ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 13

Distribuição Normal

Distribuição Normal

Hoje vamos falar da distribuição mais importante da Estatística, a distribuição **Normal**, também conhecida como distribuição **Gaussiana**.

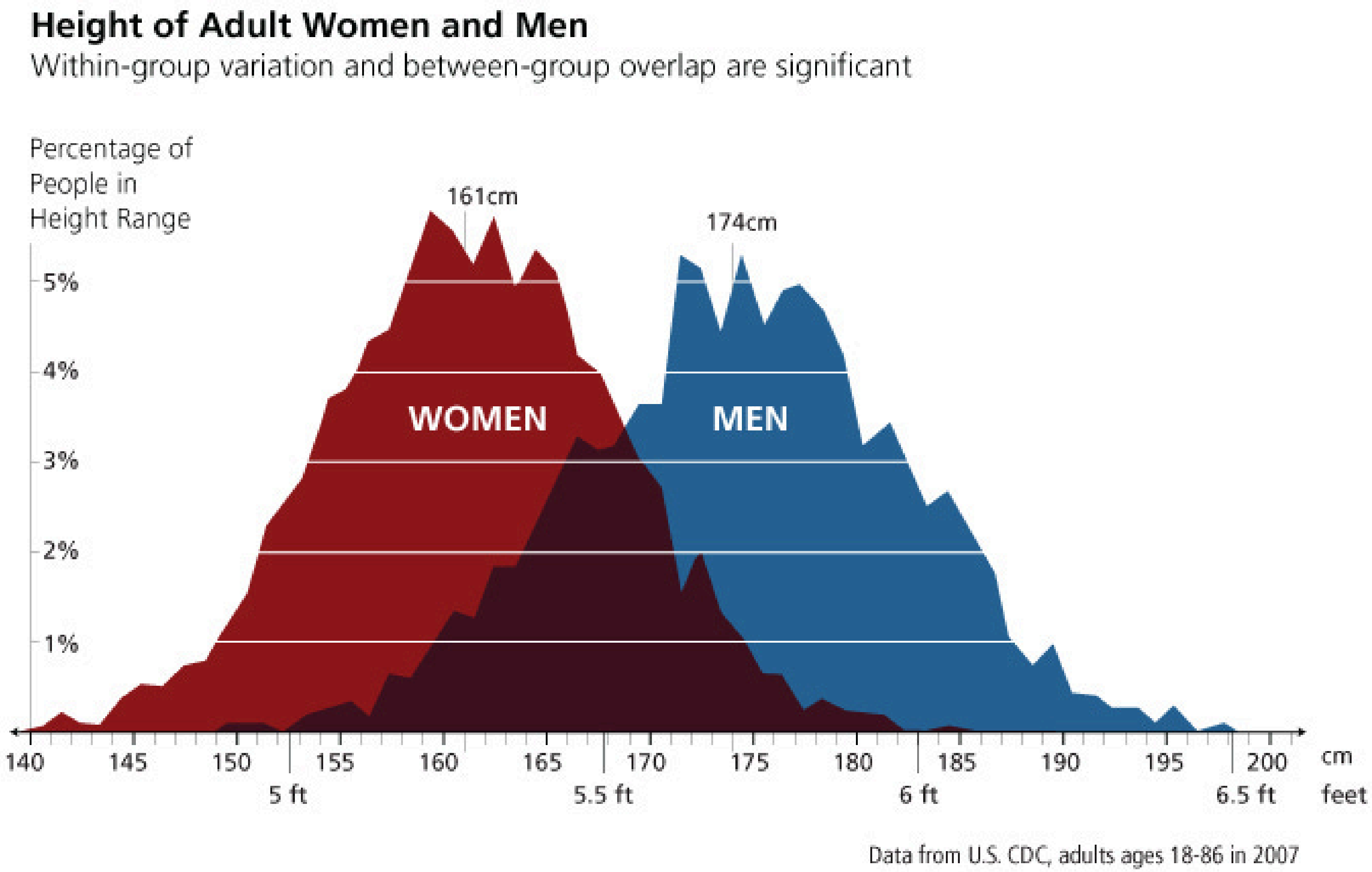
A distribuição normal aparece naturalmente em inúmeros fenômenos:

- Erros de medição
- Altura, peso, pressão arterial e outras características biológicas
- Ruído em sinais elétricos
- Resistência de materiais

Forma característica: curva em formato de sino, simétrica em torno da média.

Identificada por dois parâmetros: Média (μ) e desvio padrão (σ).

Você já conhece a Distribuição Normal



Distribuição Normal

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty.$$

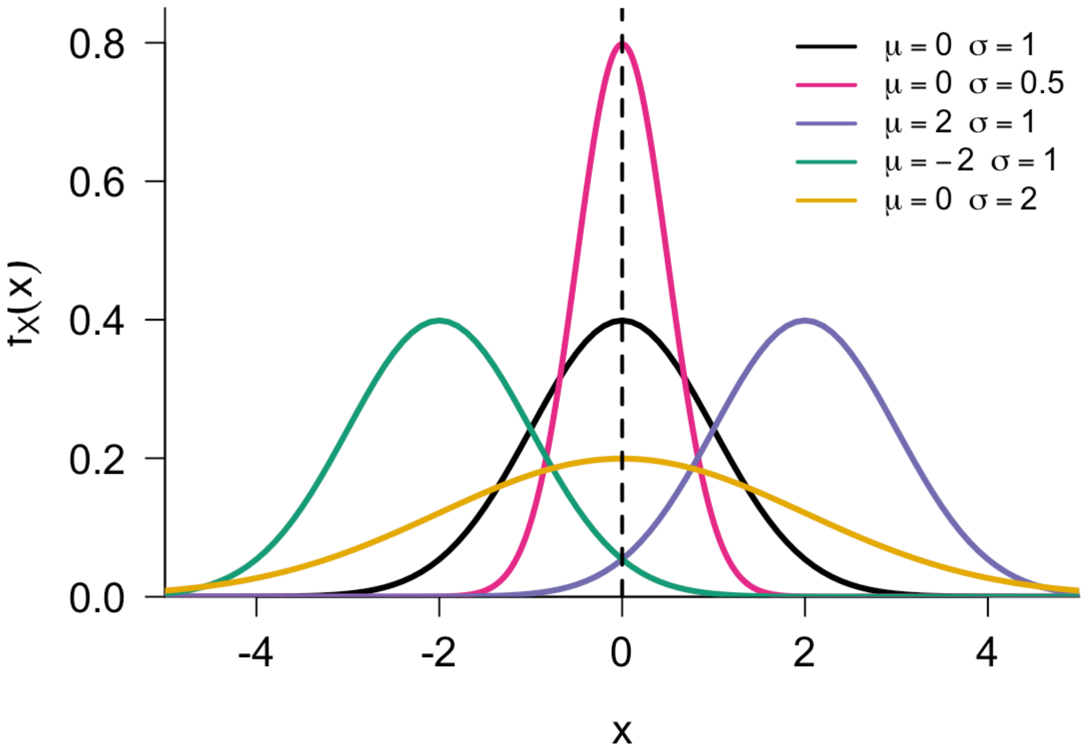
Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A esperança e variância de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ são:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

Distribuição Normal

Gráfico da função de densidade de probabilidade de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:



Função Densidade: "Forma de sino", centrada em μ e escala controlada por σ^2.

