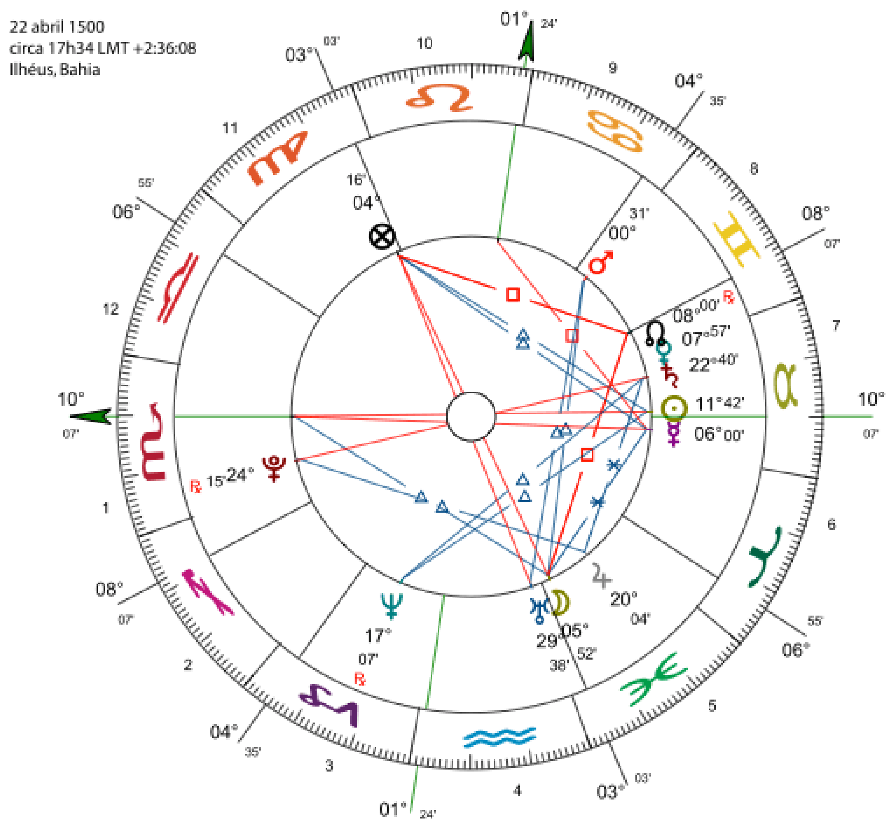
ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 17

Teste de Hipóteses: Introdução

Exemplo: Astrólogos conseguem predizer nossa personalidade com um mapa astral?



Exemplo: Astrólogos conseguem predizer nossa personalidade com um mapa astral?

- Se você fornece data, hora e local de nascimento, um astrólogo monta o seu Mapa Astral.
- *De acordo com a astrologia, a posição dos astros no momento em que nascemos influencia nossa maneira de ser.* - Wikipedia
- *As configurações de um Mapa Astral se repetem apenas a cada 26.000 anos, portanto ele é quase como uma impressão digital - não existe um igual ao outro.* - Wikipedia
- Há comprovação científica de que seu mapa astral reflete sua personalidade?

Exemplo: Mapa Astral

Um teste foi feito da seguinte maneira: 116 pessoas selecionadas aleatoriamente forneceram data, hora e local de nascimento.

Um astrólogo preparou um mapa astral para essas 116 pessoas, usando apenas os dados fornecidos acima.

Cada voluntário também preencheu um questionário: "California Personality Index".

Exemplo: Mapa Astral

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.
- questionário de personalidade preenchidos pelo voluntário 3.
- 2 questionários de personalidade, escolhidos ao acaso entre os 115 restantes, preenchidos por outros dois voluntários.
- Ao astrólogo, pediu-se então para identificar qual questionário havia sido preenchido pelo dono daquele Mapa Astral.

Exemplo: Mapa Astral

- Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.
- Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.
- Astrólogos confiam em seus estudos e dizem que a probabilidade de acerto é maior do que $1/3$.
- Como testar se eles estão certos?
- Escolher ao acaso um astrólogo e fazer o teste com ele uma vez, é suficiente?

Exemplo: Mapa Astral

- Astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.
- A lista foi preparada pelo “National Council for Geocosmic Research”.
- Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.
- Um astrólogo pode associar corretamente o questionário ao mapa astral ou não.
- Para cada situação, há uma probabilidade associada. Portanto temos um evento aleatório.

Exemplo: Mapa Astral

Como definir a variável aleatória?

- X_i: astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i, ou seja,

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$$

- Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.
- Se astrólogos não têm a capacidade de predição, $p = 1/3$.
- Astrólogos alegam que são capazes: $p > 1/3$.
- Como usar dados para testar estes dois cenários?

