

# 针对反潜航空深弹命中概率问题的研究

## 一、摘要

在反潜作战中，为了使投射的深弹命中水下潜艇，需要侦察飞机定位潜艇的中心位置，由于潜艇中心位置的定位存在误差，需要通过建立数学模型，分析投弹最大命中概率与投弹落点平面位置及深弹引爆深度之间的关系。本文基于联合正态分布和黎曼和知识，对深弹最大命中概率以及投弹方案进行求解。

针对问题一，因为对于目标潜艇深度的定位准确，所以我们首先证明了投弹位置深度取定位值附近时命中概率最大。又因为潜艇定位值在平面方向服从给定的联合正态，在此条件下我们又证明了投弹位置位于投弹测定位值，即原点  $(0, 0)$  处，潜艇被命中的概率最大。接着我们分析了在上述投弹位置时，目标潜艇可能被击中的区域范围，并通过对概率密度函数在该区域上的二重积分求出最大命中概率表达式。针对问题一的参数，我们得到当投弹落点平面坐标为  $(0, 0)$ ，航空深弹落点在深度  $h$  满足： $137.5\text{m} \leq h \leq 162.5\text{m}$ 。航空深弹命中概率最大，且为 0.0837。

针对问题二，借由第一题的结论，我们首先证明了投弹的水平位置位于投弹测定位值，即原点  $(0, 0)$  处，潜艇被命中的概率最大。接下来，我们又分析了投弹深度  $h$  取不同值时潜艇可能被击中的区域，并用条件概率的积分公式，给出了投弹深度  $h$  取不同值时，潜艇被命中的概率的表达式，还发现其可以归结为一个卷积算式。然后我们对于  $h$  使用枚举法，按固定步长在一定范围内取不同的值，并计算出相应的命中概率。最后绘制出深度  $h$  与命中概率的函数图像，并找出最大命中概率。投弹命中概率的最大值为约为 0.0575，此时深弹的深度值为 157.85m。

针对问题三，由于由于单枚深弹命中率较低，为了增强杀伤效果，通常需要投掷多枚深弹。借由前两问的结论，我们首先说明了在固定 9 宫格排列下，当中间位置炸弹

的水平面定位值位于  $(0, 0)$  处时，命中概率最大。此外又说明了当 9 个深弹在深度上形成的爆炸覆盖区域（二维）彼此相切时，命中概率会由于彼此分离的情况。在此方案下，我们使用如问题二类似的方法，构造出基于投弹深度  $h$  的命中概率计算公式，并对于  $h$  使用枚举法，按固定步长在一定范围内取不同的值，并计算出相应的命中概率的最大值。在问即得到  $a=140\text{m}$ ， $b=60\text{m}$  的投弹方案。之后通过与第二问相似的运算方法，利用 matlab 软件运算求出深弹最大命中概率约为 0.33080，而此时深弹的深度值为 157.73m。

**关键词：**命中概率，深度定位值，概率分析，联合概率密度分布，黎曼和

## 二、问题重述

在反潜作战中，深水炸弹反潜作为主要的作战武器，且由于价格低，抗干扰能力强，深水炸弹反潜技术仍然是一个成本效益高且抗干扰能力强的战术选择，且一直在发展和研究。本文模拟了在特定海域使用深水炸弹对潜艇进行攻击的场景，给定命中潜艇的条件，建立数学模型研究深弹的最大命中率以及求解投弹方案，为现代反潜作战中深水炸弹命中概率问题提供重要作用。

问题 1 投射一枚深弹，潜艇中心位置的深度定位没有误差，两个水平坐标定位均服从正态分布。分析投弹最大命中概率与投弹落点平面坐标及定深引信引爆深度之间的关系，并给出使得投弹命中概率最大的投弹方案，及相应的最大命中概率表达式。针对以下参数值给出最大命中概率：潜艇长 100 m，宽 20 m，高 25 m，潜艇航向方位角为  $90^\circ$ ，深弹杀伤半径为 20 m，潜艇中心位置的水平定位标准差  $\sigma=120\text{ m}$ ，潜艇中心位置的深度定位值为 150 m。

问题 2 仍投射一枚深弹，潜艇中心位置各方向的定位均有误差。请给出投弹命中

概率的表达式。针对以下参数，设计定深引信引爆深度，使得投弹命中概率最大：潜艇中心位置的深度定位值为 150 m，标准差  $\sigma_z=40$  m，潜艇中心位置实际深度的最小值为 120 m，其他参数同问题 1。

问题 3 由于单枚深弹命中率较低，为了增强杀伤效果，通常需要投掷多枚深弹。若一架反潜飞机可携带 9 枚航空深弹，所有深弹的定深引信引爆深度均相同，投弹落点在平面上呈阵列形状（见图 2）。在问题 2 的参数下，请设计投弹方案（包括定深引信引爆深度，以及投弹落点之间的平面间隔），使得投弹命中（指至少一枚深弹命中潜艇）的概率最大。

### 三、问题分析

针对问题 1，由于  $X, Y$  均服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ ，潜艇中心位置的深度定位没有误差，采用联合概率密度求解深弹在水平面的命中概率，根据联合概率密度的等高线性质，证明出投弹落点位置在潜艇中心位置定位值时，投弹命中概率最大，再对示意图编写最大命中概率表达式。

针对问题 2，已知潜艇中心位置实际深度  $Z$  的密度函数表达式， $Z$  服从单边截尾正态分布，满足概率分布的要求，可以得到单边截尾正态分布图。在问题 1 水平面上潜艇被引爆的极限位置面积的基础上，利用相同的方法，得出在垂直面上潜艇被引爆的极限位置，当深弹引爆深度位于  $h$  时，潜艇被命中概率最大，随着潜艇的深度从引爆深度向上下发生变化时，潜艇被命中概率也发生变化，最后得到深弹命中概率随深度变化的曲线，将单边截尾正态分布图与深弹随深度变化的命中概率进行积相乘，再利用黎曼算法寻找最大值。

针对问题 3，为增强杀伤效果，投掷 9 枚航空深弹，呈  $3 \times 3$  的列阵状。由问题 1 可以得出投弹落点位置在原点时，投弹命中概率最大，同一水平面下，周围深弹的命中

概率必然小于位于原点的深弹命中概率，因此，要使得投弹命中的概率最大，即每个深弹对应潜艇被命中时中心点所围成的范围恰好紧密相连，边界恰好相切。在此方案的基础上，利用与问题 2 相似的方法，得出深弹命中随深度变化的曲线，将单边截尾正态分布图与其进行乘积，利用黎曼和求解最大值。

## 四、模型假设

- 1.假设题目所给的数据都真实可靠。
- 2.假设深弹从飞机上垂直下落，垂直落入水中，在水中垂直下降，不受洋流等无关因素影响其运动轨迹，始终保持垂直下落。
- 3.假设深弹爆炸的范围不会受水压等因素影响而发生形变，无论在何处爆炸，其杀伤范围始终是以 20m 为半径的完美的球体。
- 4.假设潜艇是长宽高为 100m、20m、25m 的标准长方体。
- 5.存在  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向上的正态分布相互独立。
- 6.假设当潜艇发现被侦察飞机电子设备跟踪时，立刻关闭电子设备和发动机，立刻进入静止状态，并以静默方式隐蔽。

## 五、符号说明

序号	符号	符号说明
1	$a,b,c,d$	对潜艇中心的定位点
2	$R,r0$	深弹爆炸半径
3	$z$	潜艇中心位置深度的定位值（变动）
4	$h_0$	潜艇中心位置深度的定位值（固定）
5	$h$	深弹中心位置深度的定位值
6	$l_0,l_1,l_2$	潜艇高度，长度，宽度
7	$J,K$	正态分布
8	$P(i)$	对区域积分后得到的概率
9	$f(z)$	深度为 $z$ 时正态分布的值
10	$P(E h-z)$	$f(x,y)$ 在不同深度时的截面上的积分
11	$E$	代表事件：潜艇被深弹命中

## 六、模型的建立与求解

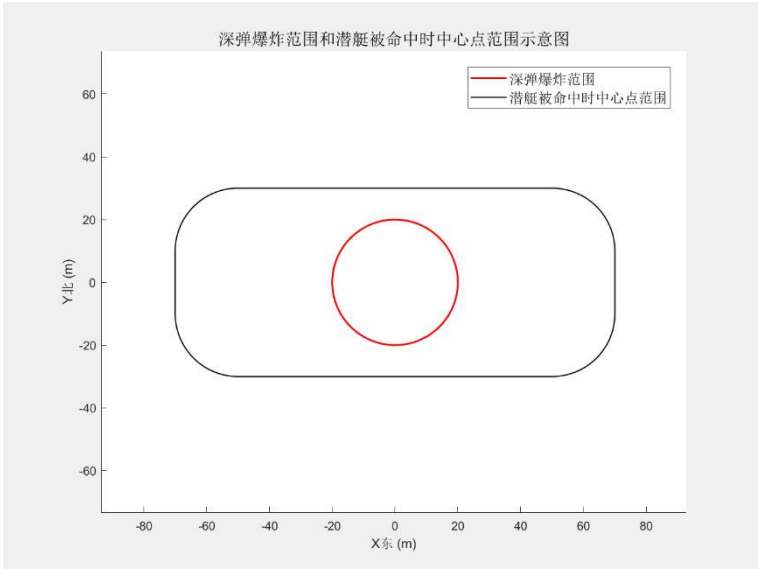
### 6.1 问题一的模型建立与求解

#### 6.1.1 条件筛选的前提条件的检验

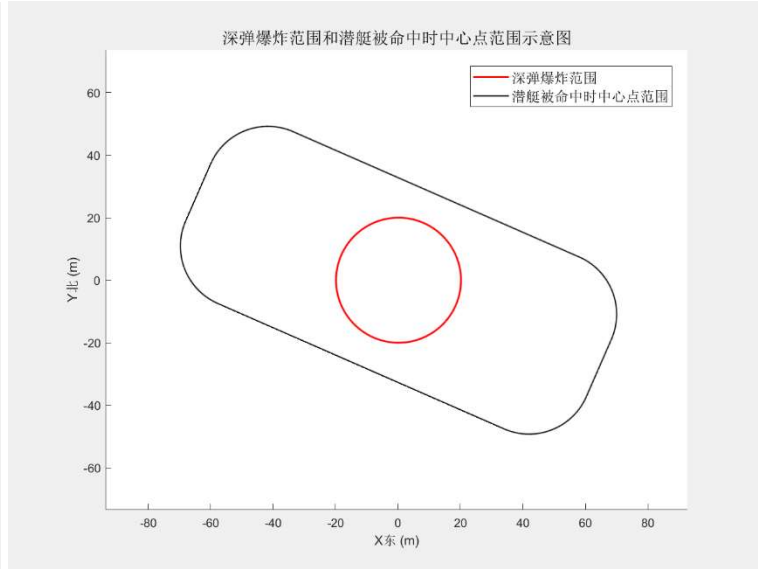
由问题 1 题干可知，潜艇中心位置的深度定位值为 150m，且潜艇中心位置的深度定位没有误差，两个水平坐标定位均服从正态分布，可简化分析在水平面上潜艇中心位置进入深弹杀伤范围的运动轨迹与深弹杀伤范围之间的关系示意图。由参数中给出的条件可知：深弹的实际爆炸范围大小为半径为 20 的球体，潜艇的长 100m，宽 20m，高 25m，潜艇中心位置的深度定位值为 150m，潜艇航向方位角  $\beta$  为  $90^\circ$ （即朝向为

东)。

据上述条件可得，当潜艇朝向始终为正东方向，投射的深弹的中心位置位于 150m 的深度定位值时，所能覆盖的范围恰好大于其他深度所能覆盖的范围，深弹命中概率也大于位于其他深度值时的命中概率。当潜艇朝向不为正东方向时，仅要求潜艇朝向不变，便可省略其他引爆可能性，使得上述结论成立，可直接研究深弹位于 150m 深度值所在水平面的命中概率，可得潜艇被深弹引爆的极限位置始终相切于深弹杀伤范围时的潜艇中心位置轨迹，由此更好的研究深弹命中潜艇的概率。如图（1）、图（2）：



图（1）



图（2）

### 6.1.2 联合正态分布模型的建立

为求最大命中概率时深弹的位置，可设深弹坐标为  $(x, y, h_0)$ ，由题可知两水平坐标均服从正态分布且相互独立，因此建立联合正态分布模型，表达式如下：

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

图示见图（3）：

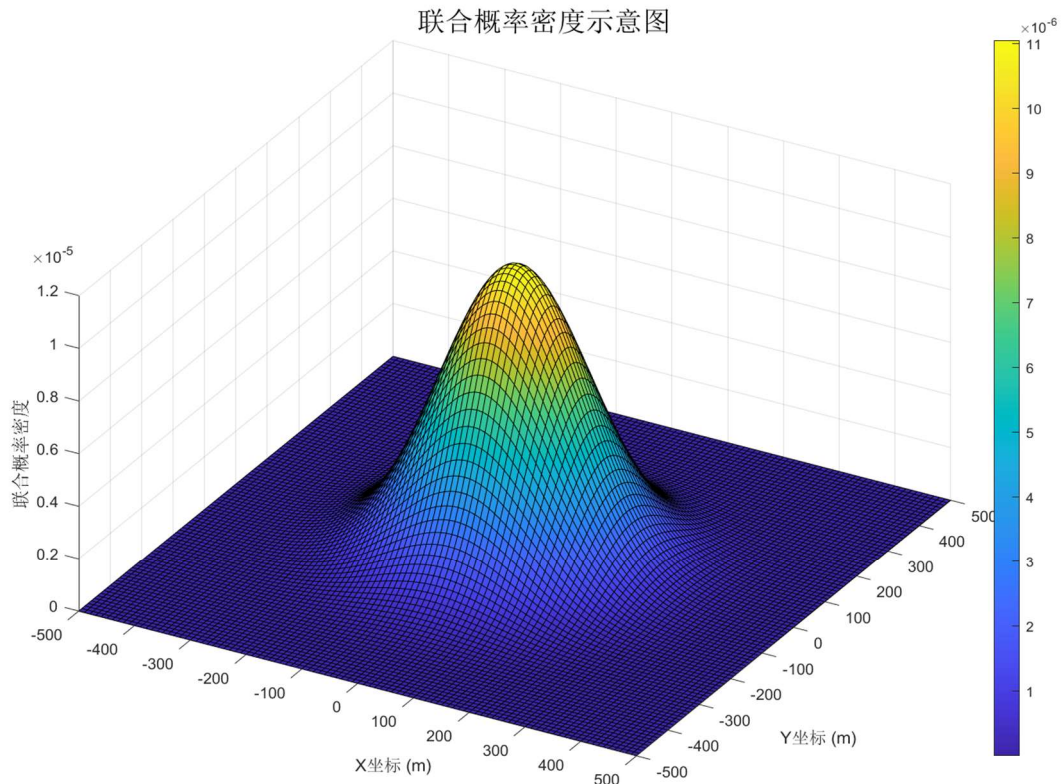


图 (3)

由于该模型是绕  $Z$  轴旋转形成的，在各个方向上的性质都相同，因此可以进一步将上述模型简化。因为所有正态分布皆有相同的性质，所以仅针对  $x$  轴方向进行一维正态分布讨论，可得原式如下：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

令  $g(x) = e^{-c_1 x^2}$ , 其中  $c_1 > 0$ . 对任意长度为  $2L$  的区间，证明当区间关于  $x=0$  对称时， $g(x)$  在该区间上的积分最大。（易知  $g(x)$  关于  $x=0$  对称，且在  $[0, +\infty]$  上单调减）

(1)  $a \geq L$  时，区间为  $(a, a+2L)$ , 此区间上最大值  $g(a) \leq g(L)$ , 且  $g(L)$  为区间  $(-L, L)$  上的最小值， $g(a)$  为区间  $(a, a+2L)$  上的最大值，显然  $\int_{-L}^L g(x) dx > \int_a^{a+2L} g(x) dx$ .

(2)  $a+2L < -L$  时, 由对称性知结论 (1) 仍然成立.

(3)  $-L < a < L$  时,  $\int_{-L}^L g(x) dx = \int_{-L}^a g(x) dx + \int_a^L g(x) dx$ ,  $\int_a^{a+2L} g(x) dx = \int_a^L g(x) dx + \int_L^{a+2L} g(x) dx$ , 由 (1) 得  $\int_{-L}^a g(x) dx > \int_L^{a+2L} g(x) dx$ , 所以  $\int_{-L}^L g(x) dx > \int_a^{a+2L} g(x) dx$ 。

(4)  $-L < a+2L < L$  时, 同 (3)。

得证.

据上述证明, 利用联合正态分布模型绘制等高线图, 将投射的深弹落点平面坐标位于潜艇的中心位置即原点  $i_1$  和其他任意位置  $i_2$  处进行比较, 为了方便比较, 引入水平方向平行于  $i_1$ , 竖直方向平行于  $i_2$  的位置  $i_3$  处, 进行传递比较, 作出相应的示意图, 见图 (4)、图 (5):



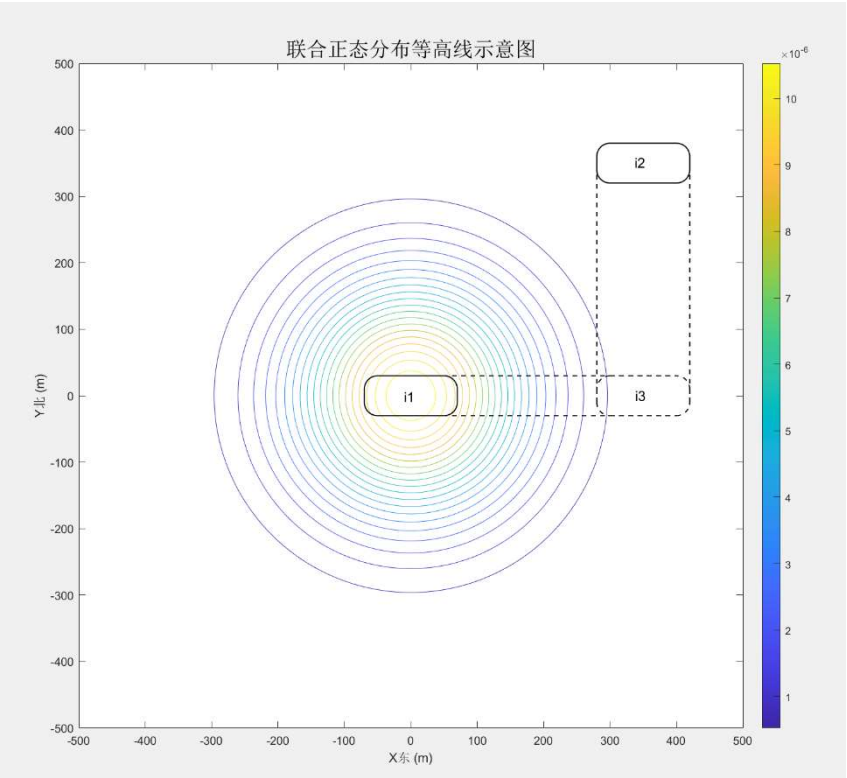


图 (4)

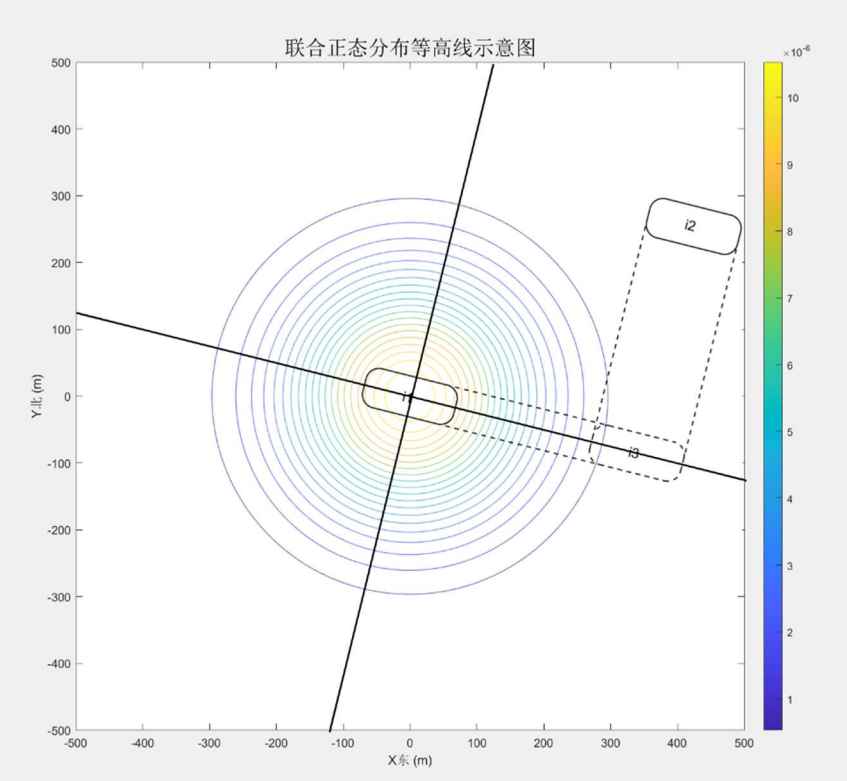


图 (5)

通过以下公式对  $i_1$  和  $i_2$  进行命中概率的积分计算，对其进行比较：

$$P(i_1) = \int_{-L}^L e^{-y^2} \int_{\beta(y)}^{\alpha(y)} e^{-x^2} dx dy$$

$$P(i_3) = \int_{-L}^L e^{-y^2} \int_{\beta(y)+\varepsilon}^{\alpha(y)+\varepsilon} e^{-x^2} dx dy$$

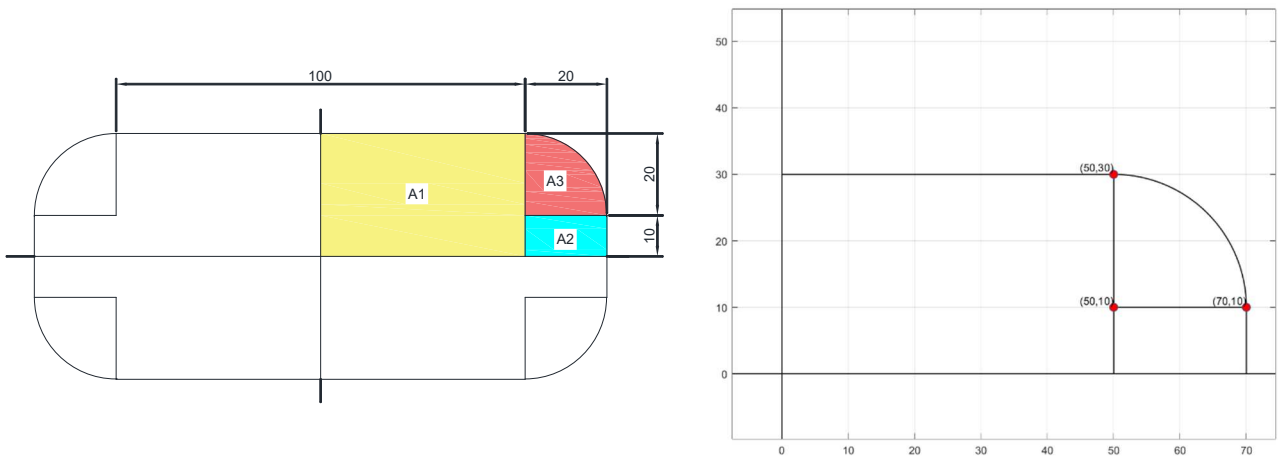
由上述结论得知， $\int_{\beta(y)}^{\alpha(y)} e^{-x^2} dx > \int_{\beta(y)+\varepsilon}^{\alpha(y)+\varepsilon} e^{-x^2} dx$ ，所以  $P(i_1) > P(i_3)$ ，同理， $P(i_3) > P(i_2)$ ，所以  $P(i_1) > P(i_2)$ 。即炸弹在中心位置  $(0, 0, h_0)$  有更大的可能可以炸到潜艇。

当潜艇朝向不为正东方向时，建立互相垂直的辅助线，由于联合正态分布模型是绕 Z 轴旋转而成的模型，具有对称性，同理可得上述结论仍成立。

### 6.1.3 联合正态分布模型的求解

为求出深弹的最大命中概率，利用 matlab 软件对潜艇受击时中心点范围所围成的图形进行二重积分求解。（代码见附录一）

由于所围成的图形具有对称性，首先将图形进行简化分解，针对其 1/4 部分进行运算，将该部分拆解为三小部分进行二重积分求解，见图（6）：



图（6）

计算公式如下：

$$\begin{aligned}
 P_{max} &= \iint_D f(x,y) dS = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_D e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dS \\
 &= \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
 &\quad + \int_a^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
 &\quad + \int_a^d \int_b^{b+\sqrt{r^2-(x-5)^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dy dx
 \end{aligned}$$

代入以下数值：a=50，b=10，c=30，d=70，r=R=20，σ=120

可得最大命中概率为  $4P_0=0.0837$

#### 6.1.4 投弹最大命中概率所需条件

由前文论证可得，潜艇中心位置位于  $(0, 0, h_0)$  时，投弹命中概率有机会达到最大。

经过前文的数据处理可得，潜艇中心点深度值为 150m，潜艇上表面深度值为 137.5m，潜艇下表面深度值为 162.5m。

当航空深弹落点在  $(0, 0, h)$ ，其中深弹引爆深度  $h$  满足： $137.5m \leq h \leq 162.5m$  时，目标潜艇被命中的概率最大。

### 6.2 问题二的模型建立与求解

#### 6.2.1 单边截尾正态分布模型的简化

由题意可知， $Z$  服从单边截尾正态分布及密度函数表达式，其中  $Z$  的值被限制在  $l$  以上， $Z$  的概率密度函数在  $l$  以下为 0，为确保概率分布只在  $(l, +\infty)$  区域内有效，对标准

正态分布进行了调整，即通过除以  $1 - \Phi\left(\frac{l-h_0}{\sigma_z}\right)$  来实现，使得整个截尾区间内积分为 1，密度函数归一化，以满足概率分布的要求，调整后的密度函数可以用来计算潜艇分布的概率密度。即题干中给出的公式：

$$f_{h_0, \sigma_z, l}(v) = \frac{1}{\sigma_z} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{v-h_0}{\sigma_z}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{l-h_0}{\sigma_z}\right)} \quad (l < v < +\infty)$$

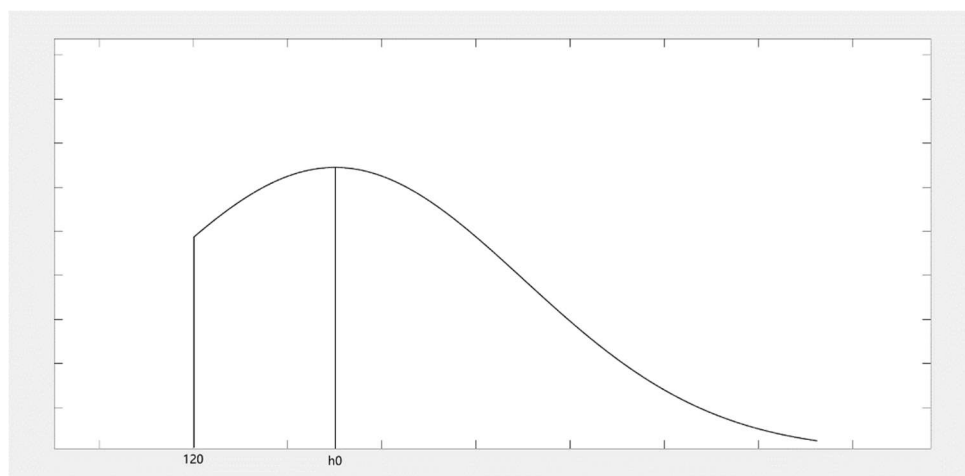
其中， $\varphi$  和  $\Phi$  分别是标准正态分布的密度函数与分布函数。

设  $Z^* \sim N(h_0, \sigma_z)$ ，则  $1 - \Phi\left(\frac{l-h_0}{\sigma_z}\right) = P(Z^* > l)$ ，因而上式可改写为

$$f_{h_0, \sigma_z, l}(v) = \frac{1}{P(Z^* > l)\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(v-h_0)^2}{2\sigma_z^2}} \quad (l < v < +\infty)$$

其函数图像如图（7）：

单边截尾正态分布的图像示意图

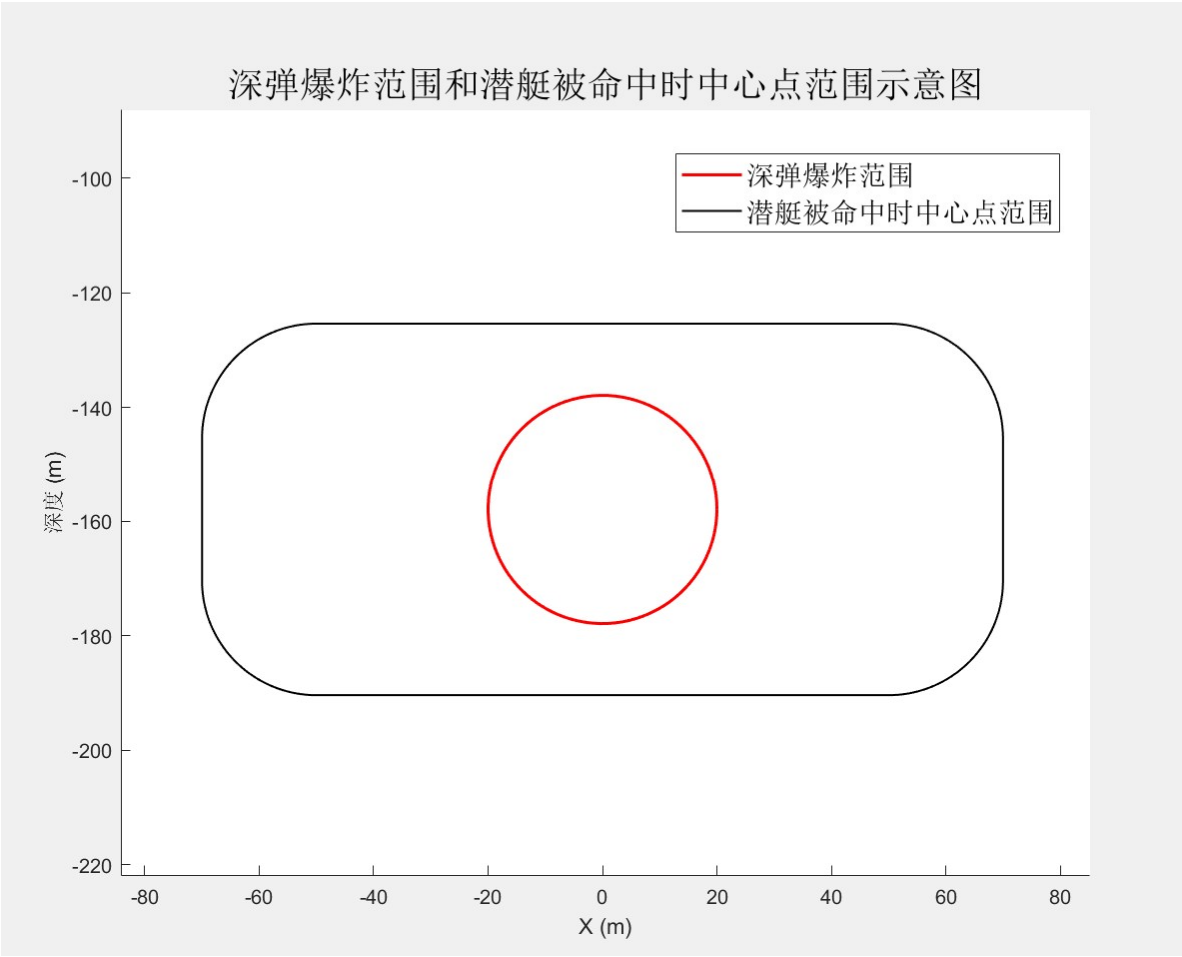


图（7）

## 6.2.2 深弹杀伤范围及深度与命中概率关系分析

第一问在没有考虑深度误差的情况下，分析了水平面位置的示意图（见前文图（1）），根据问题二题干可知，潜艇中心位置各方向的定位有了误差，需要进行新的情况分析，采取与第一问相似的方法，同样根据潜艇被深弹引爆的极限位置始终相切

于深弹杀伤范围时的潜艇中心位置轨迹进行绘制垂直方向上的示意图。如图（8）：



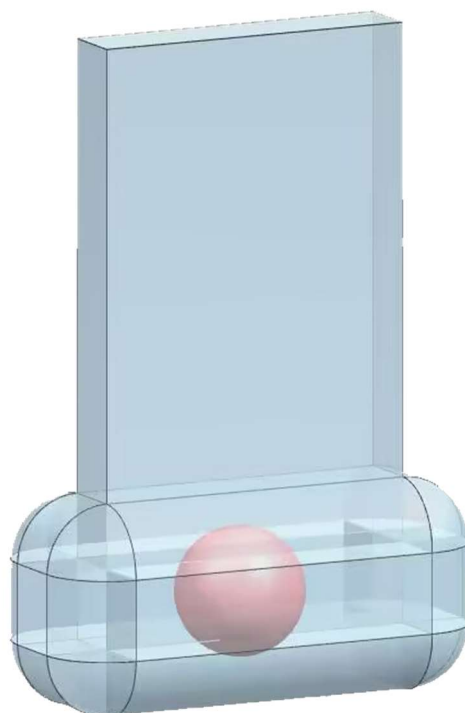
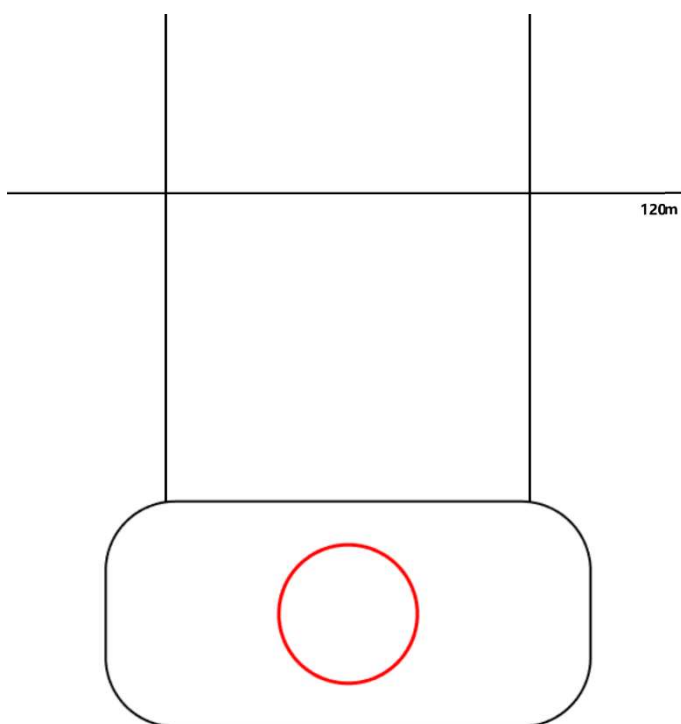
图（8）

设深弹引爆深度位于  $h$  时，命中潜艇的概率最大。随着潜艇的深度位置  $z$  与深弹深度  $h$  的距离发生变化时，潜艇出现在深度的条件下可能的被命中区域会随之变化。在  $(h - z) \in \left[-R - \frac{l_0}{2}, -\frac{l_0}{2}\right]$  时横截面面积随  $z$  增大而减小，在  $(h - z) \in \left[-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}\right]$  时横截面面积最大，在  $(h - z) \in \left[\frac{l_0}{2}, R + \frac{l_0}{2}\right]$  时横截面面积随  $z$  增大而增大，在  $(h - z) \in \left[R + \frac{l_0}{2}, +\infty\right]$  时横截面面积为定值，与  $h = -R - \frac{l_0}{2}$  和  $R + \frac{l_0}{2}$  时的横截面面积相同且最小，等于潜艇俯视角面积，即  $20 \times 100 = 2000 \text{m}^2$ ，由上述可绘制垂直截面示意图，如图（9），利用建模软件建立三维模型，如图（10）：

图（9）

图（10）

### 6.2.3 深弹最大命中概率的求解



根据 6.2.2 分析得出的深度变化对命中概率的影响，对前文叙述的四个区间进行单独积分运算，求解出概率与深度的关系。

设事件  $E = \{\text{潜艇被击中}\}$

(1) 当  $(h - z) \in \left[R + \frac{l_0}{2}, +\infty\right)$  时, 对该区域进行积分, 得

$$P_1(h - z) = P(E|h - Z = h - z) = 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

(2) 当  $(h - z) \in \left[\frac{l_0}{2}, R + \frac{l_0}{2}\right]$  时, 对该区域进行积分, 得

$$\begin{aligned} P_1(h - z) &= P(E|h - Z = h - z) \\ &= 4 \left( \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right. \\ &\quad + \int_a^{a+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\quad \left. + \int_a^{a+r} \int_b^{b+\sqrt{r^2-(x-50)^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dy dx \right) \end{aligned}$$

此时  $r = \sqrt{R^2 - (h - z)^2}$

(3) 当  $(h - z) \in \left[-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}\right]$  时, 对该区域进行积分, 得

$$\begin{aligned} P_1(h - z) &= P(E|h - Z = h - z) \\ &= 4 \left( \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right. \\ &\quad + \int_a^{a+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\quad \left. + \int_a^{a+r} \int_b^{b+\sqrt{r^2-(x-50)^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dy dx \right) \end{aligned}$$

此时  $r = R = 20$

(4) 当  $(h - z) \in \left[-R - \frac{l_0}{2}, -\frac{l_0}{2}\right]$  时, 对该区域进行积分, 得

$$\begin{aligned}
 P_1(h - z) &= P(E|h - Z = h - z) \\
 &= 4 \left( \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right. \\
 &\quad + \int_a^{a+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
 &\quad \left. + \int_a^{a+r} \int_b^{b+\sqrt{r^2-(x-50)^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dy dx \right)
 \end{aligned}$$

此时  $r = \sqrt{R^2 - (z - h)^2}$

根据上述积分运算得出的数据, 得函数  $P_1(h - z)$ , 绘制其具体图像, 如图

(11) :

深弹命中概率随深度变化曲线

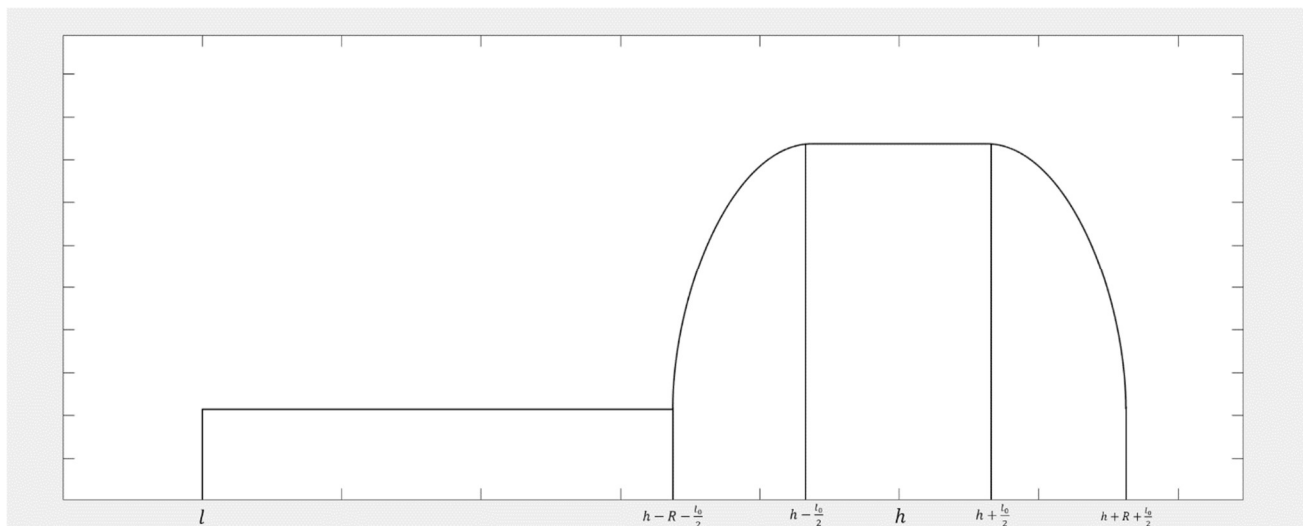


图 (11)

将函数  $P_1(h - z)$  和前文求解出的潜艇在任一深度出现的概率  $f(z)$  相乘后求积分,

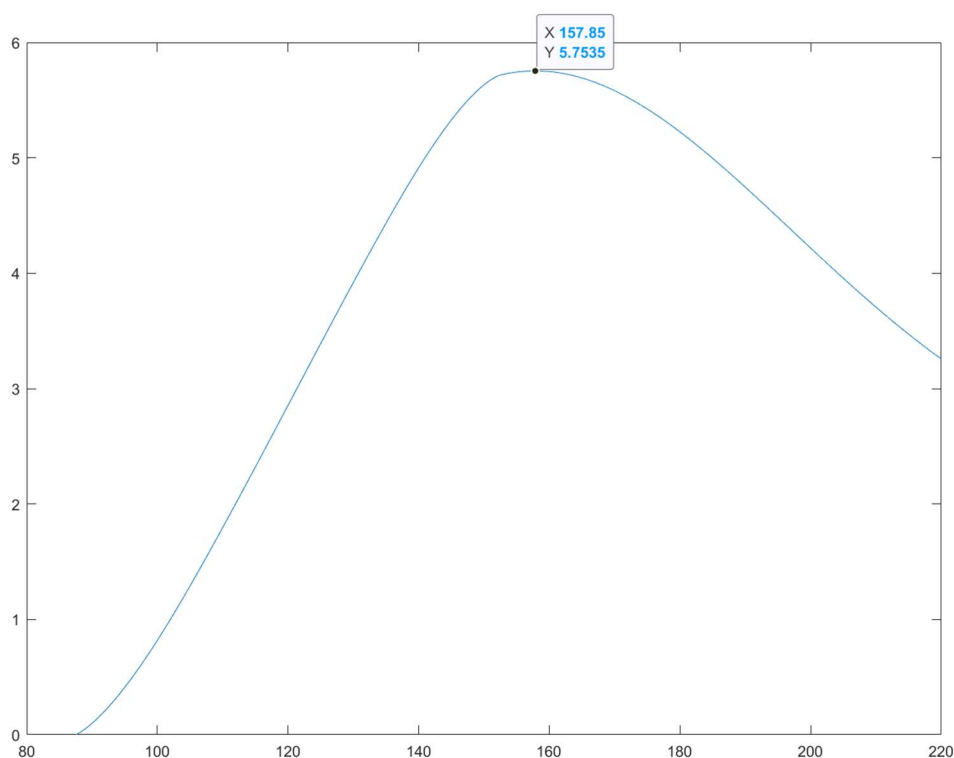
得到投弹命中概率



$$P(h) = \int_l^{+\infty} P(E|h-Z=h-z)f_{h_0,\sigma_z,l}(z)dz = \int_l^{+\infty} P_1(h-z)f_{h_0,\sigma_z,l}(z)dz$$

在建立投弹命中概率的数学模型时，需要构建涉及潜艇位置概率分布的积分表达式，计算艇实际位置落在特定深度区间的累积概率，因此选择了黎曼和方法来处理定义在闭区间上的连续函数的积分，将坐标轴细分为每个小点，计算命中概率，找到最大命中概率。选择利用 matlab 数学运算软件对其数据进行如下运算（代码见附录二）：

将该函数与单边截尾正态分布相结合，将起始点定为 87.5（当潜艇深度值最高点时恰好可以被深弹命中），设置步长 0.01 进行搜索运算，得到投弹命中概率 $F_1$ 与 $h$ ，寻找最大值，最终得出如下图像以及结论，见图（12）：



投弹命中概率 $F_1$ 和深度 $h$ 的关系分析图像

图（12）

根据图像分析可得出结论：

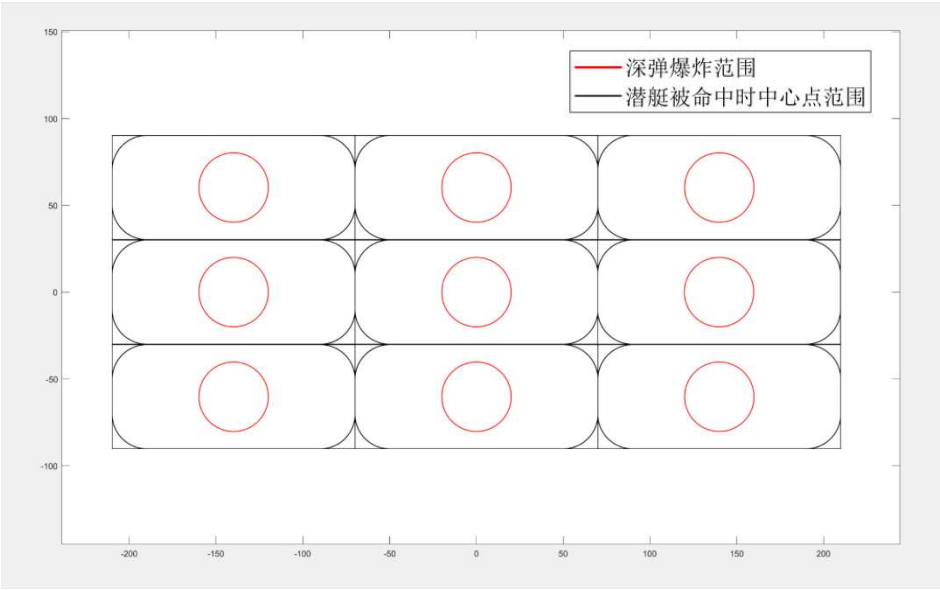
深弹最大命中概率约为 0.0575，此时深弹的深度值为 157.85m。

### 6.3 问题三的模型建立与求解

#### 6.3.1 深弹爆炸中心点深度定位的测量

由题目可知，所有投下的深弹定深引信引爆深度均相同，因此可以得知 9 颗深弹的深度定位值位于同一水平面。由问题一可知，同一水平面内，越靠近原点  $(0, 0)$ ，深弹的命中概率越大，将 9 个深弹放在深度定位值为  $(h - z) \in \left[-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}\right]$  的范围内，将每个深弹可能产生的最大的潜艇被命中时的中心点范围紧密排列在一起，如图（13）所示：

深弹最大爆炸范围和潜艇被命中时中心点范围的俯视图



图（13）

#### 6.3.2 多深弹最大命中概率和深度定位值求解

由于每个潜艇被命中时中心点范围围成形状的圆弧与四条直线延长线所围成的 4 块图形的面积占比非常小，计算过程如下：

$$\frac{4R^2 - \pi R^2}{(2R + l_1) * (2R + l_2)} = 0.04088$$

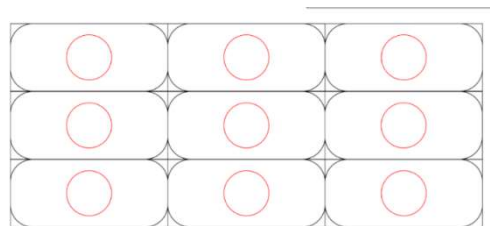
得出面积占比仅为 4%，且求概率过程中会与函数 $f(z)$ 和 $f(x,y)$ 的函数值进行乘积和积分的相关运算，由于函数 $f(z)$ 和 $f(x,y)$ 的函数值皆小于 1，因此对结果的影响会随着计算不断减小，可以忽略不计，所以将其简化，进行近似处理，将每个潜艇被命中时中心点范围围成形状视为矩形进行数学运算。

根据 6.3.1 分析得出的深度变化对命中概率的影响，对四个区间进行单独积分运算，求解出概率与深度的关系，与前文 6.2.3 方法类似：

(1) 当 $(h - z) \in [-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}]$ 时，对该区域（见下图）进行积分，得

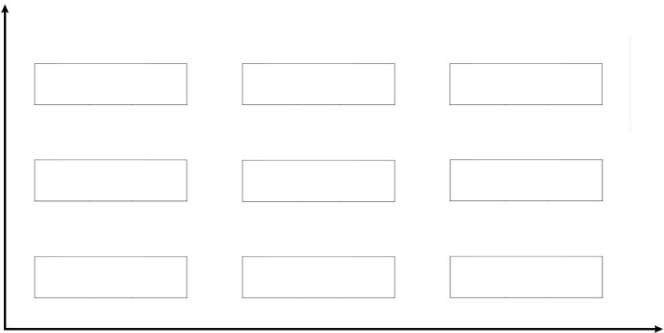
$$P_2(h - z) = P(E|h - Z = h - z)$$

$$\begin{aligned} &= 4[(\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{a+2r_0}^{3a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx) \int_0^{3b+3r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &+ \int_a^{a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx (\int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &+ \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy) \\ &+ \int_{3a+2r_0}^{3a+3r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx (\int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy) \\ &+ \sum_{i=1}^9 \iint_{Di} f(x,y) dS_i] \end{aligned}$$



(2) 当 $(h - z) \in \left[ R + \frac{l_0}{2}, +\infty \right]$ 时, 对该区域进行积分 (见下图), 得

$$\begin{aligned} P_2(h - z) &= P(E|h - Z = h - z) \\ &= 4(\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\quad + \int_{a+2r_0}^{3a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\quad + \int_{a+2r_0}^{3a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\quad + \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy) \end{aligned}$$

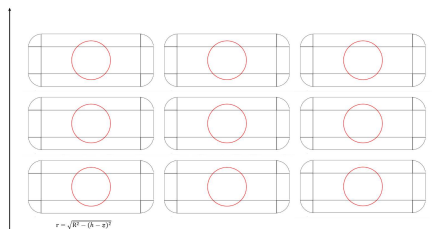


(3) 当  $(h-z) \in \left[\frac{l_0}{2}, R + \frac{l_0}{2}\right]$  时, 对该区域进行积分 (见下图), 得

$$P_2(h-z) = P(E|h-Z=h-z)$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \left[ \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0-r}^{3b+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \right. \\
 &\quad + \int_{a+2r_0}^{3a+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{b+2r_0-r}^{3b+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_a^{a+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_{a+2r_0-r}^{a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_{3a+2r_0}^{3a+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^9 \iint_{D_{2i}} f(x,y) dS_{2i} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{此时 } r = \sqrt{R^2 - (h-z)^2}$$

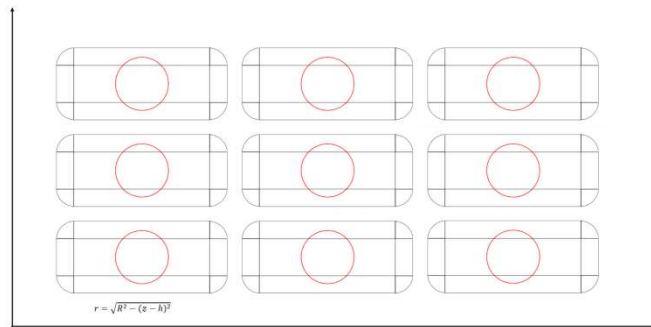


(4) 当  $(h - z) \in \left[-R - \frac{l_0}{2}, -\frac{l_0}{2}\right]$  时, 对该区域进行积分 (见下图), 得

$$P_2(h - z) = P(E|h - Z = h - z)$$

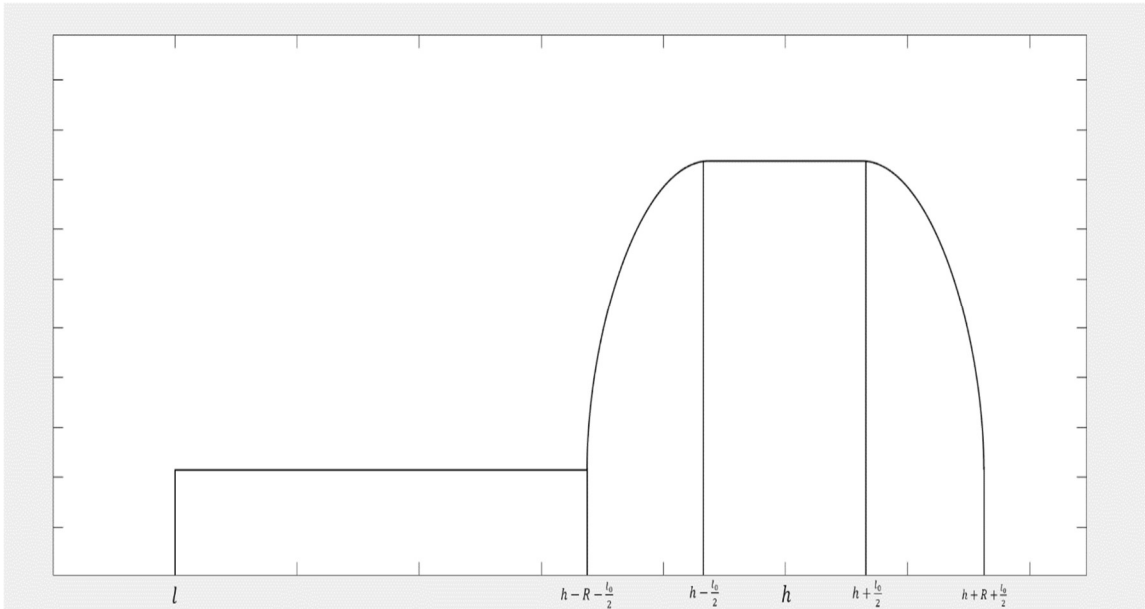
$$\begin{aligned}
 &= 4 \left[ \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0-r}^{3b+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \right. \\
 &\quad + \int_{a+2r_0}^{3a+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^{b+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{b+2r_0-r}^{3b+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_a^{a+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_{a+2r_0-r}^{a+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad + \int_{3a+2r_0}^{3a+2r_0+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left( \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{b+2r_0}^{3b+2r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^9 \iint_{D_{3i}} f(x, y) dS_{3i} \right]
 \end{aligned}$$

此时  $r = \sqrt{R^2 - (z - h)^2}$



根据上述积分运算得出的数据，得函数 $P_2(h - z)$ ，绘制其具体图像，如图（14）：

弹命中概率随深度变化曲线



图（14）

将函数 $P_2(h - z)$ 和前文求解出的潜艇在任一深度出现的概率 $f(z)$ 相乘后求积分，得到投弹命中概率

$$P(h) = \int_l^{+\infty} P(E|h - Z = h - z)f_{h_0,\sigma_z,l}(z)dz = \int_l^{+\infty} P_2(h - z)f_{h_0,\sigma_z,l}(z)dz$$

将该函数与单边截尾正态分布相结合，运用 6.2.3 中绘制图（12）时相似的方法，选择利用 matlab 数学运算软件对其数据进行运算（代码见附录三），得到投弹命中概率 $F_2$ 与  $h$ ，寻找最大值，最终得出如下图像以及结论，见图（15）：

弹命中概率 $F_2$ 和深度 $h$ 的关系分析图像

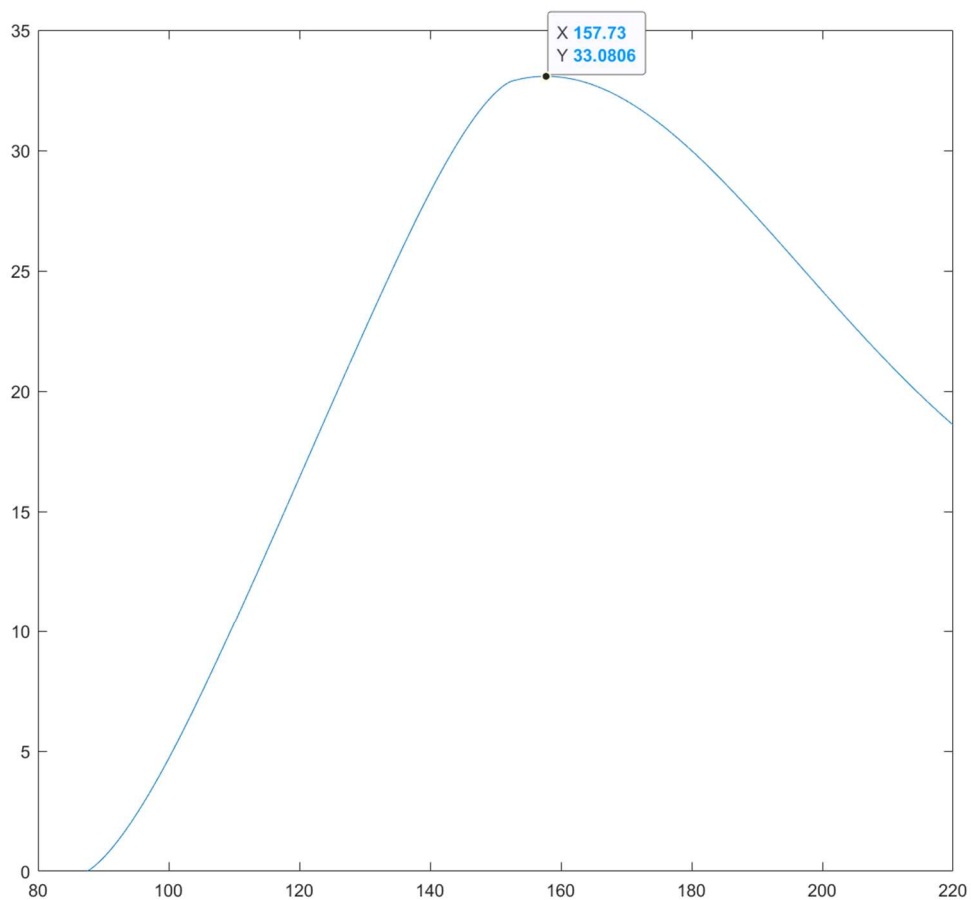


图 (15)

根据图像分析可得出结论：

深弹最大命中概率约为 0.330806，此时深弹的深度值为 157.73m。

方案为：a=140m，b=60m。

## 七、模型的评价、改进与推广

### 7.1 模型的优点

(1) 在分析投弹最大命中概率时，建立了联合概率密度函数模型，能够可以全面地分析问题，同时考虑潜艇位置的不确定性和深弹攻击的准确性。



(2) 问题二和问题三都采用了黎曼和进行模型的计算和求解, 通过将区域分割成小矩形来近似曲线下的面积, 易于理解, 适用于连续函数和某些不连续函数的积分计算, 在数值积分中, 黎曼和可以用于近似计算定积分, 可以进行大量数据的运算。

## 7.2 模型的缺点

(1) 联合概率密度函数模型的缺点主要是在对数据的需求量较大, 且在某些情况下需要假设变量的独立性和特定的分布形式。

## 7.3 模型改进

(1) 本题积分较为复杂繁琐, 应寻找更为简单, 高效的方法求解深弹命中概率。

(2) 在求解问题中采用的黎曼和模型在非规则函数时, 需要进行非常细的分割, 加大了计算的复杂程度, 且只能提供积分近似解, 采用其他方法来寻求解析解。

## 7.4 模型推广

(1) 本文根据反潜防空深弹命中概率问题建立数学模型, 其中涉及概率论、几何学、统计学等问题, 可将该题模型推广到救援搜索操作、环境检测与污染控制等问题。

# 八、参考文献

1. 《概率论与数理统计》(理工类·简明版·第五版) 吴赣昌; 中国人民大学出版社。
2. 《高等数学》(第七版) 同济大学数学系; 高等教育出版社。
3. 《数学模型》(第四版) 姜启源, 谢金星, 叶俊; 高等教育出版社。
4. 《概率论与数理统计》(第三版) 陈希孺; 高等教育出版社。
5. 《Numerical Analysis.》(10th ed.) Richard L. Burden, J. Douglas Faires Burden, R. L., & Faires, J. D. Cengage Learning

## 附录

### 附录一

```
fun=@(x,y)1/(2*pi*120*120)*exp((-x.*x-y.*y)/(2*120*120));
```

```
ymax=@(x)10+sqrt(400-(x-50).*(x-50));
```

```
Q1=quad2d(fun,0,50,0,30);
```

```
Q2=quad2d(fun,0,70,0,10);
```

```
Q3=quad2d(fun,0,50,0,10);
```

```
Q4=quad2d(fun,50,70,10,ymax);
```

```
Q=Q1+Q2+Q4-Q3;
```

```
P=4*Q;
```

