

## Les modèles variationnelles de rupture en 1d : barre en traction

Jérémy Bleyer, Corrado Maurini

### Objectifs:

- Manipuler les conditions d'optimalité d'une fonctionnelle et appliquer l'approche variationnelle à la rupture dans le cas 1d
- Déterminer l'évolution quasi-statique d'un modèle d'endommagement
- Comprendre l'origine des contraintes limites et de la ténacité dans les modèles d'endommagement à gradient.
- Assimiler les bases des modèles de rupture de type champs de phase avant la mise en œuvre numérique.
- Construire des solutions de référence pour la vérification d'un code numérique de type champs de phase.

### Contexte

Les modèles variationnelle à rupture sont à la base des approches de type champs de phase pour la simulation numérique des phénomènes de rupture fragile. Dans cet exercice on se propose de retrouver les propriétés fondamentales de ces modèles dans le cadre simplifié d'une barre en traction.

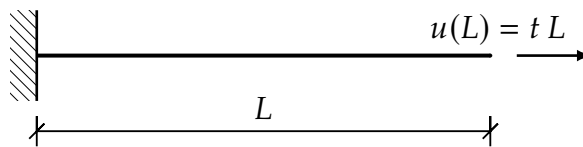


FIGURE 1 – Barre en traction avec déplacement imposé à l'extrémité.

On considère une barre encastree en  $x = 0$  et avec un déplacement imposé  $u(L) = t L$  en  $x = L$ . On note par  $E_0$  le module de Young du matériau constituant la barre (dans son état non endommagé),  $G_c$  sa ténacité,  $S$  la surface de la section droite et  $L$  la longueur. Dans la suite on étudie le problème de rupture de la barre avec un modèle de Griffith et un modèle d'endommagement à gradient.

# 1 Solution élastique : approche variationnelle

On suppose ici que la barre soit élastique linéaire. On se propose de déterminer la solution de ce problème simple avec l'approche variationnelle de l'élasticité.

L'énergie potentielle élastique de la barre est

$$\mathcal{P}(u) = \int_{\Omega} \frac{E_0 S}{2} \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx \quad (1)$$

où  $u : x \in \Omega \equiv [0, L] \rightarrow u(x) \in \mathcal{R}$  le déplacement axial de la barre. Le problème de recherche de configurations d'équilibre peut être formulée comme problème de minimisation de l'énergie. La configuration d'équilibre  $u$  doit être celle qui minimise l'énergie parmi toutes les configurations admissibles  $\hat{u} \in C_t$ , où  $C_t$  est l'espace des configurations admissibles :

$$u \in C_t : \mathcal{P}(u + h(\hat{u} - u)) - \mathcal{P}(u) \geq 0, \forall \hat{u} \in C_t. \quad (2)$$

L'espace de configuration admissibles est donné par les fonctions qui respectent les conditions aux limites de Dirichlet et qui sont assez régulières pour que  $\mathcal{P}(u) \leq +\infty$  :

- 1.1. Donner l'expression de  $C_t$  pour la barre de figure 1 et monter, avec un développement limité en  $h$  de la variation de l'énergie (2), qu'une configuration d'équilibre doit satisfaire la condition suivante, formulation faible du problème d'élasticité :

$$D_u \mathcal{P}(u)(v) = 0, \quad \forall v \in C_0 \quad (3)$$

où on note

$$D_u \mathcal{P}(u)(v) := \left. \frac{d}{dh} \mathcal{P}(u + hv) \right|_{h=0}$$

et donner pour notre exemple l'expression de  $C_0$ , définie comme l'espace vectorielle des variations admissibles, constituées par les différences entre fonctions admissibles.