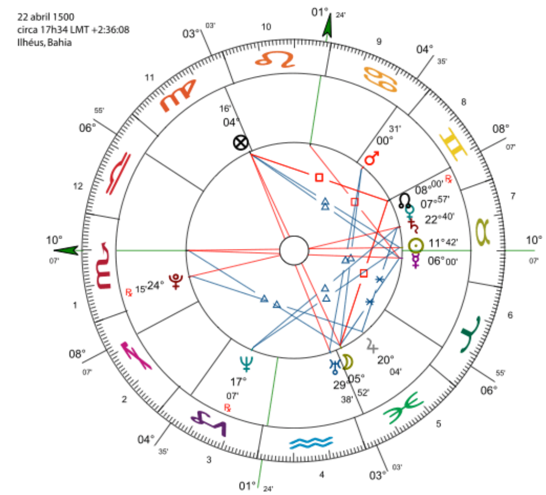
Exemplo: Astrólogos conseguem predizer nossa personalidade com um mapa astral?

Definindo hipóteses

- Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.
- Afirmações a serem testadas: **hipóteses**.
- Expressamos as hipóteses em termos dos parâmetros da população.
- Por exemplo: o parâmetro pode ser uma proporção populacional.

Exemplo: Mapa Astral

Hipótese: Usando o mapa astral de uma pessoa, a probabilidade p de um astrólogo predizer corretamente qual dos 3 questionários está associado àquele mapa astral é igual a $1/3$. Ou seja, os astrólogos apenas selecionam ao acaso um dos questionários.



Nesse caso, para saber se os astrólogos têm a capacidade de predizer a personalidade usando o mapa astral, usaríamos as seguintes **hipóteses**:

$$\begin{cases} H_0 : p = 1/3 & \text{(hipótese nula)} \\ H_A : p > 1/3 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

No experimento com os astrólogos, observar uma proporção alta de acertos pode ser uma evidência contra a hipótese de que $p = 1/3$?

Passos de um teste de hipótese

- **Passo 1: Suposições**

  O teste é válido sob algumas suposições. A mais importante assume que os dados do experimento foram produzidos através de um processo de aleatorização.

- **Passo 2: Hipóteses**

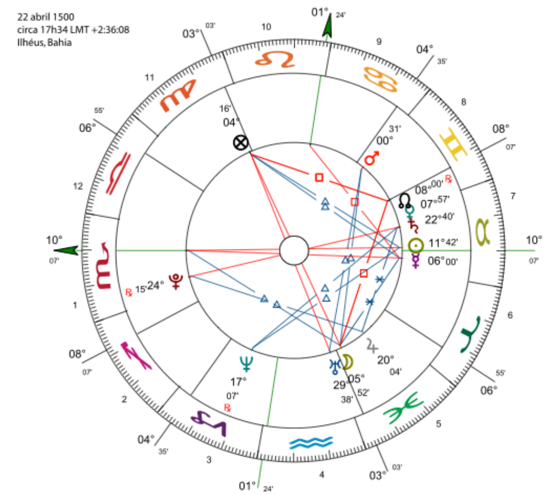
  O teste de hipótese tem sempre duas hipóteses sobre o parâmetro populacional de interesse. As hipóteses devem ser definidas **antes** de se realizar o experimento e coletar dados.

- **Hipótese Nula (H_0):** afirma que o parâmetro populacional assume um dado valor.

- **Hipótese Alternativa (H_A):** afirma que o parâmetro populacional assume outros valores, diferente do valor descrito na H_0.

Exemplo: Mapa Astral

No experimento dos astrólogos, $H_0 \colon p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de predizer a personalidade usando o mapa astral.



A hipótese alternativa, $H_A \colon p > 1/3$, representa a hipótese de que **há efeito**, ou seja, os astrólogos têm uma capacidade de predizer a personalidade usando o mapa astral.

Em teste de hipóteses, mantém-se a favor de H_0 a menos que os dados tragam grande evidência contra.

A hipótese nula é conservadora: “o réu é inocente até que se prove o contrário”.

Passos de um teste de hipótese

- **Passo 3: Estatística do teste**

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro populacional. A **estatística do teste** descreve quão longe do parâmetro populacional usado na H_0 a estimativa está.

Por exemplo, se $H_0 : p = 1/3$, e se $\widehat{p} = 40/116 = 0.345$, queremos uma estatística que quantifique quão longe está $\widehat{p} = 0.345$ de $p = 1/3$.

- **Passo 4: valor-de-p**

Para interpretar uma estatística do teste, vamos usar uma probabilidade para resumir a evidência contra H_0. Esta probabilidade é chamada de **valor-de-p**.

Passos de um teste de hipótese

- **Passo 5: Conclusão**

Baseado no valor-de-p, decidir se rejeita ou não a hipótese nula. Note que a conclusão é sempre em termos da hipótese nula: rejeitar ou não H_0.

Mas quão pequeno deve ser o valor-de-p para ser considerado forte evidência contra H_0?

