MEALOR II
Mécanique de l'endommagement et approche locale de la rupture

TD n°2 August 2023

Les modèles variationnelles de rupture en 1d: barre en traction

Jérémy Bleyer, Corrado Maurini

Objectifs:

- *Manipuler les conditions d'optimalité d'une fonctionnelle et appliquer l'approche variationnelle à la rupture dans le cas 1d*
- *Déterminer l'évolution quasi-statique d'un modèle d'endommagement*
- *Comprendre l'origine des contraintes limites et de la ténacité dans les modèles d'endommagement à gradient.*
- *Assimiler les bases des modèles de rupture de type champs de phase avant la mise en ouvre numérique.*
- *Construire des solutions de référence pour la vérification d'un code numérique de type champs de phase.*

Contexte

Les modèles variationnelle à rupture sont à la base des approches de type champs de phase pour la simulation numérique des phénomènes de rupture fragile. Dans cet exercice on se propose de retrouver les propriétés fondamentales de ces modèles dans le cadre simplifié d'une barre en traction.

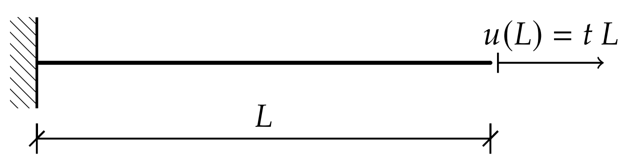


Figure 1: Barre en traction avec déplacement imposé à l'extrémité.

On considère une barre encastrée en $x = 0$ et avec un déplacement imposé $u(L) = t\,L$ en $x = L$. $x = L$. On note par E_0 le module de Young du matériau constituant la barre (dans son état non endommagé), G_c sa ténacité, S la surface de la section droite et L la longueur. Dans la suite on étudie le problème de rupture de la barre avec un modèle de Griffith et un modèle d'endommagement à gradient.

1 Solution élastique : approche variationnelle

On suppose ici que la barre soit élastique linéaire. On se propose de déterminer la solution de ce problème simple avec l'approche variationnelle de l'élasticité.

L'énergie potentielle élastique de la barre est

$$\mathcal{P}(u) = \int_\Omega \frac{E_0 S}{2} \left(\frac{du}{dx}(x)\right)^2 dx \tag{1}$$

où $u : x \in \Omega \equiv [0, L] \to u(x) \in \mathcal{R}$ le déplacement axial de la barre. Le problème de recherche de configurations d'équilibre peut être formulée comme problème de minimisation de l'énergie. La configuration d'équilibre u doit être celle qui minimise l'énergie parmi toutes les configurations admissibles $\hat{u} \in C_t$, où C_t est l'espace des configurations admissibles :

$$u \in C_t : \mathcal{P}(u + h(\hat{u} - u)) - \mathcal{P}(u) \geq 0, \forall \hat{u} \in C_t. \tag{2}$$

L'éspace de configuration admissibles est donné par les fonctions qui respectent les conditions aux limites de Dirichlet et qui sont assez régulières pour que $\mathcal{P}(u) \leq +\infty$:

1. Donner l'expression de C_t pour la barre de figure 1 et monter, avec une développement limité en h de la variation de l'énergie (2) que une configuration d'équilibre doit satisfaire la condition suivante, formulation faible du problème d'élasticité:

   $$D_u\mathcal{P}(u)(v) = 0, \quad \forall v \in C_0 \tag{3}$$

   où on note

   $$D_u\mathcal{P}(u)(\hat{u}) := \left.\frac{d}{dh}\mathcal{P}(u + hv)\right|_{h=0}$$

   et donner pour notre exemple l'expression de C_0, définie comme l'éspace vectorielle des variations admissibles, constituées par les différences entre fonctions admissibles.

2. Calculer $D_u\mathcal{P}(u)(v)$ et montrer que la condition (3) implique la condition d'équilibre

   $$\frac{d}{dx}\sigma(x) = 0, \quad \text{avec} \quad \sigma = E_0 S \frac{du}{dx}(x). \tag{4}$$

3. Déterminer les champs de déplacement u_t et contrainte σ_t solution du problème. Montrer que l'énergie potentielle à l'équilibre en fonction du chargement est :

   $$\mathcal{P}(u_t) = \min_{u \in C_t} \mathcal{P}(u) = E_0 S\, L\, \frac{t^2}{2} \tag{5}$$

2 Modèle de Griffith

Dans un modèle de type "interphase franche" de rupture à la Griffith, les fissures un ensemble de points $\Gamma \equiv \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{n}$ où les déplacements peuvent être discontinus. On considère ici pour la barre un modèle de Griffith monodimensionnel, caractérisée par l'énergie totale

$$\mathcal{E}_G(u,n) = \int_{\Omega\setminus\Gamma} E_0 S \left(\frac{du}{dx}(x)\right)^2 dx + G_c\, S\, n \tag{6}$$

où $u : x \in [0,L] \to u(x) \in \mathcal{R}$ représente le déplacement axial de la barre et n le nombre des fissures. L'approche variationnelle de la rupture (Francfort-Marigo 1998) défini la solution du problème comme le minimum globale de l'énergie $\mathcal{E}_G(u,n)$, sous une contrainte d'irréversibilité pour les fissures.

1. En utilisant les résultats de la section précedente, calculer $\mathcal{E}_G(u,0)$ et $\mathcal{E}_G(u,1)$ en fonction de t. Calculer le chargement critique t_G pour la fissuration de la barre selon ce modèle. Discuter de la pertinence physique de ce modèle de nucléation.

3 Modèle d'endommagement à gradient

On étudie le problème d'évolution de la barre en figure 1 avec un modèle d'endommagement à gradient en 1d et une approche énergétique. On considère le problème d'évolution à temps discret, avec $t_i = i\,\Delta t$ et un pas $\Delta t > 0$ constant. Soit $u_i : x \in [0,L] \to \mathcal{R}$, $\alpha_i : x \in [0,L] \to \mathcal{R}$ le champ de déplacement axial et d'endommagement à l'instant t_i. En $t = 0$ la barre est à endommagement nul, $\alpha_0 = 0$. On suppose le champs d'endommagement libre aux bords. A l'instant $t_i = i\,\Delta t$, l'état (u_i, α_i) de la barre est donné par la solution du problème suivaint de minimisation locale directionnelle :

Déterminer $u_i \in \mathcal{C}_i,\ \alpha_i \in \mathcal{D}(\alpha_{i-1})$ tels que $\forall \hat{u} \in \mathcal{C}_i, \forall \hat{\alpha} \in \mathcal{C}(\alpha_{i-1}), \exists \bar{h} \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{E}(u_i + h(\hat{u} - u_i), \alpha_i + h(\hat{\alpha} - \alpha_i)) - \mathcal{E}(u_i, \alpha_i) \geq 0, \quad \forall h \in (0, \bar{h})} \tag{7}$$

où

$$\mathcal{E}_\ell(u,\alpha) = \left(\int_0^L \frac{E_0}{2}\, a(\alpha(x)) \left(\frac{du}{dx}(x)\right)^2 + w_1 \left(w(\alpha) + \ell^2 \left(\frac{d\alpha}{dx}(x)\right)^2\right)\right) dx, \tag{8}$$

E_0 étant le module de Young de la barre saine, ℓ la longueur interne. La constante w_1 représente l'énergie dissipée pour unité de volume dans le modèle d'endommagement. On considère dans la suite le modèle d'endommagement caractérisé par

$$a(\alpha) = (1-\alpha)^2, \qquad w(\alpha) = \alpha. \tag{9}$$

3.1 Formulation faible

1. Montrez que toute solution du problème de minimisation doit satisfaire ces conditions d'optimalité du premier ordre par rapport à u et α:

$$\begin{aligned} D_u\mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(v) &= 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0 && (10)\\ D_\alpha\mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(\hat{\alpha} - \alpha_i) &\geq 0, \quad \forall \hat{\alpha} \in \mathcal{D}(\alpha_i) && (11)\end{aligned}$$

   Ce système constitue la formulation faible en espace du problème et est à la base de l'implémentation numérique proposée en TP. Il s'agit d'un système couplé d'une équation variationnelle pour u (équilibre) et une inéquation variationnelle pour α (critère d'endommagement).

2. Calculer les dérivées directionnelles $D_u\mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(v)$ et $D_\alpha\mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(\beta)$.

3.2 Formulation forte

1. En reprenant les raisonnements de la section 1, on peut montrer que la condition d'optimalité du premier ordre par rapport à u est équivalente aux conditions d'équilibre suivantes :

$$\frac{d\sigma}{dx}(x) = 0,\ \forall x \in (0, L), \quad \text{avec} \quad \sigma = E_0\, a(\alpha(x)) \left(\frac{du}{dx}(x) + t\right), \tag{12}$$

   où σ, indépendant de x, représente la valeur de la contrainte dans la barre.

2. Montrez que, en supposant les solutions assez régulières, la condition d'optimalité du premier ordre par rapport à α est vérifiée si et seulement si, pour $x \in (0, L)$ implique que

$$\frac{E_0\, a'(\alpha_i)}{2} \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 + \left(w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2\alpha_i}{dx^2}\right) w_1 \geq 0 \tag{13}$$

   et qu'où $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ la condition ci-dessus doit être satisfaite comme une égalité. On conclut que les conditions d'optimalité par rapport à α ont la suivante écriture en forme forte:

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 0, \tag{14a}$$

$$\frac{E_0\, a'(\alpha_i)}{2} \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 + \left(w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2\alpha_i}{dx^2}\right) w_1 \geq 0, \tag{14b}$$

$$\left(\frac{E_0\, a'(\alpha_i)}{2} \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 + \left(w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2\alpha_i}{dx^2}\right) w_1\right) (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = 0, \tag{14c}$$

Ces conditions sont complétés par les conditions aux bords

$$\alpha_i(0) - \alpha_{i-1}(0) \geq 0, \quad \alpha_i'(0) \leq 0, \quad (\alpha_i(0) - \alpha_{i-1}(0))(\alpha_i'(0)) = 0, \tag{15a}$$
$$\alpha_i(L) - \alpha_{i-1}(L) \geq 0, \quad \alpha_i'(L) \geq 0, \quad (\alpha_i(L) - \alpha_{i-1}(L))(\alpha_i'(L)) = 0. \tag{15b}$$

3.3 Solution homogène

On cherche à présent les solutions à endommagement homogène en espace, en fonction de t.

