

## Modèles de rupture fragile

Jérémy Bleyer, Anne-Françoise Gourgues-Lorenzon

### Objectifs:

- Appliquer les concepts du modèle de Griffith par la méthode de la souplesse
- Évaluer un critère de propagation de fissure et discuter de la stabilité de la propagation
- Modèle de Beremin

## 1 Théorie de Griffith: essai *End-Notched Flexure* (ENF)

L'essai ENF (End-Notched Flexure) consiste en une flexion 3 points d'une poutre entaillée à mi-hauteur par une préfissure de longueur initiale  $a_0$  débouchant à une des extrémités de la poutre (Figure 1). Cet essai est notamment utilisé pour caractériser les propriétés de délaminage d'interface des matériaux composites multicouches.

La poutre de longueur  $L$ , de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ , est simplement appuyée à ses extrémités et chargée par un effort ponctuel vertical  $F$  appliqué au centre de la poutre. On note  $\Delta$  le déplacement vertical du point d'application de la force. Une expression analytique approchée de la relation force/déplacement peut-être obtenue à l'aide d'une modélisation simplifiée reposant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli [1]. Pour une fissure de taille  $a$  fixée, la relation force/déplacement s'exprime comme:

$$\Delta = \begin{cases} \frac{L^3/12 + a^3}{32EI} F & \text{si } a \leq L/2 \\ \frac{L^3/3 - (L-a)^3}{32EI} F & \text{si } a \geq L/2 \end{cases} \quad (1)$$

où  $EI = Ebh^3/12$  est la raideur en flexion d'une moitié de poutre.

1. Quel est le mode principal de sollicitation de la fissure ?

**Solution:** Sur appui, la fissure est sollicitée principalement par des contraintes de cisaillement, soit une fissuration en mode II.

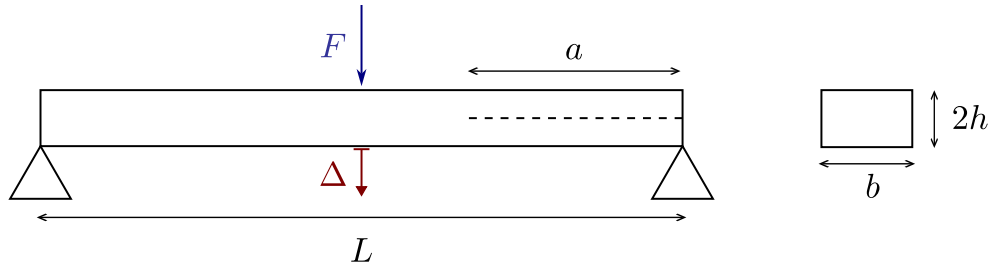


Figure 1: Essai ENF

## 1.1 Rappels préliminaires

1. En notant  $C(a) = \Delta/F$  la souplesse de la structure à longueur  $a$  de fissure fixée, donner la valeur de l'énergie potentielle de la solution suivant que l'on pilote: (a) en force, (b) en déplacement.

**Solution:** Par définition de la souplesse, l'énergie élastique vaut:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C(a) F^2$$

Lorsque l'on pilote en force, on donc:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} - W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} C(a) F^2 - F \Delta = -\frac{1}{2} C(a) F^2$$

tandis que si l'on pilote en déplacement: on a:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C(a) F^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{C(a)}$$

notons que dans ce cas, on a réexprimé l'énergie potentielle en fonction du paramètre de chargement, ici le déplacement  $\Delta$ .

2. En déduire le taux de resituation d'énergie  $\mathcal{G}$  dans les deux modes de pilotage de chargement.

**Solution:** De manière générale:

$$\mathcal{G} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dS} = -\frac{1}{b} \frac{dE_{\text{pot}}}{da}$$

On a alors pour un pilotage en force:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2b} C'(a) F^2$$

et pour un pilotage en déplacement:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2b} C'(a) \left( \frac{\Delta}{C(a)} \right)^2 = \frac{1}{2b} C'(a) F(a)^2$$

3. Rappeler la condition de propagation et de stabilité/instabilité de propagation de la fissure.

**Solution:** Il y a propagation lorsque  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ . La propagation sera stable si  $\mathcal{G}'(a) < 0$  tandis qu'elle sera instable sinon.

## 1.2 Application à l'essai ENF: pilotage en force

Dans cette section, on se limite au **pilotage en force**.

1. Dans le cas  $a \leq L/2$ , déterminer la condition de propagation de la fissure. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation.

**Solution:** On a ici:

$$C'(a) = \frac{3a^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3F^2a^2}{64bEI}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$F \leq F_c = \sqrt{\frac{64bEI\mathcal{G}_c}{3a_0^2}}$$

Au delà de  $F_c$ , comme  $\mathcal{G}'(a_0) > 0$ , la propagation est instable.

2. Faire de même pour le cas  $a \geq L/2$ .

**Solution:** On a dans ce cas:

$$C'(a) = \frac{3(L-a)^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3F^2(L-a)^2}{64bEI}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$F \leq F_c = \sqrt{\frac{64bEI\mathcal{G}_c}{3(L-a_0)^2}}$$

Au delà de  $F_c$ , comme

$$\mathcal{G}'(a_0) = -\frac{6F^2(L-a_0)}{64bEI} < 0,$$

la propagation est stable.

### 1.3 Application à l'essai ENF: pilotage en déplacement

Dans cette section, on se limite au **pilotage en déplacement** et au cas  $a \leq L/2$ .

1. Déterminer la condition de propagation de la fissure.

**Solution:** On a toujours:

$$C'(a) = \frac{3a^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{48EI\Delta^2}{b} \frac{a^2}{(L^3/12 + a^3)^2}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$\Delta \leq \Delta_c = \sqrt{\frac{b\mathcal{G}_c}{48EI} \frac{L^3/12 + a_0^3}{a_0}}$$

2. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation. On pourra pour cela s'appuyer sur le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$  représenté sur la Figure 2.

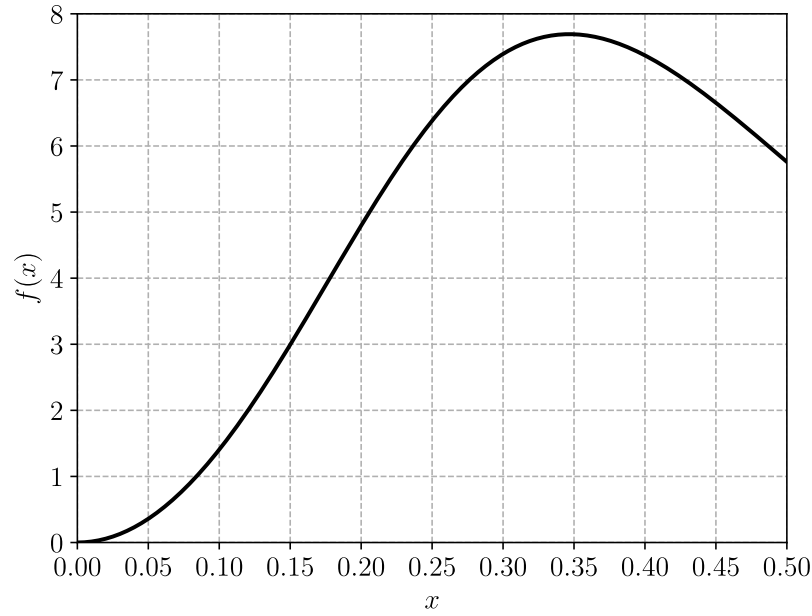
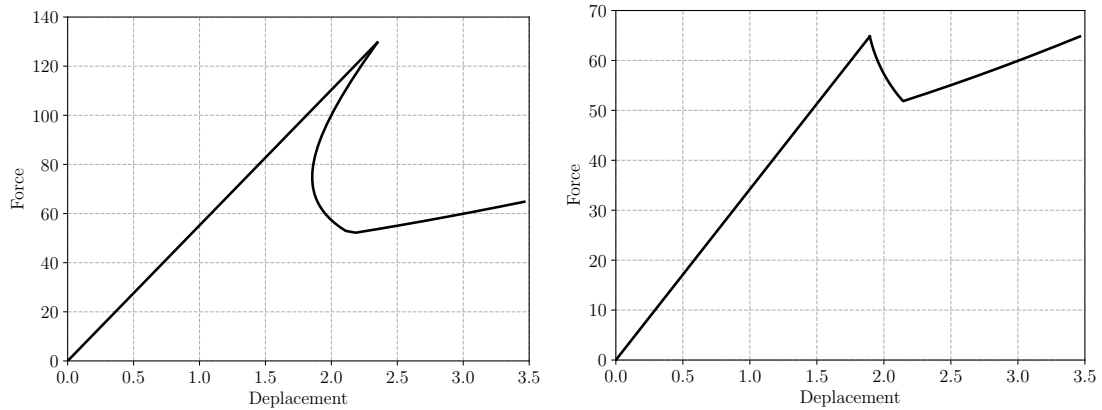


Figure 2: Graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$

**Solution:** Au delà de  $\Delta_c$ , la stabilité est conditionnée par le signe de  $\mathcal{G}'(a_0)$  qui est lié au signe de  $f'(a_0/L)$  pour la fonction  $f$  indiquée par l'énoncé. Graphiquement, on trouve que cette dérivée est positive si  $a_0/L < 0.35$  environ, correspondant à une propagation instable. Pour des fissures initialement plus grandes que  $0.35L$  la propagation est stable.

Notons que l'étude de variation exacte de la fonction conduit à la condition  $a_0 \geq \left(\frac{1}{24}\right)^{1/3} L \approx 0.347L$ . Ces différentes conditions de stabilité se traduisent également dans l'évolution de la courbe force/déplacement suivant la taille de la préfissure.



Force/déplacement à déplacement contrôlé pour différentes longueurs initiales de fissure. Gauche:  $a_0 = 0.2L$  (instable); droite:  $a_0 = 0.4L$  (stable)

## References

- [1] O. Allix, P. Ladeveze, A. Corigliano, Damage analysis of interlaminar fracture specimens, Composite Structures 31 (1995) 61–74.