Geralmente, fixamos o **nível de significância** do teste (α), e usamos a seguinte regra. É comum usarmos $\alpha = 0.05$.

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0, ou seja, os dados trazem forte evidência contra a hipóstese nula
- Se valor-de-p > α: não rejeitamos H_0, ou seja, não temos evidência nos dados contra a hipótese nula

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

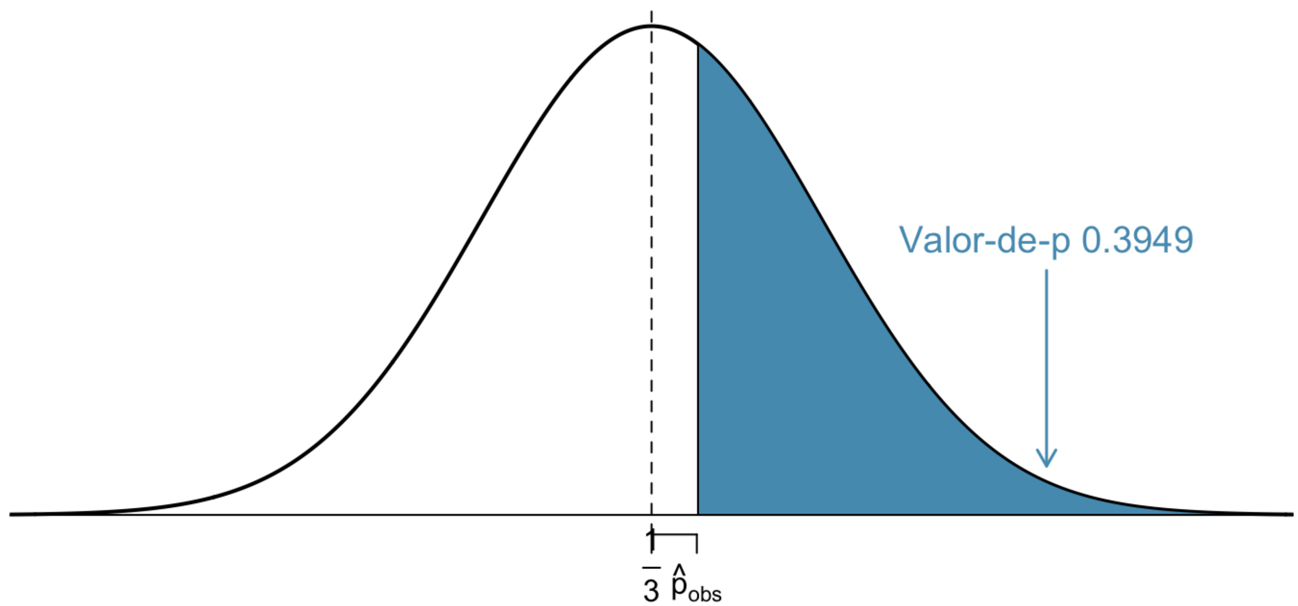
Calculamos a estatística do teste observada para o experimento realizado e verificamos onde, na distribuição amostral, ela se posiciona.

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (valor-de-p). Mais extremo: mais evidência contra H_0.

Se o valor-de-p obtido é bem pequeno, por exemplo, 0.01, isto quer dizer que se H_0 é verdadeira, então seria incomum obter uma amostra com os resultados como o observado. Um valor-de-p muito baixo traz fortes evidências contra H_0.

Exemplo: Mapa Astral

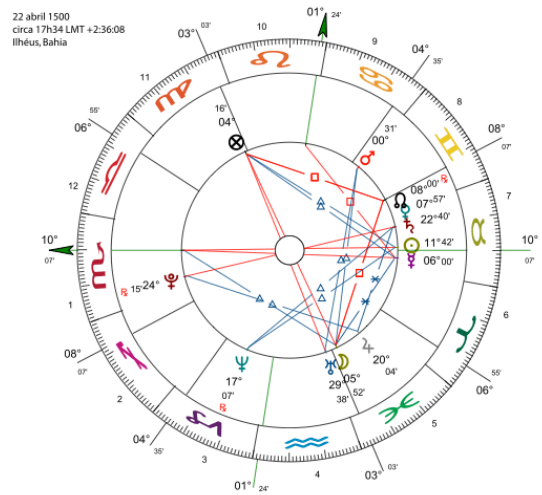
Distribuição amostral da proporção amostral $\widehat{p}$ sob H_0.



valor-de-p (área em azul): probabilidade da proporção amostral assumir um valor igual ao observado, $\widehat{p}_{obs}$, ou mais extremo, sob H_0.

