



ME613 - Análise de Regressão

Parte 9

Benilton S Carvalho - 1S2020

Modelo de Regressão Polinomial

Introdução

Podemos considerar funções polinomiais como um caso particular do modelo de regressão linear já visto.

Modelo com um preditor - segunda ordem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \varepsilon$$

em que $X_* = X - \bar{X}$.

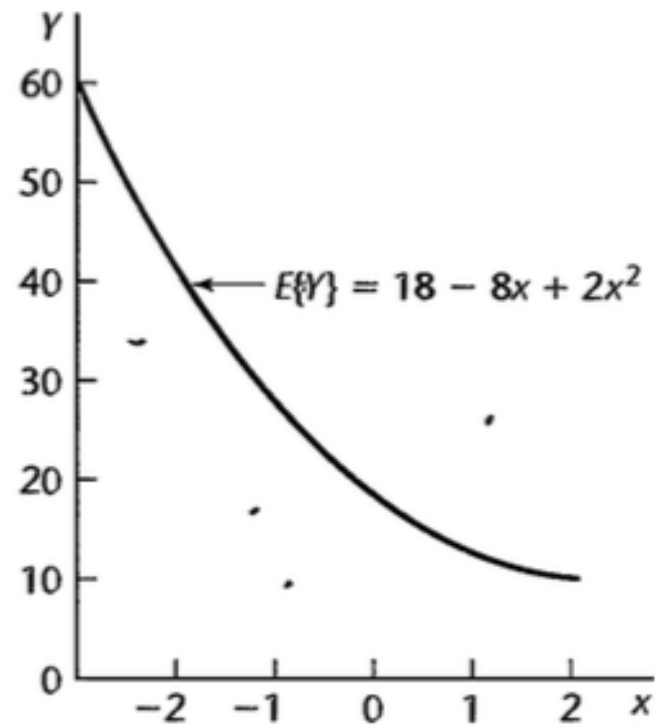
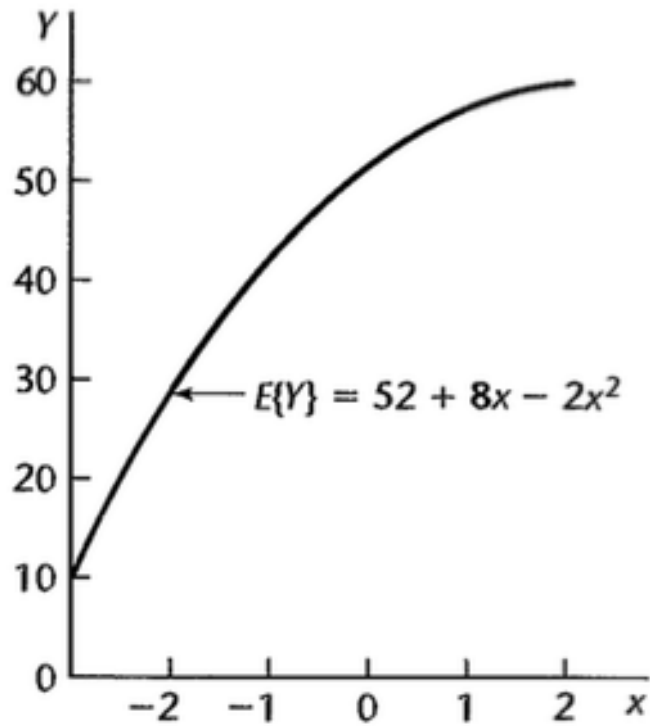
Função de resposta quadrática.

β_0 : valor esperado de Y quando X_* é zero, isto é, $X = \bar{X}$.

β_1 : coeficiente de efeito linear.

β_2 : coeficiente de efeito quadrático.

Exemplo

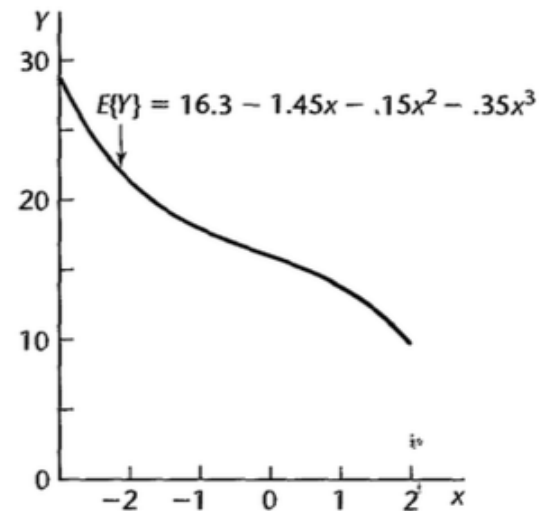
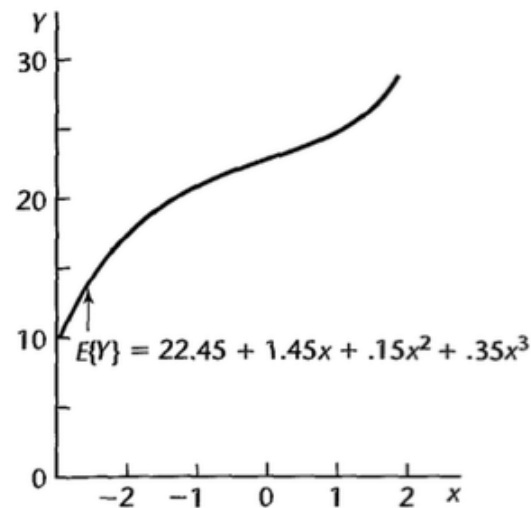


Modelo com um preditor - terceira ordem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \beta_3 X_*^3 + \varepsilon$$

em que $X_* = X - \bar{X}$.

Exemplos:



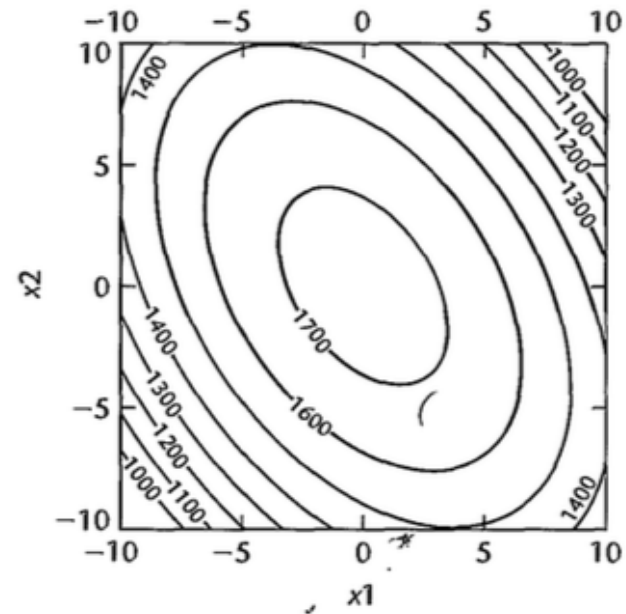
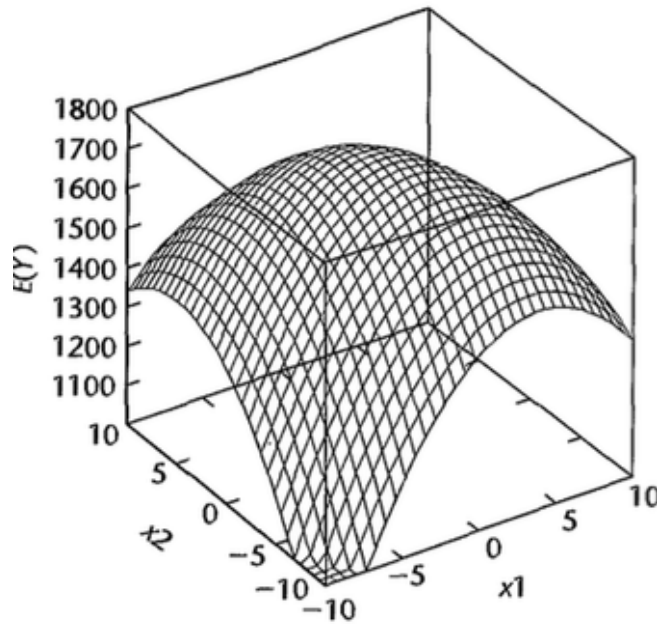
Modelo com dois preditores - segunda ordem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{1*}^2 + \beta_3 X_{2*} + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

em que $X_{1*} = X_1 - \bar{X}_1$ e $X_{2*} = X_2 - \bar{X}_2$.

Exemplo

$$E(Y) = 1740 - 4X_{1*}^2 - 3X_{2*}^2 - 3X_{1*}X_{2*}$$



Método hierárquico de ajuste de modelo

Pode-se começar com um modelo de segunda ou terceira ordem e ir testando se os coeficientes de ordem maiores são significativos.

Por exemplo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \beta_3 X_*^3 + \varepsilon$$

Para testar se $\beta_3 = 0$ podemos utilizar $SQReg(X_*^3 \mid X_*, X_*^2)$. Se quisermos testar se $\beta_2 = \beta_3 = 0$:

$$SQReg(X_*^2, X_*^3 \mid X_*) = SQReg(X_*^2 \mid X_*) + SQReg(X_*^3 \mid X_*, X_*^2)$$

Se um termo de ordem mais alta é mantido no modelo, os de ordem mais baixa devem obrigatoriamente ser mantidos também.

Exemplo

Y : número de ciclos

X_1 : carga, $X_{1*} = (X_1 - \bar{X}_1)/0.4$.

X_2 : temperatura, $X_{2*} = (X_2 - \bar{X}_2)/10$.

```
dados = read_table(file.path("dados", "CH08TA01.txt"),  
                    col_names = c("Y", "X1", "X2")) %>%  
  mutate(x1 = (X1 - mean(X1))/0.4,  
         x2 = (X2 - mean(X2))/10)
```

Exemplo

Y	X1	X2	x1	x2
150	0.6	10	-1	-1
86	1.0	10	0	-1
49	1.4	10	1	-1
288	0.6	20	-1	0
157	1.0	20	0	0
131	1.0	20	0	0
184	1.0	20	0	0
109	1.4	20	1	0
279	0.6	30	-1	1
235	1.0	30	0	1
224	1.4	30	1	1

Exemplo

Correlação entre X_1 e X_1^2 : 0.99.

Correlação entre X_{1*} e X_{1*}^2 : 0.

Correlação entre X_2 e X_2^2 : 0.99.

Correlação entre X_{2*} e X_{2*}^2 : 0.

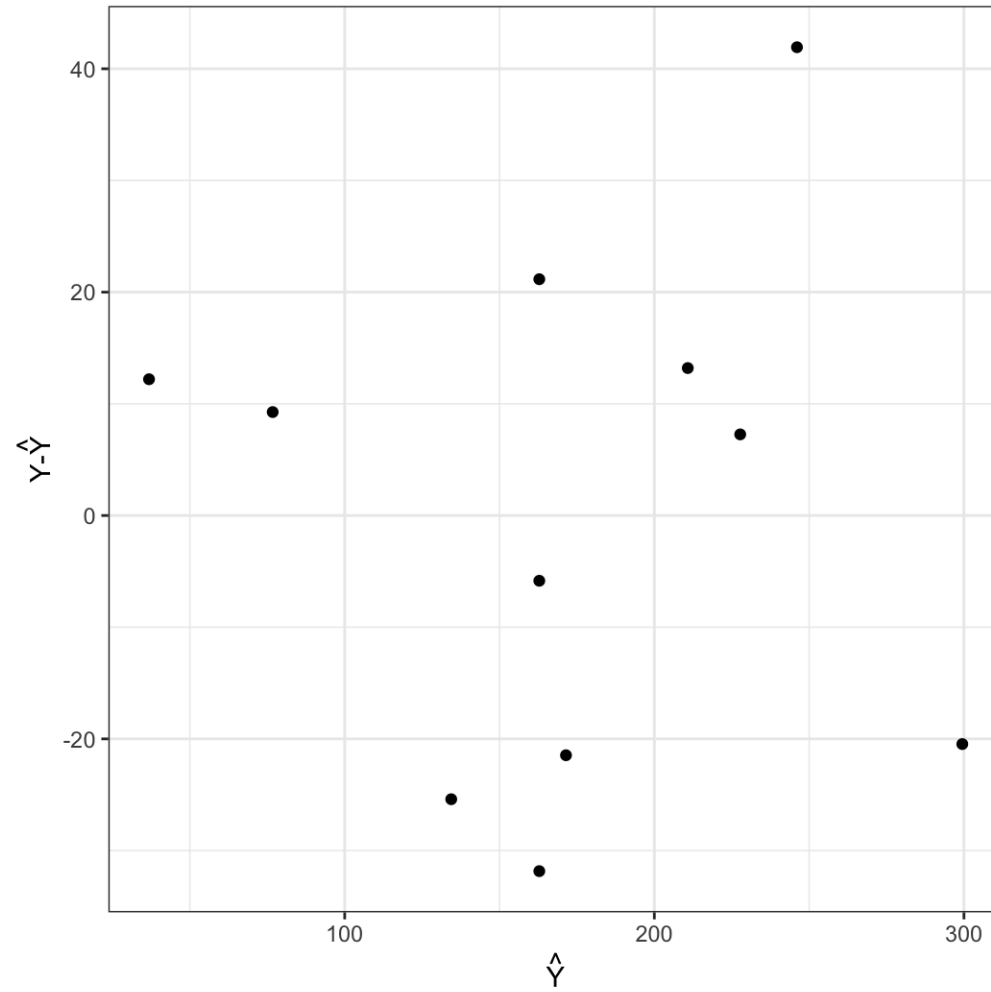
Exemplo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{1*}^2 + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

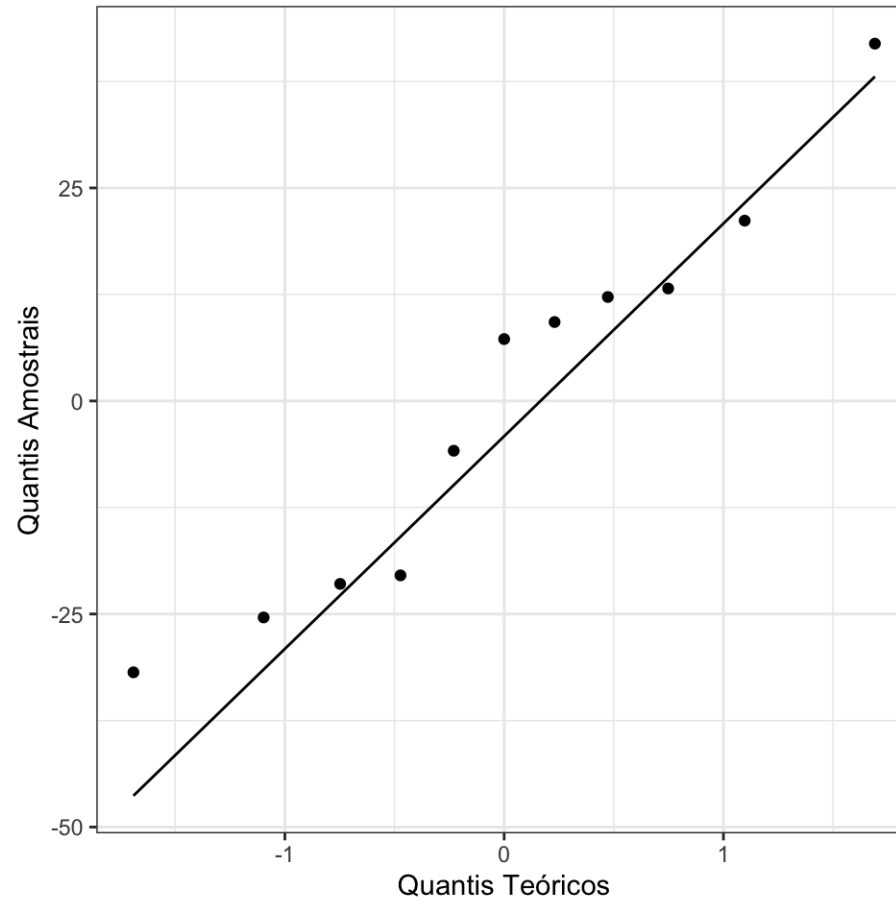
```
modelo <- lm(Y ~ x1 + x2 + I(x1^2) + I(x2^2) + I(x1*x2), data=dados)
summary(modelo)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
## (Intercept)	162.84211	16.60761	9.8052730	0.000187839
## x1	-55.83333	13.21670	-4.2244519	0.008292287
## x2	75.50000	13.21670	5.7124677	0.002297266
## I(x1^2)	27.39474	20.34008	1.3468353	0.235856323
## I(x2^2)	-10.60526	20.34008	-0.5213973	0.624352247
## I(x1 * x2)	11.50000	16.18709	0.7104426	0.509183728

Exemplo



Exemplo



Exemplo

```
library(alr3)
pureErrorAnova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
## x1	1	18704	18704	26.6315	0.03556	*
## x2	1	34202	34202	48.6970	0.01992	*
## I(x1^2)	1	1646	1646	2.3436	0.26546	
## I(x2^2)	1	285	285	0.4057	0.58935	
## I(x1 * x2)	1	529	529	0.7532	0.47696	
## Residuals	5	5240	1048			
## Lack of fit	3	3836	1279	1.8205	0.37378	
## Pure Error	2	1405	702			

```
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Não rejeitamos H_0 , isto é, não encontramos evidências para rejeitar que o modelo de segunda ordem é um bom ajuste

Exemplo

Será que um modelo de primeira ordem já seria suficiente?

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{1*}^2 + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

$$H_0: \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.$$

H_a : pelo menos um entre β_3, β_4 e β_5 é diferente de zero.

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## x1          1  18704    18704  17.8460 0.008292 **
## x2          1  34202    34202  32.6323 0.002297 **
## I(x1^2)      1   1646     1646   1.5704 0.265552
## I(x2^2)      1    285      285   0.2719 0.624352
## I(x1 * x2)   1    529      529   0.5047 0.509184
## Residuals    5   5240     1048
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo

- $H_0: \beta_q = \beta_{q+1} = \dots = \beta_{p-1} = 0$.
- H_1 : pelo menos um $\beta_q, \dots, \beta_{p-1}$ não é zero.

(por conveniência, a notação assume que os últimos $p - q$ coeficientes do modelo serão testados)

Estatística do teste:

$$F^* = \frac{SQReg(X_q, \dots, X_{p-1} \mid X_1, \dots, X_{q-1})}{p - q} \div \frac{SQE(X_1, \dots, X_{p-1})}{n - p}$$

sob H_0
 $\sim F_{p-q, n-p}$

Exemplo

$$p = 6$$

$$n = 11$$

$$q = 3$$

$$F^* = \frac{SQReg(X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*})/3}{SQE(X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*})/5} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{3,5}$$

$$\begin{aligned} SQReg(X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}) &= SQReg(X_{1*}^2 \mid X_{1*}, X_{2*}) \\ &\quad + SQReg(X_{2*}^2 \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2) \\ &\quad + SQReg(X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2, X_{2*}^2) \\ &= 1646 + 284.9 + 529 \\ &= 2459.9 \end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{2459.9/3}{1048.1} = 0.7823363$$

Comparando com $F(0.95; 3, 5) = 5.41$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo

```
modeloreduz <- lm(Y ~ x1 + x2,data=dados)
anova(modeloreduz, modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
```

```
##
```

```
## Model 1: Y ~ x1 + x2
```

```
## Model 2: Y ~ x1 + x2 + I(x1^2) + I(x2^2) + I(x1 * x2)
```

```
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
```

```
## 1      8 7700.3
```

```
## 2      5 5240.4  3    2459.9 0.7823 0.5527
```

Exemplo

Modelo de primeira ordem:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \varepsilon$$

```
modelo1 <- lm(Y ~ x1 + x2,data=dados)
summary(modelo1)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
## (Intercept)	172.00000	9.354346	18.387175	7.880002e-08
## x1	-55.83333	12.665844	-4.408181	2.261894e-03
## x2	75.50000	12.665844	5.960913	3.378234e-04

Exemplo

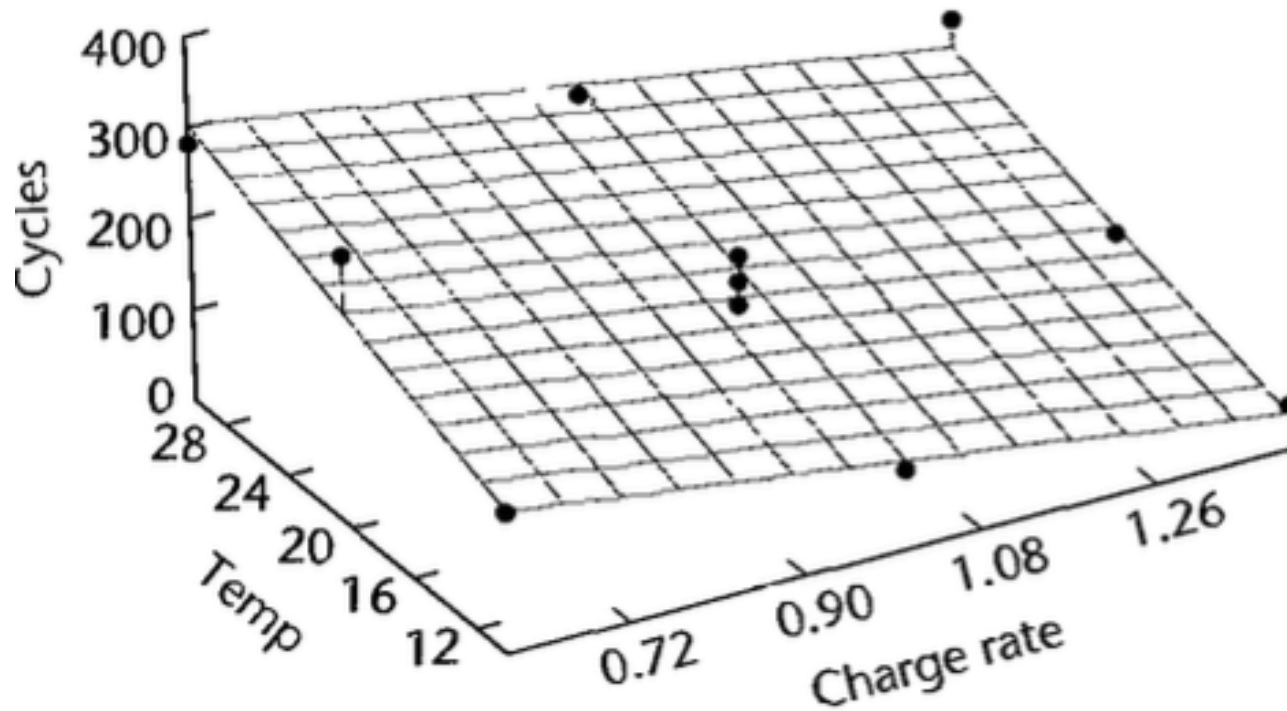
Modelo de primeira ordem (variáveis nas escalas originais):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

```
modelo1 <- lm(Y ~ X1 + X2,data=dados)
summary(modelo1)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
## (Intercept)	160.5833	41.615451	3.858743	0.0048174887
## X1	-139.5833	31.664611	-4.408181	0.0022618941
## X2	7.5500	1.266584	5.960913	0.0003378234

Exemplo



Modelo de Regressão com Interação

Efeitos de interação

Um modelo de regressão com $p - 1$ variáveis preditoras com efeitos aditivos tem função de regressão da forma:

$$E(Y) = f_1(X_1) + f_2(X_2) + \dots + f_{p-1}(X_{p-1})$$

em que f_1, f_2, \dots, f_{p-1} podem ser quaisquer funções.

Por exemplo:

$$E(Y) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2}_{f_1(X_1)} + \underbrace{\beta_3 X_2}_{f_2(X_2)}$$

O efeito de X_1 e X_2 em Y é **aditivo**.

Efeitos de interação

Já no exemplo a seguir, o efeito não é aditivo, há efeito de interação:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_2 + \beta_3 X_1 X_2$$

Outro exemplo:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_1 X_2 + \beta_5 X_1 X_3$$

O efeito de uma variável sobre Y irá depender do nível da variável com a qual ela interage.

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Suponha que $X_1 = a$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 X_2 + \beta_3 a X_2$$

Suponha que $X_1 = a + 1$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1(a + 1) + \beta_2 X_2 + \beta_3(a + 1)X_2$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_1 em 1 unidade:

$$\begin{aligned} & \beta_0 + \beta_1(a + 1) + \beta_2 X_2 + \beta_3(a + 1)X_2 - (\beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 X_2 + \beta_3 a X_2) \\ &= \beta_1 + \beta_3 X_2 \end{aligned}$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Suponha que $X_2 = a$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 a + \beta_3 X_1 a$$

Suponha que $X_2 = a + 1$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2(a + 1) + \beta_3 X_1(a + 1)$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_2 em 1 unidade:

$$\begin{aligned} & \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2(a + 1) + \beta_3 X_1(a + 1) - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 a + \beta_3 X_1 a) \\ &= \beta_2 + \beta_3 X_1 \end{aligned}$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_1 em 1 unidade:

$$\frac{\partial E(Y)}{\partial X_1} = \beta_1 + \beta_3 X_2$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_2 em 1 unidade:

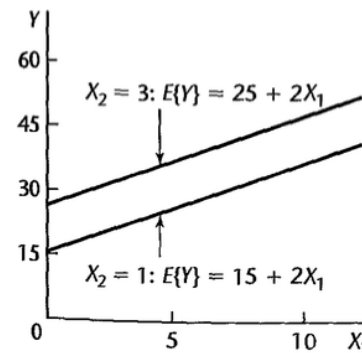
$$\frac{\partial E(Y)}{\partial X_2} = \beta_2 + \beta_3 X_1$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

Modelo aditivo:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5X_2$$

β_1 : mudança no valor esperado de Y quando X_1 aumenta em 1 unidade, mantendo X_2 constante.



Mantendo X_2 constante: não importa se $X_2 = 1$ ou $X_2 = 3$ o efeito é sempre β_1 no valor esperado quando X_1 aumenta em 1 unidade (retas paralelas).

Interpretação: interação e efeitos lineares

Modelo com interação:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5X_2 + 0.5X_1X_2$$

Se $X_2 = 1$:

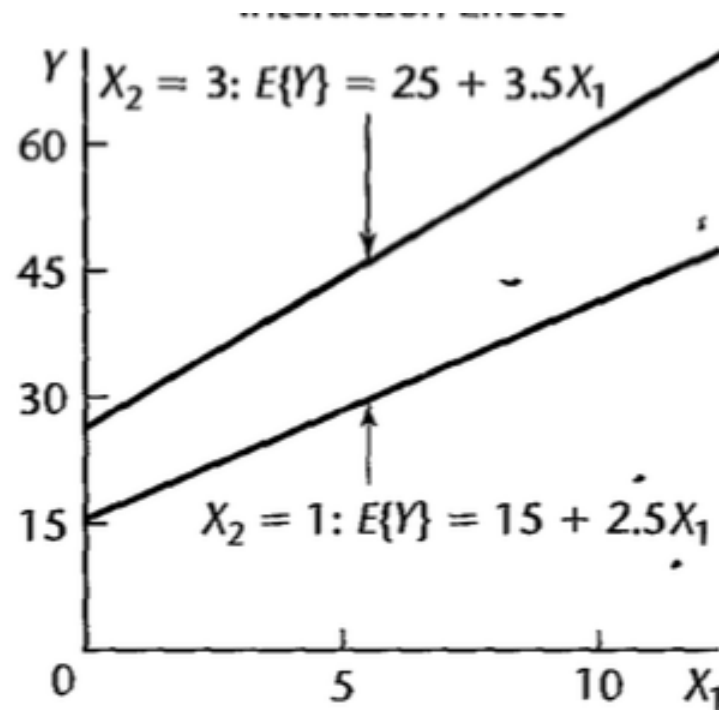
$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5 \times 1 + 0.5X_1 \times 1 = 15 + 2.5X_1$$

Se $X_2 = 3$:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5 \times 3 + 0.5X_1 \times 3 = 25 + 3.5X_1$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

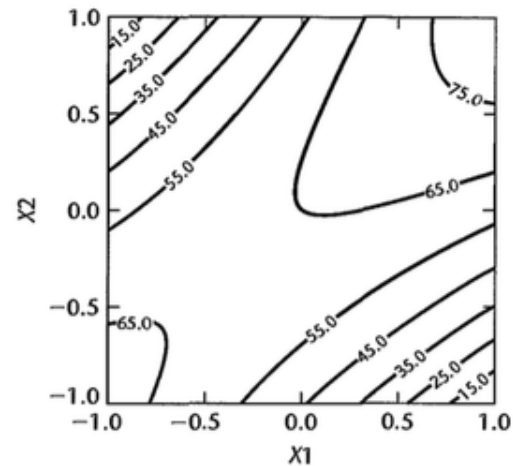
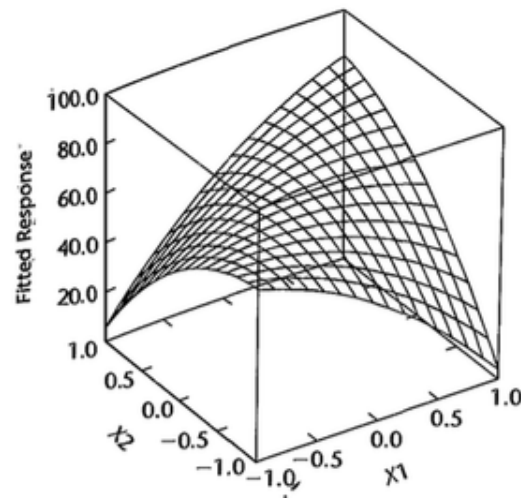
Para avaliarmos o efeito de 1 unidade de aumento em X_1 , devemos considerar o valor de X_2 (retas não paralelas).



Interpretação: interação e efeitos curvilíneos

Exemplo:

$$E(Y) = 65 + 3X_1 + 4X_2 - 10X_1^2 - 15X_2^2 + 35X_1X_2$$



Interpretação: interação e efeitos curvilinear

Se $X_1 = 1$:

$$E(Y) = 65 + 3 \times 1 + 4X_2 - 10 \times (1^2) - 15X_2^2 + 35 \times 1 \times X_2$$

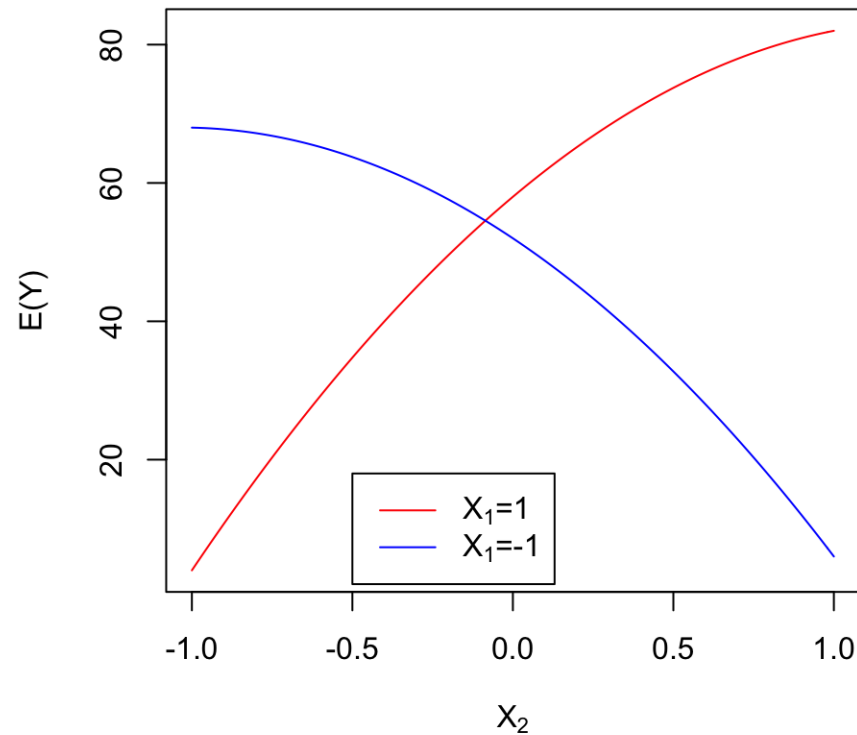
$$E(Y) = 58 + 39X_2 - 15X_2^2$$

Se $X_1 = -1$:

$$E(Y) = 65 + 3 \times (-1) + 4X_2 - 10 \times (-1^2) - 15X_2^2 + 35 \times (-1) \times X_2$$

$$E(Y) = 52 - 31X_2 - 15X_2^2$$

Interpretação: interação e efeitos curvilíneos



Exemplo

X_1 : tríceps, $X_{1*} = X_1 - \bar{X}_1$.

X_2 : coxa, $X_{2*} = X_2 - \bar{X}_2$.

X_3 : antebraço, $X_{3*} = X_3 - \bar{X}_3$.

Y : gordura corporal

Exemplo

X1	X2	X3	Y	x1	x2	x3
19.5	43.1	29.1	11.9	-5.805	-8.07	1.48
24.7	49.8	28.2	22.8	-0.605	-1.37	0.58
30.7	51.9	37.0	18.7	5.395	0.73	9.38
29.8	54.3	31.1	20.1	4.495	3.13	3.48
19.1	42.2	30.9	12.9	-6.205	-8.97	3.28
25.6	53.9	23.7	21.7	0.295	2.73	-3.92
31.4	58.5	27.6	27.1	6.095	7.33	-0.02
27.9	52.1	30.6	25.4	2.595	0.93	2.98
22.1	49.9	23.2	21.3	-3.205	-1.27	-4.42
25.5	53.5	24.8	19.3	0.195	2.33	-2.82
31.1	56.6	30.0	25.4	5.795	5.43	2.38
30.4	56.7	28.3	27.2	5.095	5.53	0.68
18.7	46.5	23.0	11.7	-6.605	-4.67	-4.62
19.7	44.2	28.6	17.8	-5.605	-6.97	0.98
14.6	42.7	21.3	12.8	-10.705	-8.47	-6.32
29.5	54.4	30.1	23.9	4.195	3.23	2.48
27.7	55.3	25.7	22.6	2.395	4.13	-1.92
30.2	58.6	24.6	25.4	4.895	7.43	-3.02
22.7	48.2	27.1	14.8	-2.605	-2.97	-0.52
25.2	51.0	27.5	21.1	-0.105	-0.17	-0.12

Exemplo

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{3*} + \beta_4 X_{1*} X_{2*} + \beta_5 X_{1*} X_{3*} + \beta_6 X_{2*} X_{3*} + \varepsilon$$

```
modelo <- lm(Y ~ x1 + x2 + x3 + I(x1*x2) + I(x1*x3) + I(x2*x3), data=dat)
summary(modelo)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
## (Intercept)	20.526893531	1.07362646	19.1192136	6.699796e-11
## x1	3.437808068	3.57866572	0.9606396	3.542612e-01
## x2	-2.094717339	3.03676957	-0.6897848	5.024579e-01
## x3	-1.616337237	1.90721068	-0.8474875	4.120550e-01
## I(x1 * x2)	0.008875562	0.03085046	0.2876963	7.781144e-01
## I(x1 * x3)	-0.084790836	0.07341774	-1.1549093	2.689155e-01
## I(x2 * x3)	0.090415385	0.09200130	0.9827621	3.436619e-01

Exemplo

```
anova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
```

```
##
```

```
## Response: Y
```

##		Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
##	x1	1	352.27	352.27	52.2238	6.682e-06	***
##	x2	1	33.17	33.17	4.9173	0.04503	*
##	x3	1	11.55	11.55	1.7117	0.21343	
##	I(x1 * x2)	1	1.50	1.50	0.2217	0.64552	
##	I(x1 * x3)	1	2.70	2.70	0.4009	0.53760	
##	I(x2 * x3)	1	6.51	6.51	0.9658	0.34366	
##	Residuals	13	87.69	6.75			

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo

$$H_0: \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$$

H_1 : pelo menos um dentre $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ é diferente de 0.

$$p = 7$$

$$n = 20$$

$$q = 4$$

$$F^* = \frac{SQReg(X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*})/3}{SQE(X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*})/13} \underset{\sim}{\text{sob } H_0} F_{3,13}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}SQReg(X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}) &= SQReg(X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}) \\&+ SQReg(X_{1*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}) \\&+ SQReg(X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}) \\&= 1.5 + 2.7 + 6.514836 \\&= 10.714836\end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{10.714836/3}{6.7} = 0.5330764$$

Comparando com $F(0.95; 3, 13) = 3.41$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo

```
modeloreduz <- lm(Y ~ x1 + x2 + x3,data=dat)
anova(modeloreduz,modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
```

```
##
```

```
## Model 1: Y ~ x1 + x2 + x3
```

```
## Model 2: Y ~ x1 + x2 + x3 + I(x1 * x2) + I(x1 * x3) + I(x2 * x3)
```

```
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
```

```
## 1      16 98.405
```

```
## 2      13 87.690  3    10.715 0.5295 0.6699
```

Preditores Qualitativos

Exemplo: Seguros

Y = meses até a implementação

X_1 = tamanho da firma (em milhões de dólares)

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se a firma tem ações na bolsa} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Exemplo: Seguros

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

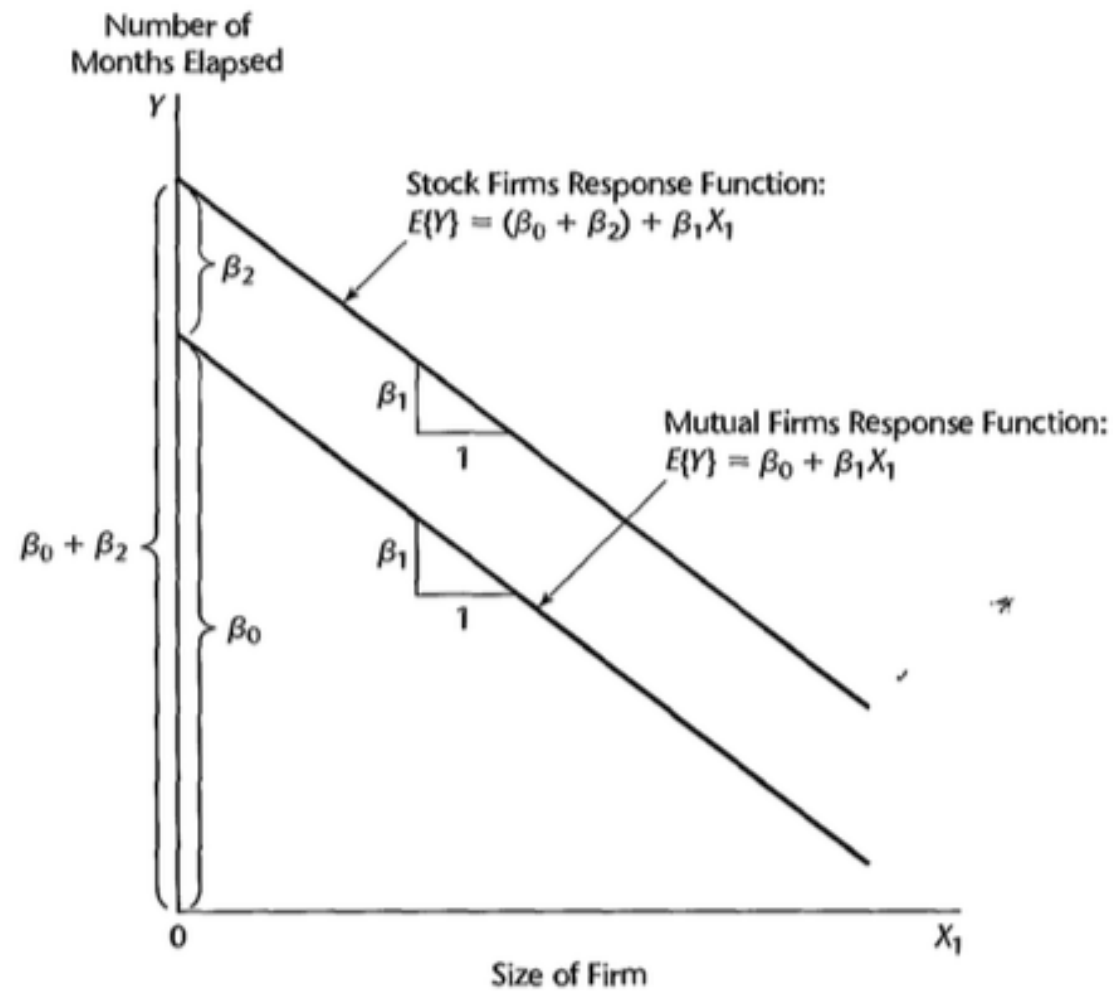
Se a firma não tem ações na bolsa, então $X_2 = 0$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a firma tem ações na bolsa, então $X_2 = 1$:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_1$$

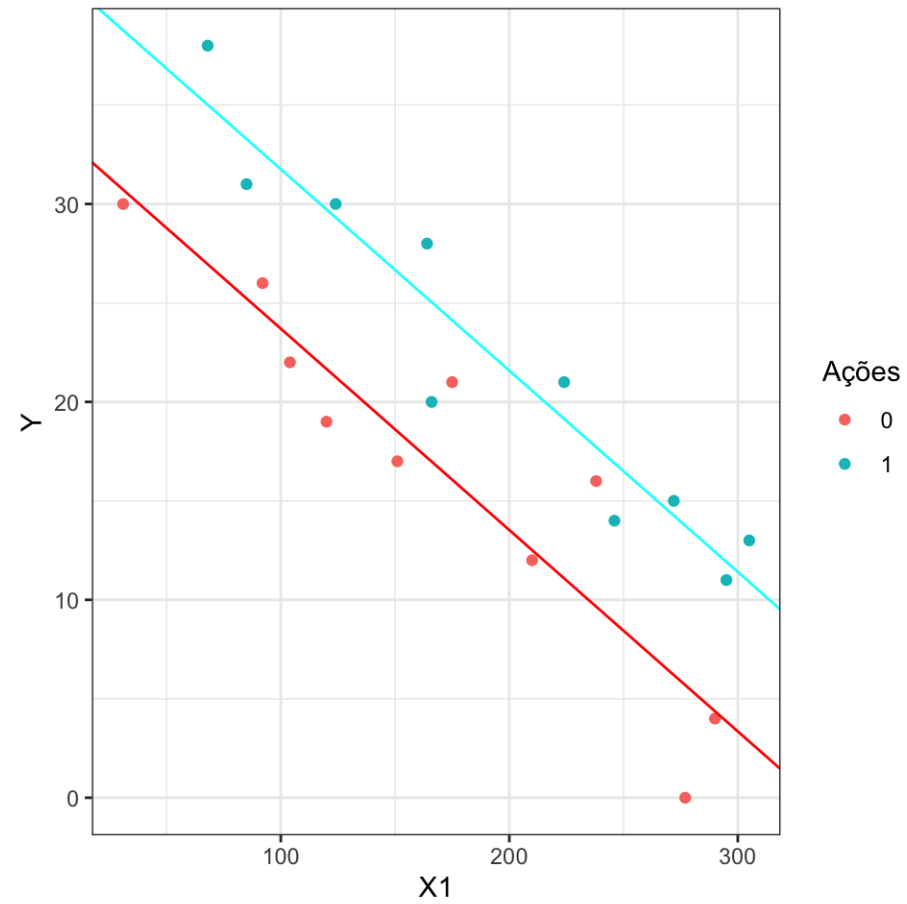
Exemplo: Seguros



Exemplo: Seguros

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	33.8741	1.8139	18.6751	0
X1	-0.1017	0.0089	-11.4430	0
X2	8.0555	1.4591	5.5208	0

Exemplo: Seguros



Exemplo: Seguros

Incluindo termo de interação:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2$$

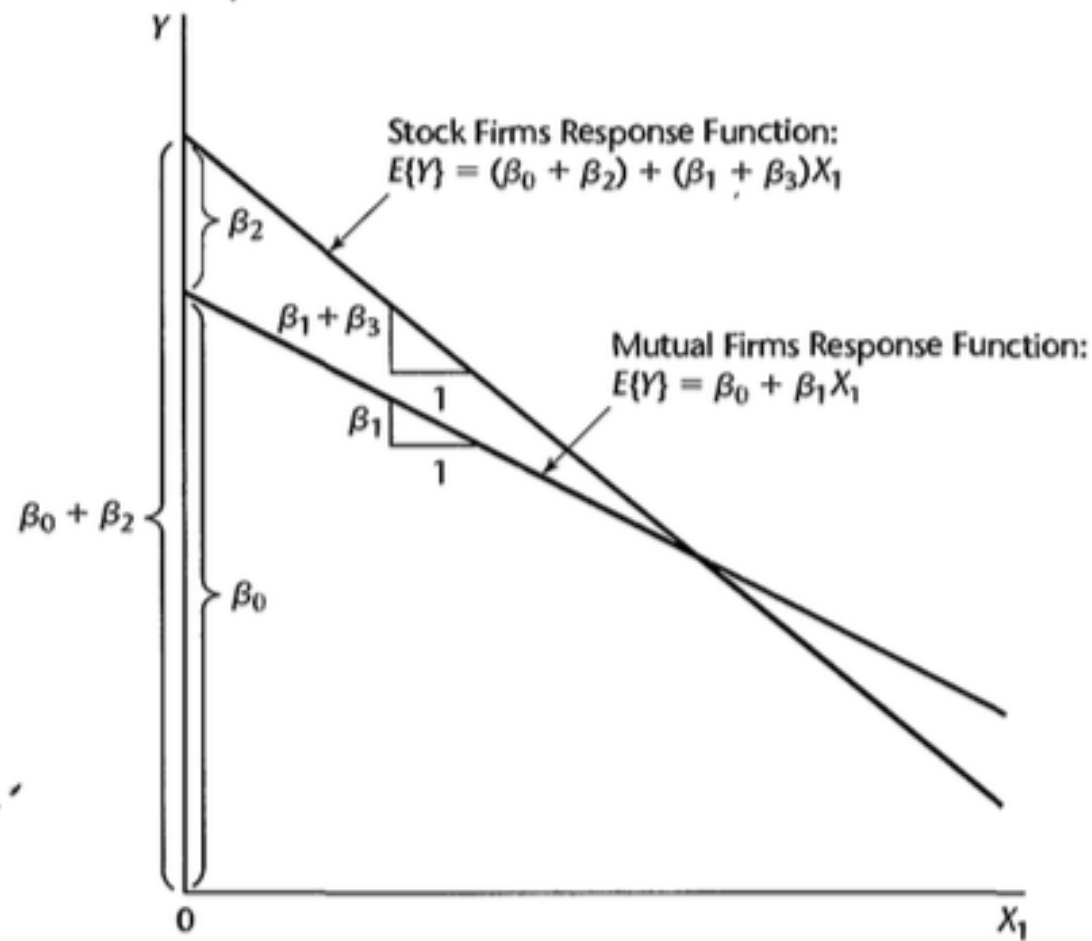
Se a firma não tem ações na bolsa, então $X_2 = 0$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a firma tem ações na bolsa, então $X_2 = 1$:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)X_1$$

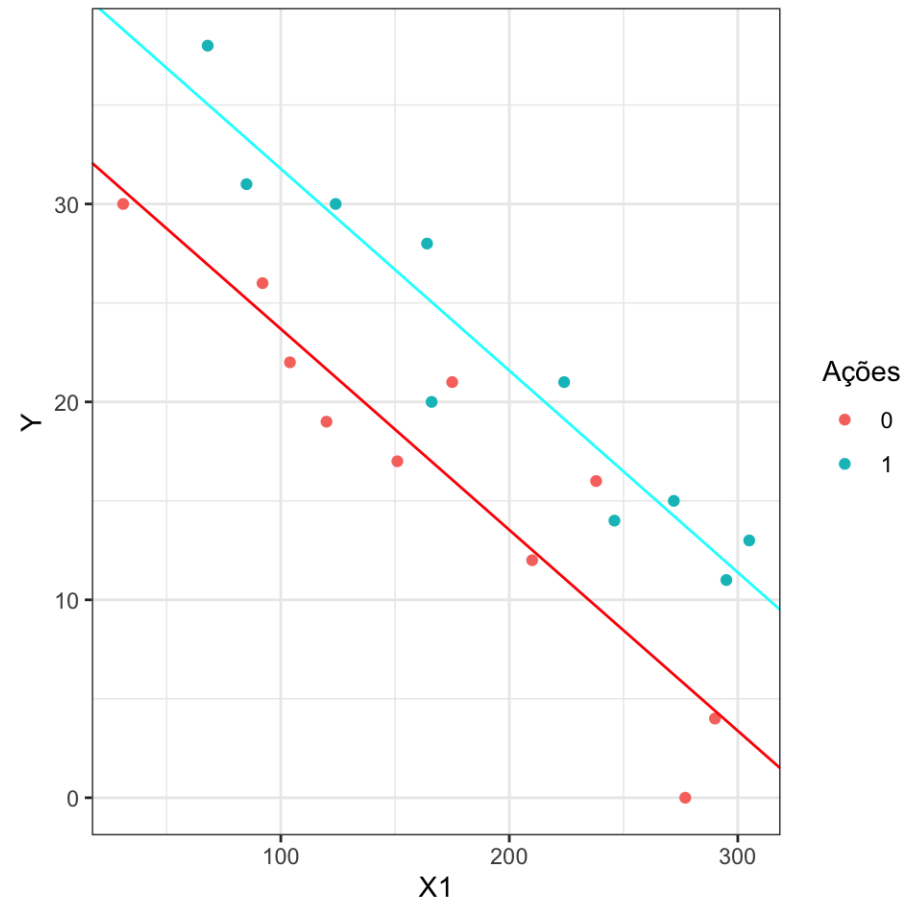
Exemplo: Seguros



Exemplo: Seguros

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	33.8384	2.4406	13.8645	0.0000
X1	-0.1015	0.0131	-7.7786	0.0000
X2	8.1313	3.6541	2.2253	0.0408
I(X1 * X2)	-0.0004	0.0183	-0.0228	0.9821

Exemplo: Seguros



Variável preditora com mais de duas classes

Exemplo: Desgaste (Y), velocidade (X_1) e modelo de uma peça.

Existem 4 tipos de modelos: M1, M2, M3 e M4.

Definimos 3 variáveis “dummy”:

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se M1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1, & \text{se M2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 1, & \text{se M3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Variável preditora com mais de duas classes

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$$

Se a peça é do tipo M4:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 0 = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M1:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 1 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 0 = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M2:

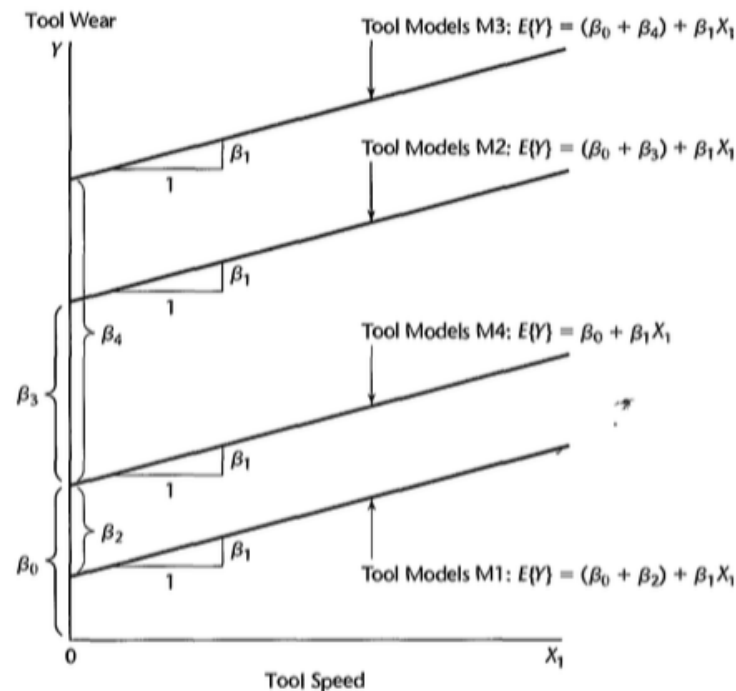
$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 1 + \beta_4 \times 0 = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M3:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 1 = (\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1$$

Variável preditora com mais de duas classes

O modelo de primeira ordem implica no fato de que o efeito da velocidade é linear e com o mesmo coeficiente angular para todos os modelos de peça. Temos diferentes interceptos para cada modelo.



Variável preditora com mais de duas classes

- β_1 : mudança esperada no desgaste da peça (Y) para cada unidade de aumento na velocidade (X_1), considerando mesmo modelo de peça.
- β_2 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M1 e M4, considerando a mesma velocidade.
- β_3 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M2 e M4, considerando a mesma velocidade.
- β_4 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M3 e M4, considerando a mesma velocidade.

Variável preditora com mais de duas classes

Qual a diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M3 e M2, mantendo a mesma velocidade?

Para modelo M3:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1$$

Para modelo M2:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1$$

A diferença entre M3 e M2, mantendo a mesma velocidade:

$$(\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1 - [(\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1] = \beta_4 - \beta_3$$

Variável preditora com mais de duas classes

Após obtermos estimativas: $\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_3$ e devemos também fornecer o erro-padrão da estimativa.

Lembre que:

$$Var(\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_3) = Var(\hat{\beta}_4) + Var(\hat{\beta}_3) - 2Cov(\hat{\beta}_4, \hat{\beta}_3)$$

Exemplo: Fábrica de sabão

Y : resíduo de sabão

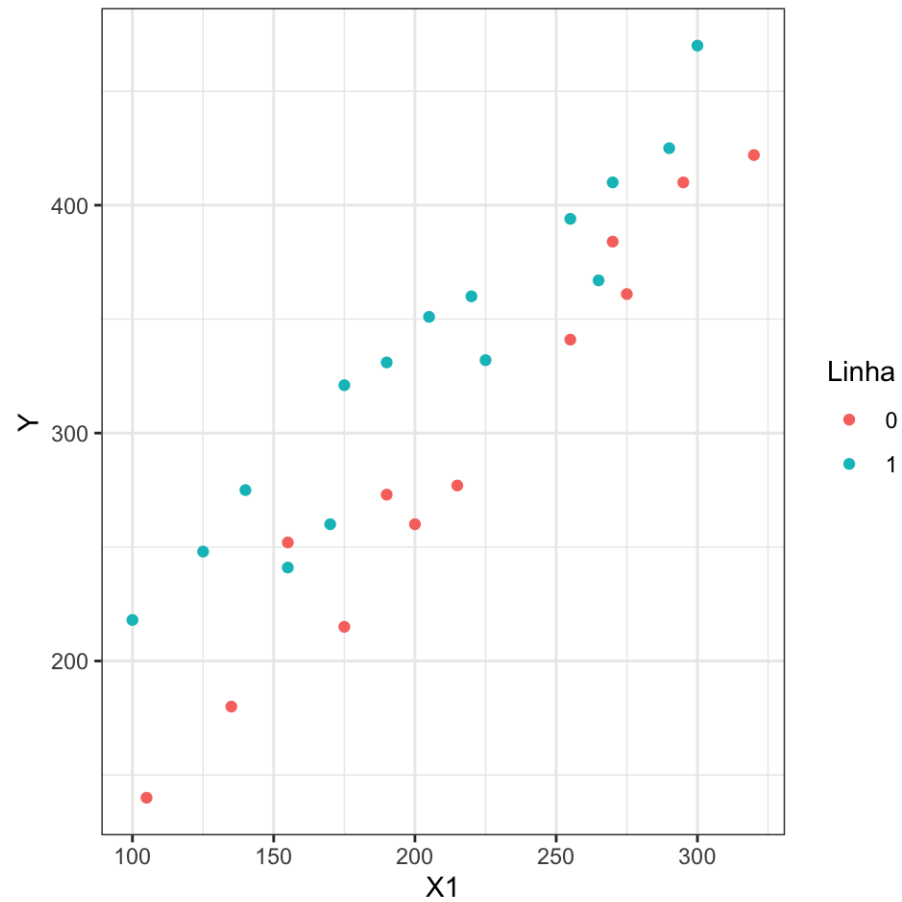
X_1 : velocidade

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se produção na linha 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: Fábrica de Sabão

Y	X1	X2
218	100	1
248	125	1
360	220	1
351	205	1
470	300	1
394	255	1
332	225	1
321	175	1
410	270	1
260	170	1
241	155	1
331	190	1
275	140	1
425	290	1
367	265	1

Exemplo: Fábrica de sabão



Exemplo: Fábrica de sabão

Iremos ajustar um modelo assumindo que:

- a relação entre a quantidade de resíduo e velocidade é linear para as duas linhas de produção;
- retas diferentes para as duas linhas de produção;
- as variâncias dos termos de erros ao redor de cada reta são iguais.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Para a linha 1: $E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)X_1$.

Para a linha 2: $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$.

Exemplo: Fábrica de sabão

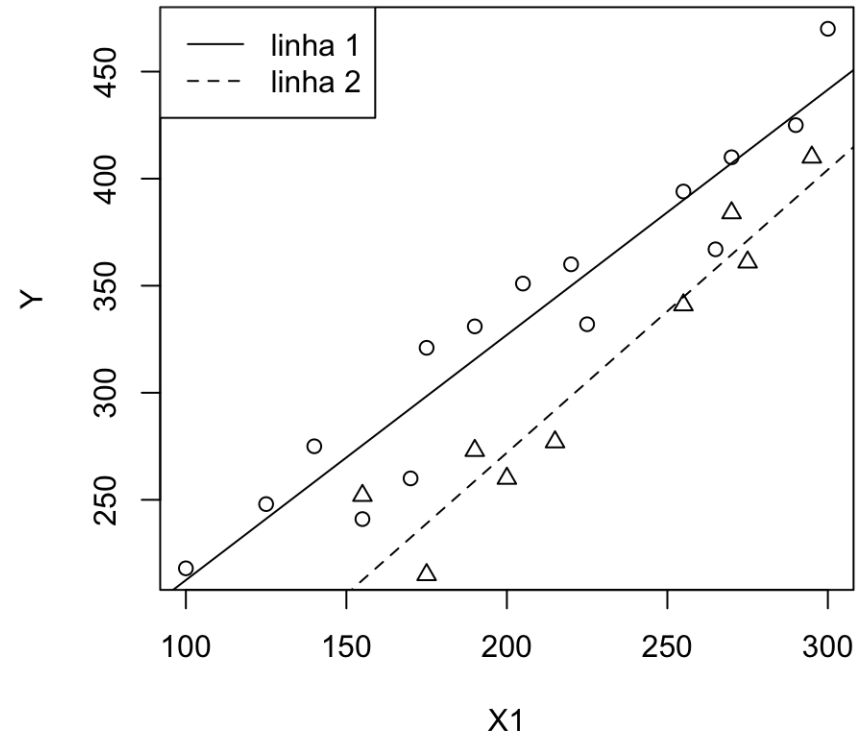
```
modelo <- lm(Y ~ X1 + X2 + I(X1*X2), data=dados)
summary(modelo)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error    t value    Pr(>|t|)
## (Intercept)  7.5744646 20.8696979  0.3629408 7.199633e-01
## X1           1.3220488  0.0926247 14.2731771 6.446165e-13
## X2          90.3908632 28.3457320  3.1888703 4.085851e-03
## I(X1 * X2)  -0.1766614  0.1288377 -1.3711932 1.835463e-01
```

```
anova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##              Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
## X1             1 149661  149661 347.5548 2.224e-15 ***
## X2             1  18694   18694  43.4129 1.009e-06 ***
## I(X1 * X2)     1     810     810   1.8802  0.1835
## Residuals    23   9904     431
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo: Fábrica de sabão



Exemplo: Fábrica de sabão

Se quisermos testar a hipótese nula de que temos apenas uma reta para representar as duas linhas:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$$

H_a : pelo menos um entre β_2 e β_3 é diferente de zero.

Estatística do teste:

$$F^* = \frac{SQReg(X_q, \dots, X_{p-1} \mid X_1, \dots, X_{q-1})}{p - q} \div \frac{SQE(X_1, \dots, X_{p-1})}{n - p}$$

sob $H_0 \sim F_{p-q, n-p}$

Exemplo: Fábrica de sabão

$$p = 4$$

$$n = 27$$

$$q = 2$$

$$F^* = \frac{SQReg(X_2, X_1 X_2 \mid X_1)/2}{SQE(X_1, X_2, X_1 X_2)/23} \underset{\sim}{\text{sob } H_0} F_{2,23}$$

$$\begin{aligned} SQReg(X_2, X_1 X_2 \mid X_1) &= SQReg(X_2 \mid X_1) + SQReg(X_1 X_2 \mid X_1, X_2) \\ &= 1.86941 \times 10^4 + 809.6 \\ &= 1.95037 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{1.95037 \times 10^4 / 2}{430.6} = 22.6471203$$

Comparando com $F(0.95; 2, 23) = 3.42$, encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo: Fábrica de sabão

```
modeloreduz <- lm(Y ~ X1, data=dados)
anova(modeloreduz, modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
```

```
##
```

```
## Model 1: Y ~ X1
```

```
## Model 2: Y ~ X1 + X2 + I(X1 * X2)
```

```
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
```

```
## 1      25 29407.8
```

```
## 2      23  9904.1  2      19504 22.646 3.669e-06 ***
```

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo: Fábrica de sabão

Se quisermos testar a hipótese nula de que para as duas linhas de produção o coeficiente angular é o mesmo:

$$H_0: \beta_3 = 0$$

$$H_a: \beta_3 \neq 0.$$

$$p = 4$$

$$n = 27$$

$$q = 3$$

$$F^* = \frac{SQReg(X_1 X_2 \mid X_1, X_2)/1}{SQE(X_1, X_2, X_1 X_2)/23} \underset{\sim}{\text{sob } H_0} F_{1,23}$$

Exemplo: Fábrica de sabão

$$F_{obs} = \frac{809.6/1}{430.6} = 1.8801672$$

Comparando com $F(0.95; 1, 23) = 4.28$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Agradecimento

- Slides criados por Samara F Kiihl / IMECC / UNICAMP

Leitura

- Applied Linear Statistical Models: Seções 8.1-8.3, 8.5-8.7.
- Faraway - [Linear Models with R](#): Capítulo 14.
- Draper & Smith - [Applied Regression Analysis](#): Capítulo 12.