

CT 系统参数标定及成像

蔡志杰

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433; 2. 上海市现代应用数学重点实验室, 上海 200433;
3. 非线性数学模型与方法教育部重点实验室, 上海 200433)

摘要:建立了 CT 系统模板参数标定的数学模型. 然后利用标定的参数, 对接收数据进行了图像重构. 最后对 2017 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题的论文予以评述.

关键词:参数标定; 图像重构; 最小二乘

中图分类号: O212.4

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2018)01-0024-09

1 问题的提出

CT(computed tomography), 即计算机断层成像, 是由美国科学家 A. M. Cormack 和英国科学家 G. N. Hounsfield 于 1972 年发明的, 为此他们共同获得了 1979 年诺贝尔生理学或医学奖^[1-2]. CT 采用准直后的 X 射线束对人体的某一层面进行扫描, 衰减后的 X 射线由探测器接收成为多组原始数据, 再经计算机重建产生显示数据矩阵, 然后在 CRT 或胶片上成像.

CT 出现以后, 不仅在医学上, 而且在其他很多领域也得到了广泛的应用, 如工业无损检测、生态环境检测等. CT 自问世之后的几十年中有了迅猛的发展, 1989 年单方向连续旋转型 CT 的问世以及随后在此基础上产生的螺旋式扫描 CT, 将这一技术推上了一个新的水平. 目前 CT 已经发展到了第 5 代, 图像的清晰度有了进一步的提高.

2017 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题(以下简称 A 题)^[3]就是基于这样的背景来设计的.

一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示, 平行入射的 X 射线垂直于探测器平面, 每个探测器单元看成一个接收点, 且等距排列. X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变, 整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次. 对每一个 X 射线方向, 在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量, 并经过增益等处理后得到 180 组接收信息.

CT 系统安装时往往存在误差, 从而影响成像质量, 因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定, 即借助于已知结构的样品(称为模板)标定 CT 系统的参数, 并据此对未知结构的样品进行成像.

现要求建立数学模型和算法, 解决以下几个问题:

1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板, 模板的几何信息如图 2 所示, 相应的数据文件见 A 题附件 1(部分数据参见表 1), 其中每一点的数值反映了该点的吸收强度, 称为吸收系数. 对应于该模板的接收信息见 A 题附件 2(部分数据参见表 2). 请根据这一模板及其接收信息, 确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向.

收稿日期: 2017-12-15

通讯作者: 蔡志杰, E-mail: zhijiecai@163.com

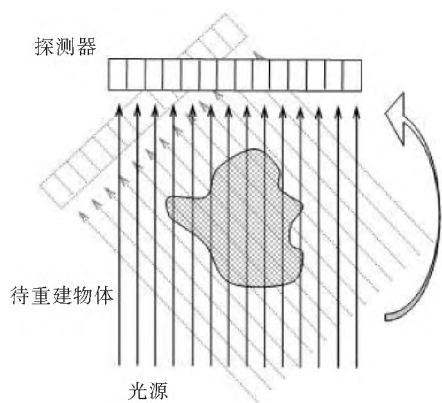


图 1 二维 CT 系统示意图

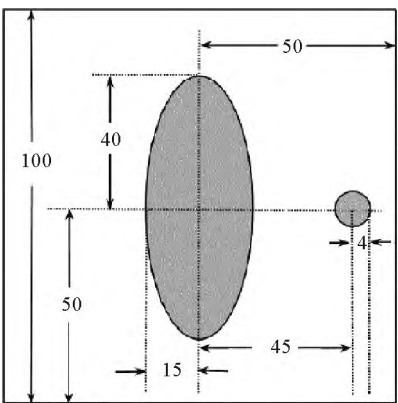


图 2 待标定的模板图(单位:mm)

