CY Université **2021/2022**
Département Informatique
Licence 3 Informatique

Probabilités et Statistiques

TD numéro. 5

On considère deux joueurs Alice et Bob.
Alice commence le jeu en lançant deux dés, on note la somme des résultats par s_{A1}.
Alice lance à nouveau les dés, et la somme est notée par s_{A2}.
Le score, qu'on note s_A correspond à la plus grande valeur entre s_{A1} et s_{A2}.
Puis Bob lance une fois les deux dés, et on fait la somme qui définit son score noté s_B.

Bob gagne si son score est supérieur ou égal à celui d'Alice.
Sinon Alice gagne.
On note A la v.a. de Bernoulli de paramètre p_A qui associe 1 lorsque Alice gagne.
On note B la v.a. de Bernoulli de paramètre p_B qui associe 1 lorsque Bob gagne.

Partie I.

On admet que $p_A = \frac{28365}{46656}$.

1. Représenter par un tableau les lois de probabilités des v.a. A et B.
2. Que vaut $A + B$? Quelle est la loi de probabilité ?
   $A + B$ est-elle une v.a. de Bernoulli ?
3. Déterminer $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$.
4. Alice et Bob misent chacun 10 euros au début de la partie.
   Celui qui gagne remporte la mise totale (soit 20 euros).
   (a) Soit X la v.a. qui associe le gain final de Alice et Y la v.a. qui associe le gain final de Bob.
   Déterminer les lois de probabilités de X et Y.
   (b) X et Y sont-elles des v.a. de Bernoulli ? Des multiples de v.a. de Bernoulli?
   (c) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   (d) A qui le jeu est-il profitable ?
   Note : le jeu est profitable à celui qui a l'espérance de gain la plus grande.
   (e) Quel devrait être le montant des mises respectives de Alice et Bob pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
5. Alice et Bob décident de jouer 10 fois de suite à ce jeu.
   On note Z la v.a. qui associe le nombre de victoires de Alice et G la v.a. qui associe le gain algébrique d'Alice.
   (a) Montrer que Z est une v.a. de distribution binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$ et $\mathbb{P}(Z = 5)$.

(c) Déterminer le plus petit entier x tel que $\mathbb{P}(Z \geq x) < \dfrac{1}{2}$.

(d) Montrer que $G = 20Z - 100$.

(e) Déterminer $\mathbb{P}(G = 0)$.

(f) Quel devrait-être le montant des mises respectives de Alice et Bob pour que le jeu soit équitable.

Partie II.

En utilisant les informations données ci-dessous, écrivez un programme qui pourra déterminer les lois de probabilités de s_A, s_B et (s_A, s_B), et qui calcule la probabilité que Alice gagne $(s_A > s_B)$.

1. Construire deux tableaux contenant les probabilités de réalisation de s_{A1} et s_{A2}.
2. Construire un tableau ou une matrice P dont les éléments pour chaque (i, j) correspondent à la probabilité de réalisation du couple (s^i_{A1}, s^j_{A2}), c'est-à-dire la $i^{ème}$ valeur de s_{A1} et la $j^{ème}$ valeur de s_{A2}. Comme s_{A1} et s_{A2} sont indépendantes, cette probabilité sera égale à $P(i, j) = \mathbb{P}(s^i_{A1}) \times \mathbb{P}(s^j_{A2})$.
3. On construit un nouveau tableau P_A qui correspondra à la loi de probabilité de s_A. Pour chaque valeur $k = \overline{2, 12}$ on détermine $P_A(k)$ en utilisant la formule suivante: $P_A(k) = \sum_{2\leq j\leq k} P(k, j) + \sum_{2\leq i\leq k-1} P(i, k)$.
4. Construire un tableau P_B avec la loi de probabilité de s_B (qui est la même que s_{A1} et s_{A2}).
5. En utilisant P_A et P_B, déduire la loi de probabilité de (s_A, s_B), notée P_{AB}.
6. Utiliser P_{AB} pour déterminer la probabilité que Alice gagne.