Distribuição Normal - Esperança e Variância

Esperança:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu.$$

Variância:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

IMECC

Exemplo: OkCupid

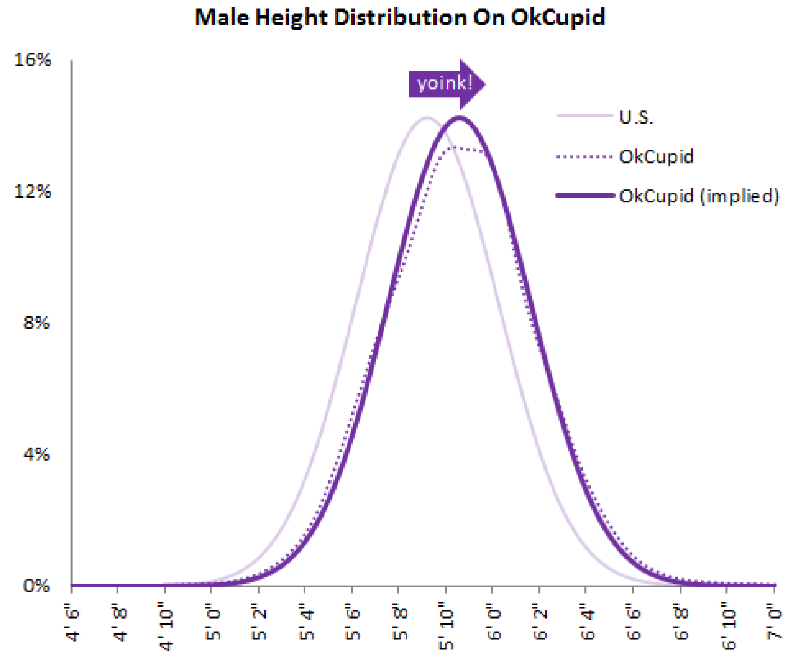
OkCupid é uma rede social para relacionamentos.

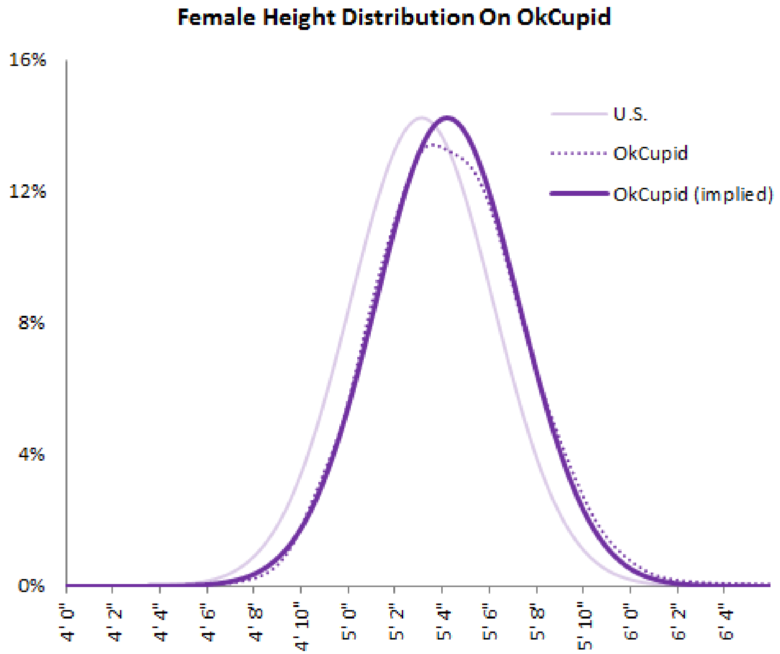
Usuários devem colocar características pessoais como, por exemplo, altura.

Será que são sinceros?

Exemplo: OkCupid

Comparação da distribuição das alturas da população adulta norte-americana e a distribuição das alturas dos usuários do site:

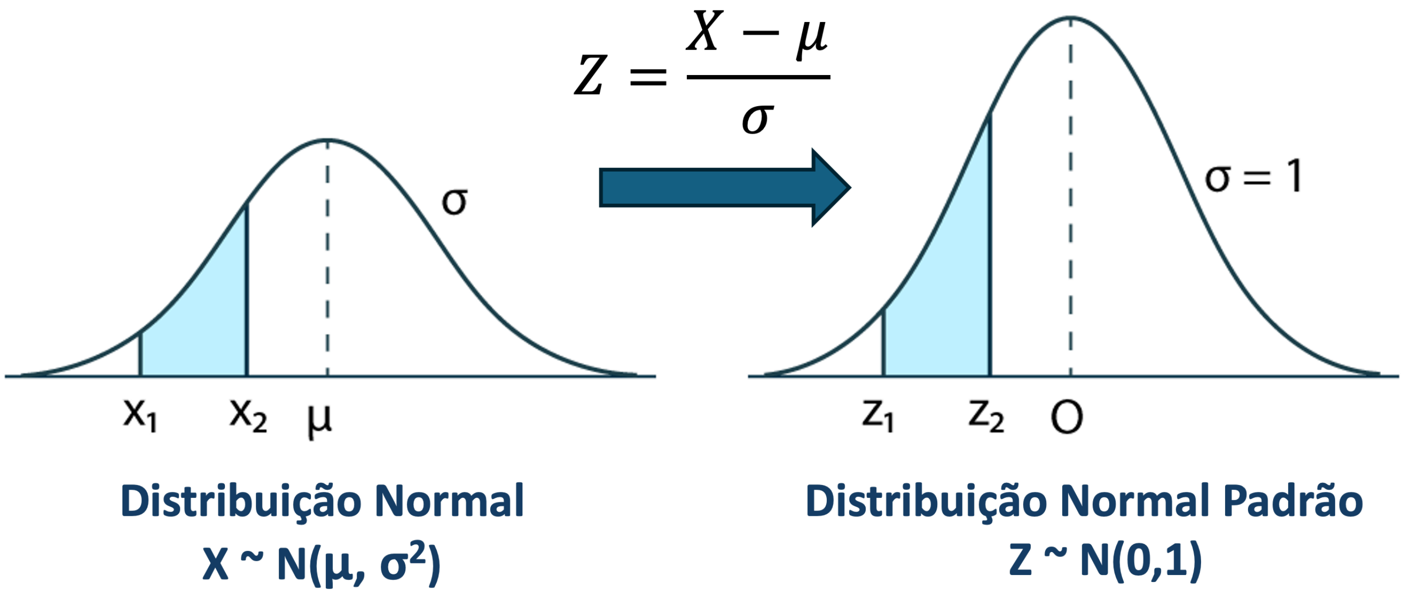




Fonte: [*http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/*](http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/)

Distribuição Normal Padrão

Qualquer variável que segue uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, pode ser transformada em uma distribuição $N(0, 1)$, chamada de **Normal Padrão**.



Relevância: Isso permite comparar variáveis em escalas diferentes.