表 1 附件 1 中待标定模板的部分数据表

0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

表 2 附件 2 中接收信息的部分数据表

0.000 0	0.000 0	0.000 0	17.236 6	24.879 8	29.729 4	33.517 4	36.506 1	38.925 2	40.913 9
0.000 0	0.000 0	8.759 3	21.286 3	27.625 5	31.903 9	35.325 3	38.058 1	40.285 4	42.123 5
0.000 0	6.216 6	15.640 1	24.644 3	30.094 5	33.916 5	37.025 5	39.532 1	41.585 8	43.285 5
0.000 0	14.562 0	20.262 9	27.564 5	32.350 2	35.794 7	38.632 2	40.936 5	42.832 0	44.403 6
0.000 0	19.582 3	23.971 7	30.174 3	34.434 7	37.558 5	40.156 8	42.278 3	44.028 4	45.481 2
6.541 4	23.513 6	27.143 7	32.548 5	36.377 2	39.223 4	41.608 1	43.563 2	45.179 1	46.520 9
15.146 8	26.838 7	29.950 1	34.735 3	38.199 6	40.801 5	42.993 7	44.796 2	46.287 5	47.525 3
20.343 6	29.761 6	32.485 7	36.768 3	39.918 2	42.302 5	44.319 6	45.981 4	47.356 5	48.496 6
24.415 1	32.391 3	34.809 0	38.671 7	41.545 9	43.734 4	45.591 2	47.122 4	48.388 8	49.436 7
27.859 2	34.794 4	36.962 2	40.463 9	43.093 1	45.103 7	46.812 8	48.222 4	49.386 6	50.347 5

2)A 题附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息. 利用 1)中得到的标定参数,确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收系数等信息. 另外,请具体给出图 3 所示的 10 个位置处的吸收系数,相应的数据文件见 A 题附件 4(表 3).

3)A 题附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息. 利用 1)中得到的标定参数,给出该未知介质的相关信息. 另外,请具体给出图 3 所示的 10 个位置处的吸收系数.

4)分析 1)中参数标定的精度和稳定性. 在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型,以改进标定精度和稳定性,并说明理由.

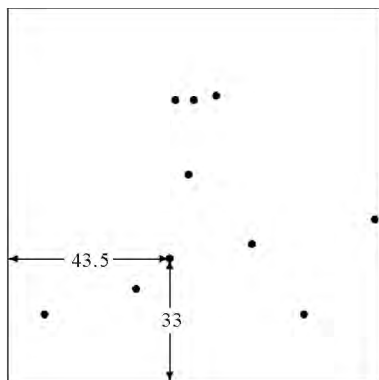


图 3 10 个特征点的位置示意图(单位:mm)

表 3 10 个特征点的坐标表

序号	横坐标	纵坐标
1	10.000 0	18.000 0
2	34.500 0	25.000 0
3	43.500 0	33.000 0
4	45.000 0	75.500 0
5	48.500 0	55.500 0
6	50.000 0	75.500 0
7	56.000 0	76.500 0
8	65.500 0	37.000 0
9	79.500 0	18.000 0
10	98.500 0	43.500 0

问题 1)~4)中的所有数值结果均保留 4 位小数. 同时提供 2)和 3)重建得到的介质吸收系数的数据文件,大小为 256×256 ,格式同附件 1,文件名分别为 problem2. xls 和 problem3. xls.

2 CT 成像的基本原理

为了解决 CT 系统的标定问题,首先要了解 CT 成像的基本原理.

X 射线在穿过物质时,其强度的衰减与物质的厚度及入射辐射强度成正比,比例系数记为 μ ,称为衰减系数,也就是吸收系数,它表示 X 射线穿过单位厚度的物质时强度减少的比例. 若 X 射线的入射强度为 I_0 ,X 射线在均匀物质中传播的距离为 l ,则 X 射线通过均匀物质后的强度为

$$I = I_0 e^{-\mu l}. \quad (1)$$

这说明,X 射线在穿过物质时,其强度按指数形式衰减.

对于不均匀物质,其强度的变化规律为

$$I = I_0 \exp\left(-\int_L \mu dl\right)$$

或

$$\int_L \mu dl = \ln \frac{I_0}{I}.$$

3 标准模板的计算

本节给出 X 射线经过模板后的强度计算公式,为后面的系统标定作准备. 由式(1),对均匀介质,计算强度的关键是给出 X 射线通过模板的长度的计算公式.

考察 X 射线经过形如标准椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的均匀介质的长度. 设 X 射线经过 (x_0, y_0) 点,方向角度为 ϕ ,则射线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases},$$

其中, $p = \cos \phi, q = \sin \phi$.

容易得到,当

$$\Delta_1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{(x_0 q - y_0 p)^2}{a^2 b^2} \geq 0$$

时,X 射线经过椭圆的长度为

$$l = \frac{2 \sqrt{\Delta_1}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}. \quad (2)$$

类似地,对形如圆方程

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2$$

的均匀介质,当

$$\Delta_2 = r^2 - (py_0 - q(x_0 - c))^2 \geq 0$$

时,X射线经过圆的长度为

$$l = 2\sqrt{\Delta_2}. \quad (3)$$

4 系统参数的标定

系统参数标定的基本思想是采用最小二乘法,将问题归结为参数辨识的优化模型,即确定系统的各个参数,使得接收信息的理论计算值与实际测量值之间的平方误差最小.模型可描述为:确定系统的旋转中心 (x_c, y_c) ,旋转中心离探测器左端点的距离 d_c ,探测器单元的间距 d ,探测器各方向角度 θ_j ($j=1, 2, \dots, m, m=180$ 为CT系统的旋转次数),系统的增益 μ ,使得

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (I_{ij} - I_{ij}^*)^2$$

达到最小,其中, $n=512$ 为探测器的单元数.

这是一个非线性优化模型,参数达到近200个,直接进行非线性优化计算,速度慢,精度低,还会陷入局部极小值,从而得不到所需要的结果.因此,必须将问题进行分解,分阶段来确定参数.

第1步 确定系统的增益 μ 和探测器单元的间距 d .

首先标识出独立的圆的信息,利用这些信息来确定 μ 和 d .

由于圆是旋转对称的,不管X射线从哪个方向入射,接收信息都是相同的,因此不妨设所有的X射线都是从下往上垂直入射的,即X射线的方向为 $(0, 1)$,相应的 $p=0, q=1$ (参见图4).

再设经过圆的X射线共有 n 条,其方程分别为

$$x = x_i = x_0 + id, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

其中, x_0 为圆左侧第1条X射线的 x 坐标.则X射线在介质中的传播距离分别为

$$l_i = 2\sqrt{r^2 - x_i^2}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

于是接收信息为

$$I_i = \mu l_i = 2\mu \sqrt{r^2 - (x_0 + id)^2}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

或

$$\frac{I_i^2}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 = r^2.$$

利用最小二乘法,将确定 μ, d 和 x_0 的数学模型归结为

$$\min \sum_{i=1}^n \left[\frac{I_i^2}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 - r^2 \right]^2, \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \mu > 0, \quad d > 0, \quad x_0 \leq -r, \quad (5)$$

其中, I_i^* 为第 i 条射线的实际接收信息.

为了更好地确定参数,给出更为确切的参数范围.对单独圆的情形,从附件2中提取出每个角度经过圆的射线数,即接收信息为非零的个数.记最小个数为 n_{\min} ,最大个数为 n_{\max} ,则探测器单元之间的距离 d 满足

$$d_{\min} = \frac{2r}{n_{\min} + 1} \leq d \leq \frac{2r}{n_{\max} - 1} = d_{\max}. \quad (6)$$

由此可得 x_0 的范围为

$$-r - d_{\max} \leq x_0 \leq -r. \quad (7)$$

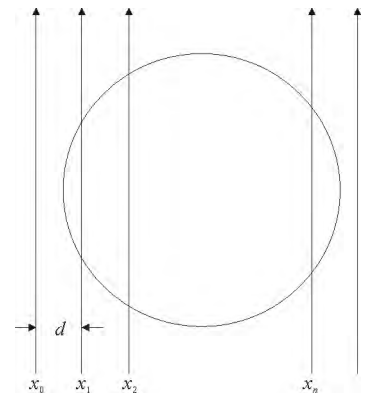


图4 X射线垂直穿过圆示意图

将式(6)和式(7)作为约束条件补充到式(5)中,与式(4)构成反演的优化模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \left[\frac{I_i^{*2}}{4\mu^2} + (x_0 + id)^2 - r^2 \right]^2, \\ \text{s. t.} \quad & \mu > 0, d_{\min} \leq d \leq d_{\max}, -r - d_{\max} \leq x_0 \leq -r. \end{aligned}$$

第 2 步 确定系统的各个旋转角度 $\theta_j (j=1, 2, \dots, m)$.

不妨设探测器经过原点,探测器上原点右侧的第 1 个单元与原点之间的距离记为 d_0 ,该点记为 P_0 (参见图 5). 因为不知道探测器的具体位置,假设探测器在 P_0 左右两侧各有 n 个单元,记为 $P_i (i=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$. 当探测器水平时, P_i 的坐标分别为 $(d_0 + id, 0)$.

对探测器第 j 个方向角度 θ_j , 各单元 P_i 的坐标为

$$x_{ij} = (d_0 + id) \cos \theta_j, y_{ij} = (d_0 + id) \sin \theta_j,$$

将其记为 P_{ij} .

由式(2)和式(3)可以计算得到经过 P_{ij} 的 X 射线的理论接收数据,记为 I_{ij} .

下面确定探测器的左端点与原点之间的距离 d_l . 对固定的 j , 记 n_j^1 为 I_{ij} 中第 1 个非零值的单元号, n_j^2 为 I_{ij}^* 中第 1 个非零值的单元号,其中 I_{ij}^* 为实际接收数据. 为书写方便,下面省略下标 j . 则左端点与原点之间的距离为

$$d_l = d_0 - (n + n^1 - n^2) d.$$

利用最小二乘法,将确定 d_0 和 θ 的数学模型归结为

$$\min \sum_{i=1}^n (I_{i+n^1-n^2} - I_i^*)^2. \quad (8)$$

再来确定约束条件. 显然, P_0 是原点右侧第 1 个单元,其值不会大于单元之间的间距 d , 因此

$$0 \leq d_0 \leq d. \quad (9)$$

根据接收数据(附件 2),有一部分射线仅通过圆,而没有经过椭圆. 通过计算椭圆与圆内公切线的斜率,就可以确定第 1 条射线方向角度的大致范围.

如图 6 所示,记两条内公切线与水平方向的夹角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ,则仅经过圆介质的探测器的方向角度满足

$$\phi_1 - 90 \leq \theta \leq \phi_2 - 90.$$

记第 1 条仅通过圆介质的射线是第 l 条射线,由于探测器的旋转角度大约为 1° ,因此探测器的第 1 个方向角度应在 $\phi_2 - 90 - l$ 附近,稍微放大一些,有

$$\phi_2 - 91 - l \leq \theta_1 \leq \phi_2 - 89 - l. \quad (10)$$

这样,确定 d_0 和 θ_1 的数学模型就归结为:在约束条件(9)和(10)下,求(8)的最小值

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (I_{i+n^1-n^2} - I_i^*)^2, \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq d_0 \leq d, \phi_2 - 91 - l \leq \theta_1 \leq \phi_2 - 89 - l. \end{aligned}$$

对 $\theta_j (j=2, 3, \dots, m)$ 类似处理,其中约束条件(10)改为

$$\theta_{j-1} \leq \theta_j \leq \theta_{j-1} + 2.$$

第 3 步 确定系统的旋转中心 (x_c, y_c) 和旋转中心离左端点的距离 d_c .

最后一步,确定旋转中心的坐标及旋转中心的位置,这里旋转中心的位置用旋转中心与探测器左端点的距离来表示.

上面已经给出了当探测器经过原点,并且水平放置时,探测器左端点的坐标,即 $(-d_l, 0)$. 将探测器

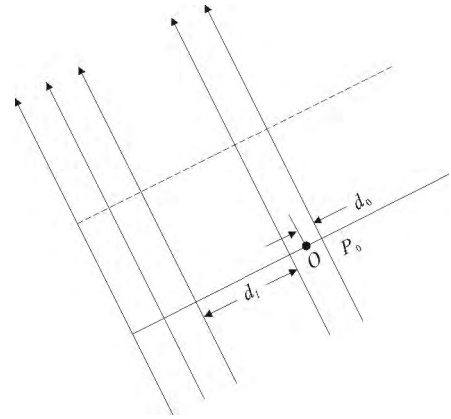


图 5 探测器经过原点时的示意图

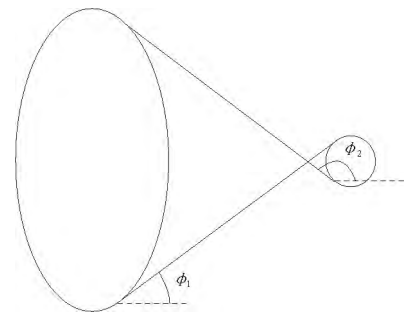


图 6 椭圆与圆的内公切线示意图

旋转 $-\theta$,如图7所示,则左端点 L'' 的 x 坐标 $x_{L''}$ 与 L 的 x 坐标 x_L 相等,即 $x_{L''} = -d_l$,从而

$$x_{L''} = x_{C'} - d_c = x_c \cos \theta + y_c \sin \theta - d_c = -d_l.$$

利用180个旋转角度的数据,采用线性最小二乘法即可求得 (x_c, y_c) 和 d_c .

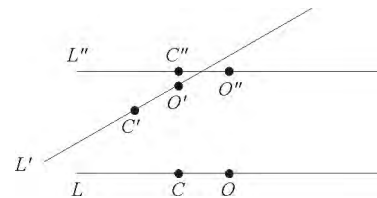


图7 探测器绕原点旋转 $-\theta$ 角示意图

5 图像重构

将整个正方形托盘划分成 $p \times p$ 个单元,每个单元中的吸收系数近似为一个常数,第 i 行第 j 列单元的吸收系数记为 $\mu_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, p)$.这样,总共有 $p+1$ 条横线和 $p+1$ 条纵线.分别计算出不同旋转角度、不同位置的X射线与这些横线和纵线之间的交点,将这些交点按 x 坐标升序排列,相邻两点之间的距离就是经过该单元的长度.对第 i 条X射线的第 j 个旋转角度来说,经过各单元的长度矩阵记为 $L_{ij} = (l_{ijkl})_{p \times p}$.这样,该射线的接收信息为

$$I_{ij} = \sum_{k,l=1}^p l_{ijkl} \mu_{kl}.$$

在各单元吸收系数正确的情况下,接收信息 I_{ij} 应等于实际接收信息 I_{ij}^* .注意,为了方便,这里的接收信息已经去掉了系统整体增益的影响.由此得到

$$\sum_{k,l=1}^p l_{ijkl} \mu_{kl} = I_{ij}^* (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

这就是关于各单元吸收系数矩阵 $K = (\mu_{kl})_{p \times p}$ 的线性代数方程组.

通常线性代数方程组(11)是超定或欠定方程组,例如,就赛题而言,如果将正方形托盘划分成 256×256 个单元,即 $p = 256$,射线数为 $n = 512$,旋转角度数为 $m = 180$,那么,方程数 mn 远远大于变量数 p^2 ,这就是超定方程组.因此,需要使用线性最小二乘法来求解方程组(11).

另一方面,由于方程组的规模非常大,不能用直接法进行求解,而应采用间接法求解.

需要注意的是:数值计算必然会导致误差,从而导致吸收系数的计算结果出现负值,因此必须对其进行处理.一种处理方法是,在迭代过程中将负值取为0.重构的图像如图8所示.

