

Rupture ductile : homogénéisation de matériaux poreux

Jérémy Hure, Djimédo Kondo, Jérémy Bleyer

Objectifs:

- Obtenir un critère de plasticité pour matériaux poreux dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile
- Analyser ce critère et dériver l'évolution de la porosité
- Discuter des effets d'anisotropie

1 Position du problème

On cherche ici à redériver les étapes de construction du modèle de Gurson dans le cas d'un matériau poreux cylindrique (Figure 1).

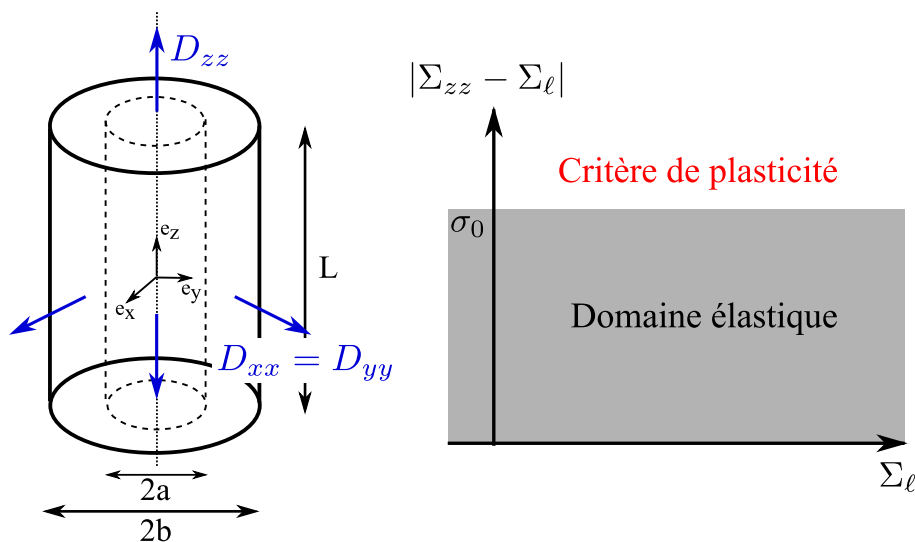


FIGURE 1 – Géométrie considérée et critère de plasticité

Le point de départ est de considérer, pour la matrice, le **critère de plasticité de von Mises** qui s'écrit :

$$\phi(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{s} = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{I} \quad (1)$$

La déformation plastique se produit quand le critère est atteint, *i.e.*, $\phi = 0$. Dans tout l'exercice, l'écroutissage n'est pas pris en compte ($\sigma_0 = \text{cste}$) et l'élasticité est ignorée, ce qui correspond à un matériau dit *rigide parfaitement plastique*.

La loi d'écoulement plastique associée permet d'obtenir le taux de déformation plastique :

$$\mathbf{d} = d_{eq} \frac{3\mathbf{s}}{2\sigma_0} \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} \quad (2)$$

conduisant à la dissipation plastique $\sigma_0 d_{eq}(\mathbf{v})$ pour un champ \mathbf{v} incompressible, c'est-à-dire tel que $\text{tr}(\mathbf{d}) = 0$.

Afin de déterminer un critère de plasticité macroscopique du milieu poreux, la géométrie présentée sur la Fig. 1 est considérée, à savoir un cylindre creux de hauteur L , de rayons intérieur a et extérieur b . La porosité, définie comme le rapport entre le volume de la cavité et le volume total est noté $f = (a/b)^2$. Enfin, on note V le cylindre de rayon b (incluant donc le pore) et ∂V le bord extérieur de rayon b .

On **impose** sur la frontière extérieure du cylindre des conditions aux limites homogènes en taux de déformation :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

où \mathbf{D} est un paramètre de chargement donné de la forme suivante :

$$\mathbf{D} = D_{xx}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + D_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (4)$$

Les conditions aux limite assurent alors que \mathbf{D} est le taux de déformation (plastique) macroscopique associé à tout champ de vitesse vérifiant (3). De plus, en introduisant la contrainte macroscopique Σ , ces grandeurs macroscopiques sont reliées à leurs équivalents microscopiques par les relations suivantes :

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{d} dV \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) dS \quad (7)$$

avec \mathbf{v} le champ de vitesse et \mathbf{n} la normale extérieure à la surface.

1.1. Quel classe de matériaux poreux peut être représentée par cette géométrie ? Dans le cas de chargement axisymétrique, montrer que le critère de plasticité en l'absence de cavité, donné par le critère de von Mises de la matrice, correspond à la Fig. 1 où Σ_ℓ désigne la contrainte latérale dans le plan (x, y) .

On rappelle que l'on cherche à obtenir le critère de plasticité du cylindre, c'est-à-dire l'équivalent de l'Eq. 1 pour les grandeurs macroscopiques Σ et D en présence d'une cavité. Pour cela, la théorie de l'analyse limite est utilisée. En pratique, celle-ci consiste à postuler un champ de vitesse v admissible (dans un sens qui sera précisé par la suite), et à calculer la dissipation plastique associée :

$$\Pi(D) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_0 d_{eq}(v) dV \quad (8)$$

Sous certaines conditions (qui là-encore seront détaillées dans la suite), cette dissipation plastique permet d'évaluer la contrainte maximale admissible, c'est-à-dire le critère de plasticité macroscopique, par l'équivalence suivante :

$$\Sigma \cdot D \leq \Pi(D) \quad \forall D \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(\Sigma) \leq 0 \quad (9)$$

où Φ désigne le critère de plasticité macroscopique. De plus, on peut montrer que la frontière $\Phi(\Sigma^*) = 0$ du critère est décrite par les états de contrainte tels que :

$$\Sigma^* \cdot D = \Pi(D) \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma^* = \frac{\partial \Pi}{\partial D} \quad (10)$$

La frontière est ainsi paramétrée par la valeur ¹ de D .

2 Champ de vitesse et dissipation plastique

Afin d'obtenir une estimation du critère de plasticité, la première étape consiste donc à choisir un champ de vitesse pris sous la forme, initialement proposée par Gurson :

$$v = v_r(r)e_r + v_z(z)e_z \quad (11)$$

2.1. En imposant que le champ de vitesse soit incompressible, montrer que celui-ci est de la forme :

$$v = \left(\frac{B}{r} - \frac{A}{2}r \right) e_r + Aze_z \quad (12)$$

On pourra s'aider du formulaire rappelé à la fin du sujet.

1. En réalité, $\Pi(D)$ étant homogène de degré 1, l'expression (10) ne dépend pas de la norme de D mais uniquement de sa direction.

- 2.2. Déterminer A et B en fonction des composantes de \mathbf{D} afin que ce champ vérifie les conditions aux limites imposées en (3).
- 2.3. Calculer le taux de déformation microscopique \mathbf{d} associé.
- 2.4. Évaluer la puissance des efforts extérieurs $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{D}$ en fonction de A et B . On pourra poser $(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})/2 = \Sigma_\ell$.
- 2.5. Établir l'expression de la dissipation plastique Π (Eq. 8) sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant.

3 Estimations

Avant d'évaluer cette intégrale dans le cas général, nous considérons deux cas de chargement particuliers, à savoir $(B = 0, A \neq 0)$ et $(B \neq 0, A = 0)$.

- 3.1. En calculant la dissipation plastique Π et explicitant l'Eq. 9 dans chacun de ces cas, déterminer les estimations du critère de plasticité associées.
- 3.2. Tracer l'estimation précédente du critère de plasticité dans le plan $(\Sigma_\ell, \Sigma_{zz} - \Sigma_\ell)$

4 Expression dans le cas général

Par symétrie du critère, on se restreint ici à $A, B \geq 0$. Dans le cas général, il est possible de montrer que :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \sigma_0 A (\lambda M(\lambda) + N(\lambda)) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2B}{\sqrt{3}Ab^2} \quad (14)$$

$$M(\lambda) = \operatorname{asinh}\left(\frac{\lambda}{f}\right) - \operatorname{asinh}(\lambda) \quad (15)$$

$$N(\lambda) = \sqrt{1 + \lambda^2} - \sqrt{f^2 + \lambda^2} \quad (16)$$

On note en particulier λ dépend de \mathbf{D} à travers A et B et que $N'(\lambda) = -\lambda M'(\lambda)$.

- 4.1. En explicitant l'Eq. (10), montrer que les états de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}^*$ à la frontière du domaine sont donnés par :

$$\frac{\Sigma_{zz}^* - \Sigma_\ell^*}{\sigma_0} = N(\lambda) \quad (17)$$

$$\frac{\Sigma_\ell^*}{\sigma_0} = \frac{M(\lambda)}{\sqrt{3}} \quad (18)$$

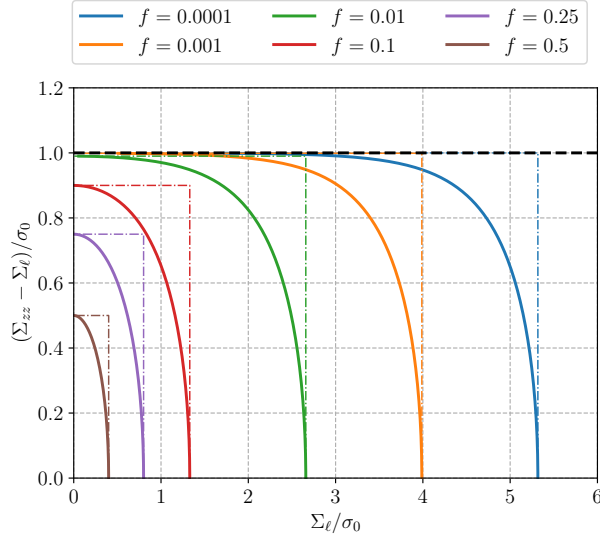


FIGURE 2 – Critère de Gurson dans le plan $(\Sigma_\ell, \Sigma_{zz} - \Sigma_\ell)$ pour différentes valeurs de porosité. En noir pointillés : le critère de von Mises de la matrice. En couleurs pointillées : les estimations de la section 2.