- 1.2. Calculer  $D_u \mathcal{P}(u)(v)$  et montrer que la condition (3) implique la condition d'équilibre

$$\frac{d}{dx} \sigma(x) = 0, \quad \text{avec} \quad \sigma = E_0 S \frac{du}{dx}(x). \quad (4)$$

- 1.3. Déterminer les champs de déplacement  $u_t$  et contrainte  $\sigma_t$  solution du problème. Montrer que l'énergie potentielle à l'équilibre en fonction du chargement est :

$$\mathcal{P}(u_t) = \min_{u \in C_t} \mathcal{P}(u) = E_0 S L \frac{t^2}{2} \quad (5)$$

## 2 Modèle de Griffith

Dans un modèle de type "interphase franche" de rupture à la Griffith, les fissures un ensemble de points  $\Gamma \equiv \{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$  où les déplacements peuvent être discontinus. On considère ici pour la barre un modèle de Griffith monodimensionnel, caractérisée par l'énergie totale

$$\mathcal{E}_G(u, n) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} E_0 S \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx + G_c S n \quad (6)$$

où  $u : x \in [0, L] \rightarrow u(x) \in \mathcal{R}$  représente le déplacement axial de la barre et  $n$  le nombre des fissures. L'approche variationnelle de la rupture (Francfort-Marigo 1998) définit la solution du problème comme le minimum globale de l'énergie  $\mathcal{E}_G(u, n)$ , sous une contrainte d'irréversibilité pour les fissures.

- 2.1. En utilisant les résultats de la section précédente, calculer  $\mathcal{E}_G(u, 0)$  et  $\mathcal{E}_G(u, 1)$  en fonction de  $t$ . Calculer le chargement critique  $t_G$  pour la fissuration de la barre selon ce modèle. Discuter de la pertinence physique de ce modèle de nucléation.

## 3 Modèle d'endommagement à gradient

On étudie le problème d'évolution de la barre en figure 1 avec un modèle d'endommagement à gradient en 1d et une approche énergétique. On considère le problème d'évolution à temps discret, avec  $t_i = i \Delta t$  et un pas  $\Delta t > 0$  constant. Soit  $u_i : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\alpha_i : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}$  le champ de déplacement axial et d'endommagement à l'instant  $t_i$ . En  $t = 0$  la barre est à endommagement nul,  $\alpha_0 = 0$ . On suppose le champ d'endommagement libre aux bords. A cause de l'irréversibilité de l'endommagement on doit avoir  $\alpha_i \geq \alpha_{i-1} \geq 0$ .

A l'instant  $t_i = i \Delta t$ , l'état  $(u_i, \alpha_i)$  de la barre est donné par la solution du problème suivant de minimisation locale directionnelle :

Déterminer  $u_i \in C_i$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{D}(\alpha_{i-1})$  tels que  $\forall \hat{u} \in C_i, \forall \hat{\alpha} \in C(\alpha_{i-1}), \exists \bar{h} \geq 0$  :

$$\boxed{\mathcal{E}(u_i + h(\hat{u} - u_i), \alpha_i + h(\hat{\alpha} - \alpha_i)) - \mathcal{E}(u_i, \alpha_i) \geq 0, \quad \forall h \in (0, \bar{h})} \quad (7)$$

où

$$\mathcal{E}_\ell(u, \alpha) = \left( \int_0^L \frac{E_0}{2} a(\alpha(x)) \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 + w_1 \left( w(\alpha) + \ell^2 \left( \frac{d\alpha}{dx}(x) \right)^2 \right) \right) dx, \quad (8)$$

et

$$\mathcal{D}_i \equiv \{ \alpha : \alpha \in H^1(0, L), \alpha \geq \alpha_{i-1} \forall x \in [0, L] \},$$

$E_0$  étant le module de Young de la barre saine,  $\ell$  la longueur caractéristique de régularisation. La constante  $w_1$  représente l'énergie dissipée pour unité de volume dans le

modèle d'endommagement. On considère dans la suite deux modèles largement utilisés dans la littérature pour les approches de type champs-de-phase à la rupture :

$$\begin{cases} \text{AT}_1 : & a(\alpha) = (1 - \alpha)^2, & w(\alpha) = \alpha, \\ \text{AT}_2 : & a(\alpha) = (1 - \alpha)^2, & w(\alpha) = \alpha^2. \end{cases} \quad (9)$$

3.1. Montrez que toute solution du problème de minimisation doit satisfaire ces conditions d'optimalité du premier ordre par rapport à  $u$  et  $\alpha$  :

$$D_u \mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(v) = 0, \quad \forall v \in C_0 \quad (10)$$

$$D_\alpha \mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(\hat{\alpha} - \alpha_i) \geq 0, \quad \forall \hat{\alpha} \in \mathcal{D}(\alpha_i) \quad (11)$$

Ce système constitue la formulation faible en espace du problème et est à la base de l'implémentation numérique proposée en TP. Il s'agit d'un système couplé d'une équation variationnelle pour  $u$  (équilibre) et une inéquation variationnelle pour  $\alpha$  (critère d'endommagement).

3.2. Calculer les dérivées directionnelles  $D_u \mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(v)$  et  $D_\alpha \mathcal{E}(u_i, \alpha_i)(\beta)$ .

3.1. En reprenant les raisonnements de la section 1, on peut montrer que la condition d'optimalité du premier ordre par rapport à  $u$  est équivalente aux conditions d'équilibre suivantes :

$$\frac{d\sigma}{dx}(x) = 0, \quad \forall x \in (0, L), \quad \text{avec} \quad \sigma = E_0 a(\alpha(x)) \left( \frac{du}{dx}(x) + t \right), \quad (12)$$

où  $\sigma$ , indépendant de  $x$ , représente la valeur de la contrainte dans la barre.

3.2. Montrez que, en supposant les solutions assez régulières, la condition d'optimalité du premier ordre par rapport à  $\alpha$  est vérifiée si et seulement si, pour  $x \in (0, L)$  implique que

$$\frac{E_0 a'(\alpha_i)}{2} \left( \frac{du_i}{dx} \right)^2 + \left( w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2 \alpha_i}{dx^2} \right) w_1 \geq 0 \quad (13)$$

On peut montrer aussi qu'où  $\alpha_i > \alpha_{i-1}$  la condition ci-dessus doit être satisfaite comme une égalité. On conclut que les conditions d'optimalité par rapport à  $\alpha$  ont la suivante écriture en forme forte (qu'on ne demande pas de démontrer ici) :

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 0, \quad (14a)$$

$$\frac{E_0 a'(\alpha_i)}{2} \left( \frac{du_i}{dx} \right)^2 + \left( w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2 \alpha_i}{dx^2} \right) w_1 \geq 0, \quad (14b)$$

$$\left( \frac{E_0 a'(\alpha_i)}{2} \left( \frac{du_i}{dx} \right)^2 + \left( w'(\alpha_i) - 2\ell^2 \frac{d^2 \alpha_i}{dx^2} \right) w_1 \right) (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = 0, \quad (14c)$$

Ces conditions sont complétées par les conditions aux bords

$$\alpha_i(0) - \alpha_{i-1}(0) \geq 0, \quad \alpha'_i(0) \leq 0, \quad (\alpha_i(0) - \alpha_{i-1}(0))(\alpha'_i(0)) = 0, \quad (15a)$$

$$\alpha_i(L) - \alpha_{i-1}(L) \geq 0, \quad \alpha'_i(L) \geq 0, \quad (\alpha_i(L) - \alpha_{i-1}(L))(\alpha'_i(L)) = 0. \quad (15b)$$

## 4 Endommagement : solution homogène

On cherche à présent les solutions à endommagement homogène en espace, en fonction de  $t$ .

4.1. Montrer que le critère d'endommagement peut se réécrire sous la forme :

$$|\sigma| \leq \bar{\sigma}(\alpha) := \sqrt{\frac{2E_0 w_1 w'(\alpha)}{s'(\alpha)}} \quad (16)$$

où  $s(\alpha) = 1/a(\alpha)$  est la modulation de la souplesse. Donner l'expression de  $\bar{\sigma}(\alpha)$  pour les modèles AT<sub>1</sub> et AT<sub>2</sub>

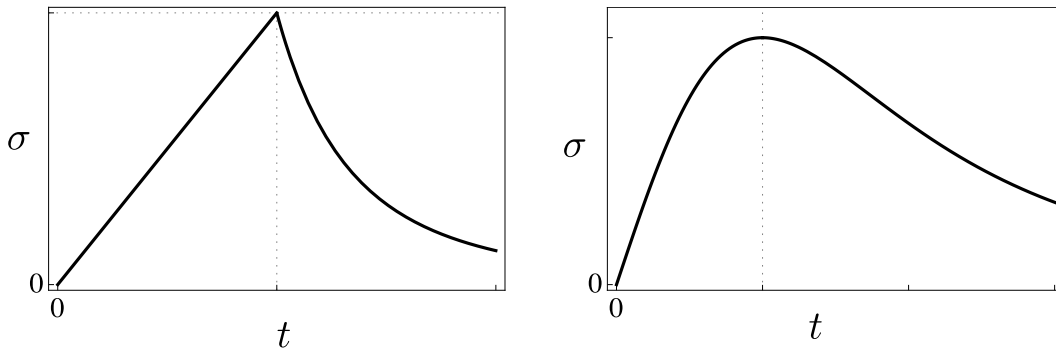
4.2. On suppose que l'état d'endommagement initial est  $\alpha_0 = 0$ . Montrez que la solution reste élastique ( $\alpha_t = 0$ ) pour  $\sigma_t < \sigma_e := \bar{\sigma}(0)$ . Déterminer  $\sigma_e$  pour les modèles AT<sub>1</sub> et AT<sub>2</sub>.

4.3. Pour les modèles AT<sub>1</sub> et AT<sub>2</sub> en (9), déterminer la contrainte maximale supportable

$$\sigma_M = \max_{\alpha \in [0,1]} \bar{\sigma}(\alpha)$$

et les valeurs de l'endommagement pour lesquels les modèles est durcissant/adoucissant en contraintes (*stress hardening/softening*).

4.4. Les figures ci-dessous donnent l'évolution de l'endommagement et de la contrainte  $\sigma$  avec  $t$  pour les modèles AT<sub>1</sub> et AT<sub>2</sub> pour un chargement monotone croissant  $t$  à partir d'un état initial  $\alpha_0 = 0$ .



Montrez que les réponses  $\sigma - t$  sont cohérentes avec les réponses précédentes. Marquez dans ces graphes les expressions de contraintes maximales  $\sigma_M$ , de la contrainte limite d'élasticité  $\sigma_e$  et des valeurs correspondantes de  $t$ . Marquez les zones à régime durcissant/adoucissant en contraintes.

## 5 Endommagement : solutions localisées

On cherche à présent les solutions à endommagement non homogène. En particulier on cherche des solutions localisées dans une bande de largeur  $D$  inconnue à l'intérieur du domaine.

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, & x \in (x_0 - D/2, x_0 + D/2), \\ \alpha(x) = 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

avec  $x_0$  et  $D$  tels que  $0 < x_0 \pm D/2 < L$ . Les solutions de ce type pour lesquels  $\max_x \alpha(x) = 1$ , donc  $\sigma = 0$ , sont assimilables à une approximation diffuse des fissures dans le modèle d'endommagement. On peut identifier la ténacité effective du modèle d'endommagement, énergie dissipée pour la création d'une fissure, avec l'énergie dissipée dans ce type de solutions :

$$\tilde{G}_c = w_1 \int_{x_0-D/2}^{x_0+D/2} w(\alpha(x)) + \ell^2 \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 dx$$

5.5. Montrer que les solutions doivent vérifier l'intégrale première suivante :

$$\frac{E_0}{2w_1} (s(\alpha) - s(0)) \sigma^2 + w(\alpha) = \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \ell^2$$

5.6. On cherche des solutions où la contrainte est nulle, avec  $\sigma = 0$  et  $\alpha(x_0) = 1$ . Montrer que  $\alpha'(x_0 \pm D/2) = 0$ . Déterminer le profil d'endommagement respectant ces conditions pour le modèle AT<sub>1</sub>.

5.7. En utilisant l'intégrale première ci-dessus, montrez que

$$\tilde{G}_c = c_w w_1 \ell, \text{ avec } c_w = 4 \int_0^1 \sqrt{w(\alpha)} d\alpha.$$

et calculer  $c_w$  pour les modèles AT<sub>1</sub> et AT<sub>2</sub>.

5.8. Donner la valeur de la constante  $w_1$  à utiliser pour que l'énergie dissipée dans ces solutions localisées avec  $\sigma = 0$  soit équivalente à  $G_c$ , i.e. à l'énergie dissipée dans une fissure dans le modèle de rupture de Griffith.

5.9. Soit  $\sigma_c$  la contrainte critique du matériau. Déterminer la valeur de la constante  $\ell$  pour avoir  $\sigma_M = \sigma_c$ .

Étant donné les propriétés matérielles du béton :  $E_0 = 30$  GPa,  $G_c = 50$  N/m,  $\sigma_c = 4$  MPa déterminer la valeur numérique de  $\ell$  pour le modèle AT<sub>1</sub>.