ME613 - Análise de Regressão

Parte 8

Samara F. Kiihl - IMECC - UNICAMP

Multicolinearidade

Introdução

Multicolinearidade: variáveis preditoras correlacionadas entre si.

- Variáveis preditoras não correlacionadas
- Variáveis preditoras perfeitamente correlacionadas
- Efeitos da multicolinearidade

Variáveis preditoras não correlacionadas

Considere a seguinte situação:

- Regressão de Y em X_1: $\hat{\beta}_1$.
- Regressão de Y em X_2: $\hat{\beta}_2$.
- Regressão de Y em X_1 e X_2: $\hat{\beta}_1^*$ e $\hat{\beta}_2^*$.

Se X_1 e X_2 não são correlacionados:

- $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^*$ e $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2^*$.
- $SQReg(X_1 \mid X_2) = SQReg(X_1)$ e $SQReg(X_2 \mid X_1) = SQReg(X_2)$.

Exemplo

X_1: tamanho da equipe

X_2: pagamento (dólares)

Y: produtividade

```
##   X1 X2  Y
## 1  4  2 42
## 2  4  2 39
## 3  4  3 48
## 4  4  3 51
## 5  6  2 49
## 6  6  2 53
## 7  6  3 61
## 8  6  3 60
```


Exemplo

Regressão de Y em X_1: $\hat{\beta}_1$.

```
##             Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
## (Intercept)   23.500  10.111359 2.324119 0.05911468
## X1             5.375   1.983001 2.710539 0.03508095
```

```
## Analysis of Variance Table
## 
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)  
## X1         1 231.12 231.125   7.347 0.03508 *
## Residuals  6 188.75  31.458                  
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$\hat{\beta}_1 = 5.375$$

$$SQReg(X_1) = 231.12$$

Exemplo

Regressão de Y em X_2: $\hat{\beta}_2$.

```
##             Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
## (Intercept)    27.25  11.607738 2.347572 0.05724814
## X2              9.25   4.552929 2.031659 0.08846031
```

```
## Analysis of Variance Table
## 
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)  
## X2         1 171.12 171.125  4.1276 0.08846 .
## Residuals  6 248.75  41.458                  
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$\hat{\beta}_2 = 9.25$$

$$SQReg(X_2) = 171.12$$

Exemplo

Regressão de Y em X_1 e X_2: $\hat{\beta}_1^*$ e $\hat{\beta}_2^*$.

```
##             Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.375  4.7404509 0.0791064 0.9400164184
## X1             5.375  0.6637959 8.0973685 0.0004657066
## X2             9.250  1.3275918 6.9675031 0.0009365829
```

$$\hat{\beta}_1^* = 5.375$$

$$\hat{\beta}_2^* = 9.25$$

Exemplo

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X1         1 231.125 231.125  65.567 0.0004657 ***
## X2         1 171.125 171.125  48.546 0.0009366 ***
## Residuals  5  17.625   3.525
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$SQReg(X_2|X_1) = SQE(X_2) - SQE(X_1, X_2) = 171.12 = SQReg(X_2)$$

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X2         1 171.125 171.125  48.546 0.0009366 ***
## X1         1 231.125 231.125  65.567 0.0004657 ***
## Residuals  5  17.625   3.525
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$SQReg(X_1|X_2) = SQE(X_1) - SQE(X_1, X_2) = 231.12 = SQReg(X_1)$$

Variáveis preditoras perfeitamente correlacionadas

Exemplo:

```
##   X1 X2   Y
## 1  2  6  23
## 2  8  9  83
## 3  6  8  63
## 4 10 10 103
```

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Exemplo

```
modelo1 <- lm(Y ~ X1 + X2,data=dados)
summary(modelo1)$coef
```

```
## Warning in summary.lm(modelo1): essentially perfect fit: summary may be
## unreliable
```

```
##             Estimate   Std. Error      t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)        3 6.064937e-15 4.946465e+14 4.087051e-30
## X1                10 8.492610e-16 1.177494e+16 7.212443e-33
```

que produz valores ajustados perfeitos (resíduo nulo):

```
##   1   2   3   4
##  23  83  63 103
```


Exemplo

$$\hat{Y} = -87 + X_1 + 18X_2$$

$$\hat{Y} = -7 + 9X_1 + 2X_2$$

também fornecem os mesmos valores para $\hat{Y}$.

Problema: X_1 e X_2 são perfeitamente correlacionadas ($X_2 = 5 + 0.5X_1$).

Podemos obter bons valores ajustados/preditos, mas não podemos interpretar os parâmetros do modelo (pois temos infinitas possibilidades).

Efeitos da multicolinearidade

Na prática, dificilmente encontraremos variáveis preditoras que sejam perfeitamente correlacionadas entre si.

No entanto, quando a correlação é alta, temos problemas similares aos vistos no exemplo anterior.

Efeito nos coeficientes de regressão

X_1: tríceps

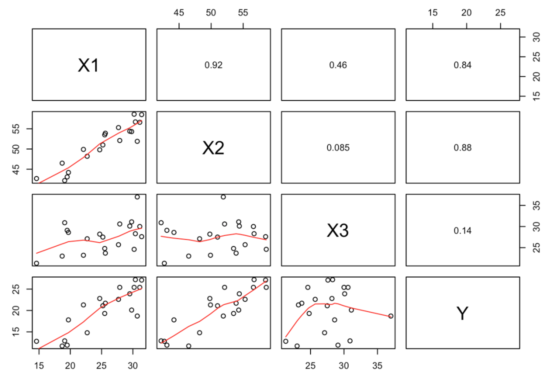
X_2: coxa

X_3: antebraço

Y: gordura corporal

```
##      X1   X2   X3    Y
## 1  19.5 43.1 29.1 11.9
## 2  24.7 49.8 28.2 22.8
## 3  30.7 51.9 37.0 18.7
## 4  29.8 54.3 31.1 20.1
## 5  19.1 42.2 30.9 12.9
## 6  25.6 53.9 23.7 21.7
## 7  31.4 58.5 27.6 27.1
## 8  27.9 52.1 30.6 25.4
## 9  22.1 49.9 23.2 21.3
## 10 25.5 53.5 24.8 19.3
## 11 31.1 56.6 30.0 25.4
```


Exemplo



Exemplo

Quando as preditoras têm correlação, os efeitos das variáveis são marginais ou parciais.

Variável no modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
X_1	0.857	
X_2		0.857
X_1, X_2	0.222	0.659
X_1, X_2, X_3	4.334	-2.857

As estimativas do efeito de X_1 no modelo variam muito, dependendo das variáveis que são consideradas nos modelos. O mesmo pode ser dito sobre o efeito de X_2.

Efeito na soma extra de quadrados

Quando as variáveis preditoras apresentam correlação, a contribuição marginal de cada variável na redução da soma de quadrados do erro varia, dependendo de quais variáveis já estão no modelo.

Por exemplo: considerando apenas X_1 no modelo

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X1         1 352.27  352.27  44.305 3.024e-06 ***
## Residuals 18 143.12    7.95
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$SQReg(X_1) = 352.27$$

Exemplo

Considerando X_1 e X_2 no modelo (primeiro X_2 e depois X_1):

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X2         1 381.97  381.97  59.057 6.281e-07 ***
## X1         1   3.47    3.47   0.537    0.4737
## Residuals 17 109.95    6.47
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

$$SQReg(X_1 \mid X_2) = 3.473$$

Exemplo

O modelo de $SQReg(X_1 \mid X_1)$ ser tão pequeno quando comparado a $SQReg(X_1)$ é a alta correlação entre X_1 e X_2 (0.92) e de cada uma delas com a variável resposta (0.84 e 0.88, respectivamente).

Desta forma, quando X_2 já está no modelo, a contribuição marginal de X_1 é pequena na redução da soma de quadrados do erro, pois X_2 contém praticamente a mesma informação que X_1.

Efeito no desvio-padrão da estimativa

Variável no modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
X_1	0.129	
X_2		0.11
X_1, X_2	0.303	0.291
X_1, X_2, X_3	3.016	2.582

Efeito nos valores ajustados e preditos

Variável no modelo	QME
X_1	7.95
X_1, X_2	6.47
X_1, X_2, X_3	6.15

QME diminui conforme variáveis são adicionadas ao modelo (caso usual).

Efeito nos valores ajustados e preditos

A precisão do valor ajustado não é tão afetada quando inserimos ou não uma variável preditora muito correlacionada com outra já no modelo.

Por exemplo, se considerarmos apenas o modelo com X_1, o valor estimado de gorduta corporal para $X_1 = 25$ é:

$$\hat{Y} = 19.934 \qquad \sqrt{\widehat{Var(\hat{Y})}} = 0.632$$

Quando incluímos X_2, altamente correlacionada à X_1, temos:

$$\hat{Y} = 19.356 \qquad \sqrt{\widehat{Var(\hat{Y})}} = 0.624$$

quando $X_1 = 25$ e $X_2 = 50$, por exemplo.

Efeito nos testes simultâneos de β_k

Considere os dados sobre gordura corporal e o modelo com X_1 e X_2 no modelo.

Queremos testar $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Calculamos:

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \qquad t_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_2)}}$$

e não rejeitamos H_0 se ambos $|t_1|$ e $|t_2|$ forem menores do que $t_{n-3,\alpha/4} = 2.46$

para $\alpha = 0.05$.

Exemplo

```
## 
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1 + X2, data = dat)
## 
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max 
## -3.9469 -1.8807  0.1678  1.3367  4.0147 
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## (Intercept) -19.1742     8.3606  -2.293   0.0348 *
## X1            0.2224     0.3034   0.733   0.4737  
## X2            0.6594     0.2912   2.265   0.0369 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## 
## Residual standard error: 2.543 on 17 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7781, Adjusted R-squared:  0.7519 
## F-statistic:  29.8 on 2 and 17 DF,  p-value: 2.774e-06
```

Não rejeitamos H_0.

Exemplo

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X1         1 352.27  352.27 54.4661 1.075e-06 ***
## X2         1  33.17   33.17  5.1284    0.0369 *
## Residuals 17 109.95    6.47
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: Y ~ 1
## Model 2: Y ~ X1 + X2
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
## 1     19 495.39
## 2     17 109.95  2    385.44 29.797 2.774e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


Exemplo

Se utilizarmos o teste F para $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$, temos:

$$F_{obs} = \frac{QMReg}{QME} = \frac{385.44/2}{109.95/17} = 29.8$$

Sob H_0 a estatística do teste tem distribuição $F(2, 17)$, de maneira que o valor crítico para $\alpha = 0.05$ é 3.59.

Encontramos evidências para rejeitar H_0.

Resultado contrário ao obtido com os testes t com correção de Bonferroni.

Leitura

- Applied Linear Statistical Models: Seção 7.6.
- Faraway - Linear Models with R: Seção 7.3.