4.2. En combinant les expressions précédentes, montrer que :

$$\Phi(\mathbf{\Sigma}) = \left(\frac{\Sigma_{zz} - \Sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_\ell}{\sigma_0} \right) - (1 + f^2) = 0 \quad (19)$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \cosh(a - b) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \\ \cosh(\operatorname{asinh}(x)) &= \sqrt{1 + x^2}. \end{aligned}$$

5 Etude du critère

L'Eq. (19) correspond au critère de plasticité pour le matériau poreux recherché, dont il convient de vérifier la pertinence en étudiant les cas limites.

5.1. Que devient l'Eq. (19) dans la limite $f \rightarrow 0$? Et dans la limite $f \rightarrow 1$?

La figure 2 trace le critère dans le plan $(\Sigma_\ell, \Sigma_{zz} - \Sigma_\ell)$ pour différentes valeurs de porosité.

Le critère de plasticité obtenu doit être accompagné d'une loi d'écoulement, de la même manière que pour la plasticité de von Mises (Eq. 2). Hill [1], puis Rice [2] et enfin Gurson [3] dans le cas des matériaux poreux, ont montré, grâce au principe de

dissipation maximale, que la loi de normalité est conservée au niveau macroscopique lors du changement d'échelle. On a donc :

$$\mathbf{D} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \quad \dot{\Lambda} \geq 0 \quad (20)$$

où $\dot{\Lambda}$ est le multiplicateur plastique de la loi de plasticité macroscopique.

5.2. Déterminer D_{xx} , D_{zz} en fonction de Σ_ℓ , Σ_{zz} .

5.3. Dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile, l'évolution de la porosité f est particulièrement d'intérêt. Montrer que $\dot{f} = (1 - f)\text{tr}(\mathbf{D})$. Donner son expression en fonction de Σ_ℓ , Σ_{zz} et D_{zz} .

6 Extension aux matériaux anisotropes

Le critère de plasticité pour matériaux poreux obtenu est pertinent dans le cas des matériaux isotropes. Le matériau caractérisé dans les travaux pratiques (alliage X100) est orthotrope et peut être modélisé, en l'absence de porosité, par la plasticité de Hill :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq}^H - \sigma_0 \leq 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq}^H = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

Le tenseur \mathbb{A} contient les informations concernant l'anisotropie du matériau. En notation de Mandel, ces tenseurs sont représentés par les matrices suivantes dans les axes d'orthotropies :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} F+H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G+F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & G+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \quad (22)$$

Pour $F = G = H = 1/2$ et $L = M = N = 3/2$, le critère de Hill correspond au critère de von Mises.

Il est possible de conduire la même démarche d'analyse limite que dans le cas isotrope pour prendre en compte l'effet de la porosité, ce qui conduit au critère de plasticité suivant [4] :

$$\Phi(\Sigma) = \left(\frac{\Sigma_{eq}^H}{\sigma_0^2} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\sqrt{3} \Sigma_\ell}{h_m \sigma_0} \right) - (1 + f^2) = 0 \quad (23)$$

$$\text{avec } h_m = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{H+G}{4(FG+FH+GH)}} + \frac{1}{2L}.$$

- 6.1. Dans quelle situation particulière de symétries matérielles est-il raisonnable de considérer le même champ de vitesse qu'en (11)?
- 6.2. À partir de l'expression précédente, commenter l'effet de l'anisotropie sur la plasticité des matériaux poreux.

Calcul différentiel en coordonnées cylindriques

Gradient d'un champ vectoriel $v(r, \theta, z) = v_r(r, \theta, z)e_r + v_\theta(r, \theta, z)e_\theta + v_z(r, \theta, z)e_z$

$$\mathbf{grad}(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(e_r, e_\theta, e_z)}$$

Références

- [1] Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2), 79-95.
- [2] Rice, J. R. (1971). Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 19(6), 433-455.
- [3] Gurson, A.L. (1975). Plastic flow and fracture behaviour of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction. PhD thesis. Brown University, Providence, USA.
- [4] Benzerga, A. A., & Besson, J. (2001). Plastic potentials for anisotropic porous solids. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20(3), 397-434.