### 附录二

```
fun=@(x,y)(1/(2*pi*120*120))*exp((-x.^2-y.^2)/(2*120*120));
```

```
h=[-100:0.01:32.5];
```

```
fz=@(z)(1/(sqrt(2*pi)*40))*exp(-(z-150).*(z-150)/(2*40*40));
```

```
PP=integral(fz,120,10000000);
```

```
ffz=@(z)((1/(sqrt(2*pi)*40))/PP)*exp(-(z-150).*(z-150)/(2*40*40));
```

```
F=h;
```

```
for i=1:13251
```

```
F(i)=ffz(h(i)+220);
```

```
end
```

```
Qm=quad2d(fun,-210,210,-90,90);
```

```
P3=h;
```

```
for i=8751:11251
```

```
P3(i)=quad2d(fun,-210,210,-90,90);
```

```
end
```

```
a=[-140 0 140];
```

```
b=[-60 0 60];
```

```
Qm=0;
```

```
for i=1:3
```

```
    for j=1:3
```

```
        Qm=Qm+quad2d(fun,a(i)-50,a(i)+50,b(j)-10,b(j)+10);
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=1:6751
```

```
P3(i)=Qm;
```

```
end
```

```
for i=6752:8750
```

```
    r=sqrt(400-(P3(i)+12.5)^2);
```

```
    th=0;
```

```

    for j=1:3
        for k=1:3
            th=th+quad2d(fun,a(j)-50-r,a(j)+50+r,b(k)-10-r,b(k)+10+r);
        end
    end
    P3(i)=th;
end

```

```

for i=11252:13251
    r=sqrt(400-(P3(i)-12.5)^2);
    pk=0;
    for j=1:3
        for k=1:3
            pk=pk+quad2d(fun,a(k)-50-r,a(k)+50+r,b(j)-10-r,b(j)+10+r);
        end
    end
    P3(i)=pk;
end

```

```

SS=h;

for i=1:13251
    SS(i)=0;

```

```

for j=1:13251

    if i+j-1<=13251

        SS(i)=SS(i)+F(j)*P3(j+i-1);

    else SS(i)=SS(i);

    end

end

end

end

```

```

L=h*(-1)+120;

```

```

plot (L,SS)

```

### 附录三

```

fun=@(x,y)(1/(2*pi*120*120))*exp((-x.^2-y.^2)/(2*120*120));

```

```

h=[-100:0.01:32.5];

```

```

fz=@(z)(1/(sqrt(2*pi)*40))*exp(-(z-150).*(z-150)/(2*40*40));

```

```

PP=integral(fz,120,10000000);

```

```

ffz=@(z)((1/(sqrt(2*pi)*40))/PP)*exp(-(z-150).*(z-150)/(2*40*40));

```

```

F=h;

```

```

for i=1:13251

```

```

    F(i)=ffz(h(i)+220);

```

```

end

```

```

Qm=quad2d(fun,-210,210,-90,90);

```

```

P3=h;

```

```
for i=8751:11251
```

```
P3(i)=quad2d(fun,-210,210,-90,90);
```

```
end
```

```
a=[-140 0 140];
```

```
b=[-60 0 60];
```

```
Qm=0;
```

```
for i=1:3
```

```
    for j=1:3
```

```
        Qm=Qm+quad2d(fun,a(i)-50,a(i)+50,b(j)-10,b(j)+10);
```

```
    end
```

```
end
```

```
P3=h;
```

```
for i=1:6751
```

```
P3(i)=Qm;
```

```
end
```

```
for i=6752:8750
```

```
    r=sqrt(400-(P3(i)+12.5)^2);
```

```
    th=0;
```

```
    for j=1:3
```

```

for k=1:3

    aa=a(j);

    bb=b(k);

    yrru=@(x)10+sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

    yrrd=@(x)-10-sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

    yrlu=@(x)10+sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

    yrlu=@(x)-10-sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

    lu=linspace(50+aa,50+aa+r,10);

    ld=linspace(-50+aa-r,-50+aa,10);

    N1=quad2d(fun,aa-50-r,aa+50+r,bb-10,bb+10)+quad2d(fun,aa-
50,aa+50,bb-10-r,bb+10+r)-quad2d(fun,aa-50,aa+50,bb-10,bb+10);

    N2=0;

    dx2=lu(2)-lu(1);

    for m=1:length(lu)-1

        N2_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+10,bb+yrru(lu(m)));

        N2=N2+N2_temp*dx2;

    end

    N3=0;

    dx3=lu(2)-lu(1);

    for m=1:length(lu)-1

```

```

        N3_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+yrrd(lu(m)),bb-10);

        N3=N3+N3_temp*dx3;

    end

    N4=0;

    dx4=ld(2)-ld(1);

    for m=1:length(ld)-1

        N4_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+10,bb+yrlu(ld(m)));

        N4=N4+N4_temp*dx4;

    end

    N5=0;

    dx5=ld(2)-ld(1);

    for m=1:length(ld)-1

        N5_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+yrlu(ld(m)),bb-10);

        N5=N5+N5_temp*dx5;

    end

    th=th+N1+N2+N3+N4+N5;

end

end

P3(i)=th;

```



```

end

for i=8751:11251

    r=20;

    th=0;

    for j=1:3

        for k=1:3

            aa=a(j);

            bb=b(k);

            yrru=@(x)10+sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

            yrrd=@(x)-10-sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

            yrлу=@(x)10+sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

            yrld=@(x)-10-sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

            lu=linspace(50+aa,50+aa+r,10);

            ld=linspace(-50+aa-r,-50+aa,10);

            N1=quad2d(fun,aa-50-r,aa+50+r,bb-10,bb+10)+quad2d(fun,aa-
50,aa+50,bb-10-r,bb+10+r)-quad2d(fun,aa-50,aa+50,bb-10,bb+10);

            N2=0;

            dx2=lu(2)-lu(1);

            for m=1:length(lu)-1

                N2_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+10,bb+yrru(lu(m)));

                N2=N2+N2_temp*dx2;

```

end

N3=0;

dx3=lu(2)-lu(1);

for m=1:length(lu)-1

    N3\_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+yrrd(lu(m)),bb-10);

    N3=N3+N3\_temp\*dx3;

end

N4=0;

dx4=ld(2)-ld(1);

for m=1:length(ld)-1

    N4\_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+10,bb+yrlu(ld(m)));

    N4=N4+N4\_temp\*dx4;

end

N5=0;

dx5=ld(2)-ld(1);

for m=1:length(ld)-1

    N5\_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+yrlu(ld(m)),bb-10);

    N5=N5+N5\_temp\*dx5;

end

```

        th=th+N1+N2+N3+N4+N5;

    end

end

P3(i)=th;

end

for i=11252:13251

    r=sqrt(400-(P3(i)-12.5)^2);

    th=0;

    for j=1:3

        for k=1:3

            aa=a(j);

            bb=b(k);

            yrru=@(x)10+sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

            yrrd=@(x)-10-sqrt(r*r-(x-50-aa).^2);

            yrлу=@(x)10+sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

            yrld=@(x)-10-sqrt(r*r-(x+50-aa).^2);

            lu=linspace(50+aa,50+aa+r,10);

            ld=linspace(-50+aa-r,-50+aa,10);

            N1=quad2d(fun,aa-50-r,aa+50+r,bb-10,bb+10)+quad2d(fun,aa-
50,aa+50,bb-10-r,bb+10+r)-quad2d(fun,aa-50,aa+50,bb-10,bb+10);

```

```

N2=0;

dx2=lu(2)-lu(1);

for m=1:length(lu)-1

    N2_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+10,bb+yrru(lu(m)));

    N2=N2+N2_temp*dx2;

end

```

```

N3=0;

dx3=lu(2)-lu(1);

for m=1:length(lu)-1

    N3_temp=integral(@(y)fun(lu(m),y),bb+yrrd(lu(m)),bb-10);

    N3=N3+N3_temp*dx3;

end

```

```

N4=0;

dx4=ld(2)-ld(1);

for m=1:length(ld)-1

    N4_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+10,bb+yrlu(ld(m)));

    N4=N4+N4_temp*dx4;

end

```

```

N5=0;

```

```

dx5=ld(2)-ld(1);

for m=1:length(ld)-1

    N5_temp=integral(@(y)fun(ld(m),y),bb+y*ld(ld(m)),bb-10);

    N5=N5+N5_temp*dx5;

end

th=th+N1+N2+N3+N4+N5;

end

end

P3(i)=th;

end

SS=h;

for i=1:13251

    SS(i)=0;

    for j=1:13251

        if i+j-1<=13251

            SS(i)=SS(i)+F(j)*P3(j+i-1);

            else SS(i)=SS(i);

        end

    end

end

end

L=h*(-1)+120;

```

plot(L,SS)