



# ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 10

# Esperança e Variância - variável aleatória discreta

# Variância: variável aleatória discreta

- Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..
- No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.
- Considere as seguintes v.a.'s:

$U = 0$ , com probabilidade 1

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = 0$$

No entanto, claramente a dispersão é bem diferente para as três variáveis.

# Variância: variável aleatória discreta

Queremos uma medida para quantificar quão distantes os valores da v.a.  $X$  estão da sua esperança.

**Definição:** Se  $X$  é uma v.a. com esperança  $\mathbb{E}(X) = \mu$ , então a variância de  $X$  é:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

**Notação:**  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$

- Se  $X$  é uma v.a. discreta assumindo valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com respectivas probabilidades  $P(X = x_i) = p_i$ , então:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) &= \mathbb{E}([X - \mu]^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\end{aligned}$$

# Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

Como calcular a  $\mathbb{E}(X^2)$ ?

$$X^2 = \begin{cases} 1^2, & \text{com probabilidade } p \\ 0^2, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

# Propriedades da Esperança

1. Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Casos particulares:

- $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

2. Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

# Propriedades da Esperança

**Proposição:** Se  $X$  é uma v.a. discreta com valores  $x_i$  e função de massa  $p(x_i)$ , então para qualquer função  $g$ :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

**Exemplo:** Seja  $X$  uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$$



# Propriedades da Variância

1. Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Casos particulares:

- $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

2. Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

- A **média, valor esperado ou esperança** de uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  é dada pela expressão:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

- A **mediana (Md)** é o valor que satisfaz:

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$$

- A **moda (Mo)** é o valor da variável  $X$  que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, \dots\}$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

|            |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| $X$        | -5  | 10  | 15  | 20  |
| $P(X = x)$ | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 |

---

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

$$Mo(X) = 15$$

$$P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5, \text{ então a mediana é } Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$$

**Obs:** note que nem a média (8.5) nem a mediana (12.5) são valores assumidos pela variável  $X$ .

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: considere a v.a.  $X$  tal que:

|            |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$        | 2   | 5   | 8   | 15  | 20  |
| $P(X = x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

---

$$\mu_X = 10.3$$

$$Mo(X) = 5$$

$$Md(X) = 8$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: Considere a v.a.  $X$  do slide anterior e seja  $Y = 5X - 10$

|            |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$        | 0   | 15  | 30  | 65  | 90  |
| $P(Y = y)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

---

$$\mu_Y = 41.5, \quad Mo(Y) = 15 \quad \text{e} \quad Md(Y) = 30$$

Note que, como  $Y = 5X - 10$ :

$$\mu_Y = 5\mu_X - 10 = 5 \times 10.3 - 10 = 41.5$$

$$Mo(Y) = 5Mo(X) - 10 = 5 \times 5 - 10 = 15$$

$$Md(Y) = 5Md(X) - 10 = 5 \times 8 - 10 = 30$$

# Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas.

Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória  $X$  igual ao número de bolas pretas.

Obtenha a distribuição de  $X$ . Calcule a esperança e a variância.

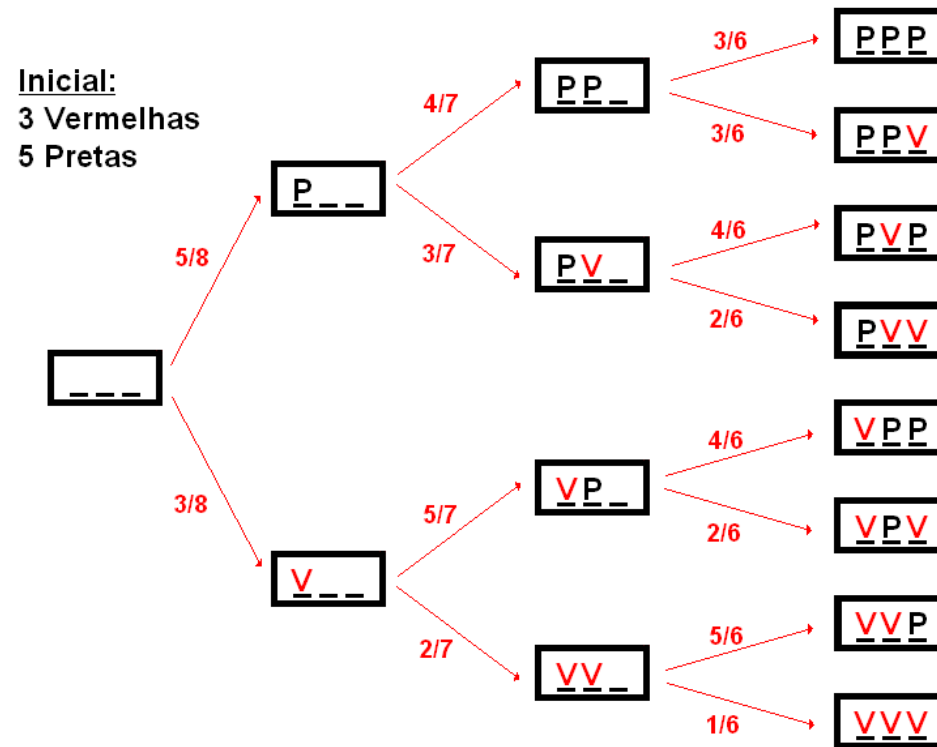
: Morettin | Bussab, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 135.

Repare que não há reposição:

- a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta;
- a segunda terá 5 em 7 se a primeira for vermelha, ou 4 em 7 se a primeira foi preta, e assim por diante.

# Exemplo (continuação)

Retirar 3 bolas, sem reposição, de uma urna com 3 bolas vermelhas e 5 pretas



# Exemplo (continuação)

A partir do gráfico, podemos construir uma tabela com os eventos do espaço amostral:

| Extrações | Probabilidade                      | $X = x$ |
|-----------|------------------------------------|---------|
| PPP       | $5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$ | 3       |
| PPV       | $5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$ | 2       |
| PVP       | $5/8 \times 3/7 \times 4/6 = 5/28$ | 2       |
| VPP       | $3/8 \times 5/7 \times 4/6 = 5/28$ | 2       |
| PVV       | $5/8 \times 3/7 \times 2/6 = 5/56$ | 1       |
| VPV       | $3/8 \times 5/7 \times 2/6 = 5/56$ | 1       |
| VVP       | $3/8 \times 2/7 \times 5/6 = 5/56$ | 1       |
| VVV       | $3/8 \times 2/7 \times 1/6 = 1/56$ | 0       |



# Exemplo (continuação)

Como  $X$  é o número de bolas pretas, temos que:

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de  $X$ ,  $p_X(x)$ .

| Eventos                             | $X = x$ | $p_X(x) = P(X = x)$ |
|-------------------------------------|---------|---------------------|
| $\{VVV\}$                           | 0       | 0.02                |
| $\{VVP\} \cup \{VPV\} \cup \{PVV\}$ | 1       | 0.27                |
| $\{PPV\} \cup \{PVP\} \cup \{VPP\}$ | 2       | 0.53                |
| $\{PPP\}$                           | 3       | 0.18                |

# Exemplo (continuação)

Podemos calcular a esperança e a variância de  $X$  a partir de sua função de probabilidade:

$$\begin{aligned}\mu = \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^3 x p_X(x) \\ &= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.27 + 2 \times 0.53 + 3 \times 0.18 = 1.87\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] &= \sum_{x=0}^3 (x - \mu)^2 p_X(x) \\ &= (0 - 1.87)^2 \times 0.02 + (1 - 1.87)^2 \times 0.27 + (2 - 1.87)^2 \times 0.53 + (3 - 1.87)^2 \times 0.18 = 0.51\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= (0^2 \times 0.02 + 1^2 \times 0.27 + 2^2 \times 0.53 + 3^2 \times 0.18) - (1.87)^2 = 0.51\end{aligned}$$

# Exemplo

O tempo  $T$ , em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

| $T$        | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $P(T = t)$ | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.1 |

1. Calcule o tempo médio de processamento.
2. Cada peça processada paga ao operador \$2.00 mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha \$0.50 por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, ganha um bônus de \$1.00. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a.  $S$ : quantia paga por peça.

, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 140.

# Exemplo (continuação)

## 1. Tempo médio de processamento

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{t=2}^7 tP(T = t) \\ &= 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.2 + 7 \times 0.1 = 4.6\end{aligned}$$

2. Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça. Note, contudo, que o operário receberá \$2.00 no evento  $\{T = 6\} \cup \{T = 7\}$ , logo somamos suas probabilidades. Seja  $S$  a v.a. “ganho final”.

|            |        |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $S$        | \$4.00 | \$3.50 | \$3.00 | \$2.50 | \$2.00 |
| $P(S = s)$ | 0.1    | 0.1    | 0.3    | 0.2    | 0.3    |

## Exemplo (continuação)

Obtemos a média e a variância de  $S$  através da definição:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_s sP(S = s) \\ &= 4 \times 0.1 + 3.5 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 2.5 \times 0.2 + 2 \times 0.3 = 2.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2) &= \sum_s s^2 P(S = s) \\ &= 16 \times 0.1 + 12.25 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 6.25 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 7.975\end{aligned}$$

Então,

$$\text{Var}(S) = 7.975 - (2.75)^2 = 0.4125$$

# Principais Modelos Discretos

# Uniforme Discreta



Economia

## Apesar de resultado inusitado, quatro pessoas levam Mega-Sena de sábado

Números sorteados em concurso 2052 formam quase uma sequência: 50 - 51 - 56 - 57 - 58 - 59

Por **Da Redação**

© 24 jun 2018, 11h02 - Publicado em 24 jun 2018, 09h35



Fonte: [Veja, 24/06/2018](#)

# Uniforme Discreta

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
- assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com  $\frac{1}{100}$  para cada um.
- como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa:  $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ .
- assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.



# Uniforme Discreta

- A v.a. discreta  $X$ , assumindo valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , segue uma distribuição uniforme discreta se, e somente se, cada valor possível tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

**Exemplo:** lançamento de um dado honesto de 6 faces

| $X$    | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $p(x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

---

# Uniforme Discreta

A média e a variância são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))^2$$

ou

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j^2 - \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 = \frac{1}{k} \left[ \sum_{j=1}^k x_j^2 - \frac{1}{k} \left( \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \right]$$

# Uniforme Discreta

Exemplo: lançamento de um dado honesto de 6 faces

| $X$    | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $p(x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

---

Calculando a esperança e a variância de  $X$ :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = 2.92$$

# Uniforme Discreta

Cálculo da função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável uniforme discreta:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k} = \frac{\#(x_i \leq x)}{k}$$

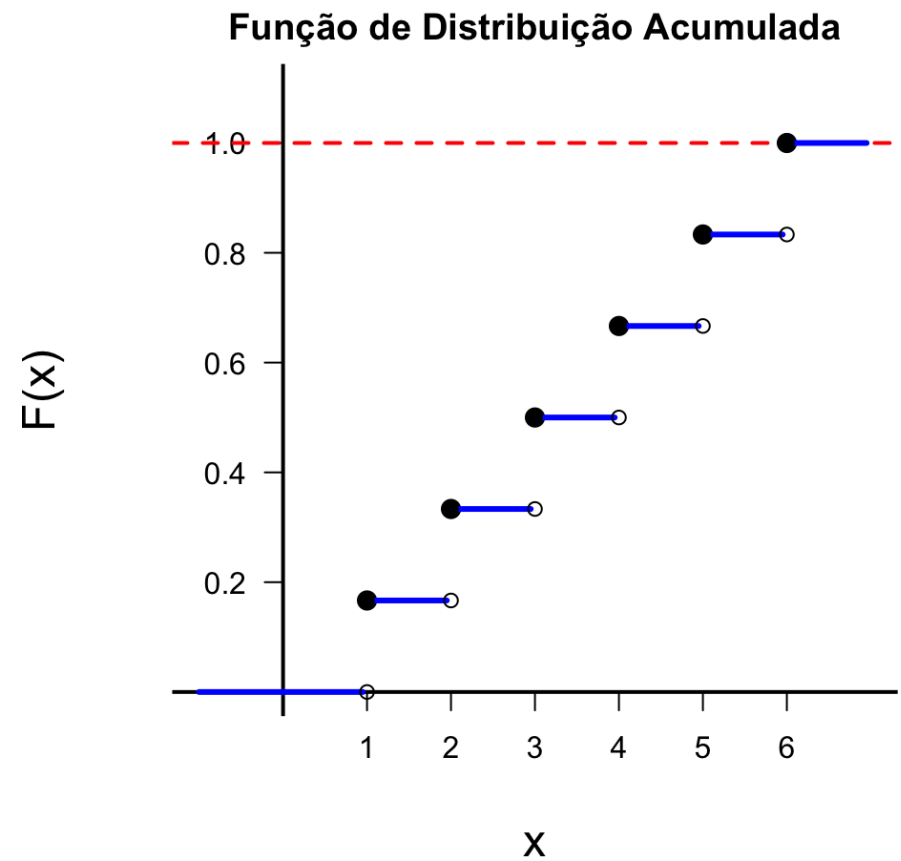
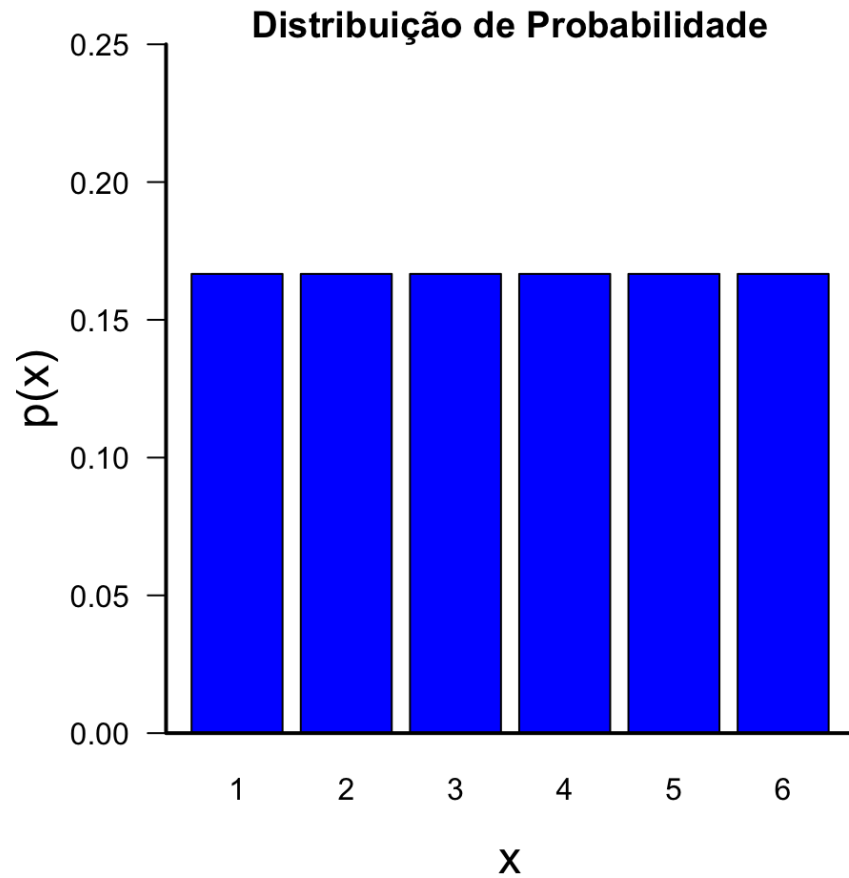
**Exemplo:** voltando ao exemplo do lançamento de um dado honesto de 6 faces

- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$
- $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

# Uniforme Discreta - f.d.a

| $X$ | $p(x)$        | $F(x)$        |
|-----|---------------|---------------|
| 1   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |
| 3   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{6}$ |
| 4   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{6}$ |
| 5   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |
| 6   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{6}{6}$ |

# Uniforme Discreta - Gráficos



# Bernoulli

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Por exemplo, uma pessoa pode:

- aceitar ou recusar uma oferta de cartão de crédito de seu banco.
- votar sim ou não em uma assembleia.
- ir ou não almoçar no bandejão.
- levar ou não um guarda-chuva num dia nublado.

# Modelo Bernoulli

- Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis: **sucesso** e **fracasso**.
- Os termos “sucesso” e “fracasso” são apenas rótulos para os dois resultados possíveis.
- Seja  $p$  a probabilidade de sucesso.
- **Exemplo:** lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara. Se a moeda é honesta,  $p = 1/2$ .
- Esse tipo de experimento é conhecido como **Ensaio de Bernoulli**.



# Modelo Bernoulli

- **Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” a obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .
- **Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.
- As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.

$$\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa respondeu sim (sucesso)} \\ 0, & \text{caso contrário (fracasso)} \end{cases}$$

$$P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$$

# Modelo Bernoulli

Seja  $X$  uma v.a. discreta assumindo apenas valores 0 e 1, onde  $X = 1$  corresponde a sucesso e seja  $p$  a probabilidade de sucesso.

A distribuição de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1 - p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ou de forma equivalente, podemos escrever como:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1$$

**Notação:**  $X \sim b(p)$

# Bernoulli - Esperança e Variância

Se  $X$  é um v.a. Bernoulli,  $X \sim b(p)$ , então:

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

**Demonstração:**

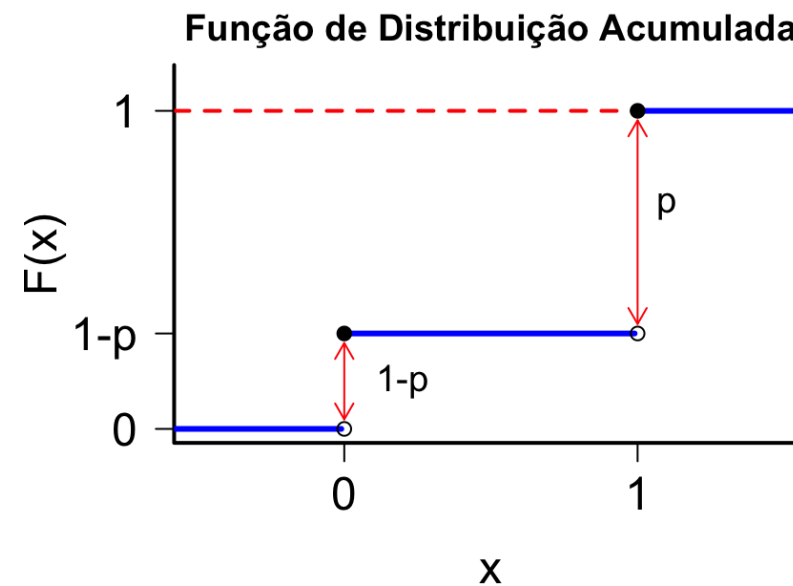
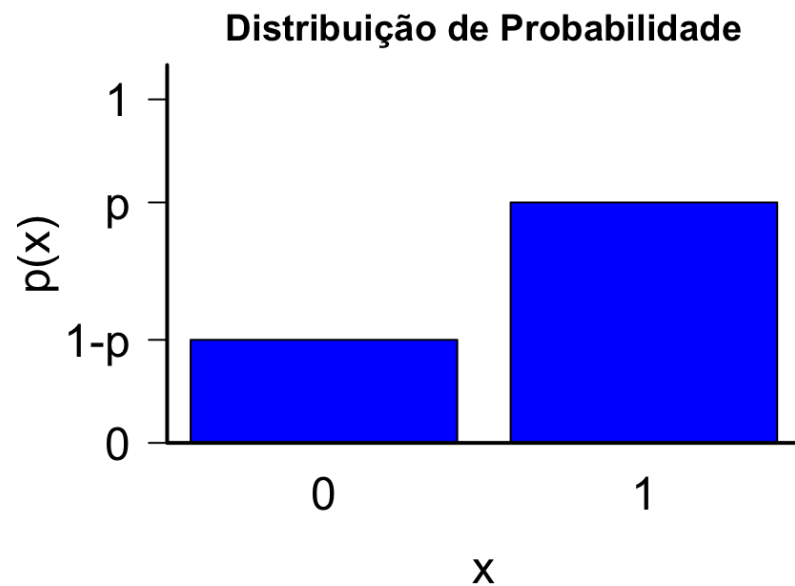
- **Esperança:**  $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$
- $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$
- **Variância:**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p)\end{aligned}$$

# Bernoulli

A função de distribuição acumulada de uma v.a. Bernoulli é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



# Bernoulli

**Exemplo:** lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5

Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ . Então:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} && \text{para } x = 0, 1 \\ &= \begin{cases} 5/6 & \text{se } x = 0 \\ 1/6 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Encontre a esperança e variância de  $X$ .

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$$

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.

- Considere um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  e o evento  $A$ .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.
- Repetimos o experimento  $n$  vezes, de forma independente.
- Seja  $X$  o número de sucessos nos  $n$  experimentos.

# Exemplo: vacinas

Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%.

Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado.

Nesse caso, consideramos como sucesso a imunização.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo enunciado, sabe-se que  $P(X_i = 1) = p = 0.8$ .

# Exemplo: vacinas

- Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.
- As v.a.'s  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são Bernoulli.
- Se o interesse está em estudar  $X =$  número de indivíduos imunizados no grupo,  $X$  poderá assumir valores  $\{0, 1, 2, 3\}$ .
- Note que  $X = X_1 + X_2 + X_3$ .



# Exemplo: vacinas

| evento                      | P(evento)            | X |
|-----------------------------|----------------------|---|
| $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ | $(0.2)^3$            | 0 |
| $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$ | $0.8 \times (0.2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$ | $0.8 \times (0.2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$ | $0.8 \times (0.2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$ | $(0.8)^2 \times 0.2$ | 2 |
| $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$ | $(0.8)^2 \times 0.2$ | 2 |
| $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$ | $(0.8)^2 \times 0.2$ | 2 |
| $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ | $(0.8)^3$            | 3 |

# Modelo Binomial

Assim, as probabilidades de cada valor possível de  $X$  são:

| $X$        | 0         | 1                             | 2                             | 3         |
|------------|-----------|-------------------------------|-------------------------------|-----------|
| $P(X = x)$ | $(0.2)^3$ | $3 \times 0.8 \times (0.2)^2$ | $3 \times (0.8)^2 \times 0.2$ | $(0.8)^3$ |

---

O comportamento de  $X$  é completamente determinado pela função:

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

# Binomial

**Modelo Geral:** Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .

A variável aleatória  $X = X_1 + \dots + X_n$  representa o total de sucessos e corresponde ao modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , ou seja,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

A probabilidade de se observar  $x$  é dada pela expressão geral:

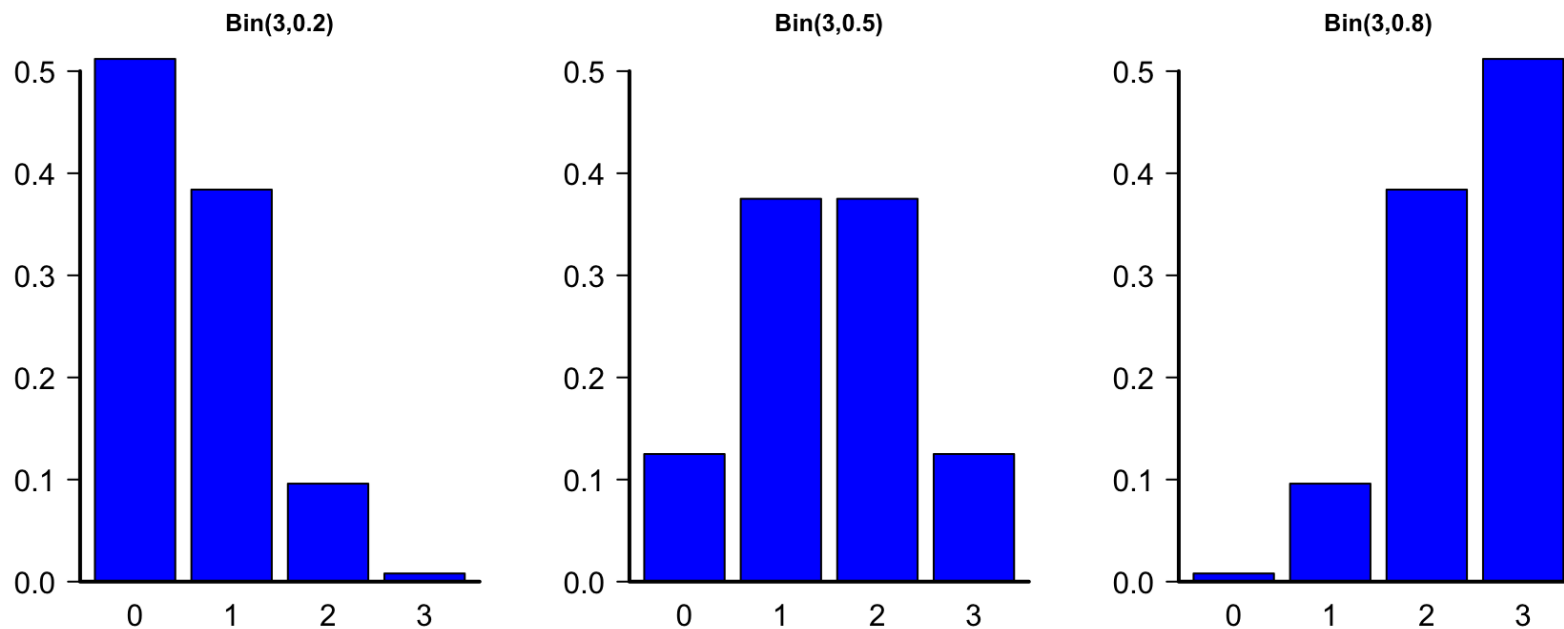
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

A esperança e variância de uma v.a. Binomial são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

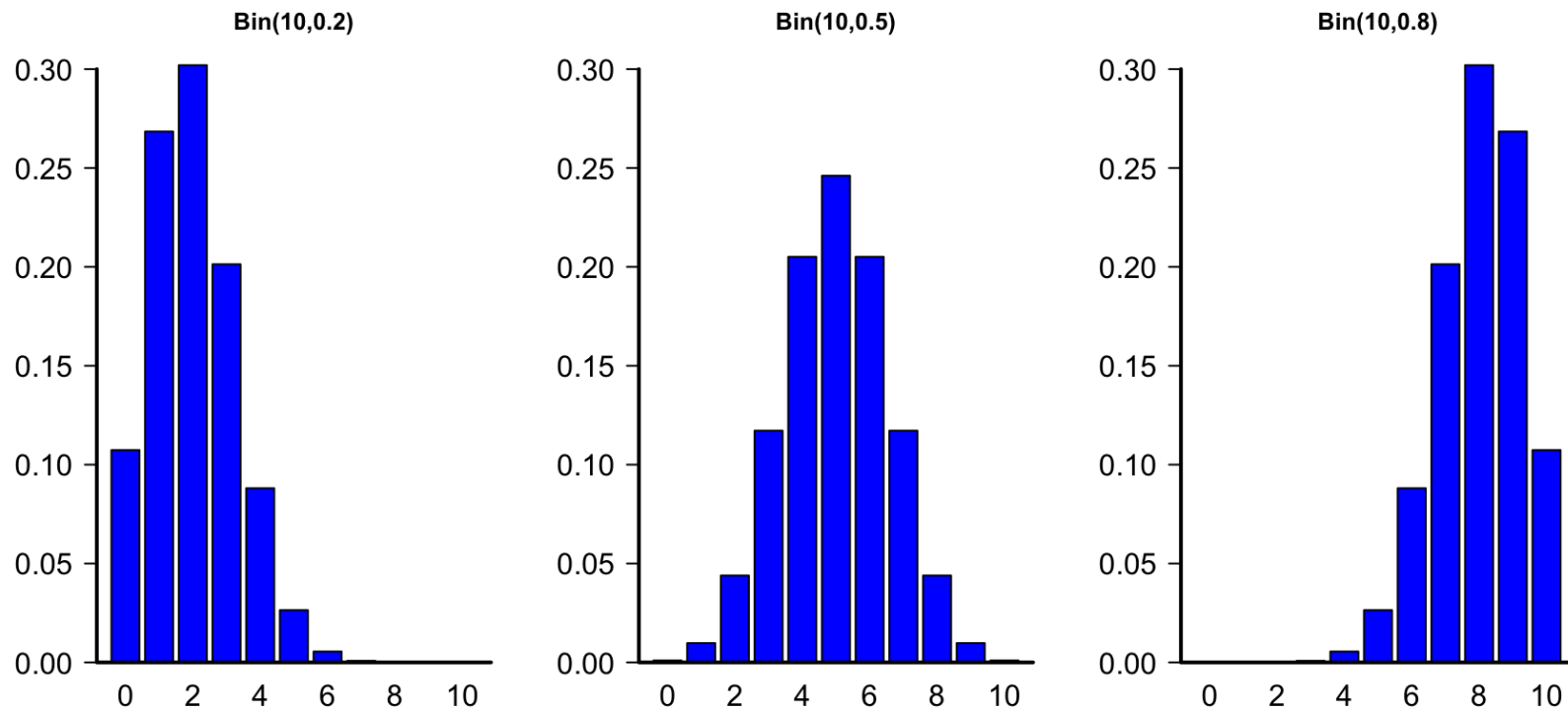
# Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma  $\text{Bin}(3, p)$ , com  $p = 0.2, 0.5$  e  $0.8$ .



# Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma  $\text{Bin}(10, p)$ , com  $p = 0.2, 0.5$  e  $0.8$ .



# Exemplo: Vacina

- No exemplo da vacina, temos então que o número de indivíduos imunizados segue uma distribuição Binomial com  $n = 3$  e  $p = 0.8$

$$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

- Qual a probabilidade de que dentre os 3 indivíduos, nenhum tenha sido imunizado?

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} (0.8)^0 (0.2)^3 = 0.008$$

- Encontre a esperança e variância:

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times 0.8 = 2.4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.48$$

# Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se  $X$  denotar a variável “número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias”, qual o seu valor esperado? Qual a variância?

# Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória  $X$  = número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0.2$ .

Então, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento  $\{X \leq 2\}$ .

Sabemos que, para  $X \sim \text{Bin}(10, 0.2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} (0.2)^x (0.8)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (0.8)^{10} + 10(0.2)(0.8)^9 + 45(0.2)^2(0.8)^8 = 0.678 \end{aligned}$$



# Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$$

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - 0.879 = 0.121 \end{aligned}$$

# Exemplo: Comprador A ou B?

**Exemplo:** Um industrial fabrica peças, das quais  $1/5$  são defeituosas. Dois compradores **A** e **B** classificaram um grande lote de peças adquiridas em categorias *I* e *II*, pagando \$1.20 e \$0.80 por peça, respectivamente, do seguinte modo:

- **Comprador A:** retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como *II*.
- **Comprador B:** retira uma amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como *II*.

Em média, qual comprador oferece mais lucro?

, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 159.

# Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo *I* ou *II*.

Seja  $X$  o número de peças defeituosas em  $n$  testes.

O experimento do **comprador A** tem distribuição  $X_A \sim \text{Bin}(5, 1/5)$  enquanto o experimento do **comprador B** tem distribuição  $X_B \sim \text{Bin}(10, 1/5)$ .

Para o **comprador A**, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_A > 1) &= 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0.263 \end{aligned}$$

## Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

$$\begin{aligned} P(X_B > 2) &= 1 - \binom{10}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^8 = 0.322 \end{aligned}$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor.

Mas podemos verificar o lucro esperado do vendedor.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria *I*: \$1.20. Preço por peça na categoria *II*: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

Ou seja, ele irá lucrar em média \$1.09 por peça.

Já se ele vender para o **comprador B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro B}) = 1.20 \times 0.678 + 0.80 \times 0.322 \approx 1.07$$

que é um lucro dois centavos inferior.

Portanto, é mais interessante ao industrial que o comprador A examine mais peças.

# Leituras

- [Ross](#): capítulo 5
- Magalhães: capítulo 3

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Benilton Carvalho