Exemplo: Mapa Astral

Passo 1: Suposições



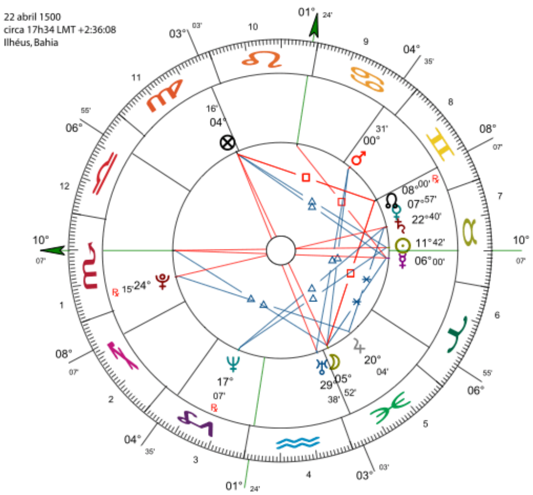
- A variável de interesse é binária.
- X_i: astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral, ou seja,

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p).$$

- Os dados foram obtidos usando processo de aleatorização: uma amostra aleatória de voluntários e astrólogos foi feita.
- Temos uma a.a. de tamanho 116. Portanto, a distribuição amostral da estimativa para p, $\widehat{p}$, tem distribuição aproximadamente normal, pelo TCL.

IMECC

Exemplo: Mapa Astral



Passo 2: Hipóteses

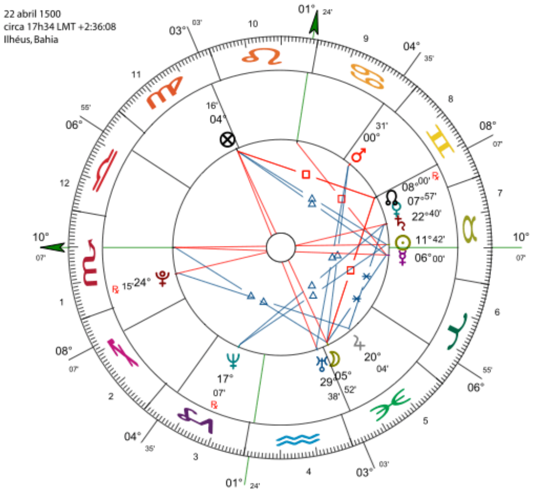
- $H_0 \colon p = p_0 = 1/3.$
- $H_A \colon p > p_0 = 1/3.$

Em outras palavras:

- H_0: Astrólogos *chutam* qual o questionário está associado ao mapa astral.
- H_A: Astrólogos predizem melhor do que um *chute* qual o questionário está associado ao mapa astral.

Exemplo: Mapa Astral

Passo 3: Estatística do teste



- Estatística do teste mede quão longe está a proporção amostral, $\widehat{p}$, da proporção populacional, p, assumindo que H_0 seja verdadeira?

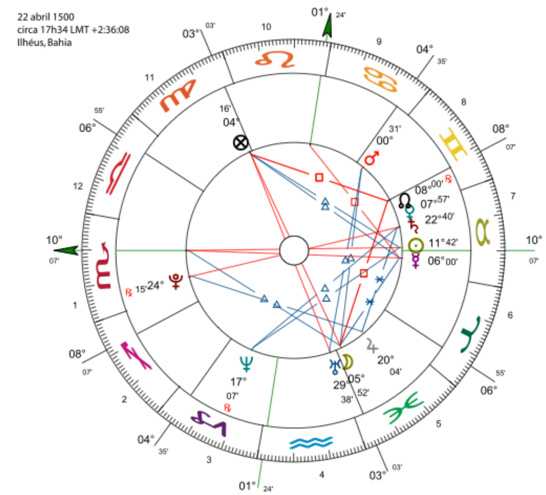
- Sabemos que:

$$\widehat{p} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- Se H_0 é verdadeira ($p = p_0$), então:

$$\widehat{p} \sim \mathrm{N}\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$

Exemplo: Mapa Astral



Passo 3: Estatística do teste

- A estatística do teste é:

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{EP_0(\widehat{p})}$$

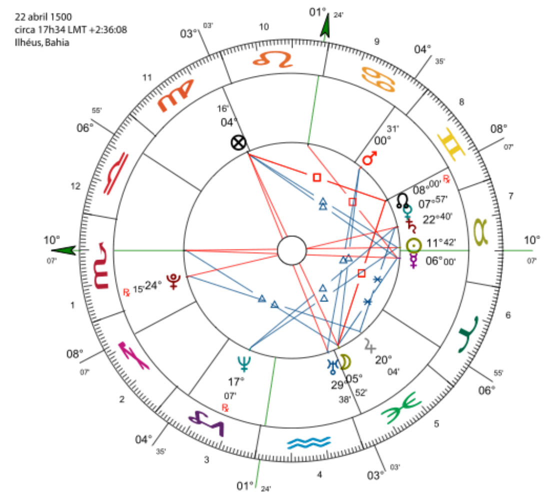
  onde $EP_0(\widehat{p})$ é o erro padrão de $\widehat{p}$ sob H_0. Portanto,

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{H_0}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

- A estatística do teste mede quão distante está $\widehat{p}$ de p_0 em unidades de "erro padrão".

Exemplo: Mapa Astral

Passo 3: Estatística do teste



- No experimento dos astrólogos, dentre 116 mapas, 40 foram corretamente associados ao questionário de personalidade.

$$\widehat{p} = 40/116 = 0.345$$

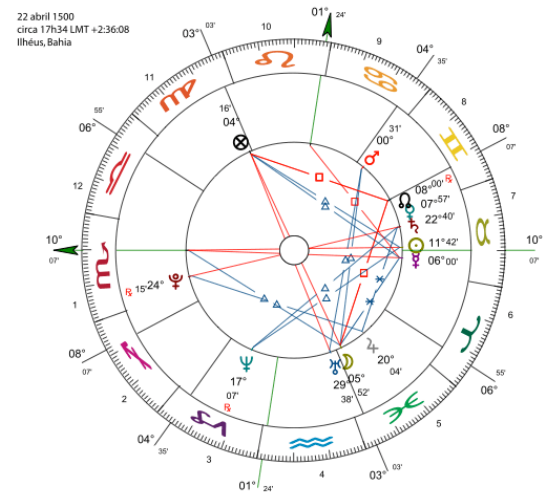
- A estatística do teste observada é:

$$z_{obs} = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.345 - 1/3}{\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{116}}} = 0.27$$

- A proporção amostral está a 0.27 erro padrão de distância da proporção populacional, segundo H_0.

Exemplo: Mapa Astral

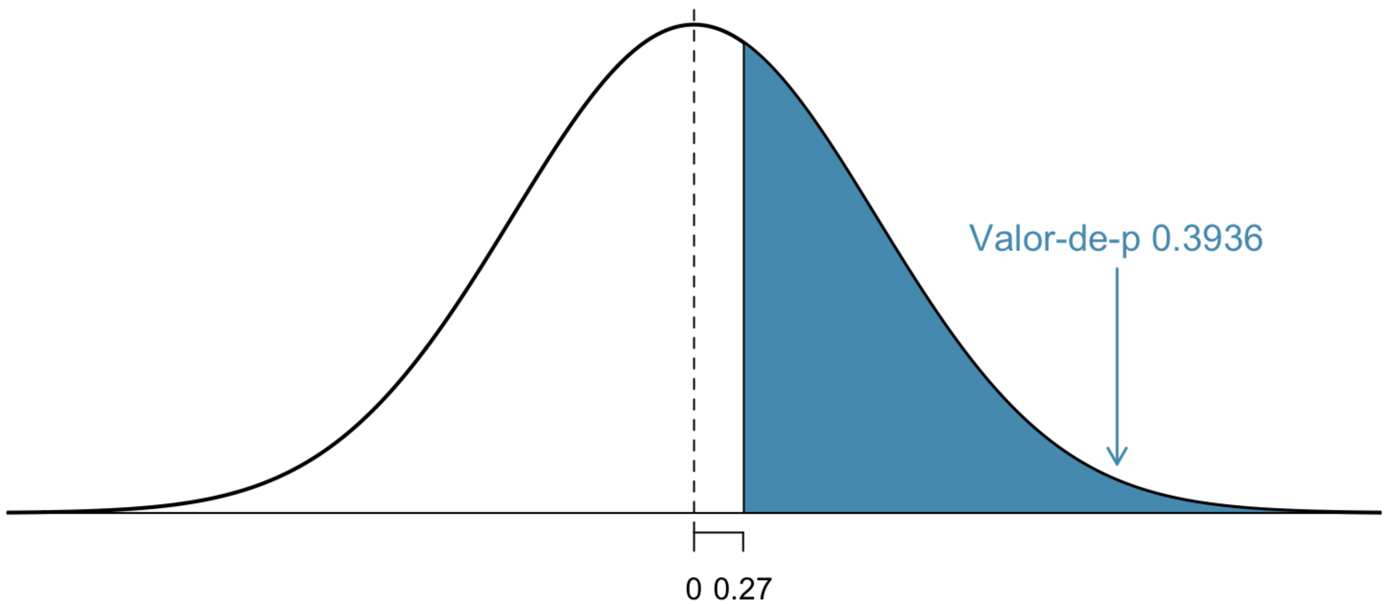
Passo 4: Valor-de-p



- Tendo observado $z_{obs} = 0.27$, isso traz evidência contra H_0 (a favor de H_A)?
- Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?
- valor-de-p: probabilidade de que uma estatística do teste assuma um valor igual ou mais extremo do que o observado, assumindo H_0 verdadeira.
- Mais extremo: neste caso, um valor maior que z_{obs}, pois equivale a um maior $\widehat{p}$, maior proporção amostral de acertos (astrólogos alegam que $p > 1/3$).
- valor-de-p: $P(Z > z_{obs}) = P(Z > 0.27) = 0.3936$, onde $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Exemplo: Mapa Astral

Distribuição amostral da estatística do teste Z sob H_0.

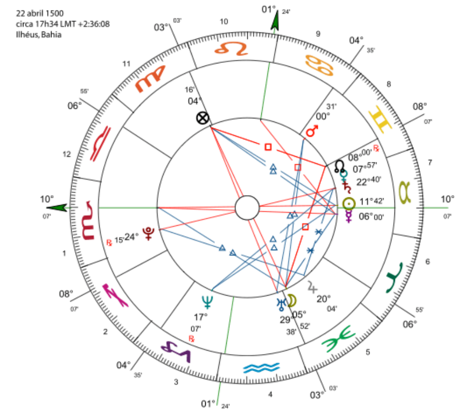


valor-de-p (área em azul): representa a probabilidade de valores mais extremos que z_{obs} ocorrerem.

Exemplo: Mapa Astral

Passo 5: Conclusão

- O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.
- O valor não é tão pequeno. Portanto, não temos evidências contra H_0.
- Não podemos concluir que astrólogos têm poderes preditivos especiais usando mapa-astral.



MENU nature
International journal of science

Commentary | Published: 05 December 1985

A double-blind test of astrology

Shawn Carlson

Nature **318**, 419–425 (05 December 1985) | Download Citation

Two double-blind tests were made of the thesis that astrological 'natal charts' can be used to describe accurately personality traits of test subjects.

Detalhes da pesquisa podem ser encontrados no artigo da revista Nature: A double-blind test of Astrology.

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

Suponho que temos uma população e uma hipótese sobre a proporção p de indíviduos com certa característica.

Hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_A : & p \neq p_0 \text{ (bilateral)} \\
& p < p_0 \text{ (unilateral à esquerda)} \\
& p > p_0 \text{ (unilateral à direita)}
\end{aligned}
$$

Estatística do teste: Baseada na distribuição amostral de $\widehat{p}$

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Condição: $np_0 \geq 10$ e $n(1 - p_0) \geq 10$ para aproximação normal

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

valor-de-p

- $H_A : p \neq p_0$ (bilateral): valor-de-p=$P(|Z| \geq |z_{obs}|)$
- $H_A : p < p_0$ (unilateral à esquerda): valor-de-p=$P(Z \leq z_{obs})$
- $H_A : p > p_0$ (unilateral à direita): valor-de-p=$P(Z \geq z_{obs})$

Conclusão

Para um nível de significância α:

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0
- Se valor-de-p > α: não rejeitamos H_0

Exemplo: Efeitos Colaterais

Uma indústria farmacêutica diz que menos de 20% dos pacientes que estão usando um certo medicamento terão efeitos colaterais.

Realizou-se então um ensaio clínico com 400 pacientes e verificou-se que 68 pacientes apresentaram efeitos colaterais

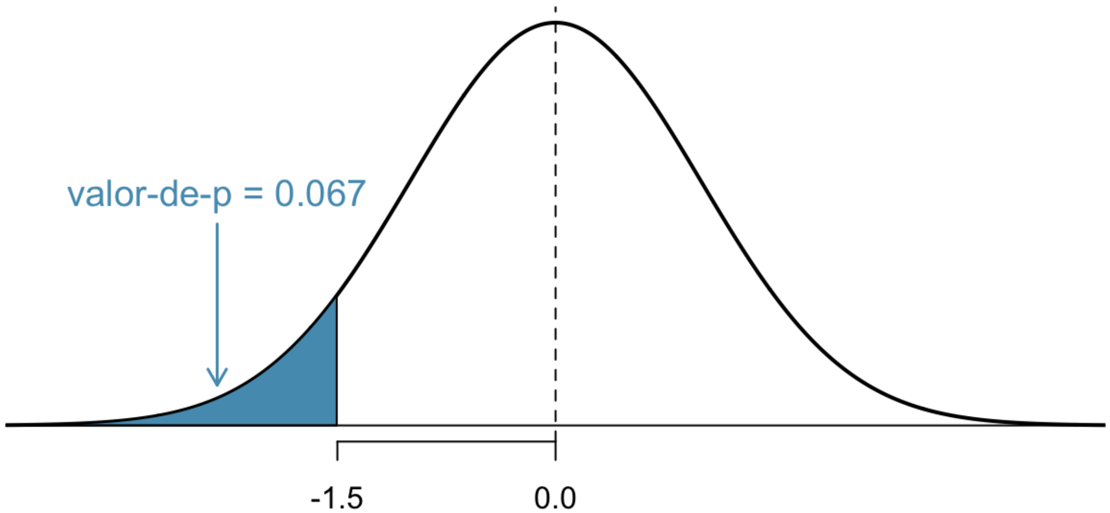
Hipóteses: $H_0 : p = 0.20 \quad \text{vs} \quad H_A : p < 0.20$

Estatística do teste: Da amostra temos que $\widehat{p} = 68/400 = 0.17$

$$z_{obs} = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.17 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{400}}} = -1.5$$

Exemplo: Efeitos Colaterais

$$\text{valor-de-p} = P(Z \leq -1.5) = 0.067$$



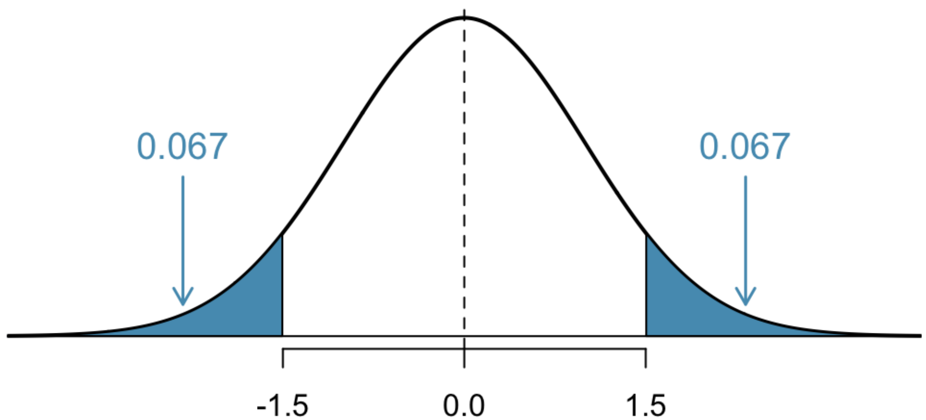
Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$.

Na verdade, a evidência está na direção que a indústria farmacêutica queria, mas não é o suficiente para rejeitar H_0.

Exemplo: Efeitos Colaterais

E se estivéssemos testando: $H_0 : p = 0.20 \quad \text{vs} \quad H_A : p \neq 0.20$

$$\begin{aligned} \text{valor-de-p} &= P(|Z| \geq 1.5) = P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5) \\ &= 2P(Z \leq -1.5) = 2 \times 0.067 = 0.134 \end{aligned}$$



Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$.

Coca vs Coca Zero: Você consegue distinguir?

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero.
- A bebida sorteada é então dada à pessoa, que deve experimentar e dizer que tipo de Coca-Cola está tomando.

- Repetimos isso 20 vezes e anotamos o total de acertos.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

- Cada tentativa, X_i, é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.
- Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas: $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Bin}(20, p)$
- Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Hipóteses:

- $H_0 : p = 1/2$ (a pessoa não consegue diferenciar as duas bebidas)
- $H_A : p > 1/2$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste: $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Bin}(20, p)$.

Valor-de-p: evidência contra H_0. Calculamos a probabilidade, sob H_0, de ocorrer um valor igual ou mais extremo ao valor observado no experimento.

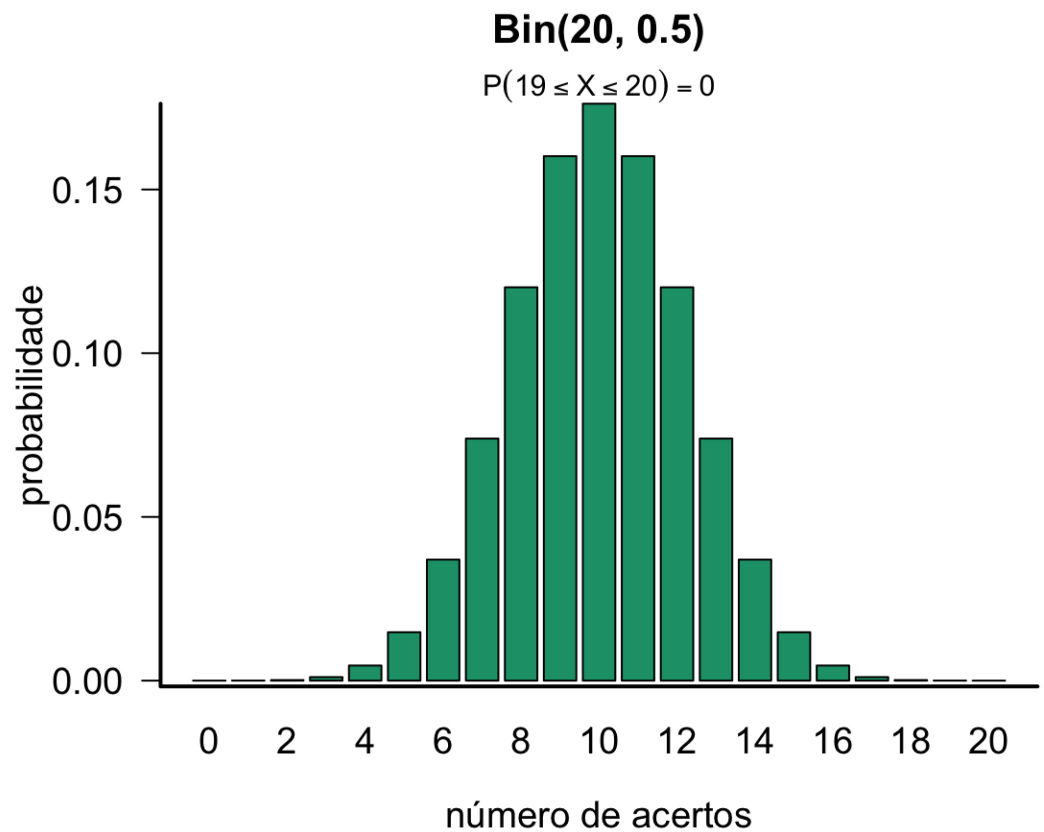
Resultado do experimento:

Seja $t_{obs} = 19$ o número de acertos.

Valor-de-p: $P(T \geq 19) = 0$, onde $T \overset{H_0}{\sim} \text{Bin}(20, 1/2)$.

Conclusão: Decidimos rejeitar H_0.

Experimento da Coca vs Coca Zero



Experimento da Coca vs Coca Zero

Seja T é o número de acertos. Utilizando a aproximação pela Normal, temos que $T \sim Bin(20, p)$.

A proporção amostral de acertos $\widehat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50 \quad \text{vs} \quad H_A : p > 0.50$.

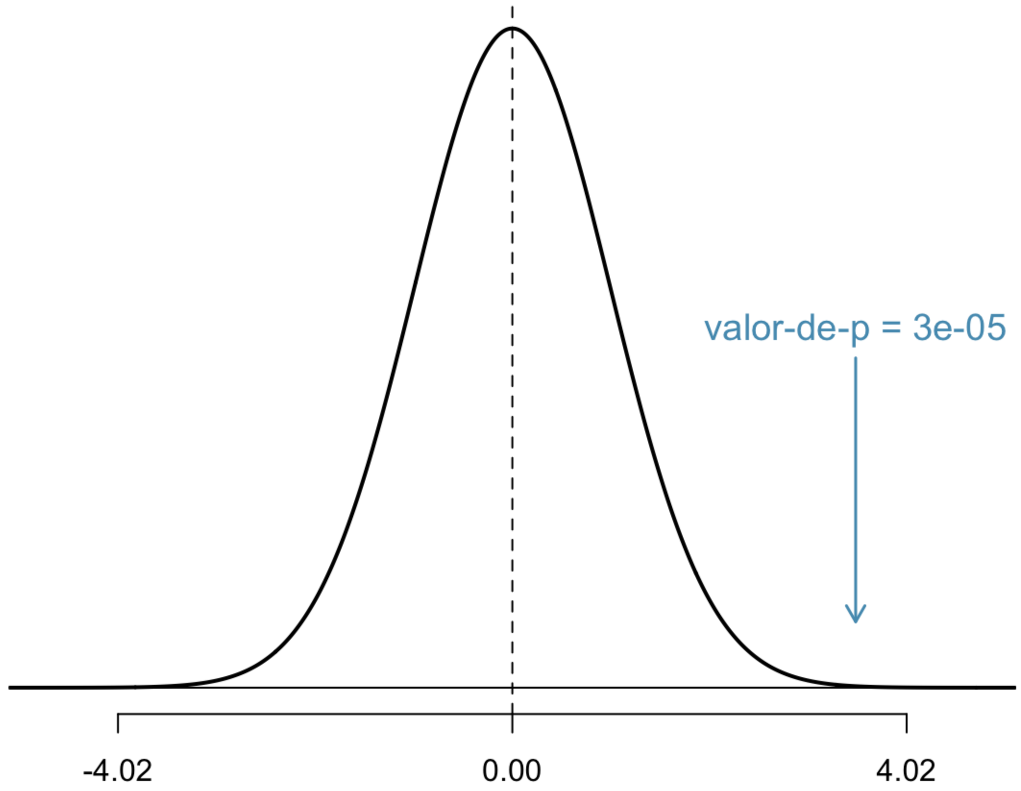
Estatística do teste:

$$z_{obs} = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{20}}} = 4.02$$

valor-de-p = $P(Z \geq 4.02) = 0$

Conclusão: Fixando $\alpha = 0.05$, rejeitamos a hipótese de que probabilidade de acertos é 50%.

Experimento da Coca vs Coca Zero



Leituras

- Ross: capítulo 9.
- OpenIntro: seções 4.3 e 6.1.
- Magalhães: capítulo 8.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho