

## Rupture ductile : homogénéisation de matériaux poreux

Jérémy Hure, Djimédo Kondo, Jérémy Bleyer

### Objectifs:

- obtenir un critère de plasticité pour matériaux poreux dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile
- discuter des effets d'anisotropie

Le point de départ est de considérer le **critère de plasticité de von Mises** qui s'écrit:

$$\phi(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s \cdot s} \quad \text{avec} \quad s = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma I \quad (1)$$

La déformation plastique se produit quand le critère est atteint, *i.e.*,  $\phi = 0$ . Dans la suite, l'écrouissage n'est pas pris en compte ( $\sigma_0 = C^{ste}$ ) et l'élasticité est ignorée, ce qui correspond à un matériau dit rigide parfaitement plastique. La loi d'écoulement plastique associée permet d'obtenir le taux de déformation plastique:

$$d = d_{eq} \frac{3s}{2\sigma_0} \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} d \cdot d} \quad (2)$$

Afin d'étendre ce critère à la présence d'une porosité, la géométrie présentée sur la Fig. 1 est considérée, à savoir un cylindre creux de hauteur  $L$ , de rayons intérieur  $a$  et extérieur  $b$ . La porosité, définie comme le rapport entre le volume de la cavité et le volume total est noté  $f = (a/b)^2$ .

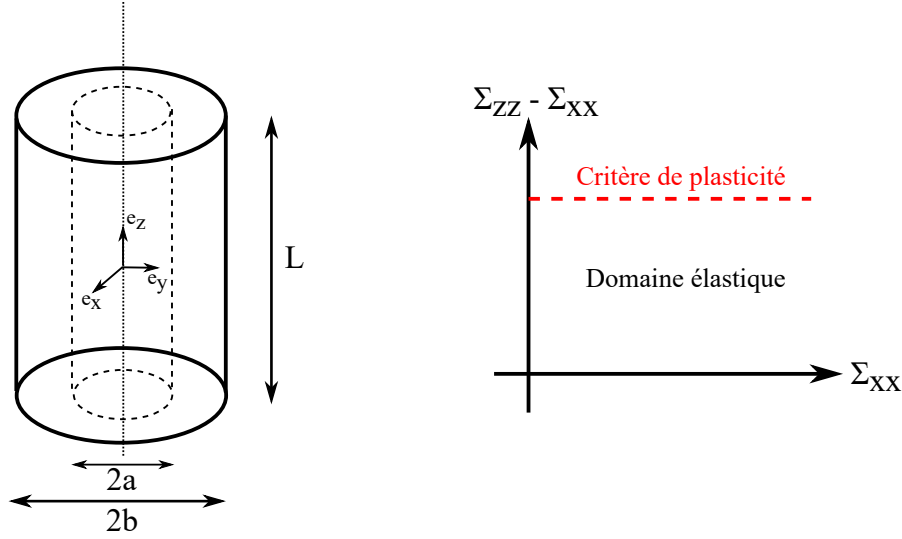


Figure 1: Géométrie considérée et critère de plasticité de la matrice

- Quel matériau peut être représenté par cette géométrie ? Dans le cas de chargement axisymétrique, montrer que le critère de plasticité de von Mises de la matrice entourant la cavité correspond à la Fig. 1.

La contrainte et le taux de déformation (plastique) macroscopique sont définis à l'échelle du cylindre par les relations suivantes:

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (3)$$

$$D = \frac{1}{V} \int_V d dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (v \otimes n + n \otimes v) dS \quad (4)$$

avec  $v$  le champ de vitesse et  $n$  la normale à la surface extérieure.

Nous cherchons à obtenir le critère de plasticité du cylindre, c'est-à-dire l'équivalent de l'Eq. 1 pour les grandeurs macroscopiques  $\Sigma$  et  $D$ . Pour cela, la théorie de l'analyse limite est utilisée. En pratique, celle-ci consiste à postuler un champ de vitesse  $v$  admissible (dans un sens qui sera détaillé dans la suite), et à calculer la dissipation plastique associée:

$$\Pi = \frac{1}{V} \int_V \sigma_0 d_{eq}(v) dV \quad (5)$$

Sous certaines conditions (qui là-encore seront détaillées dans la suite), cette dissipation plastique permet d'évaluer la contrainte maximale admissible, c'est-à-dire le critère de plasticité, par les relations suivantes:

$$\Sigma \cdot D \leq \Pi \quad \Sigma \leq \frac{\partial \Pi}{\partial D} \quad (6)$$

Afin d'obtenir une estimation du critère de plasticité, la première étape consiste donc à choisir un champ de vitesse pris sous la forme:

$$\mathbf{v} = v_r(r)\mathbf{e}_r + v_z(z)\mathbf{e}_z \quad (7)$$

- En imposant que le champ de vitesse soit incompressible ( $\text{tr} \mathbf{d} = 0$ ), montrer que celui-ci est de la forme:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{B}{r} - \frac{A}{2}r \right) \mathbf{e}_r + Az\mathbf{e}_z \quad (8)$$

- Comment s'écrit le taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  ?

