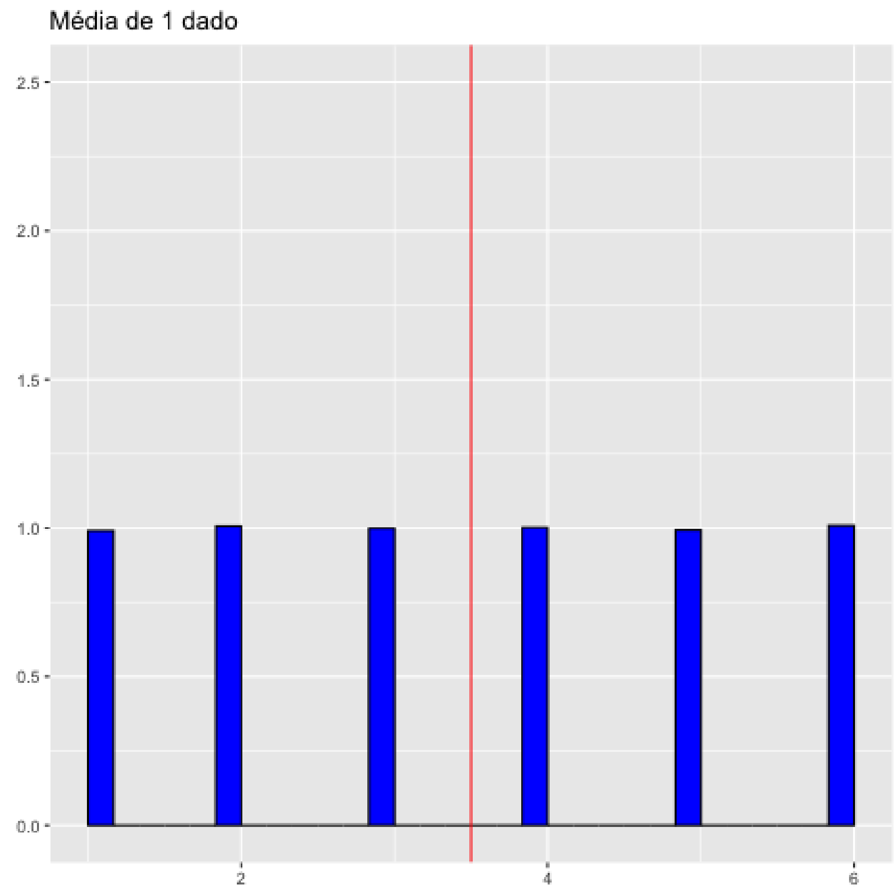
O primeiro histograma a seguir mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar o resultado do lançamento de 1 dado. Repare que é muito próximo de uma distribuição uniforme discreta (chance 1/6 para cada resultado).

O segundo histograma mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 2 dados.

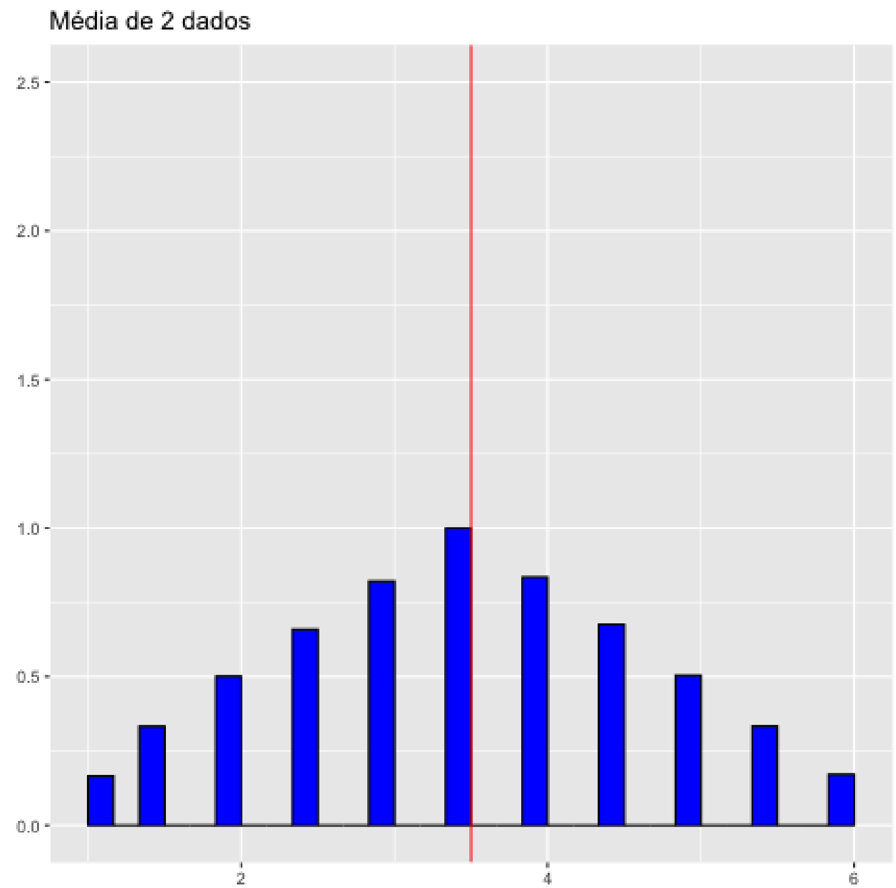
O último histograma mostra o resultado de 100000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 100 dados.

Repare que conforme o número de dados (tamanho amostral) aumenta, a distribuição da média amostral se aproxima da distribuição normal com média 3.5 e variância cada vez menor (2.92/n).

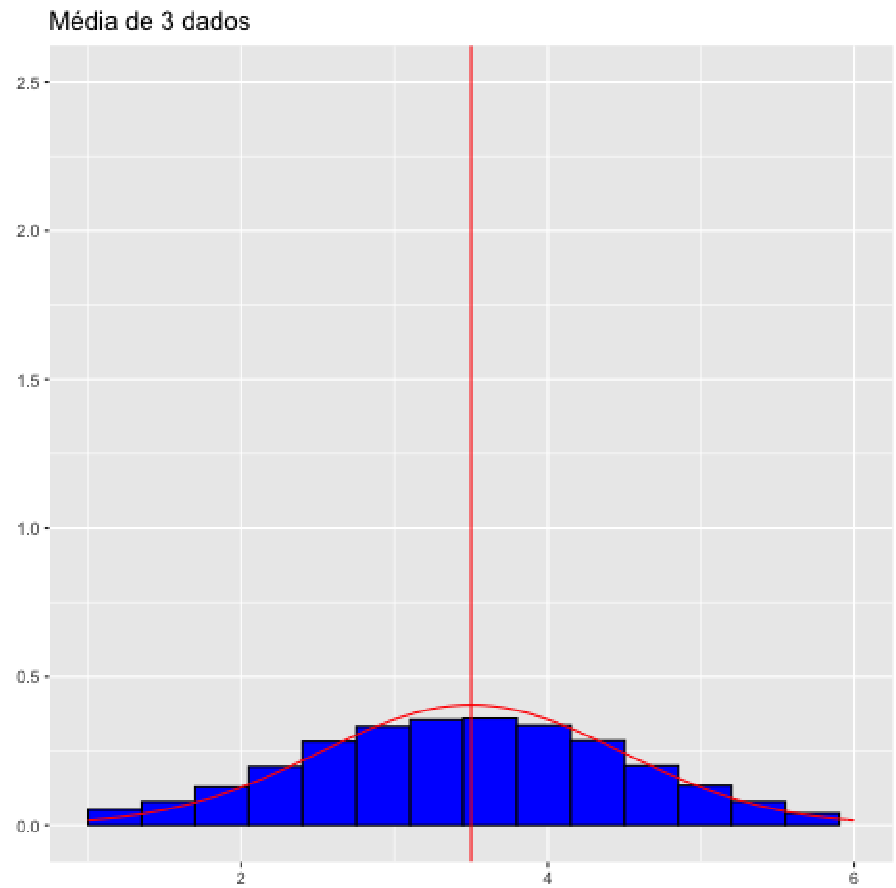
Exemplo - lançamento de dados



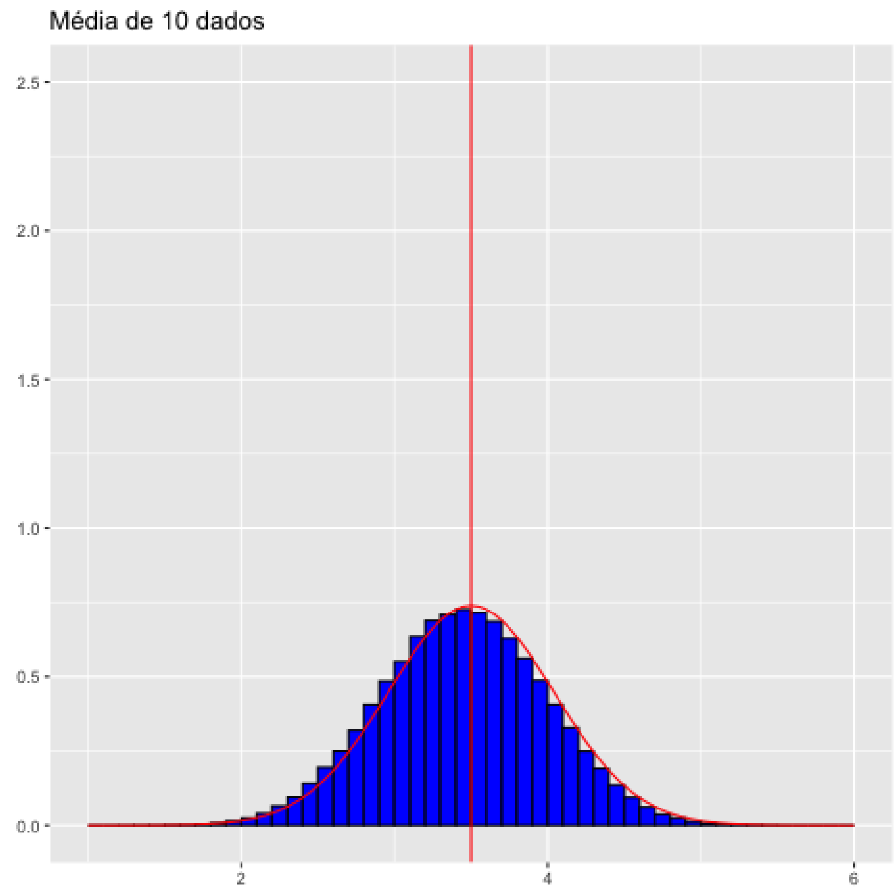
Exemplo - lançamento de dados



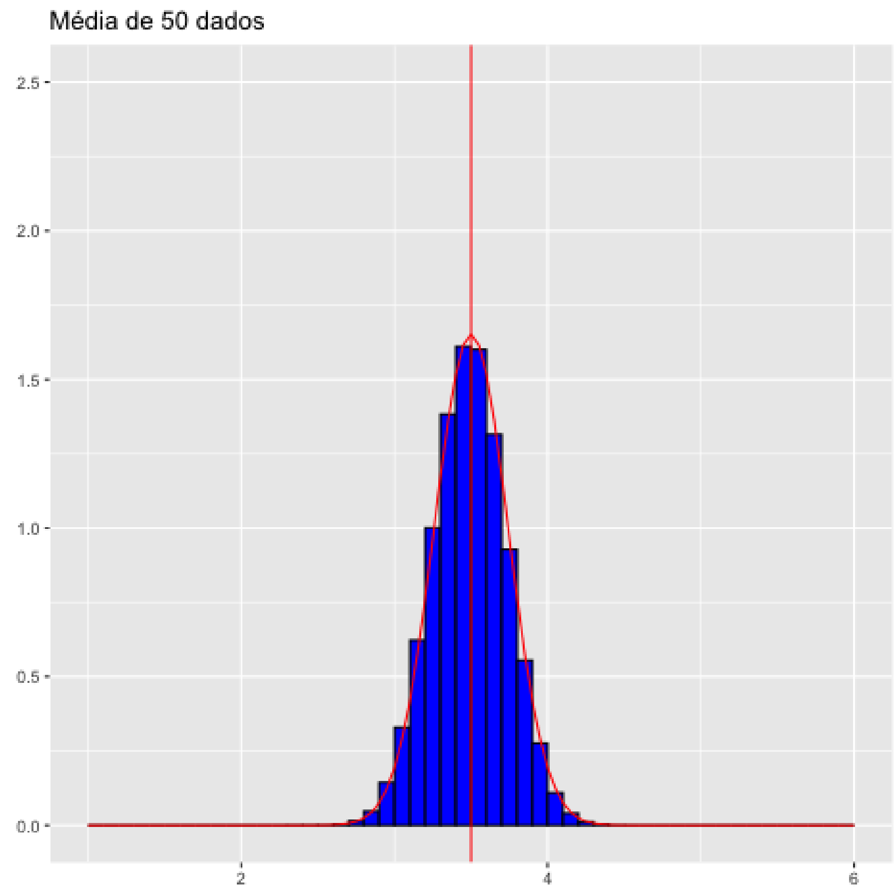
Exemplo - lançamento de dados



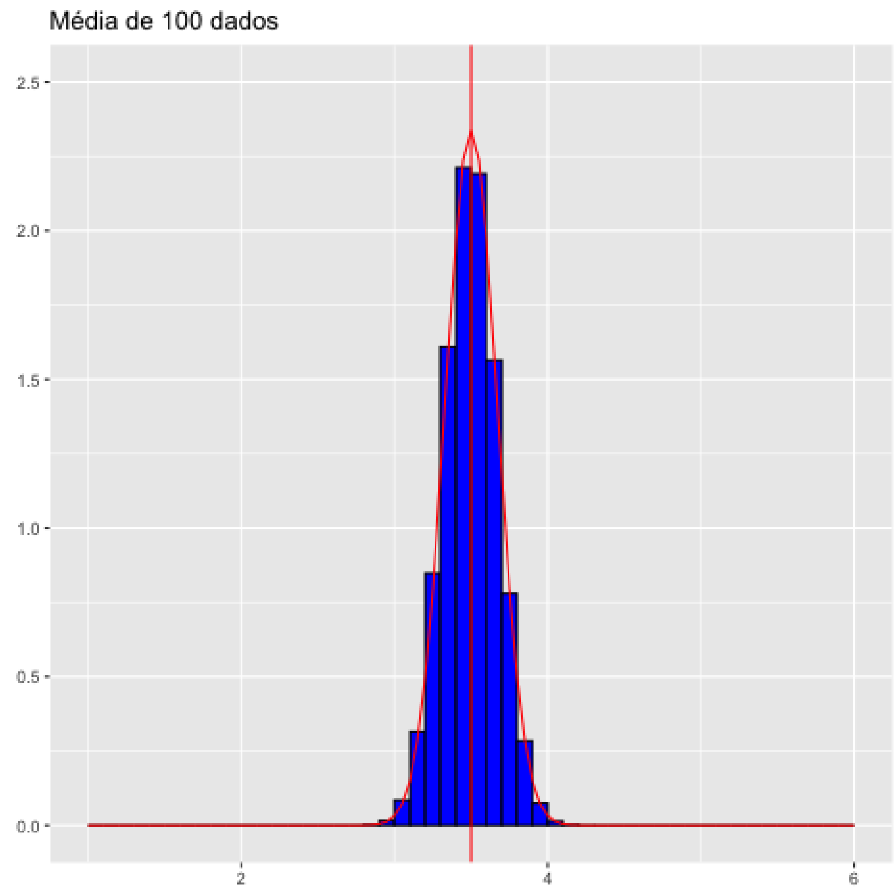
Exemplo - lançamento de dados



Exemplo - lançamento de dados



Exemplo - lançamento de dados



Teorema do Limite Central (TLC)

Você pode verificar o comportamento de $\bar{X}$ para várias distribuições de X:

[TCL para proporções]

[TCL para médias]

Aproximação da Binomial pela Normal

Se $\quad \widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad S_n = n\widehat{p}.$

Quando n é grande o suficiente: $\quad \widehat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Nesse caso, qual a distribuição de S_n?

Vimos que $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim Bin(n, p)$

Pelas propriedades da distribuição Normal:

$$S_n = n\widehat{p} \sim N\left(np, np(1-p)\right)$$

Portanto, quando n é grande, $Bin(n, p) \approx N\left(np, np(1-p)\right)$

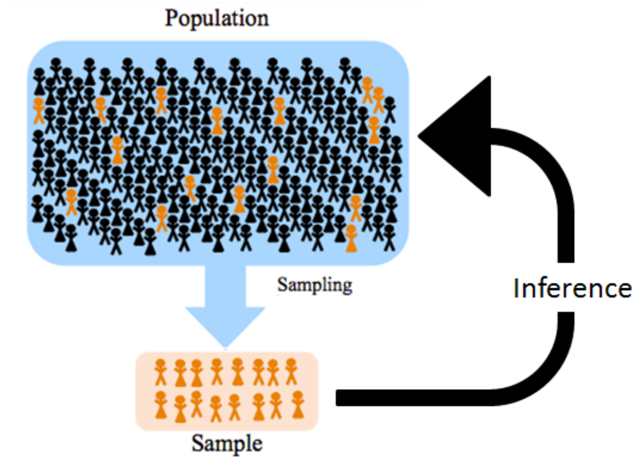
Fundamentos de Inferência

Introdução

Um dos principais objetivos da Estatística é tirar conclusões a partir dos dados.

Dados em geral consistem de uma amostra de elementos de uma população de interesse.

Usar a amostra para tirar conclusões sobre a população.

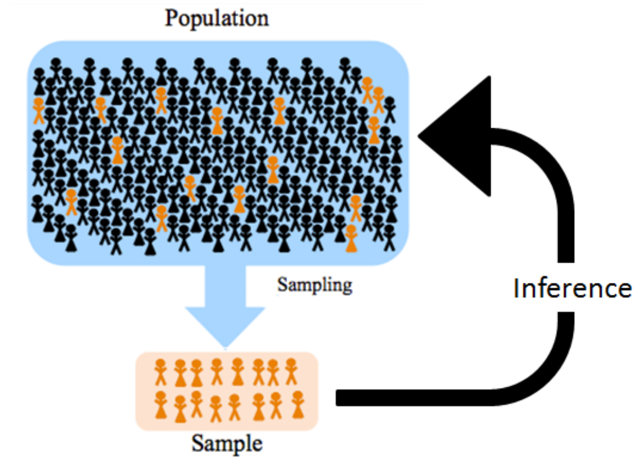


Quão confiável será utilizar a informação obtida apenas de uma amostra para concluir algo sobre a população?

Introdução

População: todos os elementos ou resultados de um problema que está sendo estudado.

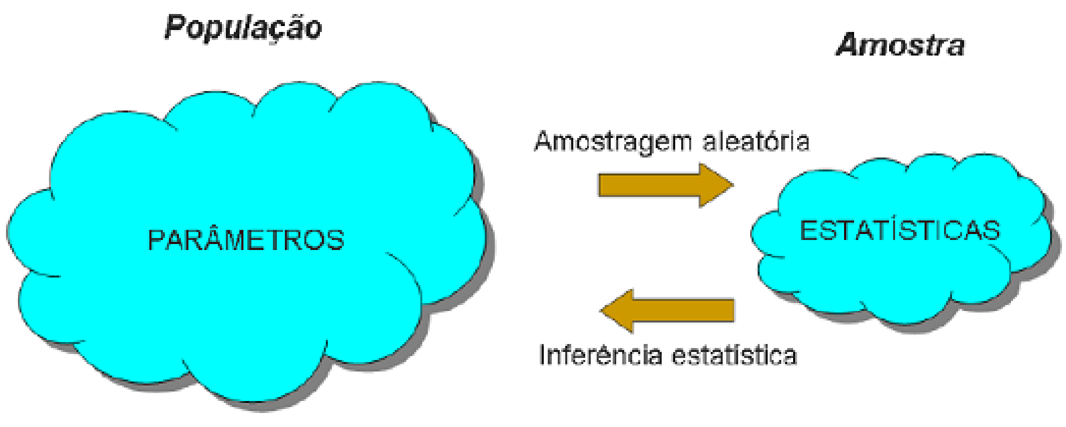
Amostra: subconjunto da população de interesse.



Inferência Estatística

Variável: Característica numérica do resultado de um experimento.

Parâmetros: Característica numérica (desconhecida) da distribuição dos elementos da população.

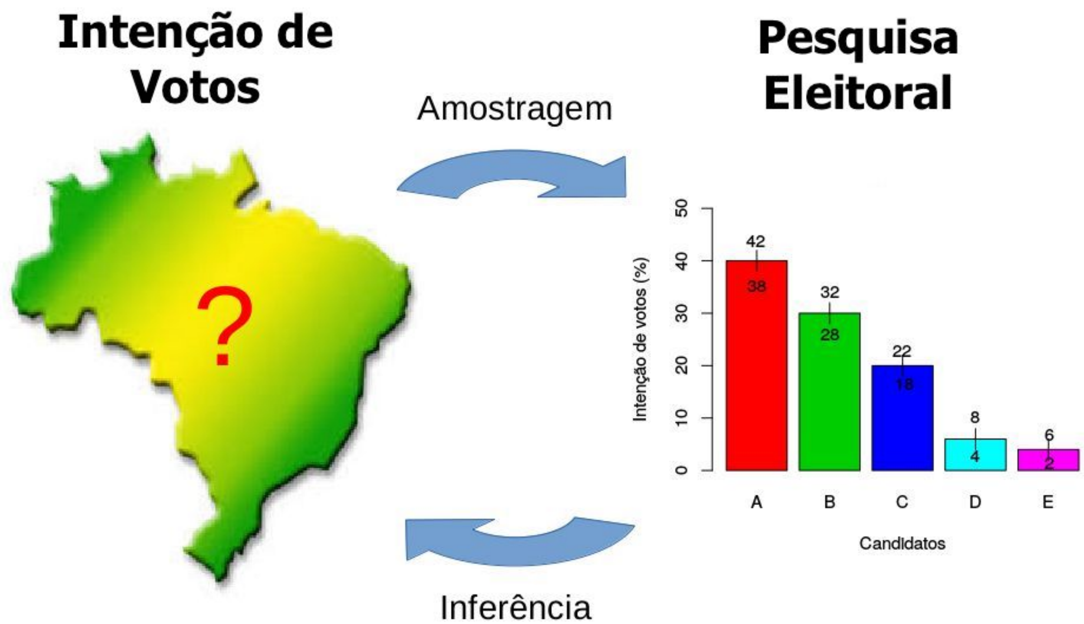


Estimador/Estatística: Função da amostra, construída com a finalidade de representar, ou estimar um parâmetro de interesse na população.

Estimativa: Valor numérico que um estimador assume para uma dada amostra.

Erro amostral: é a diferença entre um estimador e o parâmetro que se quer estimar.

Inferência Estatística

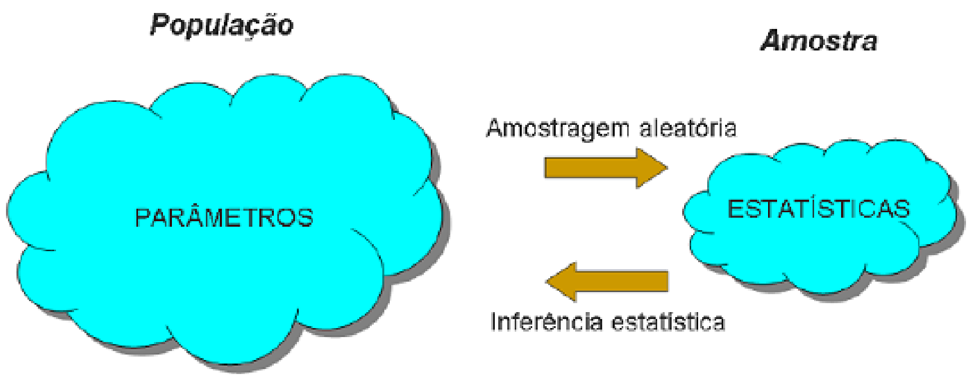


Estatística

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra e

$$T = f(X_1, \ldots, X_n)$$

é uma estatística.



Exemplos:

- $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$
- $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ou $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$
- $X_{(i)}$ é o i-ésimo valor da amostra ordenada

Note que uma estatística é uma função que em uma determinada amostra assume um valor específico (estimativa).

Fonte da imagem

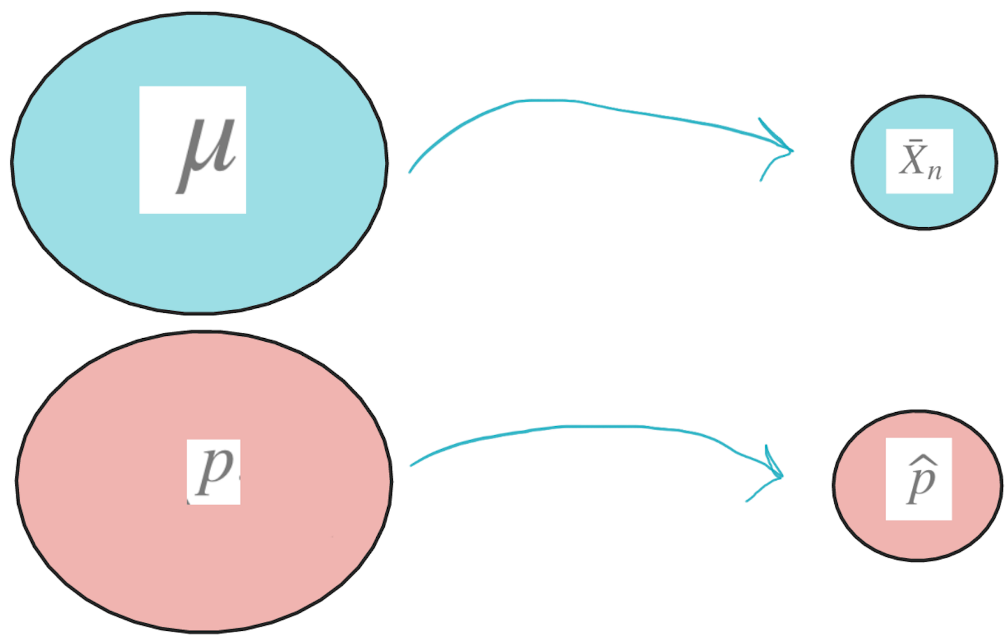
Estatística

Para que serve uma estatística?

Para “estimar” características de uma população.

População:

- Média μ
- Proporção p

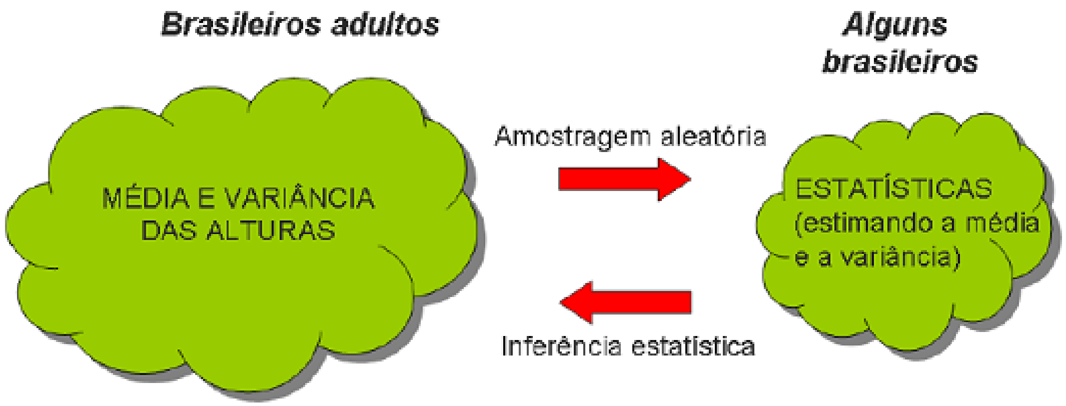


Amostra:

- Média Amostral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Proporção Amostral $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Exemplo

Temos interesse em saber a média e a variância da altura dos brasileiros: μ e σ^2.



Solução 1: Medir a altura de todos os brasileiros.

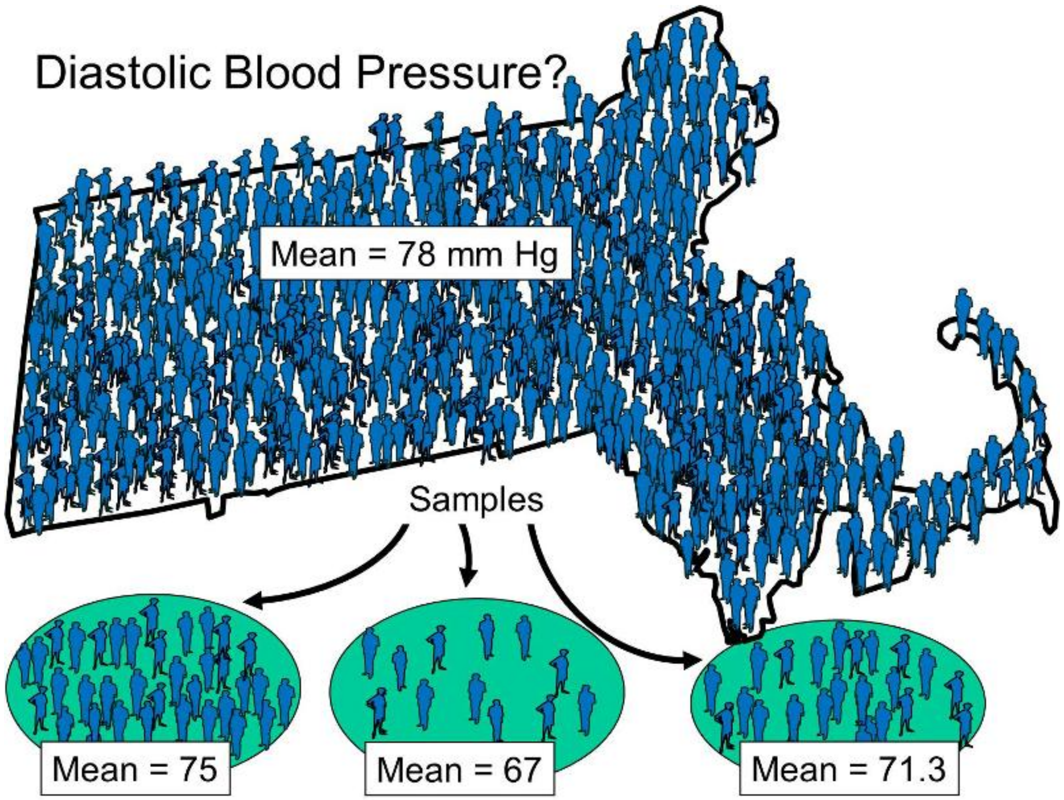
Solução 2: Selecionar de forma aleatória alguns brasileiros (amostra), analisá-la e inferir propriedades para toda a população.

Fonte da imagem

Parâmetro

- Cada quantidade de interesse (como μ e σ^2 no exemplo anterior) é chamada de parâmetro da população.
- Para apresentar uma estimativa de um parâmetro ($\widehat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$), devemos escolher uma estatística (T).
- Note que da maneira que o plano amostral foi executado (amostra aleatória simples), a estatística T é uma variável aleatória, visto que cada vez que executarmos o plano amostral poderemos obter resultados diversos.
- Portanto, a estatística T possui uma distribuição de probabilidade, chamada de **distribuição amostral** de T.

Distribuição amostral da estatística usada para estimar o parâmetro de interesse



[Fonte da imagem]

Leituras

- Ross: capítulo 7.
- OpenIntro: seção 4.1.
- Magalhães: capítulo 7.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho

Fonte da imagem