CY Université **2021/2022**
Département Informatique
Licence 3 Informatique

Probabilités et Statistiques

TD numéro. 4

Exercice 1.

Soient X et Y deux v.a. sur un même espace probabilisé.

1. Montrer que $\mathbb{E}(aX) = a \times \mathbb{E}(X)$.
2. Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
3. Montrer que pour X et Y indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exercice 2.

On reprend l'exercice des 4 séries de 4 bits.
Soient X_1, X_2, X_3, X_4 les variables aléatoires associées à la somme des valeurs de la première, deuxième, troisième et quatrième suite, respectivement. On considère les v.a. $S_{12} = X_1 + X_2$, $S_{34} = X_3 + X_4$, et $Z = S_{12} + S_{34}$.

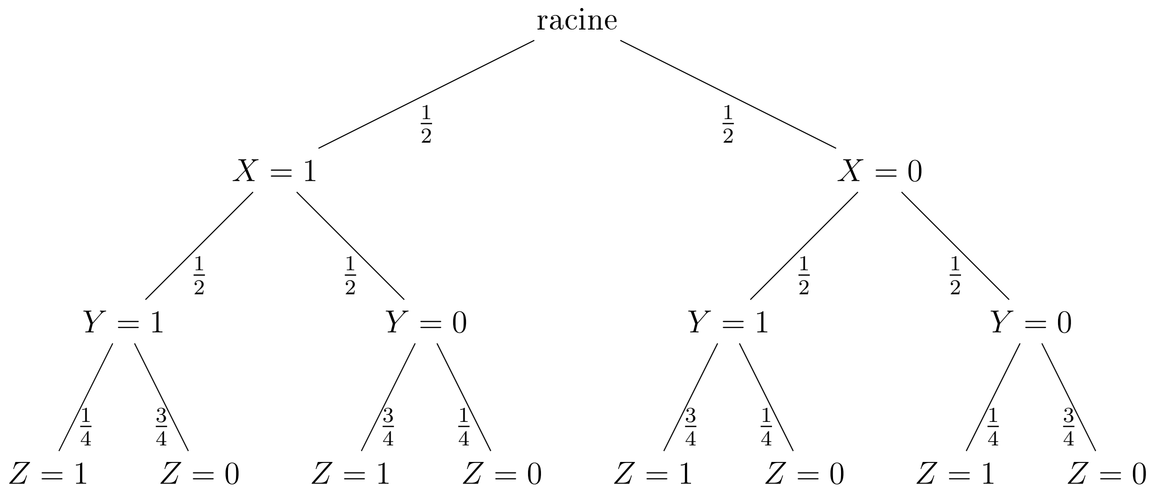
1. Rappeler les lois de probabilités de S_{12} et S_{34}.
   On redonnera les tableaux correspondants.
2. Calcul d'espérance :
   (a) En utilisant la définition de l'espérance, calculer $\mathbb{E}(S_{12})$ et $\mathbb{E}(S_{34})$.
   (b) Déduire $\mathbb{E}(Z)$.
   (c) Comment aurait-on pu calculer autrement $\mathbb{E}(S_{12})$?
3. Calcul de variances :
   (a) En utilisant la définition de la variance, calculer $V(S_{12})$, $V(S_{34})$.
   (b) En utilisant la formule $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ calculer $V(S_{12})$.
   (c) Que peut-on dire de $V(S_{12}) + V(S_{34})$ et $V(Z)$?

Exercice 3.

Une entreprise dispose d'une flotte de serveurs.
Par des études statistiques on détermine les probabilités qu'un serveur tombe en panne l'année N, N+1 et N+2.
On modélise cette expérience aléatoire par un processus aléatoire étudiant la survenue des pannes au cours des 3 années.
On définit plusieurs variables aléatoires :

1. X la v.a. qui associe 1 si le serveur tombe en panne l'année N.
2. Y la v.a. qui associe 1 si le serveur tombe en panne l'année N+1.
3. Z la v.a. qui associe 1 si le serveur tombe en panne l'année N+2.

Vous trouverez ci-dessous l'arbre de probabilités associé :



1. Rappeler la définition de l'indépendance de 2 v.a.
2. Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle de 3 v.a.
3. On souhaite montrer que X, Y et Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Z = 1 \big| Y = 1)$; $\mathbb{P}(Z = 1 \big| X = 1)$; $\mathbb{P}(Y = 1 \big| X = 1)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$; $\mathbb{P}(Y = 1)$; $\mathbb{P}(Z = 1)$.
   Déduire que les variables aléatoires X, Y, Z sont deux à deux indépendantes.
   (c) Déterminer $\mathbb{P}(Z = 1 \big| X = 1, Y = 1)$.Conclure ?