

Παρουσίαση 4ης Άσκησης

*Παραλληλοποίηση και βελτιστοποίηση αλγορίθμων
σε αρχιτεκτονικές κατανεμημένης μνήμης*

Συστήματα Παράλληλης Επεξεργασίας
9ο Εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ



*Εργ. Υπολογιστικών Συστημάτων
Σχολή ΗΜΜΥ, Ε.Μ.Π.*



Δεκέμβριος 2022

Αναδρομή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

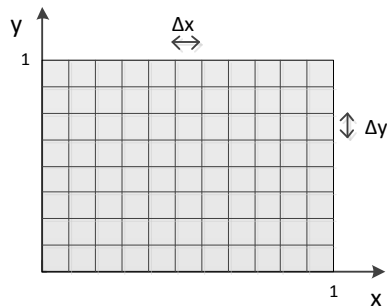
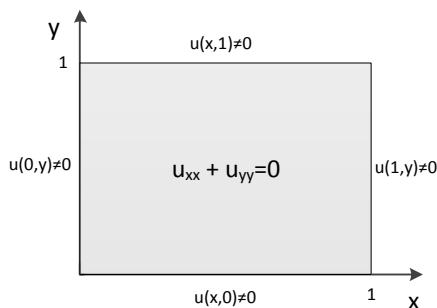
- **Εξίσωση Poisson:** $\nabla^2 u = f$ σε χωρίο Ω
 - ▶ Γνωστή και ως *κυματική εξίσωση*
- **Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (2Δ):** $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u(x, y) = f(x, y)$
- **Εξίσωση Laplace:** $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u(x, y) = 0$
 - ▶ Γνωστή και ως *εξίσωση θερμότητας*
 - ▶ Ειδική περίπτωση της Poisson: $f=0$

Διάδοση θερμότητας σε δύο διαστάσεις

- Απλή εφαρμογή - Διάδοση θερμότητας σε επιφάνεια από το σύνορο στο εσωτερικό



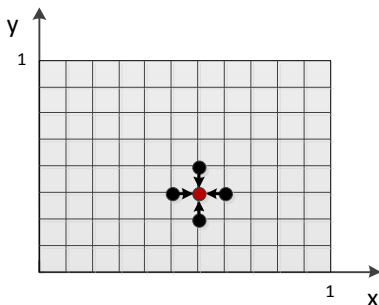
- Επίλυση εξίσωσης θερμότητας με συνοριακές συνθήκες



Υπολογιστικές μέθοδοι (I) - Μέθοδος Jacobi

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^t + u_{x,y-1}^t + u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t}{4}$$

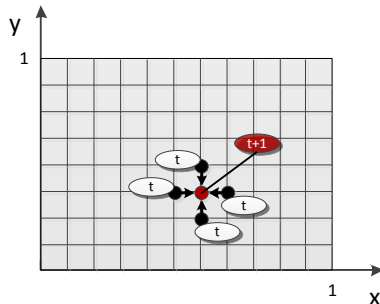
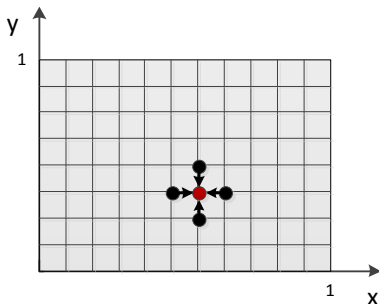


- 5-point stencil
- Κάθε στοιχείο υπολογίζεται από τα γειτονικά του

Υπολογιστικές μέθοδοι (I) - Μέθοδος Jacobi

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^t + u_{x,y-1}^t + u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t}{4}$$



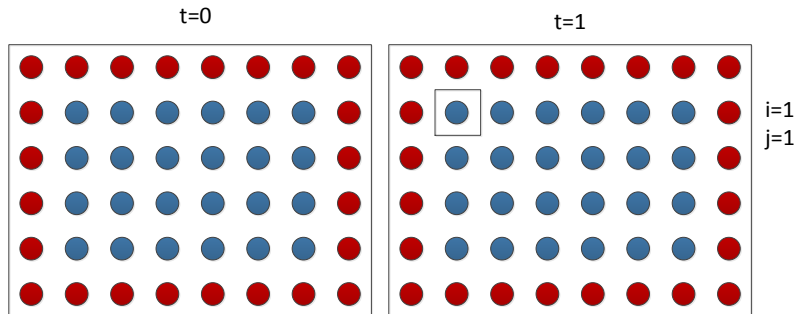
Υπολογιστικές μέθοδοι (I) - Μέθοδος Jacobi

Αλγόριθμος Jacobi

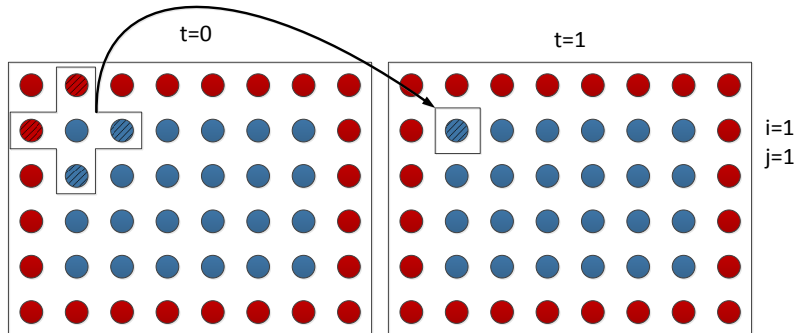
```
for  $t = 0; t < T \&\& !converged; t++$  do
  for  $i = 1; i < X - 1; i++$  do
    for  $j = 1; j < Y - 1; j++$  do
       $u[t + 1][i][j] =$ 
         $(u[t][i - 1][j] + u[t][i][j - 1] + u[t][i + 1][j] + u[t][i][j + 1])/4$ 
    end
  end
   $converged = checkConvergence(u[t], u[t + 1])$ 
end
```

- Για τον υπολογισμό των τιμών της χρονικής στιγμής $t+1$, χρησιμοποιούνται οι τιμές της χρονικής στιγμής t
 - ▶ Απαιτούνται τουλάχιστον δύο πίνακες, ένας για την τρέχουσα ($t+1$) κι ένας για την προηγούμενη (t) χρονική στιγμή
- Στο τέλος κάθε βήματος, πραγματοποιείται έλεγχος σύγκλισης

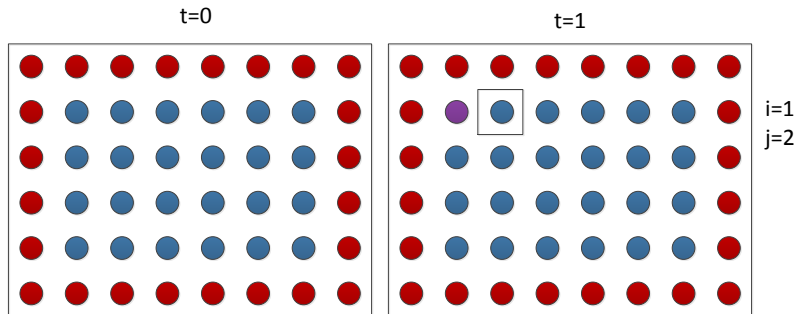
Εκτέλεση Jacobi (I)



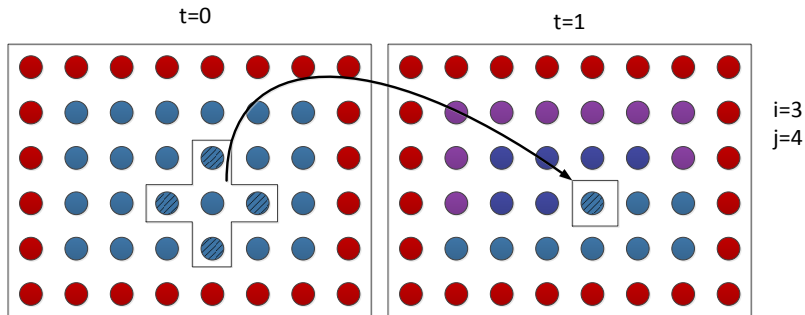
Εκτέλεση Jacobi (II)



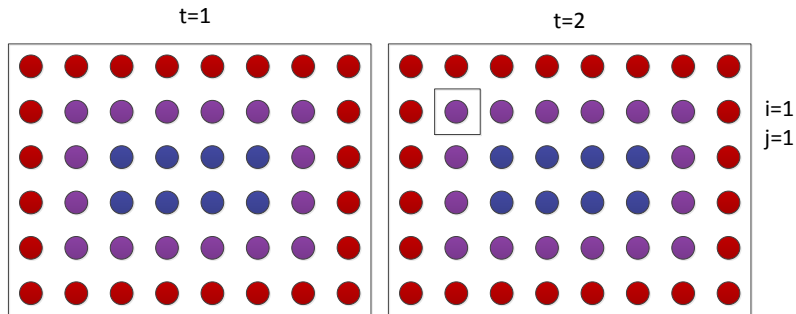
Εκτέλεση Jacobi (III)



Εκτέλεση Jacobi (IV)

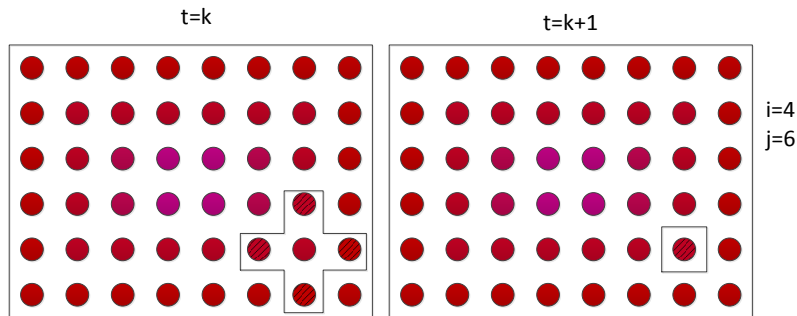


Εκτέλεση Jacobi (V)



Εκτέλεση Jacobi (VI)

Σύγκλιση

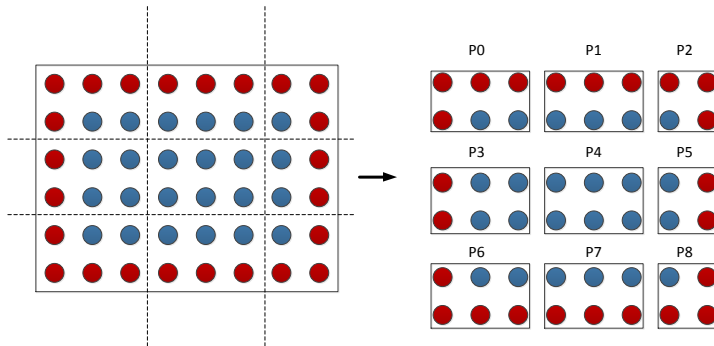


- Τα στοιχεία του πίνακα δε διαφέρουν (ή διαφέρουν ελάχιστα) στις χρονικές στιγμές t και $t+1$
- Ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Διαμοιρασμός πίνακα

- Θεωρούμε δισδιάστατο πλέγμα επεξεργαστών

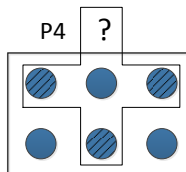


- Πώς διαμοιράζουμε τον πίνακα στο MPI; Ποιες συναρτήσεις χρησιμοποιούμε;

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

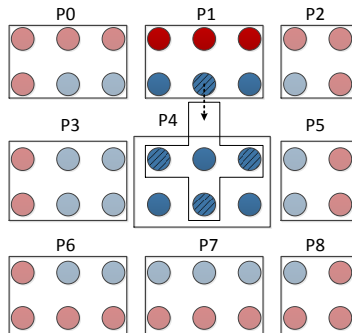
Υπολογιστικός πυρήνας

- Έχει κάθε διεργασία τα στοιχεία που χρειάζεται;



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας



- Ποια στοιχεία πρέπει να ανταλλάσσουν οι επεξεργαστές;
- Πότε γίνεται η ανταλλαγή δεδομένων;
- Ποιες συναρτήσεις MPI χρησιμοποιούμε για την επικοινωνία;
- Πού αποθηκεύονται τα δεδομένα αυτά;

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Έλεγχος σύγκλισης

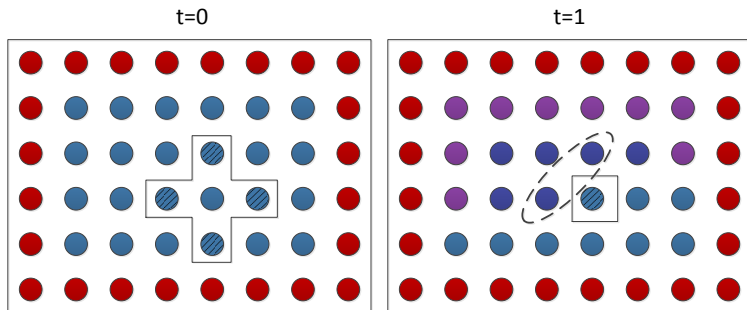
Έλεγχος σύγκλισης

```
for  $i = 1; i < X - 1; i++$  do  
  for  $j = 1; j < Y - 1; j++$  do  
    if  $|u[t + 1][i][j] - u[t][i][j]| > \varepsilon$  then  
      return 0  
    end  
  end  
end  
return 1;
```

- Ο έλεγχος σύγκλισης γίνεται τοπικά σε κάθε διεργασία.
- Πώς θα ελέγξουμε τη σύγκλιση σε όλο το χωρίο;

Υπολογιστικές μέθοδοι (II) - Μέθοδος Gauss-Seidel

- Η μέθοδος Jacobi λύνει το πρόβλημα, αλλά έχει πολύ αργό ρυθμό σύγκλισης
- **Παρατήρηση 1:** Όταν υπολογίζω το σημείο $u[t+1][i][j]$, έχω ήδη υπολογίσει τα σημεία $u[t+1][i-1][j]$, $u[t+1][i][j-1]$

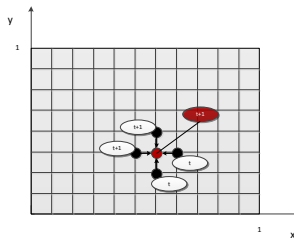
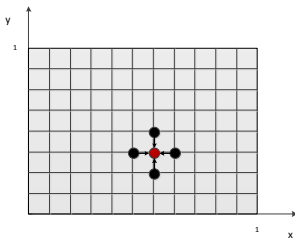


Υπολογιστικές μέθοδοι (II) - Μέθοδος Gauss-Seidel

- Η μέθοδος Jacobi λύνει το πρόβλημα, αλλά έχει πολύ αργό ρυθμό σύγκλισης
- **Παρατήρηση 2:** Τα σημεία $u[t+1][i-1][j]$, $u[t+1][i][j-1]$ έχουν updated τιμές σε σχέση με τα $u[t][i-1][j]$, $u[t][i][j-1]$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t}{4}$$



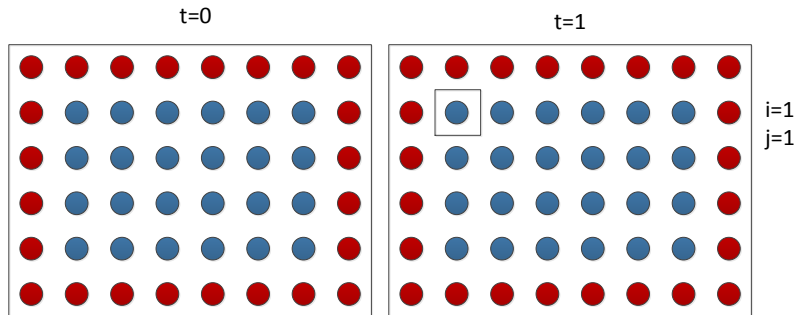
Υπολογιστικές μέθοδοι (II) - Μέθοδος Gauss-Seidel με SOR

- Successive Over-Relaxation (SOR): Ένας τρόπος για ταχύτερη σύγκλιση
- Αρχική επαναληπτική μέθοδος: $u^{t+1} = f(u^t)$
- Επαναληπτική μέθοδος με SOR: $u^{t+1} = (1 - \omega)u^t + \omega f(u^t)$

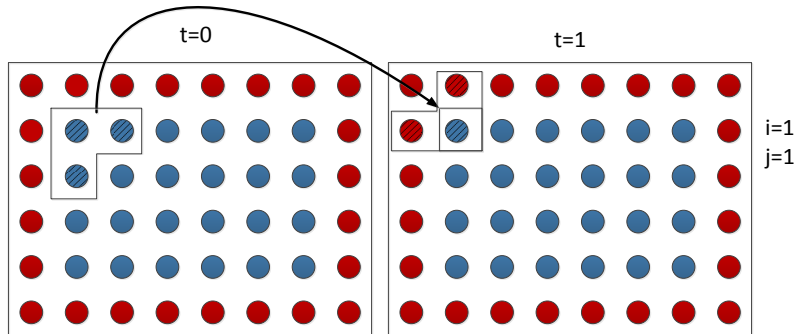
Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel-SOR

$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^t + \omega \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t - 4u_{x,y}^t}{4}, \omega \in (0, 2)$$

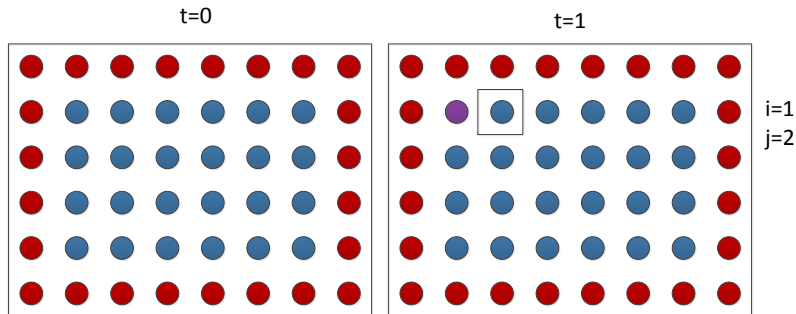
Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (I)



Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (II)



Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (III)



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας

- Τι αλλάζει στην επικοινωνία της Gauss-Seidel σε σχέση με τη Jacobi;
- Πότε γίνεται η ανταλλαγή των δεδομένων μεταξύ των διεργασιών;
 - ▶ Για τον υπολογισμό κάθε στοιχείου, απαιτούνται στοιχεία από την προηγούμενη και την τρέχουσα χρονική στιγμή
- Ποιος υπολογιστικός πυρήνας θα είναι πιο γρήγορος, αυτός της Jacobi ή αυτός της Gauss-Seidel; Γιατί;

Υπολογιστικές μέθοδοι (III) - Μέθοδος Red-Black SOR

- Το Red-Black ordering επιτυγχάνει καλύτερο ρυθμό σύγκλισης
- Red-Black ordering:
 1. Στοιχεία σε άρτιες θέσεις $(i + j) \% 2 = 0 \rightarrow \text{Red}$
 2. Στοιχεία σε περιττές θέσεις $(i + j) \% 2 = 1 \rightarrow \text{Black}$
- Υπολογισμός σε δύο φάσεις

Υπολογιστικές μέθοδοι (III) - Μέθοδος Red-Black SOR

Red-Black SOR - Φάση 1η - Update Red

$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^t + \omega \frac{u_{x-1,y}^t + u_{x,y-1}^t + u_{x+1,y}^t + u_{x,y+1}^t - 4u_{x,y}^t}{4}, \text{ when } (x+y)\%2 == 0$$

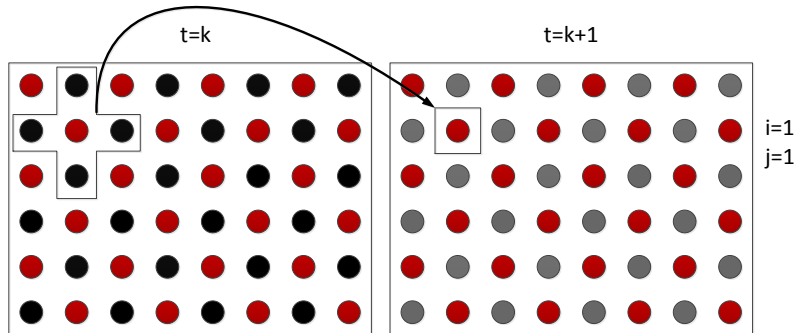
- Στη red φάση υπολογίζονται τα *red* στοιχεία από τα *black*

Red-Black SOR - Φάση 2η - Update Black

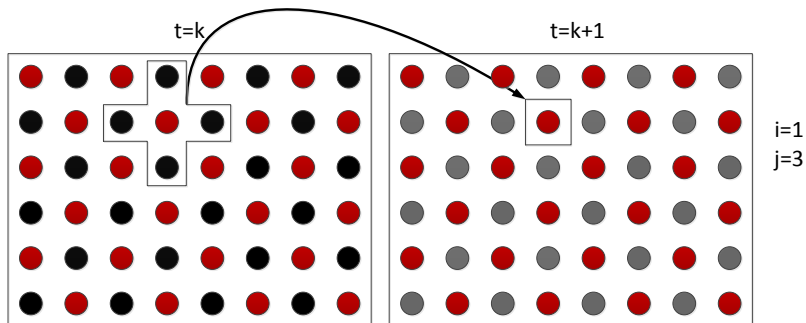
$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^t + \omega \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^{t+1} + u_{x,y+1}^{t+1} - 4u_{x,y}^t}{4}, \text{ when } (x+y)\%2 == 1$$

- Στη black φάση υπολογίζονται τα *black* στοιχεία από τα *red*

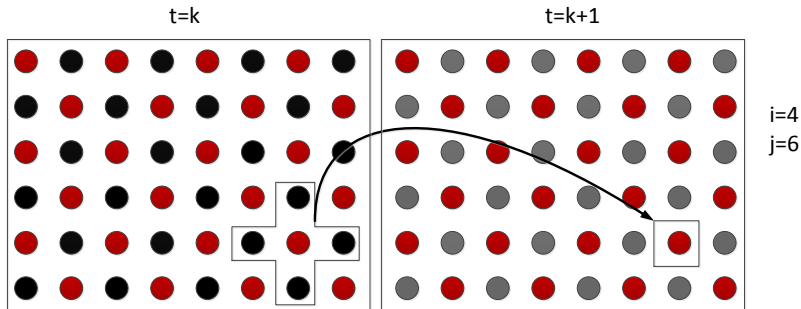
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (I)



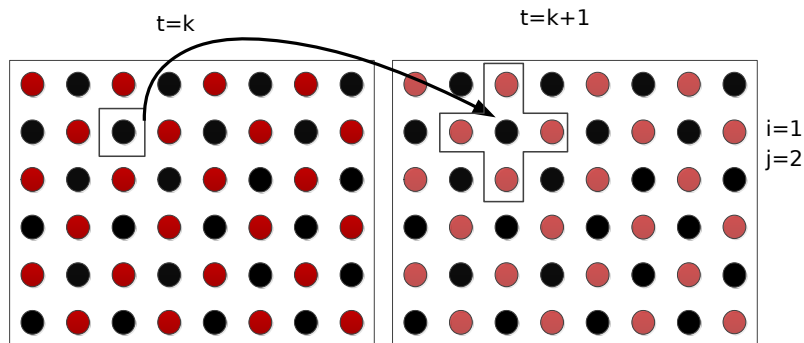
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (II)



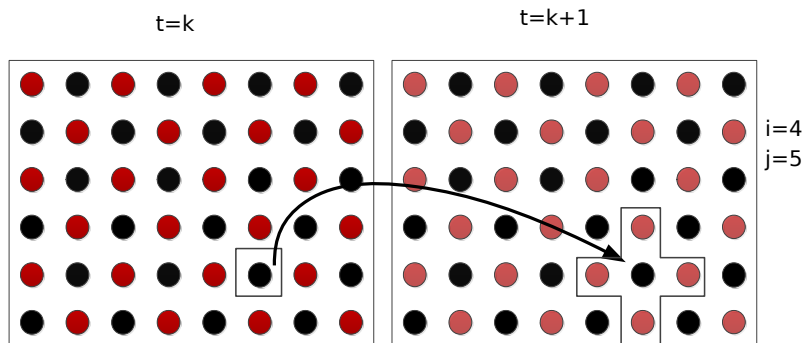
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (III)



Εκτέλεση Red-Black-SOR - 2η φάση (I)



Εκτέλεση Red-Black-SOR - 2η φάση (II)



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας

- Ο υπολογιστικός πυρήνας της Red-Black SOR περιλαμβάνει δύο φάσεις. Πώς αλλάζει αυτό την επικοινωνία; Τι όφελος/κόστος μπορεί να έχει;

Υποχρεωτικά για τις μεθόδους *Jacobi* και *Gauss-Seidel SOR*

Προαιρετικά για τη μέθοδο *Red-Black SOR*

- Αναπτύξτε παράλληλα προγράμματα στο μοντέλο ανταλλαγής μηνυμάτων με τη βοήθεια της βιβλιοθήκης MPI
 - ▶ Σειριακές υλοποιήσεις στα αρχεία *Jacobi_serial.c*, *GaussSeidelSOR_serial.c* και *RedBlackSOR_serial.c*
 - ▶ Σκελετός υλοποίησης σε MPI στο αρχείο *mpi_skeleton.c*
- Πραγματοποιήστε μετρήσεις επίδοσης με βάση το σενάριο μετρήσεων
- Συγκεντρώστε τα αποτελέσματα, τις συγκρίσεις και τα σχόλιά σας στην τελική αναφορά