Python pour le MECEN 2021

1er décembre 2021

_consommateur

1 Du côté du consommateur

Fonction d'utilité. On se donne des paramètres réels $a > 0$ et $b > |d| > 0$. On introduit maintenant la fonction d'utilité $U : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ par

$$\forall (q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3, \quad U(q_0, q_1, q_2) := q_0 + a(q_1 + q_2) - \frac{bq_1^2 + bq_2^2 + 2dq_1q_2}{2}. \tag{1}$$

eq:1

Ici q_0, q_1, q_2 sont les quantitées consommées de trois bien (de type 0, 1 et 2).

Question 1. *On pourra chercher à dessiner les ensembles de niveaux de U avec des sliders pour ajuster les valeurs des paramètres.*

Contrainte sur le revenu. On considère p_1 et p_2 des réels positifs correspondant au prix unitaire des biens de type 1 et 2. On se donne également un réel positif R représentant le revenu global du consommateur.

Prise de décision rationnelle. La répartition de consommation la plus avantageuse est alors la solution du programme suivant.

$$\begin{cases} \arg\max u(q_0, q_1, q_2), \\ q_0, q_1, q_2 \geq 0, \\ q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 \leq R. \end{cases} \tag{2}$$

eq:2

Question 2. *On pourra reprendre la visualisation précédente pour ajouter le tétraédre de contrainte et des sliders correspondant aux nouveaux paramètres.*

Question 3. *Montrer que le programme précédent permet de définir génériquement $\tilde{q_0}, \tilde{q_1}, \tilde{q_2}$ des fonctions des prix unitaires p_1, p_2.*

Question 4. *Faites une visualisation des graphes des trois fonctions avec des sliders représentant les paramètres.*

Question 5. *Déterminer des hypothèses sous lesquelles on peut transformer le système*

$$\begin{cases} \tilde{q_0}(p_1, p_2) = q_0, \\ \tilde{q_1}(p_1, p_2) = q_1, \\ \tilde{q_2}(p_1, p_2) = q_2, \end{cases} \tag{3}$$

eq:3

en

$$\begin{cases} \tilde{p_1}(q_0, q_1, q_2) = p_1, \\ \tilde{p_2}(q_0, q_1, q_2) = p_2. \end{cases} \tag{4}$$

2 Concurrence en prix

rence_en_prix

Description de l'économie. Dans cette économie, il y a deux entreprises.

- L'entreprise 1 produit des produits de type 1 au cout unitaire de revient $c_1 > 0$ et le vend au prix unitaire p_1.
- L'entreprise 2 produit des produits de type 2 au cout unitaire de revient $c_2 > 0$ et le vend au prix unitaire p_2.

Profits. On a alors les niveaux de profits de chaque entreprise donnée par les fonctions

$$\forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \Pi_1(p_1, p_2) := (p_1 - c_1)\tilde{q_1}(p_1, p_2), \tag{5}$$

eq:6

et

$$\forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \Pi_2(p_1, p_2) := (p_2 - c_2)\tilde{q_2}(p_1, p_2). \tag{6}$$

eq:7

Décision rationnelle Chaque entreprise cherchant à maximiser son profit cherche à résoudre le programme

$$\begin{cases} \arg\max \Pi_1(p_1), \\ p_1 \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

eq:4

$$\begin{cases} \arg\max \Pi_2(p_2), \\ p_2 \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

eq:5

Question 6. *Montrer que les programmes précédents fournissent des fonctions de réactions r_1 au prix p_2 (resp. r_2 au prix p_1).*

Question 7. *Montre qu'il existe un équilibre de Nash (p_1^*, p_2^*) solution de*

$$\begin{cases} r_1(p_2^*) = p_1^*, \\ r_2(p_1^*) = p_2^*. \end{cases} \tag{9}$$

eq:8

Question 8. *Visualiser les courbes de réactions (et donc les équilibres de Nash qui sont les intersections) avec des sliders permettant de déterminer les paramètres.*

3 Concurrence en quantité

e_en_quantite

Les variables de décision des entreprises sont maintenant les quantités produites q_1, q_2. On obtient donc des problèmes

$$\begin{cases} \arg\max \tilde{p_1}(q_0, q_1, q_2)q_1 - c_1 q_1, \\ q_1 \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

eq:9

et

$$\begin{cases} \arg\max \tilde{p_2}(q_0, q_1, q_2)q_2 - c_2 q_2, \\ q_2 \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

eq:10

Question 9. *Montrer que les programmes fournissent des fonctions de réactions s_1 à la quantité produite q_2 (resp. s_2 à q_1).*

Question 10. *Montre qu'il existe un équilibre de Nash* (q_1^*, q_2^*) *solution de*

$$\begin{cases} s_1(q_2^*) = q_1^*, \\ s_2(q_1^*) = q_2^*. \end{cases} \tag{12}$$ eq:11

Question 11. *Visualiser les courbes de réactions (et donc les équilibres de Nash qui sont les intersections) avec des sliders permettant de déterminer les paramètres.*