ME613 - Análise de Regressão

Parte 9

Samara F. Kiihl - IMECC - UNICAMP

Modelo de Regressão Polinomial

Introdução

Podemos considerar funções polinomiais como um caso particular do modelo de regressão linear já visto.

Modelo com um preditor - segunda ordem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \varepsilon$$

em que $X_* = X - \bar{X}$.

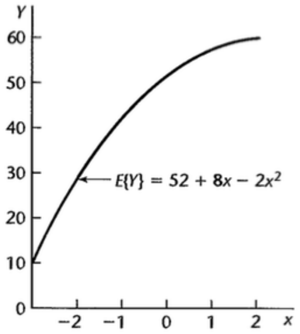
Função de resposta quadrática.

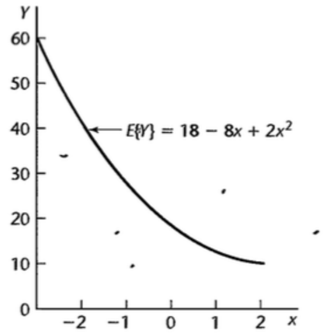
β_0 : valor esperado de Y quando X_* é zero, isto é, $X = \bar{X}$.

β_1 : coeficiente de efeito linear.

β_2 : coeficiente de efeito quadrático.

Exemplo



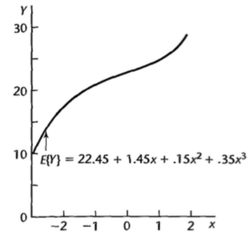


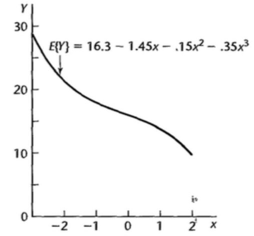
Modelo com um preditor - terceira ordem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \beta_3 X_*^3 + \varepsilon$$

em que $X_* = X - \bar{X}$.

Exemplos:





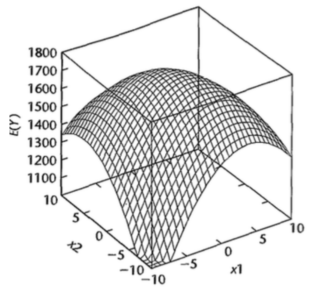
Modelo com dois preditores - segunda ordem

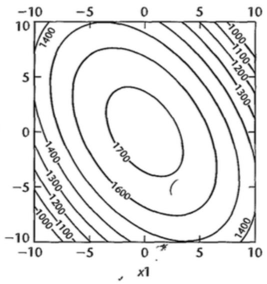
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{1*}^2 + \beta_3 X_{2*} + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

em que $X_{1*} = X_1 - \bar{X}_1$ e $X_{2*} = X_2 - \bar{X}_2$.

Exemplo

$$E(Y) = 1740 - 4X_{1*}^2 - 3X_{2*}^2 - 3X_{1*}X_{2*}$$





Método hierárquico de ajuste de modelo

Pode-se começar com um modelo de segunda ou terceira ordem e ir testando se os coeficientes de ordem maiores são significativos.

Por exemplo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_* + \beta_2 X_*^2 + \beta_3 X_*^3 + \varepsilon$$

Para testar se $\beta_3 = 0$ podemos utilizar $SQReg(X_*^3 \mid X_*, X_*^2)$. Se quisermos testar se $\beta_2 = \beta_3 = 0$: $SQReg(X_*^2, X_*^3 \mid X_*) = SQReg(X_*^2 \mid X_*) + SQReg(X_*^3 \mid X_*, X_*^2)$

Se um termo de ordem mais alta é mantido no modelo, os de ordem mais baixa devem obrigatoriamente ser mantidos também.

Exemplo

Y: número de ciclos

X_1: carga, $X_{1*} = (X_1 - \bar{X}_1)/0.4$.

X_2: temperatura, $X_{2*} = (X_2 - \bar{X}_2)/10$.

```
dados <- read.table("./dados/CH08TA01.txt")
names(dados) <- c("Y","X1","X2")
dados$x1 <- (dados$X1-mean(dados$X1))/0.4
dados$x2 <- (dados$X2-mean(dados$X2))/10
```

```
##      Y  X1 X2 x1 x2
## 1  150 0.6 10 -1 -1
## 2   86 1.0 10  0 -1
## 3   49 1.4 10  1 -1
## 4  288 0.6 20 -1  0
## 5  157 1.0 20  0  0
## 6  131 1.0 20  0  0
## 7  184 1.0 20  0  0
## 8  109 1.4 20  1  0
```


Exemplo

Correlação entre X_1 e X_1^2: 0.99.

Correlação entre X_{1*} e X_{1*}^2: 0.

Correlação entre X_2 e X_2^2: 0.99.

Correlação entre X_{2*} e X_{2*}^2: 0.

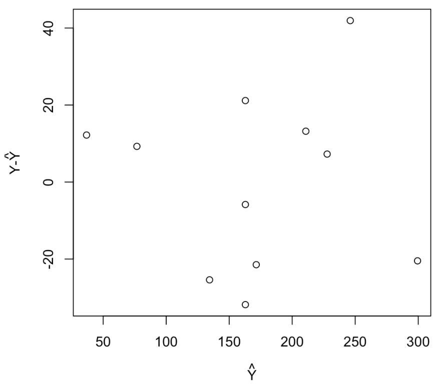
Exemplo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{1*}^2 + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

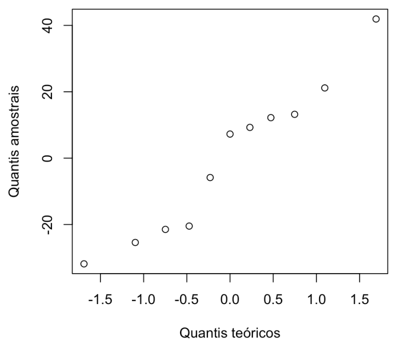
```
modelo <- lm(Y ~ x1 + x2 + I(x1^2) + I(x2^2) + I(x1*x2),data=dados)
summary(modelo)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error    t value    Pr(>|t|)
## (Intercept) 162.84211   16.60761  9.8052730 0.000187839
## x1          -55.83333   13.21670 -4.2244519 0.008292287
## x2           75.50000   13.21670  5.7124677 0.002297266
## I(x1^2)      27.39474   20.34008  1.3468353 0.235856323
## I(x2^2)     -10.60526   20.34008 -0.5213973 0.624352247
## I(x1 * x2)   11.50000   16.18709  0.7104426 0.509183728
```

Exemplo



Exemplo



Exemplo

```
library(alr3)
pureErrorAnova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##               Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## x1             1  18704   18704 26.6315 0.03556 *
## x2             1  34202   34202 48.6970 0.01992 *
## I(x1^2)        1   1646    1646  2.3436 0.26546
## I(x2^2)        1    285     285  0.4057 0.58935
## I(x1 * x2)     1    529     529  0.7532 0.47696
## Residuals      5   5240    1048
##  Lack of fit  3   3836    1279  1.8205 0.37378
##  Pure Error   2   1405     702
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Não rejeitamos H_0, isto é, não encontramos evidências para rejeitar que o modelo de segunda ordem é um bom ajuste

Exemplo

Será que um modelo de primeira ordem já seria suficiente?

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{1*}^2 + \beta_4 X_{2*}^2 + \beta_5 X_{1*} X_{2*} + \varepsilon$$

H_0: $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$.

H_a: pelo menos um entre β_3, β_4 e β_5 é diferente de zero.

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## x1          1  18704   18704 17.8460 0.008292 **
## x2          1  34202   34202 32.6323 0.002297 **
## I(x1^2)     1   1646    1646  1.5704 0.265552
## I(x2^2)     1    285     285  0.2719 0.624352
## I(x1 * x2)  1    529     529  0.5047 0.509184
## Residuals   5   5240    1048
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo

- $H_0: \beta_q = \beta_{q+1} = \ldots = \beta_{p-1} = 0$.
- H_1: pelo menos um $\beta_q, \ldots, \beta_{p-1}$ não é zero.

(por conveniência, a notação assume que os últimos $p-q$ coeficientes do modelo serão testados)

Estatística do teste:

$$F^* = \frac{SQReg(X_q, \ldots, X_{p-1} \mid X_1, \ldots, X_{q-1})}{p-q} \div \frac{SQE(X_1, \ldots, X_{p-1})}{n-p} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{p-q,n-p}$$

Exemplo

$p = 6$

$n = 11$

$q = 3$

$$F^* = \frac{SQReg(X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*})/3}{SQE(X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*})/5} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{3,5}$$

$$\begin{aligned} SQReg(X_{1*}^2, X_{2*}^2, X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}) &= SQReg(X_{1*}^2 \mid X_{1*}, X_{2*}) \\ &+ SQReg(X_{2*}^2 \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2) \\ &+ SQReg(X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{1*}^2, X_{2*}^2) \\ &= 1646 + 284.9 + 529 \\ &= 2459.9 \end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{2459.9/3}{1048.1} = 0.7823363$$

Comparando com $F(0.95; 3, 5) = 5.41$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo

```
modeloreduz <- lm(Y ~ x1 + x2,data=dados)
anova(modeloreduz,modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: Y ~ x1 + x2
## Model 2: Y ~ x1 + x2 + I(x1^2) + I(x2^2) + I(x1 * x2)
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1      8 7700.3
## 2      5 5240.4  3    2459.9 0.7823 0.5527
```


Exemplo

Modelo de primeira ordem:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \varepsilon$$

```
modelo1 <- lm(Y ~ x1 + x2,data=dados)
summary(modelo1)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 172.00000   9.354346 18.387175 7.880002e-08
## x1          -55.83333  12.665844 -4.408181 2.261894e-03
## x2           75.50000  12.665844  5.960913 3.378234e-04
```

Exemplo

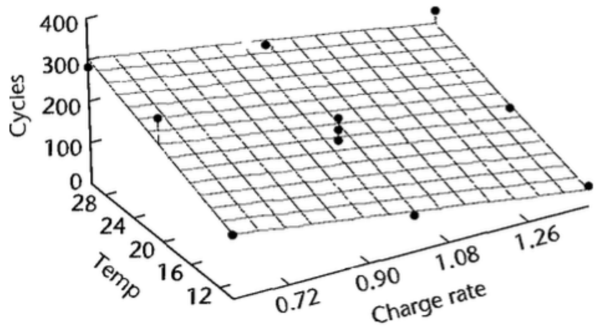
Modelo de primeira ordem (variáveis nas escalas originais):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