Distribuição Normal Padrão

Propriedade: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

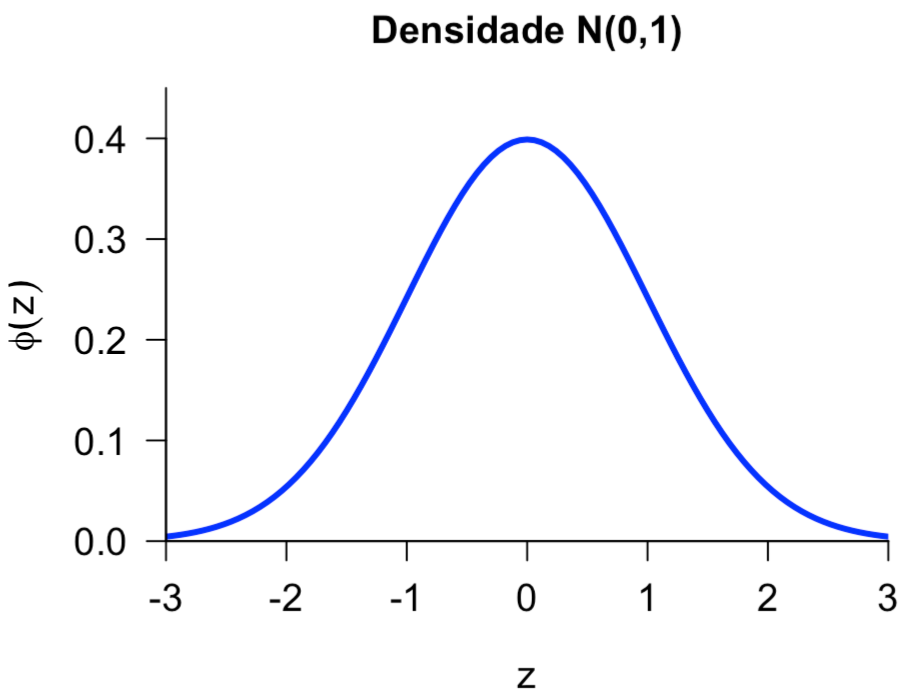
Dizemos que Z tem distribuição **Normal Padrão** e sua densidade se reduz a:

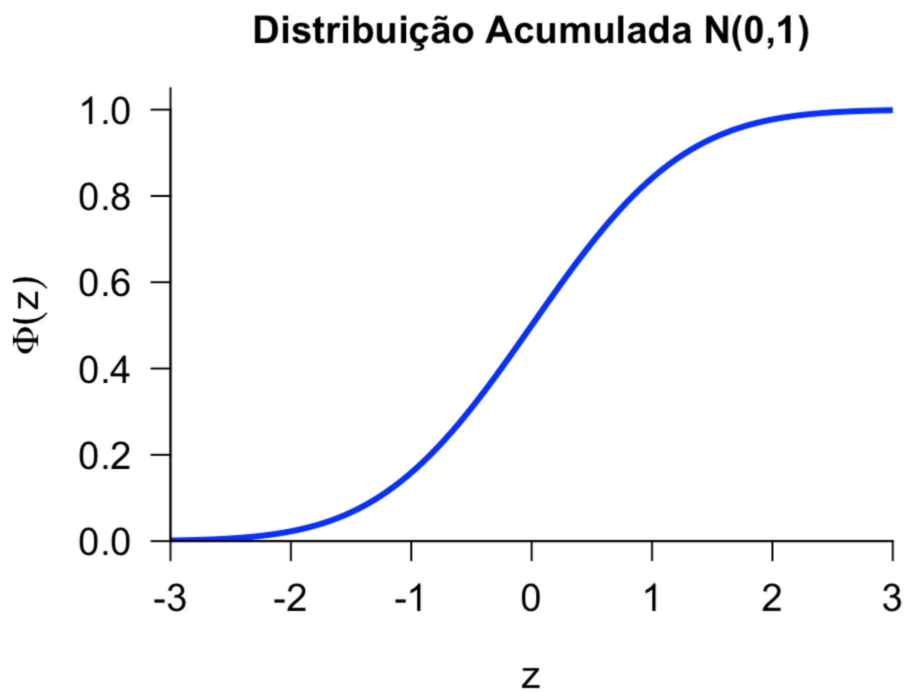
$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

A f.d.a. de uma Normal padrão, que denotaremos por Φ, é:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Distribuição Normal Padrão





Exemplo: SAT e ACT

Uma universidade americana recebeu inscrição de dois alunos (Pam e Jim) com os respectivos históricos escolares. No entanto, Pam realizou o SAT e tirou 1800, enquanto que o Jim fez o ACT e tirou 24. Como a universidade pode comparar os dois alunos, baseando-se nesses testes?

Precisamos avaliar quão melhor (ou pior) a Pam foi em relação aos demais alunos que realizaram o SAT.

Precisamos avaliar quão melhor (ou pior) o Jim foi em relação aos demais alunos que realizaram o ACT.

Exemplo: SAT e ACT

A universidade tem acesso à média (1500) e ao desvio padrão (300) das notas de todos os alunos que realizaram o SAT juntamente com a Pam.

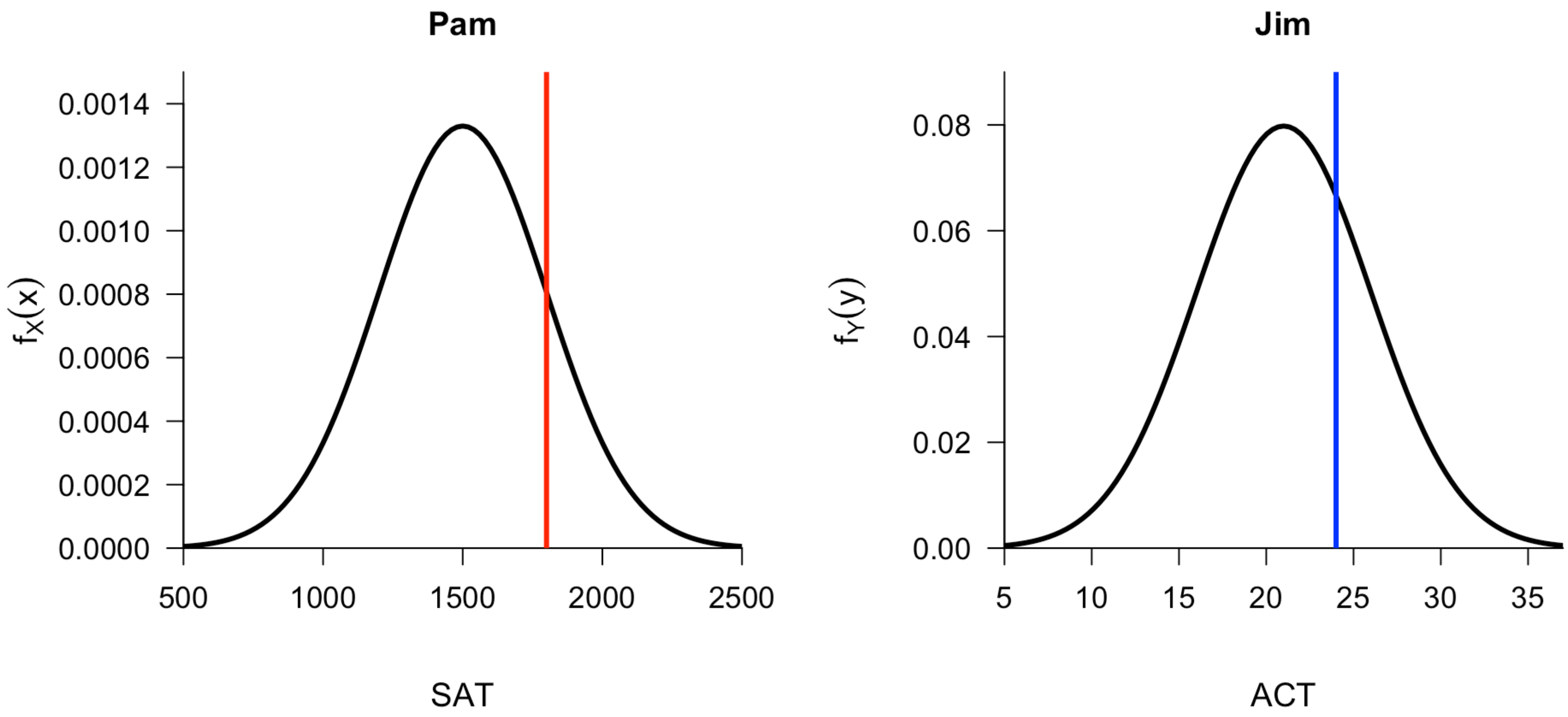
A universidade tem acesso à média (21) e ao desvio padrão (5) das notas de todos os alunos que realizaram o ACT juntamente com a Jim.

Assumindo que as notas dos dois testes seguem uma distribuição normal:

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT: $X \sim N(\mu = 1500, \sigma^2 = 300^2)$.

Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $Y \sim N(\mu = 21, \sigma^2 = 5^2)$.

Exemplo: SAT e ACT



Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT: $X \sim N(\mu = 1500, \sigma^2 = 300^2)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota da Pam: $\frac{1800-1500}{300} = 1$.

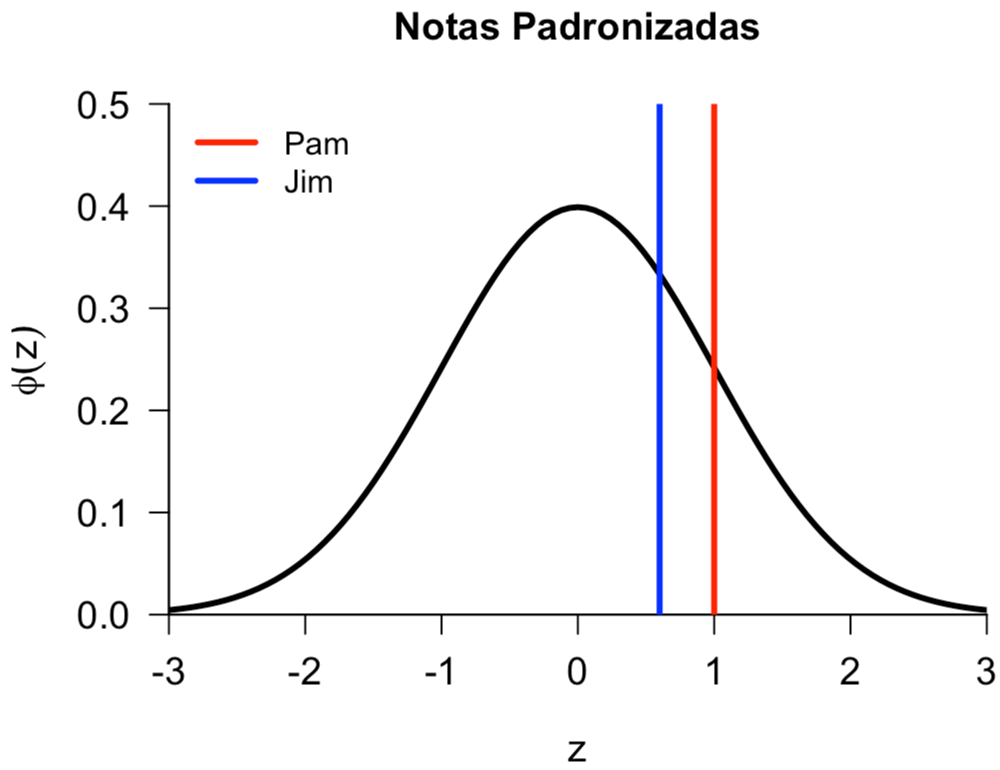
Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $Y \sim N(\mu = 21, \sigma^2 = 5^2)$.

Padronizando a v.a. das notas do ACT: $Z_2 = \frac{Y-21}{5} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota do Jim: $\frac{24-21}{5} = 0.6$.

Exemplo: SAT e ACT

Com as notas padrozinadas, podemos compará-las:



Distribuição Normal

Para calcular as probabilidades, precisamos usar a f.d.a. de $Z \sim N(0,1)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt,$$

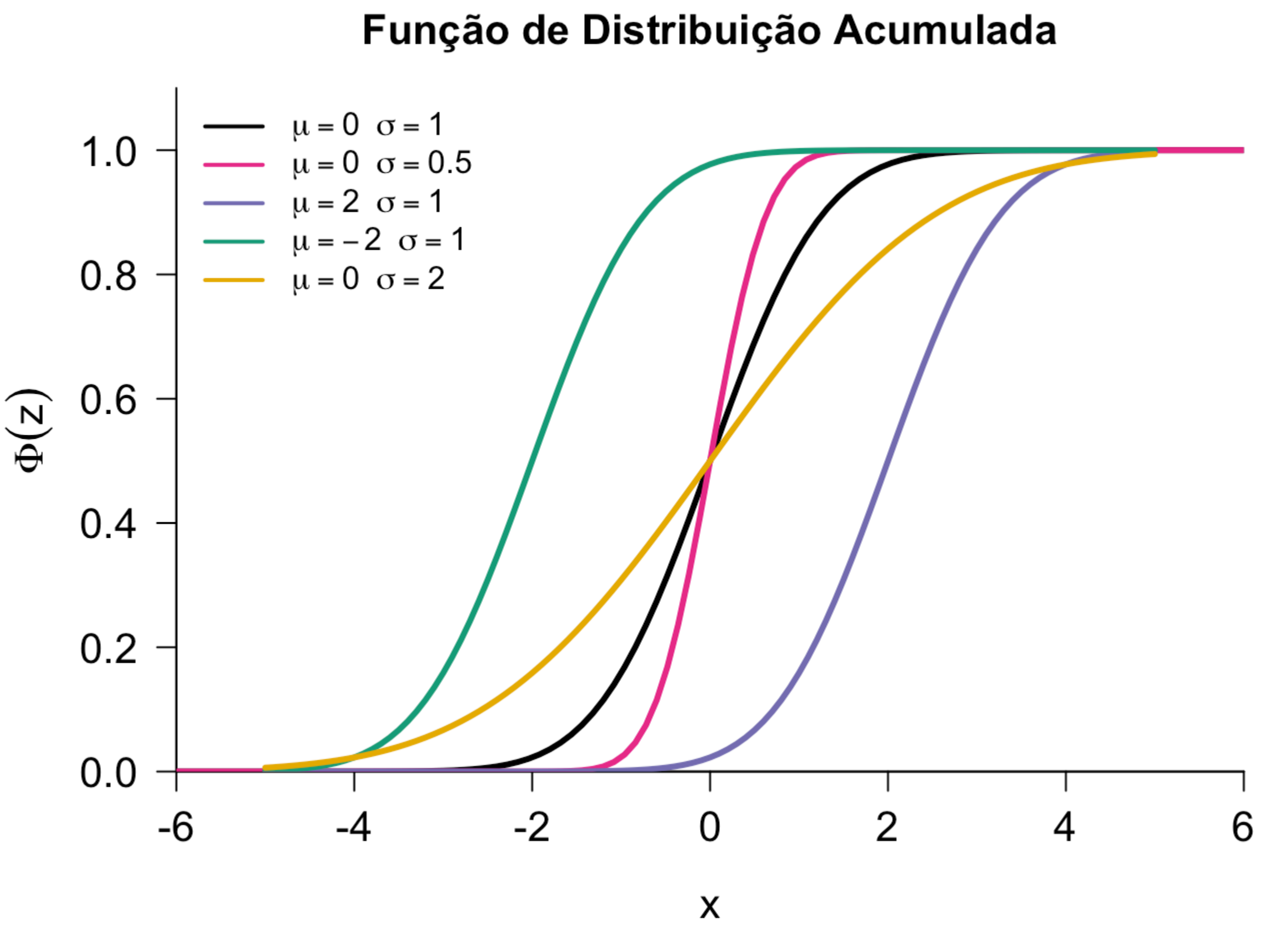
que não tem forma fechada, pois e^{-t^2} não tem antiderivada.

Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ e $\phi(z)$ encontram-se tabelados.

Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$ e usar os valores tabelados. Ou seja, para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

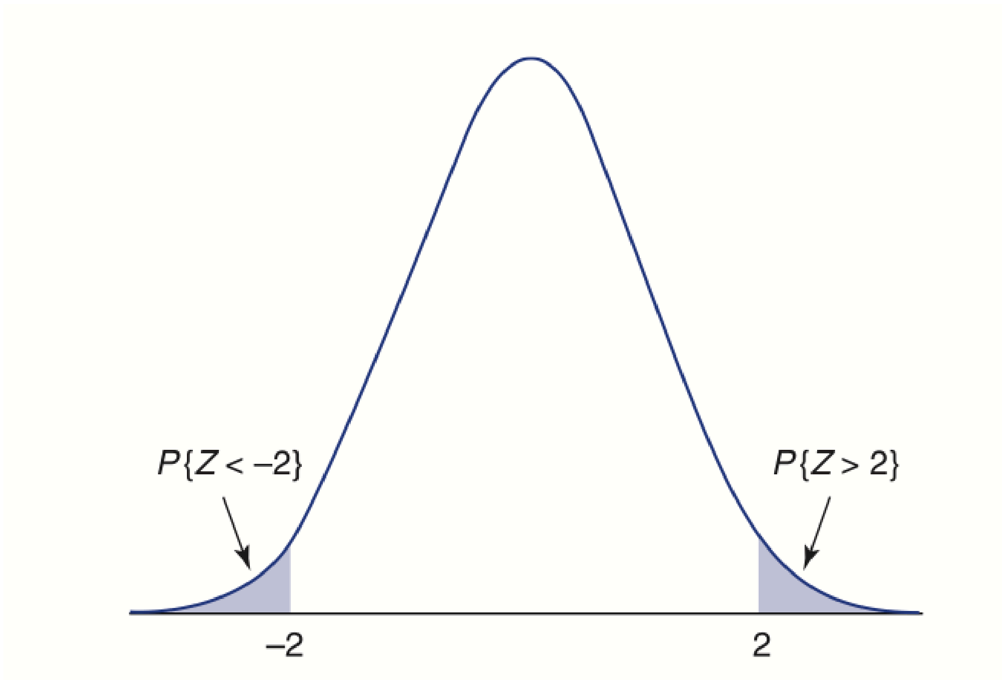
Distribuição Normal



Distribuição Normal - Simetria

A distribuição normal é simétrica, portanto

$$P(Z < -z) = P(Z > z).$$



Distribuição Normal

Seja $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Então,

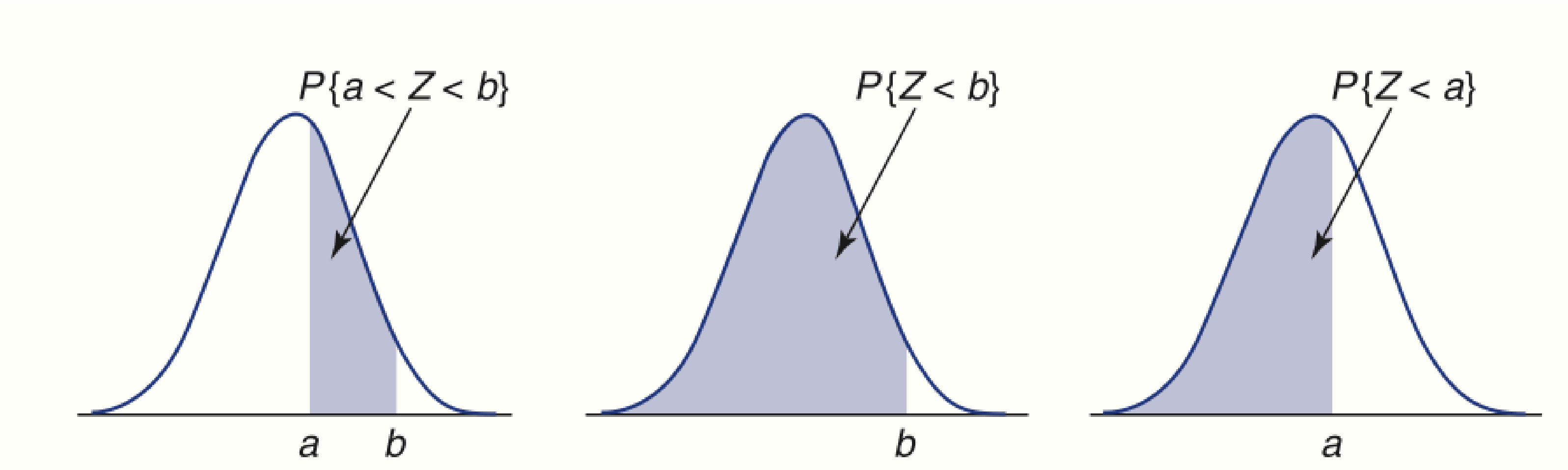
- $\Phi(0) = 0.5$,
- $\Phi(-\infty) = 0$,
- $\Phi(\infty) = 1$,
- Por simetria:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(Z < x) = P(Z > -x) \\ &= 1 - P(Z < -x) = 1 - \Phi(-x). \end{aligned}$$

Distribuição Normal

A probabilidade de um intervalo é dada por:

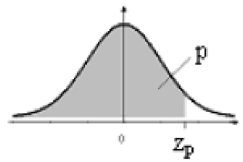
$$
\begin{aligned}
P(a < Z < b) &= P(Z < b) - P(Z < a) \\
&= P(Z \le b) - P(Z \le a) \\
&= \Phi(b) - \Phi(a).
\end{aligned}
$$



Distribuição Normal

Veja a tabela da normal com os valores de $\Phi(1)$ e $\Phi(0)$ destacados:

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	$\boxed{0{,}5000}$	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	$\boxed{0{,}8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

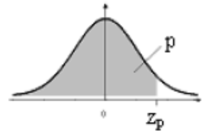
$$\Phi(0.2) = 0.5793$$

$$\Phi(0.45) = 0.6736$$

$$\Phi(1.28) = 0.8997$$

$$\Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45)$$
$$= 0.3264$$

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Distribuição Normal

Exemplo: Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

1. $P(8 < X < 10)$
2. $P(9 \leq X \leq 12)$
3. $P(X > 10)$
4. $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 182.

Distribuição Normal

Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então,

$$Z = \frac{(X - 10)}{2} \sim N(0, 1).$$

Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:

$$\begin{aligned} 8 < X < 10 &\Leftrightarrow 8 - 10 < X - 10 < 10 - 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{8 - 10}{2} < \frac{X - 10}{2} < \frac{10 - 10}{2} \\ &\Leftrightarrow -1 < Z < 0 \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Então, $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0)$.

O valor $\Phi(0)$ está disponível na tabela e é igual a 0.5.

Para obtermos $\Phi(-1)$, devemos usar a simetria da função Φ em torno do zero:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

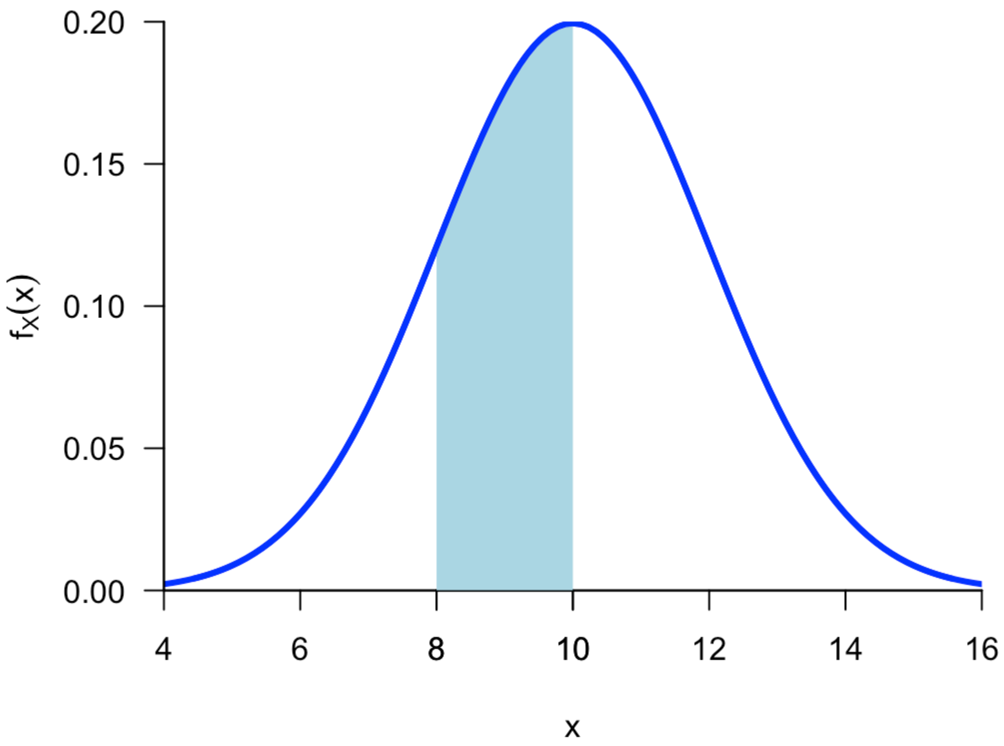
A tabela nos dá $\Phi(1) = 0.8413 \quad \Rightarrow \quad \Phi(-1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

Concluimos portanto que

$$\begin{aligned} P(8 < X < 10) &= P(-1 < Z < 0) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1) \\ &= 0.5 - 0.1587 = 0.3413 \, . \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Gráfico da curva $N(10, 4)$ com a região $[8, 10]$ correspondente ao item 1 em destaque:



Distribuição Normal

$$2.\ P(9 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{9-10}{2} \leq \frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right)$$
$$= P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0.5328\,.$$

$$3.\ P(X > 10) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{10-10}{2}\right) = P(Z > 0) = 0.5\,.$$

$$\begin{aligned}
4.\ P(X < 8 \text{ ou } X > 11) &= P(X < 8) + P(X > 11) \\
&= P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{8-10}{2}\right) + P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{11-10}{2}\right) \\
&= P(Z < -1) + P(Z > 1/2) \\
&= 0.1586 + 0.3085 = 0.4671\,.
\end{aligned}$$

Distribuição Normal

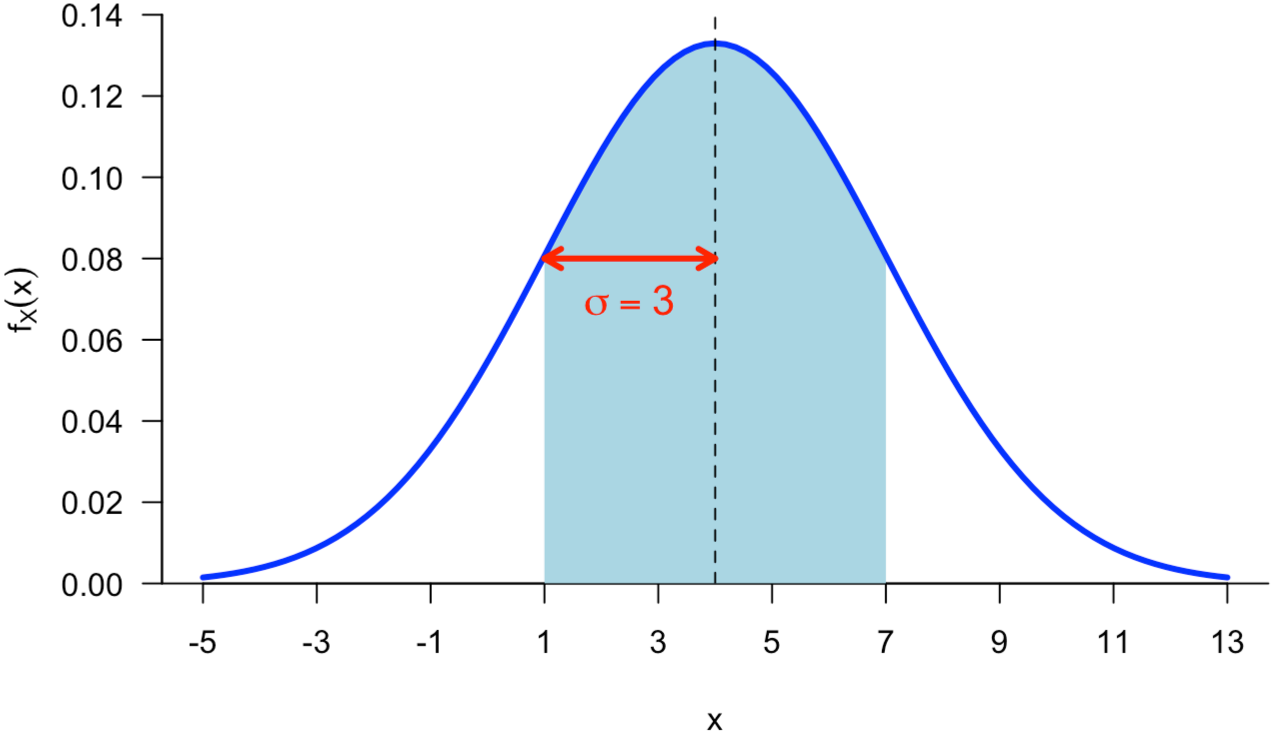
Exemplo: Se $X \sim N(4, 3^2)$, calcule $P(X \leq 7)$ e $P(1 < X \leq 7)$.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 7) &= P\left(\frac{X-4}{3} \leq \frac{7-4}{3}\right) \\
&= P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(1 < X \leq 7) &= P\left(\frac{1-4}{3} < \frac{X-4}{3} \leq \frac{7-4}{3}\right) \\
&= P(-1 < Z \leq 1) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826\ .
\end{aligned}
$$

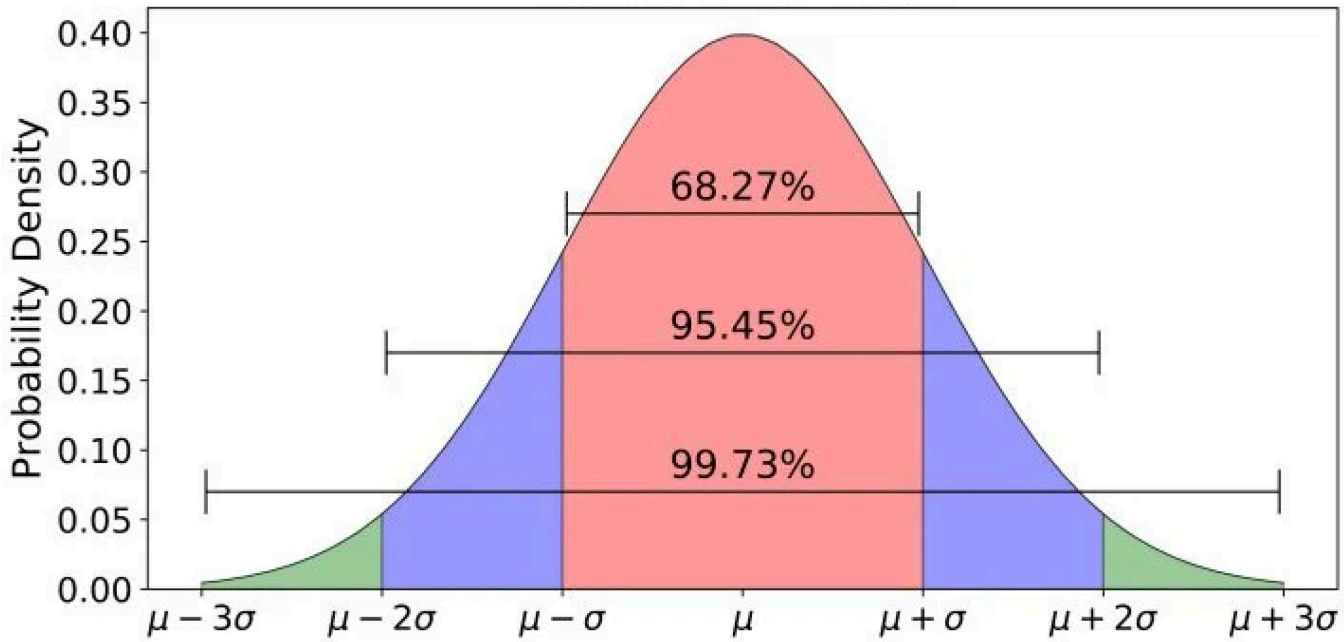
Distribuição Normal

Exemplo: $X \sim N(4, 3^2)$ e a região correspondente a $P(1 < X \leq 7)$ em destaque no gráfico



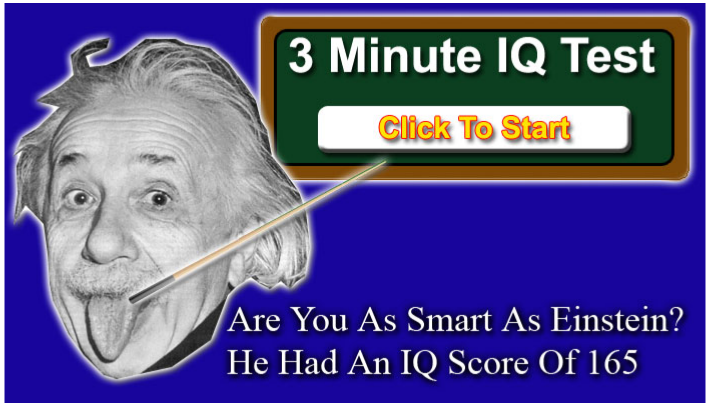
Regra Empírica

Em uma distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos o seguinte:



Regra Empírica

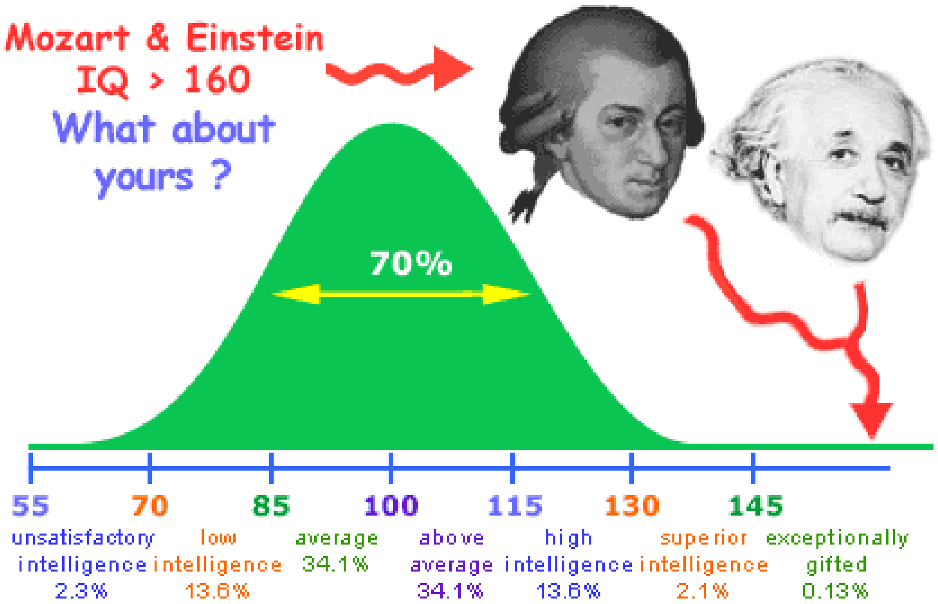
Exemplo: Suponha que o QI da população mundial segue uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão de 15



Encontre um intervalo que englobe os QI's de 68.3% da população?

E se quisermos 95%? E 99.7%?

Regra Empírica



Como $QI \sim N(100, 15^2)$, pela regra empírica:

68.3% da população: $85 \leq QI \leq 115$

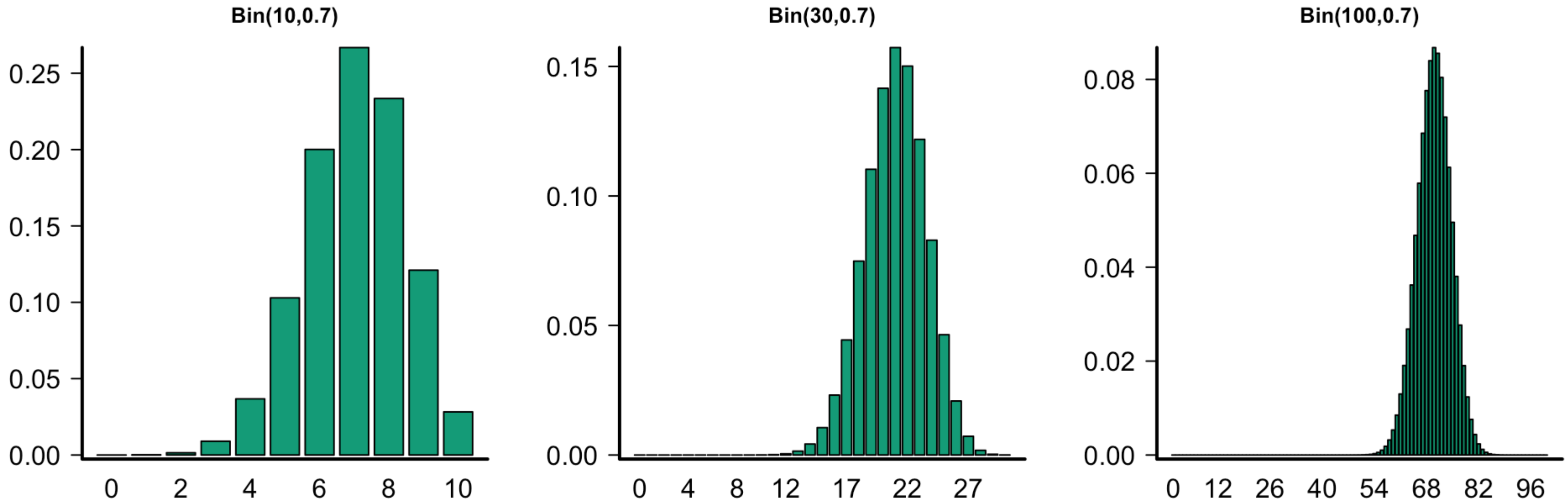
95% da população: $70 \leq QI \leq 130$

99.7% da população: $55 \leq QI \leq 145$

Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$.

O que acontece quando o número de ensaios n aumenta?

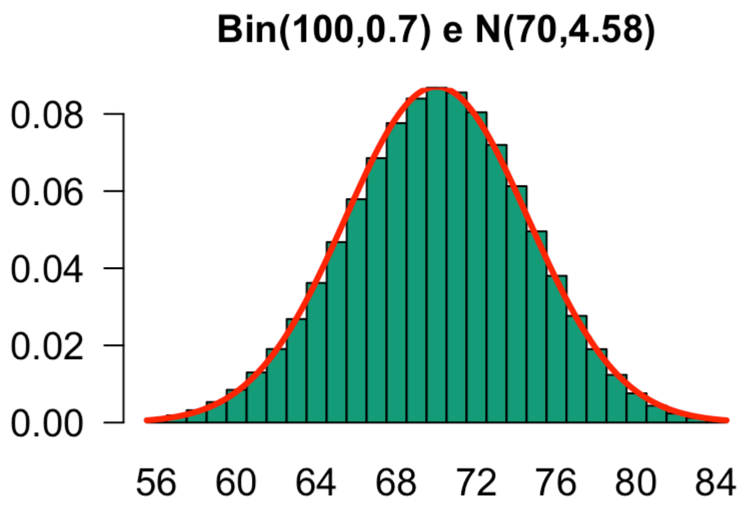


Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Se n é suficientemente grande, a distribuição de X pode ser aproximada pela distribuição normal, isto é,

$$X \sim N(np, np(1-p)).$$

Exemplo: Se $X \sim Bin(100, 0.7)$, podemos usar a aproximação $X \sim N(70, 21)$.



Aproximação Normal para uma Binomial

Exemplo: Seja X o número de vezes que uma moeda honesta resulta em cara quando é lançada 40 vezes. Então,

$$X \sim Bin(40, 0.5).$$

Encontre $P(X = 20)$ usando a fórmula exata e a aproximação normal.

- Binomial:

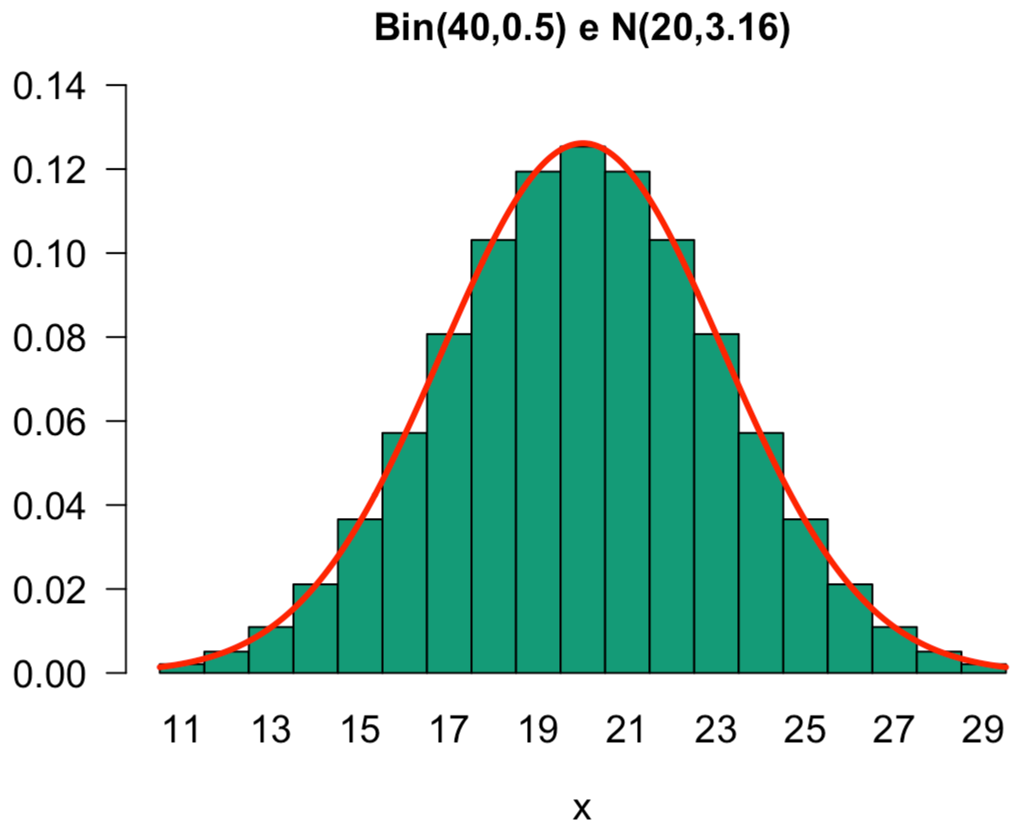
$$P(X = 20) = \binom{40}{20}(0.5)^{20}(0.5)^{20} = 0.125 \ .$$

- Normal:

$$P(X = 20) \approx P(19.5 < X \leq 20.5) = 0.1256 \ .$$

Aproximação Normal para uma Binomial

Exemplo: $X \sim Bin(40, 0.5)$.



Aproximação Normal para uma Binomial

Em geral, para que a aproximação para a normal seja utilizada:

$$np \geq 10$$

$$n(1 - p) \geq 10$$

Ou seja, pelo menos 10 sucessos e pelo menos 10 fracassos na amostra.

Relembrando: Propriedades da Esperança

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

   Casos particulares:

   - $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$,
   - $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Relembrando: Propriedades da Variância

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

   Casos particulares:

   - $Var(X + b) = Var(X)$,
   - $Var(aX) = a^2 Var(X)$.

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

Propriedades da Normal

Se adicionarmos ou multiplicarmos uma constante a uma v.a. com distribuição Normal, a v.a. resultante continua tendo distribuição normal. Ou seja,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \Longrightarrow \qquad aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Isso explica que:

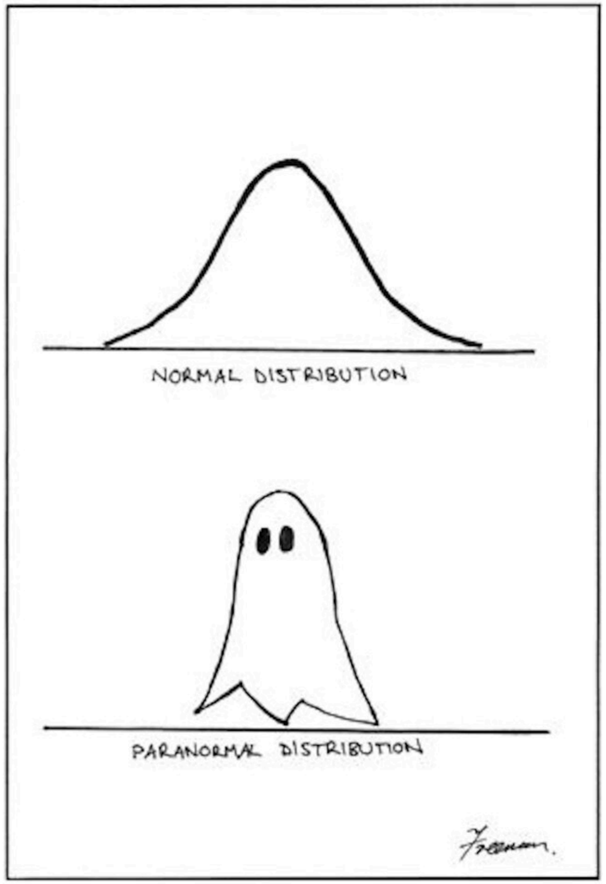
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Se X e Y são v.a.'s independentes, tal que $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, então

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

Leituras

- Ross: seções 6.3 a 6.7.
- OpenIntro: seções 3.1, 3.2, 3.4.2
- Magalhães: capítulo 6.



Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho