

## Modèles de rupture fragile

Jérémy Bleyer, Anne-Françoise Gourgues-Lorenzon

### 1 Théorie de Griffith: essai *End-Notched Flexure* (ENF)

#### Objectifs:

- Appliquer les concepts du modèle de Griffith par la méthode de la souplesse
- Évaluer un critère de propagation de fissure et discuter de la stabilité de la propagation

L'essai ENF (End-Notched Flexure) consiste en une flexion 3 points d'une poutre entaillée à mi-hauteur par une préfissure de longueur initiale  $a_0$  débouchant à une des extrémités de la poutre (Figure 1). Cet essai est notamment utilisé pour caractériser les propriétés de délaminage d'interface des matériaux composites multicouches.

La poutre de longueur  $L$ , de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ , est simplement appuyée à ses extrémités et chargée par un effort ponctuel vertical  $F$  appliqué au centre de la poutre. On note  $q$  le déplacement vertical du point d'application de la force et  $Q = F/b$  l'intensité de la force par unité de largeur. Une expression analytique approchée de la relation force/déplacement peut-être obtenue à l'aide d'une modélisation simplifiée reposant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli [Allix et al., 1995]. Pour une fissure de taille  $a$  fixée, la relation force/déplacement s'exprime comme:

$$q = \begin{cases} \frac{L^3/12 + a^3}{32D} Q & \text{si } a \leq L/2 \\ \frac{L^3/3 - (L-a)^3}{32D} Q & \text{si } a \geq L/2 \end{cases} \quad (1)$$

où  $D = Eh^3/12$  est la raideur en flexion d'une moitié de poutre par unité de largeur.

1. Quel est le mode principal de sollicitation de la fissure ?

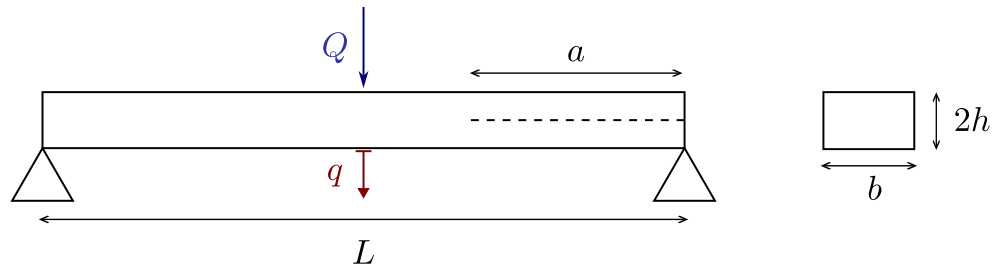


Figure 1: Essai ENF

## 1.1 Rappels préliminaires

1. On note  $S(a) = q/Q$  la souplesse de la structure par unité de largeur, à longueur  $a$  de fissure fixée. Donner la valeur de l'énergie potentielle  $\mathcal{P}$  (par unité de largeur) de la solution suivant que l'on pilote: (a) en force, (b) en déplacement.
2. En déduire le taux de resituation d'énergie  $\mathcal{G}$  dans les deux modes de pilotage de chargement.
3. Rappeler la condition de propagation et de stabilité/instabilité de propagation de la fissure.

## 1.2 Application à l'essai ENF: pilotage en force

Dans cette section, on se limite au **pilotage en force**.

1. Dans le cas  $a \leq L/2$ , déterminer la condition de propagation de la fissure. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation.
2. Faire de même pour le cas  $a \geq L/2$ .

## 1.3 Application à l'essai ENF: pilotage en déplacement

Dans cette section, on se limite au **pilotage en déplacement** et au cas  $a \leq L/2$ .

1. Déterminer la condition de propagation de la fissure.
2. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation. On pourra pour cela s'appuyer sur le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$  représenté sur la Figure 2.

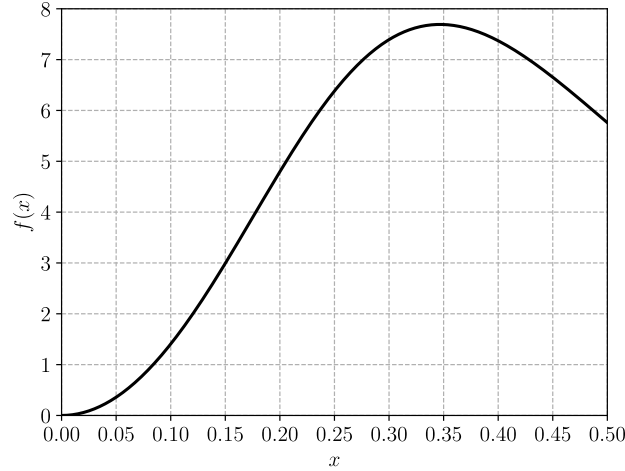


Figure 2: Graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$

## 2 Exploration du modèle de Beremin

Le modèle de Beremin suppose que dans tout volume élémentaire  $V_0$ , la taille  $a$  des défauts susceptibles de provoquer le clivage est régie par une densité de probabilité en loi puissance :

$$p(a) = \alpha a^{-\beta} \quad (2)$$

avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 1$ .

1. En considérant un critère de Griffith pour la propagation de micro-défauts, montrer que la probabilité de rupture sous une contrainte  $\sigma$  donnée s'écrit en:

$$P(\sigma) \propto \sigma^m \quad (3)$$

où  $m$  s'exprime en fonction de  $\beta$ .

2. En introduisant la contrainte de normalisation  $\sigma_u$  de sorte que

$$P(\sigma) = \left( \frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^m, \quad (4)$$

relier  $\sigma_u$  aux paramètres mécaniques et aux paramètres de distribution des défauts  $\alpha, \beta$ .

### 2.1 Application à un acier bas carbone

On considère dans la suite de cet exercice un acier à bas carbone s'appuyant sur les résultats de la thèse d'Astrid Lambert-Perlade [Lambert-Perlade, 2001]. Ses propriétés en traction uniaxiale à basse température (-170°C) sont les suivantes : limite

d'élasticité 729 MPa, contrainte à rupture 978 MPa, allongement maximum réparti 11%, allongement à rupture 25%, réduction d'aire à rupture 78%.

3. Peut-on calibrer une loi de Weibull pour modéliser sa résistance à la rupture fragile ?

## 2.2 Première estimation de la valeur du paramètre $m$

Afin d'estimer le paramètre  $m$  on utilise une comparaison entre le modèle de Beremin et le modèle de [Curry and Knott, 1979]. Ce dernier fait appel à une modélisation du comportement en traction uniaxiale via une loi puissance,  $n$  étant l'exposant d'écrouissage. La valeur de  $n$  est comprise entre 0.13 et 0.16 (selon la température) pour l'acier considéré. On pose ici  $N = 1/n$ .

Les relations entre la ténacité (en déformations planes) et la limite d'élasticité sont les suivantes, pour chacun des modèles :

$$\text{Curry et Knott: } K_{Ic} \sigma_y^{\frac{N-1}{2}} = \text{constante}$$

$$\text{Beremin: } K_{Ic} \sigma_y^{\frac{m}{4}-1} = \text{constante}$$

4. Utiliser ces deux expressions pour déduire un premier estimateur de  $m$ . Quelle est sa sensibilité envers l'exposant d'écrouissage ?

## 3 Application du modèle de Beremin à des essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées

### 3.1 Comportement macroscopique à rupture

La Figure 3 montre quelques courbes d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. La contrainte moyenne (ou « contrainte nette ») est définie par le rapport entre l'effort de traction et l'aire initiale de la section au droit du fond d'entaille. La déformation moyenne est définie de la manière suivante :  $\bar{\epsilon} = 2 \log(r/r_0)$ ,  $r$  étant le rayon de l'éprouvette au droit du fond d'entaille, de valeur initiale  $r_0$ .

1. Qualifier le comportement macroscopique à rupture de ces éprouvettes, en fonction de la température.

### 3.2 Détermination de la valeur de la contrainte à utiliser dans le modèle de Beremin

On considère ici les essais réalisés à des températures inférieures ou égales à  $-90^\circ\text{C}$ .

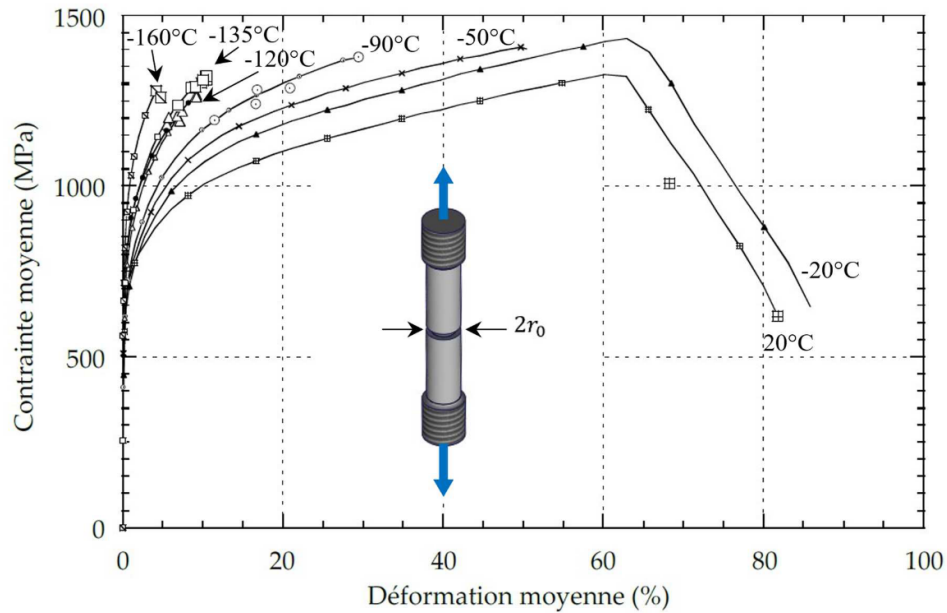


Figure 3: Exemples de courbes de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. Les températures d'essai sont indiquées près des courbes correspondantes.

2. Déterminer l'intervalle des valeurs de contrainte nette à rupture. Peut-on utiliser ces valeurs pour caler les paramètres du modèle de Beremin ? Pourquoi ?

### 3.3 Algorithme d'identification des paramètres du modèle de Beremin

3. Quelles prédictions du modèle de Beremin utilise-t-on pour comparer avec les données d'origine expérimentale ?
4. Comment classer les essais sur éprouvettes axisymétriques entaillées de manière à tracer les courbes en question ?
5. Proposer une méthode de détermination des paramètres du modèle de Beremin, en supposant que l'analyse mécanique des essais a été effectuée au préalable par simulation numérique, appuyée sur un modèle de comportement élasto-plastique adéquat.
6. Justifier qu'une procédure itérative est indispensable.

### 3.4 Discussion des résultats de l'ajustement

La mise en œuvre de cette méthode sur les 25 essais disponibles donne  $m = 20$  et  $\sigma_u = 2351 \text{ MPa}$  pour un volume  $V_0$  de  $(100 \mu\text{m})^3$ . Le résultat est représenté sur la

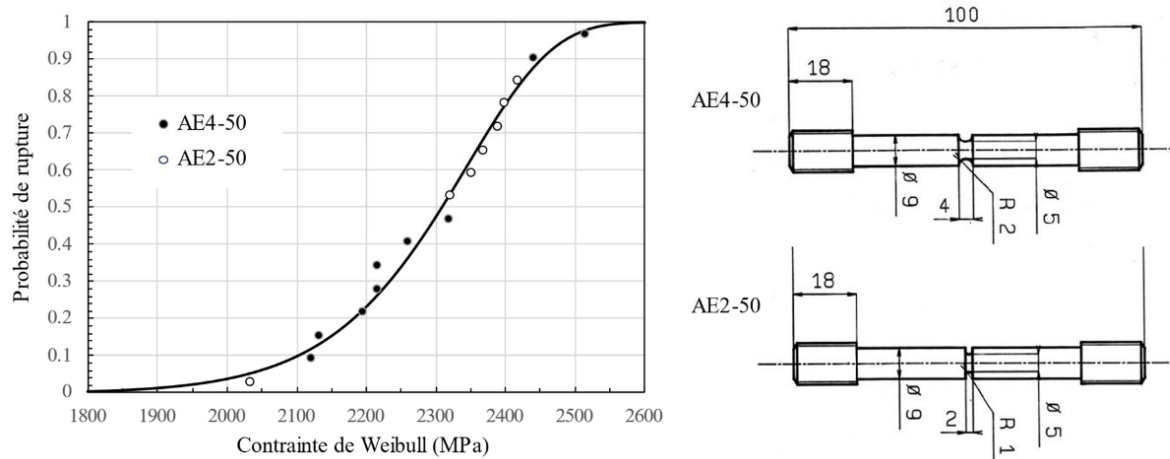


Figure 4: Ajustement des paramètres du modèle de Weibull sur les données d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. Les deux géométries sont représentées à côté du graphe, avec les cotes en millimètres.

Figure 4.

7. Commenter la qualité de l'ajustement des paramètres du modèle.
8. Commenter la valeur de  $m$  par rapport aux premières estimations faites à partir du modèle de Curry et Knott.
9. Commenter la valeur de  $\sigma_u$  par rapport aux contraintes nettes à rupture déterminées à partir des courbes de la Figure 3.

## References

- [Allix et al., 1995] Allix, O., Ladeveze, P., and Corigliano, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite structures*, 31(1):61–74.
- [Curry and Knott, 1979] Curry, D. and Knott, J. (1979). Effect of microstructure on cleavage fracture toughness of quenched and tempered steels. *Metal Science*, 13(6):341–345.
- [Lambert-Perlade, 2001] Lambert-Perlade, A. (2001). *Cleavage fracture of bainitic steel microstructures obtained under welding conditions (in French)*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.