```
modelo1 <- lm(Y ~ X1 + X2,data=dados)
summary(modelo1)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)  160.5833  41.615451  3.858743 0.0048174887
## X1          -139.5833  31.664611 -4.408181 0.0022618941
## X2             7.5500   1.266584  5.960913 0.0003378234
```


Exemplo



Modelo de Regressão com Interação

Efeitos de interação

Um modelo de regressão com $p-1$ variáveis preditoras com efeitos aditivos tem função de regressão da forma:

$$E(Y) = f_1(X_1) + f_2(X_2) + \ldots + f_{p-1}(X_{p-1})$$

em que $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ podem ser quaisquer funções.

Por exemplo:

$$E(Y) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2}_{f_1(X_1)} + \underbrace{\beta_3 X_2}_{f_2(X_2)}$$

O efeito de X_1 e X_2 em Y é **aditivo**.

Efeitos de interação

Já no exemplo a seguir, o efeito não é aditivo, há efeito de interação:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_2 + \beta_3 X_1 X_2$$

Outro exemplo:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_1 X_2 + \beta_5 X_1 X_3$$

O efeito de uma variável sobre Y irá depender do nível da variável com a qual ela interage.

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Suponha que $X_1 = a$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 X_2 + \beta_3 a X_2$$

Suponha que $X_1 = a + 1$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 (a + 1) + \beta_2 X_2 + \beta_3 (a + 1) X_2$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_1 em 1 unidade:

$$\beta_0 + \beta_1 (a + 1) + \beta_2 X_2 + \beta_3 (a + 1) X_2 - (\beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 X_2 + \beta_3 a X_2)$$

$$= \beta_1 + \beta_3 X_2$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Suponha que $X_2 = a$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 a + \beta_3 X_1 a$$

Suponha que $X_2 = a + 1$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 (a + 1) + \beta_3 X_1 (a + 1)$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_2 em 1 unidade:

$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 (a + 1) + \beta_3 X_1 (a + 1) - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 a + \beta_3 X_1 a)$$

$$= \beta_2 + \beta_3 X_1$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_1 em 1 unidade:

$$\frac{\partial E(Y)}{\partial X_1} = \beta_1 + \beta_3 X_2$$

Diferença no valor esperado de Y quando aumentamos X_2 em 1 unidade:

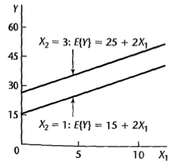
$$\frac{\partial E(Y)}{\partial X_2} = \beta_2 + \beta_3 X_1$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

Modelo aditivo:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5X_2$$

β_1 : mudança no valor esperado de Y quando X_1 aumenta em 1 unidade, mantendo X_2 constante.



Mantendo X_2 constante: não importa se $X_2 = 1$ ou $X_2 = 3$ o efeito é sempre β_1 no valor esperado quando X_1 aumenta em 1 unidade (retas paralelas).

Interpretação: interação e efeitos lineares

Modelo com interação:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5X_2 + 0.5X_1X_2$$

Se $X_2 = 1$:

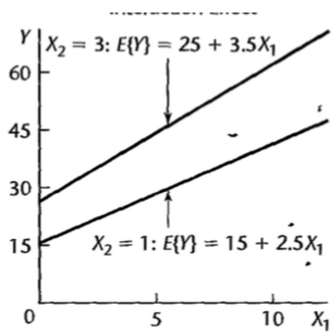
$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5 \times 1 + 0.5X_1 \times 1 = 15 + 2.5X_1$$

Se $X_2 = 3$:

$$E(Y) = 10 + 2X_1 + 5 \times 3 + 0.5X_1 \times 3 = 25 + 3.5X_1$$

Interpretação: interação e efeitos lineares

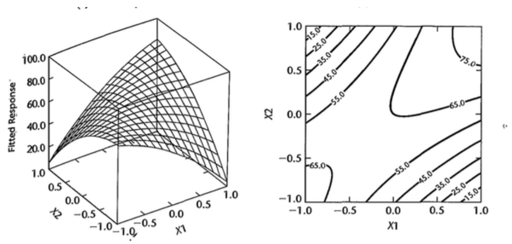
Para avaliarmos o efeito de 1 unidade de aumento em X_1, devemos considerar o valor de X_2 (retas não paralelas).



Interpretação: interação e efeitos curvilinear

Exemplo:

$$E(Y) = 65 + 3X_1 + 4X_2 - 10X_1^2 - 15X_2^2 + 35X_1X_2$$



Interpretação: interação e efeitos curvilinear

Se $X_1 = 1$:

$$E(Y) = 65 + 3 \times 1 + 4X_2 - 10 \times (1^2) - 15X_2^2 + 35 \times 1 \times X_2$$

$$E(Y) = 58 + 39X_2 - 15X_2^2$$

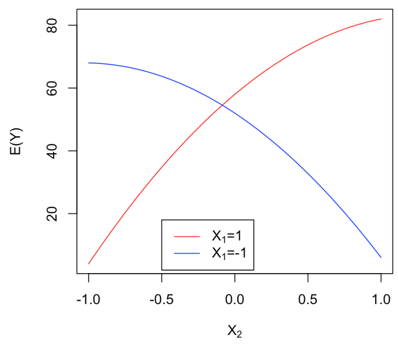
Se $X_1 = -1$:

$$E(Y) = 65 + 3 \times (-1) + 4X_2 - 10 \times (-1^2) - 15X_2^2 + 35 \times (-1) \times X_2$$

$$E(Y) = 52 - 31X_2 - 15X_2^2$$

33/67

Interpretação: interação e efeitos curvilinear



34/67

Exemplo

X_1: tríceps, $X_{1*} = X_1 - \bar{X}_1$.

X_2: coxa, $X_{2*} = X_2 - \bar{X}_2$.

X_3: antebraço, $X_{3*} = X_1 - \bar{X}_3$.

Y: gordura corporal

```
##      X1   X2   X3    Y     x1    x2    x3
## 1  19.5 43.1 29.1 11.9 -5.805 -8.07  1.48
## 2  24.7 49.8 28.2 22.8 -0.605 -1.37  0.58
## 3  30.7 51.9 37.0 18.7  5.395  0.73  9.38
## 4  29.8 54.3 31.1 20.1  4.495  3.13  3.48
## 5  19.1 42.2 30.9 12.9 -6.205 -8.97  3.28
## 6  25.6 53.9 23.7 21.7  0.295  2.73 -3.92
## 7  31.4 58.5 27.6 27.1  6.095  7.33 -0.02
## 8  27.9 52.1 30.6 25.4  2.595  0.93  2.98
## 9  22.1 49.9 23.2 21.3 -3.205 -1.27 -4.42
## 10 25.5 53.5 24.8 19.3  0.195  2.33 -2.82
## 11 31.1 56.6 30.0 25.4  5.795  5.43  2.38
```

35/67

Exemplo

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_{1*} + \beta_2 X_{2*} + \beta_3 X_{3*} + \beta_4 X_{1*} X_{2*} + \beta_5 X_{1*} X_{3*} + \beta_6 X_{2*} X_{3*} + \varepsilon$$

```
modelo <- lm(Y ~ x1 + x2 + x3 + I(x1*x2) + I(x1*x3) + I(x2*x3),data=dat)
summary(modelo)$coef
```

```
##                 Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 20.526893531 1.07362646 19.1192136 6.699796e-11
## x1           3.437808068 3.57866572  0.9606396 3.542612e-01
## x2          -2.094717339 3.03676957 -0.6897848 5.024579e-01
## x3          -1.616337237 1.90721068 -0.8474875 4.120550e-01
## I(x1 * x2)   0.008875562 0.03085046  0.2876963 7.781144e-01
## I(x1 * x3)  -0.084790836 0.07341774 -1.1549093 2.689155e-01
## I(x2 * x3)   0.090415385 0.09200130  0.9827621 3.436619e-01
```

36/67

Exemplo

```
anova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##            Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## x1          1 352.27  352.27 52.2238 6.682e-06 ***
## x2          1  33.17   33.17  4.9173   0.04503 *
## x3          1  11.55   11.55  1.7117   0.21343
## I(x1 * x2)  1   1.50    1.50  0.2217   0.64552
## I(x1 * x3)  1   2.70    2.70  0.4009   0.53760
## I(x2 * x3)  1   6.51    6.51  0.9658   0.34366
## Residuals  13  87.69    6.75
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


Exemplo

$H_0 : \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$

H_1 : pelo menos um dentre $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ é diferente de 0.

$p = 7$

$n = 20$

$q = 4$

$$F^* = \frac{SQReg(X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*})/3}{SQE(X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*})/13} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{3,13}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} SQReg(X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}, X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}) &= SQReg(X_{1*}X_{2*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}) \\ &+ SQReg(X_{1*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}) \\ &+ SQReg(X_{2*}X_{3*} \mid X_{1*}, X_{2*}, X_{3*}, X_{1*}X_{2*}, X_{1*}X_{3*}) \\ &= 1.5 + 2.7 + 6.514836 \\ &= 10.714836 \end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{10.714836/3}{6.7} = 0.5330764$$

Comparando com $F(0.95; 3, 13) = 3.41$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo

```
modeloreduz <- lm(Y ~ x1 + x2 + x3,data=dat)
anova(modeloreduz,modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: Y ~ x1 + x2 + x3
## Model 2: Y ~ x1 + x2 + x3 + I(x1 * x2) + I(x1 * x3) + I(x2 * x3)
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1     16 98.405
## 2     13 87.690  3    10.715 0.5295 0.6699
```

Preditores Qualitativos

Exemplo: Seguros

Y = meses até a implementação

X_1 = tamanho da firma (em milhões de dólares)

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se a firma tem açoes na bolsa} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Exemplo: Seguros

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

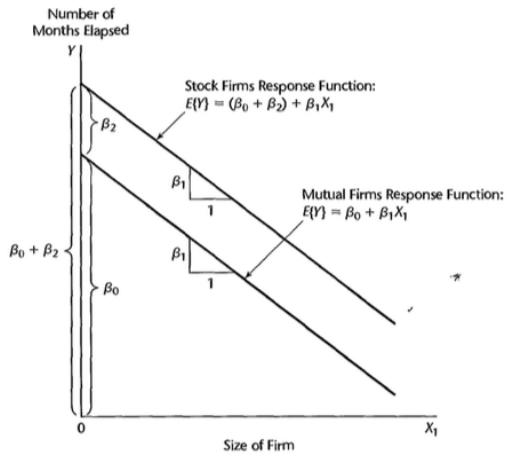
Se a firma não tem ações na bolsa, então $X_2 = 0$:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a firma tem ações na bolsa, então $X_2 = 1$:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_1$$

Exemplo: Seguros

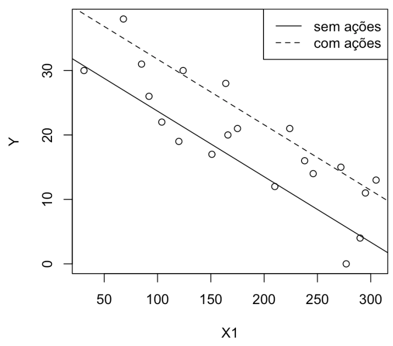


Exemplo: Seguros

```
##               Estimate  Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 33.8740690 1.813858297  18.675146 9.145269e-13
## X1          -0.1017421 0.008891218 -11.442990 2.074687e-09
## X2           8.0554692 1.459105700   5.520826 3.741874e-05
```

45/67

Exemplo: Seguros



46/67

Exemplo: Seguros

Incluindo termo de interação:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2$$

Se a firma não tem ações na bolsa, então $X_2 = 0$:

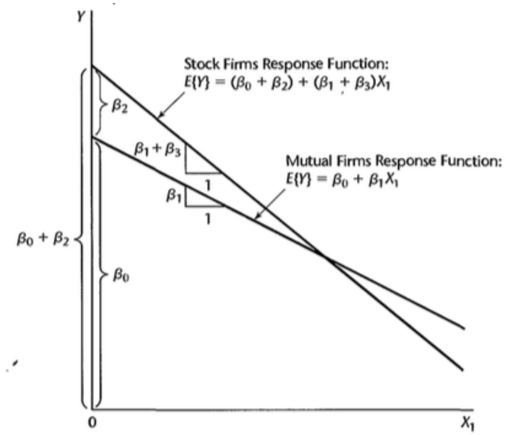
$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a firma tem ações na bolsa, então $X_2 = 1$:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) X_1$$

47/67

Exemplo: Seguros

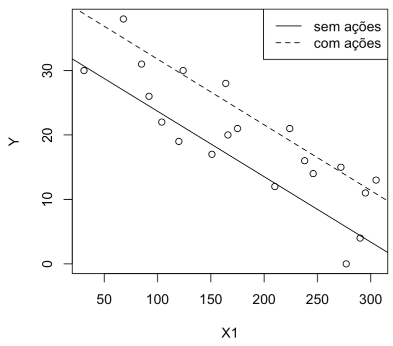


48/67

Exemplo: Seguros

```
##                  Estimate Std. Error     t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 33.8383694765 2.44064985 13.86449166 2.472768e-10
## X1          -0.1015306249 0.01305254 -7.77861250 7.965637e-07
## X2           8.1312501223 3.65405169  2.22526959 4.079375e-02
## I(X1 * X2)  -0.0004171412 0.01833121 -0.02275578 9.821265e-01
```


Exemplo: Seguros



Variável preditora com mais de duas classes

Exemplo: Desgaste (Y), velocidade (X_1) e modelo de uma peça.

Existem 4 tipos de modelos: M1, M2, M3 e M4.

Definimos 3 variáveis "dummy":

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se M1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1, & \text{se M2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 1, & \text{se M3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Variável preditora com mais de duas classes

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$$

Se a peça é do tipo M4:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 0 = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M1:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 1 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 0 = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M2:

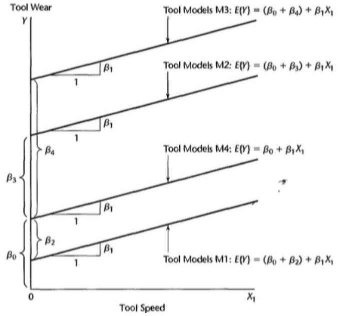
$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 1 + \beta_4 \times 0 = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1$$

Se a peça é do tipo M3:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \times 0 + \beta_3 \times 0 + \beta_4 \times 1 = (\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1$$

Variável preditora com mais de duas classes

O modelo de primeira ordem implica no fato de que o efeito da velocidade é linear e com o mesmo coeficiente angular para todos os modelos de peça. Temos diferentes interceptos para cada modelo.



Variável preditora com mais de duas classes

- β_1 : mudança esperada no desgaste da peça (Y) para cada unidade de aumento na velocidade (X_1), considerando mesmo modelo de peça.
- β_2 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M1 e M4, considerando a mesma velocidade.
- β_3 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M2 e M4, considerando a mesma velocidade.
- β_4 : diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M3 e M4, considerando a mesma velocidade.

Variável preditora com mais de duas classes

Qual a diferença esperada do desgaste da peça entre modelos M3 e M2, mantendo a mesma velocidade?

Para modelo M3:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1$$

Para modelo M2:

$$E(Y) = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1$$

A diferença entre M3 e M2, mantendo a mesma velocidade:

$$(\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 X_1 - [(\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 X_1] = \beta_4 - \beta_3$$

Variável preditora com mais de duas classes

Após obtermos estimativas: $\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_3$ e devemos também fornecer o erro-padrão da estimativa.

Lembre que:

$$Var(\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_3) = Var(\hat{\beta}_4) + Var(\hat{\beta}_3) - 2Cov(\hat{\beta}_4, \hat{\beta}_3)$$

Exemplo: Fábrica de sabão

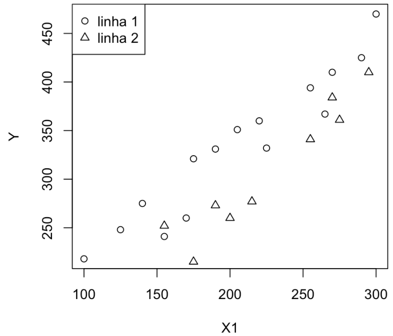
Y: resíduo de sabão

X_1: velocidade

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se produção na linha 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
##      Y  X1 X2
## 1  218 100  1
## 2  248 125  1
## 3  360 220  1
## 4  351 205  1
## 5  470 300  1
## 6  394 255  1
## 7  332 225  1
## 8  321 175  1
## 9  410 270  1
## 10 260 170  1
## 11 241 155  1
## 12 331 190  1
```


Exemplo: Fábrica de sabão



Exemplo: Fábrica de sabão

Iremos ajustar um modelo assumindo que:

- a relação entre a quantidade de resíduo e velocidade é linear para as duas linhas de produção;
- retas diferentes para as duas linhas de produção;
- as variâncias dos termos de erros ao redor de cada reta são iguais.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Para a linha 1: $E(Y) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)X_1$.

Para a linha 2: $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1$.

Exemplo: Fábrica de sabão

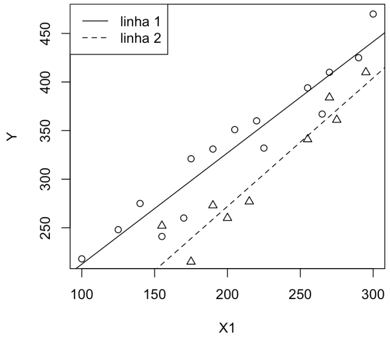
```
modelo <- lm(Y ~ X1 + X2 + I(X1*X2), data=dados)
summary(modelo)$coef
```

```
##                Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)  7.5744646 20.8696979  0.3629408 7.199633e-01
## X1           1.3220488  0.0926247 14.2731771 6.446165e-13
## X2          90.3908632 28.3457320  3.1888703 4.085851e-03
## I(X1 * X2)  -0.1766614  0.1288377 -1.3711932 1.835463e-01
```

```
anova(modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##             Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
## X1           1 149661  149661 347.5548 2.224e-15 ***
## X2           1  18694   18694  43.4129 1.009e-06 ***
## I(X1 * X2)  1    810     810   1.8802    0.1835
## Residuals  23   9904     431
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo: Fábrica de sabão



Exemplo: Fábrica de sabão

Se quisermos testar a hipótese nula de que temos apenas uma reta para representar as duas linhas:

$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$

H_a: pelo menos um entre β_2 e β_3 é diferente de zero.

Estatística do teste:

$$F^* = \frac{SQReg(X_q, \ldots, X_{p-1} \mid X_1, \ldots, X_{q-1})}{p-q} \div \frac{SQE(X_1, \ldots, X_{p-1})}{n-p} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{p-q,n-p}$$

Exemplo: Fábrica de sabão

$p = 4$

$n = 27$

$q = 2$

$$F^* = \frac{SQReg(X_2, X_1X_2 \mid X_1)/2}{SQE(X_1, X_2, X_1X_2)/23} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{2,23}$$

$$\begin{aligned} SQReg(X_2, X_1X_2 \mid X_1) &= SQReg(X_2 \mid X_1) + SQReg(X_1X_2 \mid X_1, X_2 \\ &= 1.86941 \times 10^4 + 809.6 \\ &= 1.95037 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$F_{obs} = \frac{1.95037 \times 10^4/2}{430.6} = 22.6471203$$

Comparando com $F(0.95; 2, 23) = 3.42$, encontramos evidências contra a hipótese nula.

Exemplo: Fábrica de sabão

```
modeloreduz <- lm(Y ~ X1, data=dados)
anova(modeloreduz,modelo)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: Y ~ X1
## Model 2: Y ~ X1 + X2 + I(X1 * X2)
##   Res.Df     RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
## 1     25 29407.8
## 2     23  9904.1  2     19504 22.646 3.669e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Exemplo: Fábrica de sabão

Se quisermos testar a hipótese nula de que para as duas linhas de produção o coeficiente angular é o mesmo:

$H_0: \beta_3 = 0$

$H_a: \beta_3 \neq 0.$

$p = 4$

$n = 27$

$q = 3$

$$F^* = \frac{SQReg(X_1X_2 \mid X_1, X_2)/1}{SQE(X_1, X_2, X_1X_2)/23} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{1,23}$$

Exemplo: Fábrica de sabão

$$F_{obs} = \frac{809.6/1}{430.6} = 1.8801672$$

Comparando com $F(0.95; 1, 23) = 4.28$, não encontramos evidências contra a hipótese nula.

Leitura

- Applied Linear Statistical Models: Seções 8.1-8.3, 8.5-8.7.
- Faraway - Linear Models with R: Capítulo 14.
- Draper & Smith - Applied Regression Analysis: Capítulo 12.