Ce champ de vitesse est **cinématiquement admissible** avec un tenseur des déformations  $\mathbf{D} = D_{xx}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + D_{zz}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$  et **plastiquement admissible**, *i.e.*, est compatible avec la plasticité de von Mises qui impose un écoulement incompressible. De plus, il est possible de montrer que  $\mathbf{v}(\partial V) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$ , avec  $\mathbf{x}$  le vecteur position, ce qui correspond à des conditions aux limites de type **homogène au bords en déformation**. Ces trois conditions justifient théoriquement l'utilisation de l'analyse limite (Eq. 6). Dans la suite, on fait l'hypothèse que  $A \geq 0$  et  $B \geq 0$ .

- Donner l'expression de la dissipation plastique  $\Pi$  (Eq. 5) sous forme d'une intégrale

Avant d'évaluer cette intégrale dans le cas général, nous considérons deux cas particuliers, à savoir ( $B = 0, A \neq 0$ ) et ( $B \neq 0, A = 0$ ).

- En calculant la dissipation plastique  $\Pi$  et explicitant l'Eq. 6 dans chacun de ces cas, déterminer les critères de plasticité associés.

- Tracer le critère de plasticité dans le plan  $(\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}, \Sigma_{xx})$

- Dans le cas général, il est possible de montrer que:

$$\Pi = \sigma_0 A \lambda \left[ \text{asinh}\left(\frac{\lambda}{f}\right) - \text{asinh}(\lambda) - \sqrt{1 + \frac{f^2}{\lambda^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} \right] \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2B}{\sqrt{3}Ab^2} \quad (9)$$

- En explicitant l'Eq. 6, montrer que:

$$\frac{\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}}{\sigma_0} = \sqrt{1 + \lambda^2} - \sqrt{f^2 + \lambda^2} \quad (10)$$

$$\frac{\Sigma_{xx}}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \text{asinh}\left(\frac{\lambda}{f}\right) - \text{asinh}(\lambda) \right) \quad (11)$$

- En combinant les expressions précédentes, montrer que:

$$\phi(\Sigma) = \left( \frac{\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( \sqrt{3} \frac{\Sigma_{xx}}{\sigma_0} \right) - (1 + f)^2 = 0 \quad (12)$$

L'Eq. 12 correspond au critère de plasticité pour matériau poreux recherché, dont il convient de vérifier la pertinence en étudiant les cas limites.

- Que devient l'Eq. 12 dans la limite  $f \rightarrow 0$  ? Et dans la limite  $f \rightarrow 1$  ?
- Tracer le critère dans le plan  $\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}, \Sigma_{xx}$  pour différentes valeurs de porosité.

Le critère de plasticité obtenu doit être accompagné d'une loi d'écoulement, de la même manière que pour la plasticité de von Mises (Eq. 2).

- À partir des relations obtenues précédemment entre  $\Sigma_{xx}, \Sigma_{zz}$  et  $D_{xx}, D_{zz}$ , montrer que:

$$D \propto \frac{\partial \phi(\Sigma)}{\partial \Sigma} \quad (13)$$

La loi de normalité, dont découle l'Eq. 2, a été conservée lors de l'analyse limite. Dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile, l'évolution de la porosité  $f$  est particulièrement d'intérêt:

- Montrer que  $\dot{f} = (1 - f)\text{tr}D$ . Donner son expression en fonction de  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{zz}$ .

Le critère de plasticité pour matériaux poreux obtenu est pertinent dans le cas des matériaux isotropes. Le matériau caractérisé dans les travaux pratiques (alliage X100) est orthotrope et peut être modélisé, en l'absence de porosité, par la plasticité de Hill:

$$\phi(\sigma) = \sigma_{eq}^H - \sigma_0 \leq 0 \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma \cdot \mathbb{A} \cdot \sigma} \quad (14)$$

Le tenseur  $\mathbb{A}$  contient les informations concernant l'anisotropie du matériau. En notation de Voigt, ces tenseurs sont représentés par les matrices suivantes dans les axes d'orthotropies:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} F + H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G + F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & G + H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \quad (15)$$

Pour  $F = G = H = 1/2$  et  $L = M = N = 3/2$ , le critère de Hill correspond au critère de von Mises.

Il est possible de conduire la même démarche d'analyse limite que dans le cas isotrope pour prendre en compte l'effet de la porosité, ce qui conduit au critère de plasticité suivant [1]:

$$\phi(\Sigma) = \left( \frac{\Sigma_{eq}^H}{\sigma_0^2} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{\sqrt{3}}{h_m} \frac{\Sigma_{xx}}{\sigma_0} \right) - (1 + f)^2 = 0 \quad (16)$$

avec  $h_m =$ .

- À partir de l'expression précédente, commenter l'effet de l'anisotropie sur la plasticité des matériaux poreux

[1] A. A. Benzerga, J. Besson, Plastic potentials for anisotropic porous solids, European Journal of Mechanics - A/Solids, 20, 397-434, 2001