



ME613 - Análise de Regressão

Parte 12

Samara F. Kiihl - IMECC - UNICAMP

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nulas/slides/parte13/parte13.html#1

1/19

Introdução

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i$$

em que \mathbf{X}_i é o vetor dos valores observados das variáveis preditoras para o i -ésimo caso:

$$\mathbf{X}_{i,p \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,p-1} \end{pmatrix}$$

e $\boldsymbol{\beta}$ o vetor de coeficientes.

No caso de regressão linear, temos que:

$$f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

3/19

Regressão Não-Linear

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nulas/slides/parte13/parte13.html#1

2/19

Introdução

Regressão não-linear:

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i$$

Exemplos:

$$Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i) + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 \exp(\gamma_2 X_i) + \varepsilon_i$$

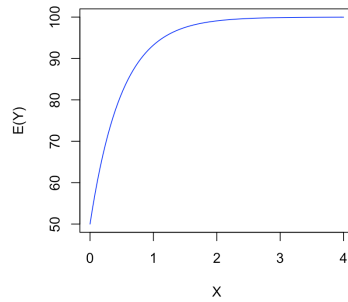
$$Y_i = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1 \exp(\gamma_2 X_i)} + \varepsilon$$

4/19

Exemplo

$$E(Y) = 100 - 50 \exp(-2X)$$

```
## Warning: package 'latex2exp' was built under R version 3.2.3
```



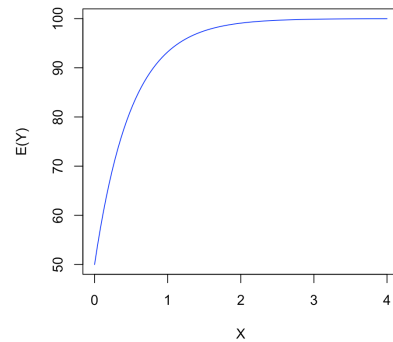
file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#f1

5/19

5/19

Exemplo

$$E(Y) = 100 - 50 \exp(-2X)$$



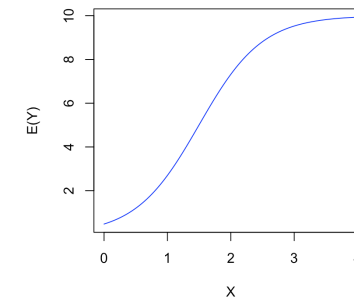
file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#f1

7/19

7/19

Exemplo

$$E(Y) = \frac{10}{1 + 20 \exp(-2X)}$$



file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#f1

6/19

6/19

Regressão Não-linear

No caso linear, o número de parâmetros é igual ao número de elementos em \mathbf{X}_i , no caso linear não temos, necessariamente, esta relação.

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \gamma) + \varepsilon_i$$

$$\mathbf{X}_{i \times 1} = \begin{pmatrix} X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,q} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{p \times 1} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{pmatrix}$$

8/19

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#f1

8/19

Exemplo - Pacientes

X: dias de hospitalização

Y: prognóstico

##	Y	X
## 1	54	2
## 2	50	5
## 3	45	7
## 4	37	10
## 5	35	14
## 6	25	19
## 7	20	26
## 8	16	31
## 9	18	34
## 10	13	38
## 11	8	45
## 12	11	52
## 13	8	53
## 14	4	60
## 15	6	65

Modelo proposto: $Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i) + \varepsilon_i$.

Mínimos Quadrados

Relembrando, no modelo linear simples:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

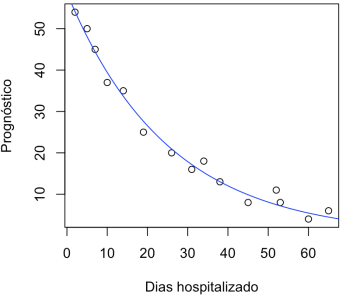
No modelo não-linear:

$$S = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})]^2$$

Queremos minimizar S com relação a $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$.

Exemplo - Pacientes

$$\hat{Y}_i = 58.6065 \exp(-0.03959X_i) + \varepsilon_i.$$



Mínimos Quadrados

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n -2[Y_i - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})] \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right]$$

Igualando as p derivadas parciais a zero e substituindo os parâmetros γ_k pelas estimativas g_k , temos as p equações normais:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right]_{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{g}} - \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i, \mathbf{g}) \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right]_{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{g}} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

em que \mathbf{g} é o vetor de estimativas por mínimos quadrados:

$$\mathbf{g}_{p \times 1} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{pmatrix}$$

Exemplo - Pacientes

$$Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i) + \varepsilon_i$$

$$f(\mathbf{X}_i, \gamma) = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \gamma)}{\partial \gamma_0} = \exp(\gamma_1 X_i)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \gamma)}{\partial \gamma_1} = \gamma_0 X_i \exp(\gamma_1 X_i)$$

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#1

13/19

13/19

Exemplo - Pacientes

Simplificando:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \exp(g_1 X_i) - g_0 \sum_{i=1}^n \exp(2g_1 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_i \exp(g_1 X_i) - g_0 \sum_{i=1}^n X_i \exp(2g_1 X_i) = 0$$

As equações normais não são lineares com relação a g_0 e g_1 e não possuem solução com forma fechada. Métodos numéricos devem ser empregados para obter a solução.

15/19

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#1

15/19

Exemplo - Pacientes

Equações normais:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=\mathbf{g}} - \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i, \mathbf{g}) \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=\mathbf{g}} = 0 \quad k = 0, 1$$

Temos:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \exp(g_1 X_i) - \sum_{i=1}^n g_0 \exp(g_1 X_i) \exp(g_1 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i g_0 X_i \exp(g_1 X_i) - \sum_{i=1}^n g_0 \exp(g_1 X_i) g_0 X_i \exp(g_1 X_i) = 0$$

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#1

14/19

14/19

Exemplo - Pacientes

```
m <- nls(Y~gamma0*exp(gamma1*X),data=dados,start=list(gamma0=56.6646,gamma1=-0.03797))
summary(m)$coef
```

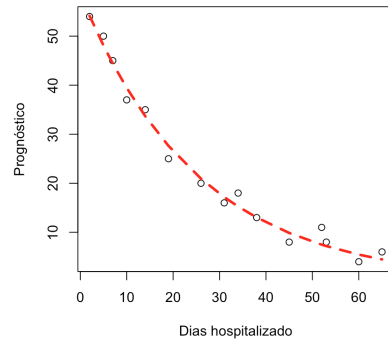
```
##           Estimate Std. Error  t value    Pr(>|t|)
## gamma0  58.6065313  1.472159424   39.80991 5.699631e-15
## gamma1 -0.0395864  0.001711292  -23.13246 6.013445e-12
```

16/19

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMP.github.io/nsls/slides/parte13/parte13.html#1

16/19

Exemplo - Pacientes



file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/anulas/slides/parte13/parte13.html#1

Leitura

- Applied Linear Statistical Models: Seções 13.1-13.4.
- Draper & Smith - [Applied Regression Analysis](#): Capítulo 24.
- [Nonlinear Regression and Nonlinear Least Squares in R](#)

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/anulas/slides/parte13/parte13.html#1

Exemplo - Pacientes

Para obter os valores iniciais, note que podemos linearizar:

$$\log_e \gamma_0 [\exp(\gamma_1 X_i)] = \log_e \gamma_0 + \gamma_1 X_i$$

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

em que $Y_i^* = \log_e Y_i$, $\beta_0 = \log_e \gamma_0$ e $\beta_1 = \gamma_1$.

```
modeloL <- lm(log(Y) ~ X, data=dados)
summary(modeloL)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
## (Intercept)  4.03715887 0.084103145  48.00247 5.081672e-16
## X           -0.03797418 0.002284209 -16.62465 3.857871e-10
```

$$g_0^{(0)} = \exp(\hat{\beta}_0) = 56.665 \text{ e } g_1^{(0)} = \hat{\beta}_1 = -0.038.$$

file:///Users/amac/Documents/GitHub/ME613-UNICAMP/ME613-UNICAMPgithub.io/anulas/slides/parte13/parte13.html#1