1. Montrer que le critère d'endommagement peut se réécrire sous la forme:

$$|\sigma| \leq \bar{\sigma}(\alpha) := \sqrt{\frac{2E_0 w_1 w'(\alpha)}{s'(\alpha)}} \tag{16}$$

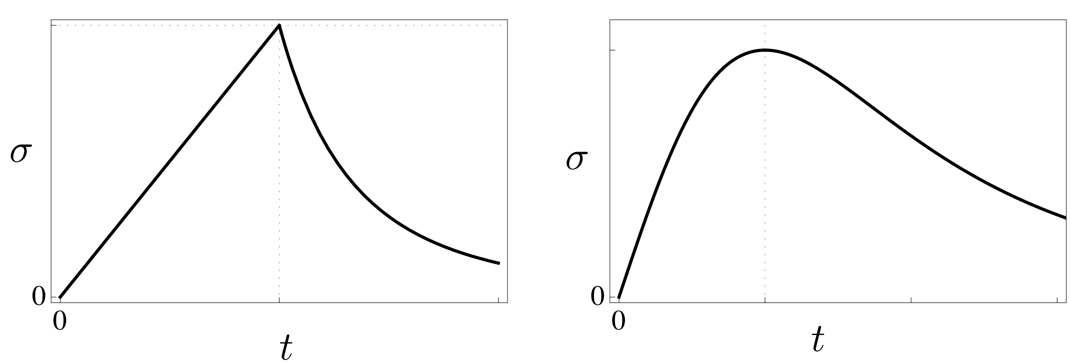
où $s(\alpha) = 1/a(\alpha)$ est la modulation de la souplesse.

2. Pour les modèle AT_1 et AT_2, determiner la contrainte maximale supportable

$$\sigma_M = \max_{\alpha \in [0,1]} \bar{\sigma}(\alpha)$$

et les valeurs de l'endommagement pour lesquels les modèles est durcissant/adoucissant en contraintes (*stress hardening/softening*).

3. Pour un chargement monotone croissant t à partir d'un état initiale $\alpha_0 = 0$, donner l'évolution de l'endommagement et de la contrainte σ avec t pour les modèles AT_1 et AT_2. Montrez que les réponses $\sigma - t$ sont cohérentes avec les réponses ci-dessous.



Marquez dans ces graphes les valueurs de contraintes maximales σ_M, de la contrainte limite d'élasticité σ_e et des valeurs correspondantes de t. Marquez les zones à régime durcissant/adoucissant en contraintes.

3.4 Solutions localisées

On cherche à présent les solutions à endommagement non-homogène. En particulier on cherche des solutions localisées dans une bande de largeur D inconnue à l'intérieur du domaine.

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, & x \in (x_0 - D/2, x_0 + D/2), \\ \alpha(x) = 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

avec x_0 et D tels que $0 < x_0 \pm D/2 < L$. Les solutions de ce type pour lesquels $\max_x \alpha(x) = 1$, donc $\sigma = 0$, sont assimilables à une approximation diffuse des fissures dans le modèle d'endommagement. On peut donc identifier la ténacité effective (énergie dissipée pour la création d'une fissure) du modèle d'endommagement avec l'énergie dissipée dans ce type de solutions :

$$\tilde{G}_c = w_1 \int_{x_0 - D/2}^{x_0 + D/2} w(\alpha(x)) + \ell^2 \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 \, dx$$

1. Montrez que les solutions doivent vérifier l'intégrale première suivante :

$$\frac{E_0}{w_1}(s(\alpha) - s(0))\,\sigma^2 + 2\,w(\alpha) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 \ell^2$$

2. Montrez que

$$\tilde{G}_c = c_w w_1 \ell, \text{ avec } c_w = 4 \int_0^1 \sqrt{w(\alpha)} d\alpha.$$

   et calculer c_w pour les modèles AT_1 et AT_2.

3. On cherche des solutions où la contrainte est nulle, avec $\sigma = 0$ et $\alpha(x_0) = 1$. On suppose aussi que $\alpha'(x_0 \pm D/2) = 0$. Déterminer le profil d'endommagement respectant ces conditions pour le modèle AT_1.

4. Donner la valeur de la constante w_1 à utiliser pour que l'énergie dissipée dans ces solutions localisées avec $\sigma = 0$ soit équivalente à G_c, i.e. à l'énergie dissipée dans une fissure dans le modèle de rupture de Griffith.

5. Étant données les propriétés matérielles du béton: $E_0 = 30\,\text{GPa}$, $G_c = 50\text{N/m}$, $\sigma_c = 4\text{MPa}$ déterminer ℓ.