Modèles de rupture fragile

Jérémy Bleyer, Anne-Françoise Gourgues-Lorenzon

Objectifs:

- *Appliquer les concepts du modèle de Griffith par la méthode de la souplesse*
- *Évaluer un critère de propagation de fissure et discuter de la stabilité de la propagation*
- *Modèle de Beremin*

1 Théorie de Griffith: essai *End-Notched Flexure* (ENF)

L'essai ENF (End-Notched Flexure) consiste en une flexion 3 points d'une poutre entaillée à mi-hauteur par une préfissure de longueur initiale a_0 débouchant à une des extrémités de la poutre (Figure 1). Cet essai est notamment utilisé pour caractériser les propriétés de délaminage d'interface des matériaux composites multicouches.

La poutre de longueur L, de hauteur $2h$ et de largeur b, est simplement appuyée à ses extrémités et chargée par un effort ponctuel vertical F appliqué au centre de la poutre. On note Δ le déplacement vertical du point d'application de la force. Une expression analytique approchée de la relation force/déplacement peut-être obtenue à l'aide d'une modélisation simplifiée reposant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli [**?**]. Pour une fissure de taille a fixée, la relation force/déplacement s'exprime comme:

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{L^3/12 + a^3}{32EI}F & \text{si } a \leq L/2 \\ \dfrac{L^3/3 - (L-a)^3}{32EI}F & \text{si } a \geq L/2 \end{cases} \tag{1}$$

où $EI = Ebh^3/12$ est la raideur en flexion d'une moitié de poutre.

1. Quel est le mode principal de sollicitation de la fissure ?

> **Solution:** Sur appui, la fissure est sollicitée principalement par des contraintes de cisaillement, soit une fissuration en mode II.

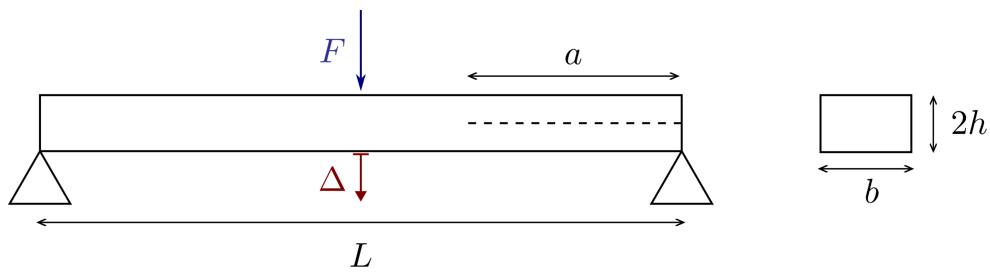


Figure 1: Essai ENF

1.1 Rappels préliminaires

1. En notant $C(a) = \Delta/F$ la souplesse de la structure à longueur a de fissure fixée, donner la valeur de l'énergie potentielle de la solution suivant que l'on pilote: (a) en force, (b) en déplacement.

Solution: Par définition de la souplesse, l'énergie élastique vaut:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C(a) F^2$$

Lorsque l'on pilote en force, on donc:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} - W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} C(a) F^2 - F\Delta = -\frac{1}{2} C(a) F^2$$

tandis que si l'on pilote en déplacement: on a:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C(a) F^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{C(a)}$$

notons que dans ce cas, on a réexprimé l'énergie potentielle en fonction du paramètre de chargement, ici le déplacement Δ.

2. En déduire le taux de resitution d'énergie $\mathcal{G}$ dans les deux modes de pilotage de chargement.

Solution: De manière générale:

$$\mathcal{G} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dS} = -\frac{1}{b} \frac{dE_{\text{pot}}}{da}$$

On a alors pour un pilotage en force:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2b} C'(a) F^2$$

et pour un pilotage en déplacement:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2b} C'(a) \left(\frac{\Delta}{C(a)} \right)^2 = \frac{1}{2b} C'(a) F(a)^2$$

3. Rappeler la condition de propagation et de stabilité/instabilité de propagation de la fissure.

Solution: Il y a propagation lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$. La propagation sera stable si $\mathcal{G}'(a) < 0$ tandis qu'elle sera instable sinon.

1.2 Application à l'essai ENF: pilotage en force

Dans cette section, on se limite au **pilotage en force**.

1. Dans le cas $a \leq L/2$, déterminer la condition de propagation de la fissure. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation.

Solution: On a ici:

$$C'(a) = \frac{3a^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3F^2 a^2}{64bEI}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$F \leq F_c = \sqrt{\frac{64bEI\mathcal{G}_c}{3a_0^2}}$$

Au delà de F_c, comme $\mathcal{G}'(a_0) > 0$, la propagation est instable.

2. Faire de même pour le cas $a \geq L/2$.

Solution: On a dans ce cas:

$$C'(a) = \frac{3(L-a)^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3F^2(L-a)^2}{64bEI}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$F \leq F_c = \sqrt{\frac{64bEI\mathcal{G}_c}{3(L-a_0)^2}}$$

Au delà de F_c, comme

$$\mathcal{G}'(a_0) = -\frac{6F^2(L-a_0)}{64bEI} < 0,$$

la propagation est stable.

1.3 Application à l'essai ENF: pilotage en déplacement

Dans cette section, on se limite au **pilotage en déplacement** et au cas $a \leq L/2$.

1. Déterminer la condition de propagation de la fissure.

Solution: On a toujours:

$$C'(a) = \frac{3a^2}{32EI} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{48EI\Delta^2}{b}\frac{a^2}{(L^3/12+a^3)^2}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que:

$$\Delta \leq \Delta_c = \sqrt{\frac{b\mathcal{G}_c}{48EI}}\frac{L^3/12+a_0^3}{a_0}$$

2. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation. On pourra pour cela s'appuyer sur le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{(1/12+x^3)^2}$ représenté sur la Figure 2.

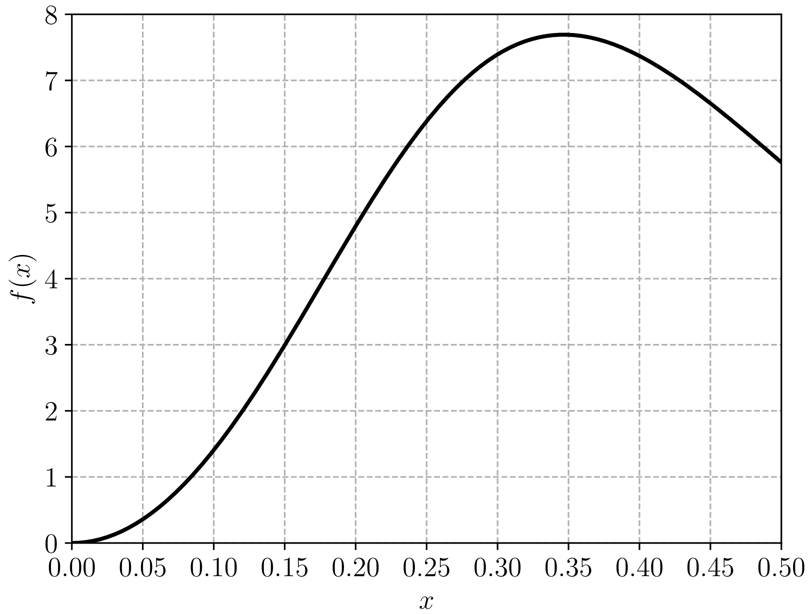
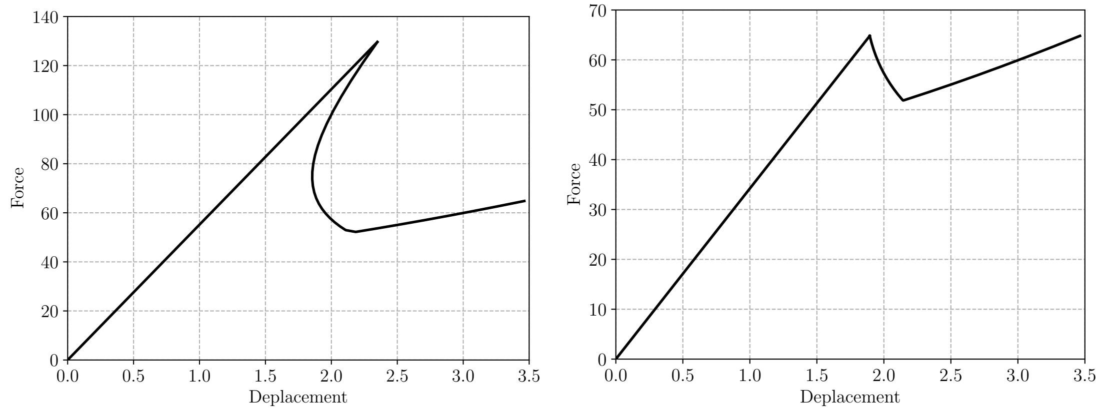


Figure 2: Graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$

Solution: Au delà de Δ_c, la stabilité est conditionnée par le signe de $\mathcal{G}'(a_0)$ qui est lié au signe de $f'(a_0/L)$ pour la fonction f indiquée par l'énoncé. Graphiquement, on trouve que cette dérivée est positive si $a_0/L < 0.35$ environ, correspondant à une propagation instable. Pour des fissures initialement plus grandes que $0.35L$ la propagation est stable.

Notons que l'étude de variation exacte de la fonction conduit à la condition $a_0 \geq \left(\frac{1}{24}\right)^{1/3} L \approx 0.347L$. On pourra également montrer l'évolution de la courbe force/déplacement suivant la taille de la préfissure.



Force/déplacement à déplacement contrôlé pour différentes longueurs initiales de fissure. Gauche: $a_0 = 0.2L$ (instable); droite: $a_0 = 0.4L$ (stable)