Matlab 提供了图像重构的函数 iradon,用于实现二维平行光束的CT重建,采用的方法是滤波反投影算法.但是,使用该函数的前提是旋转中心在正方形托盘的中心,并且CT系统的坐标系与重构图像的坐标系是一致的,不能相差一个角度.因此,直接用 iradon 函数,重构的图像会相差一个平移和旋转,且由于计算误差,只能看出大致形状,数值结果是不准确的.如从图9可以明显看出存在条状伪影,即使对吸收系数作非负处理,伪影仍不能完全消除,同时还相差一个平移和旋转(图10).

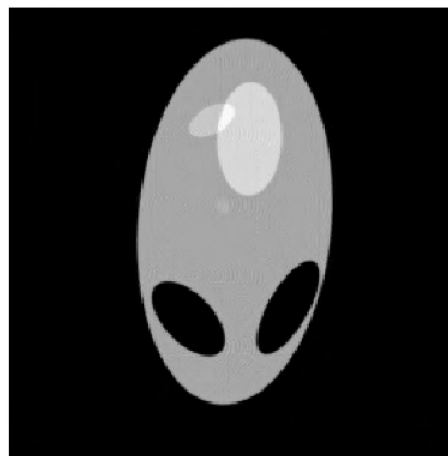


图8 对附件3的重构图像

为了消除旋转的影响,可在 iradon 函数中加入射线旋转角度参数,重构的图像如图11所示,非负处理后的重构图像如图12所示.但这仍相差一个平移.

消除平移的一种方法,是对附件2用 iradon 函数进行图像重构,确定出重构图像中椭圆的中心位置,其与原点的偏移量就是附件3重构图像的偏移量.减去这一偏移量,就可以得到正确的图像了.

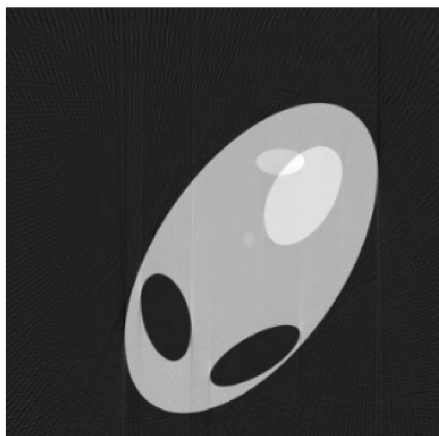


图 9 直接用 iradon 函数重构的图像

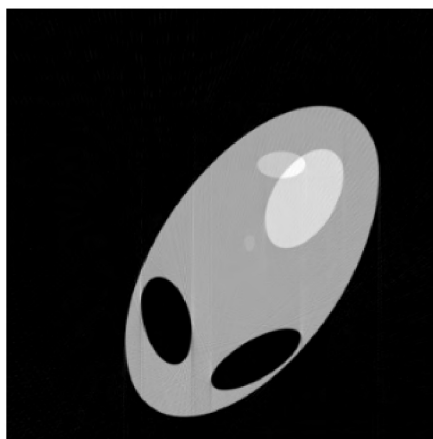


图 10 直接用 iradon 函数,并对吸收系数作非负处理后的重构图像

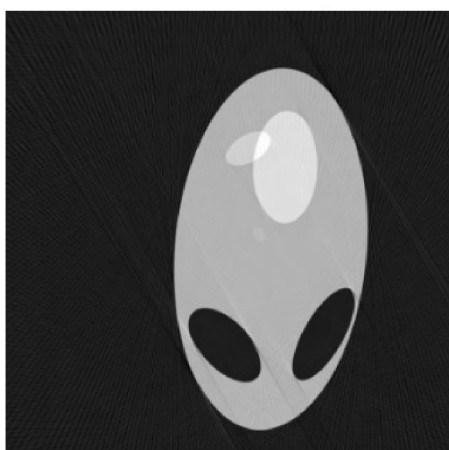


图 11 考虑旋转角度后的重构图像

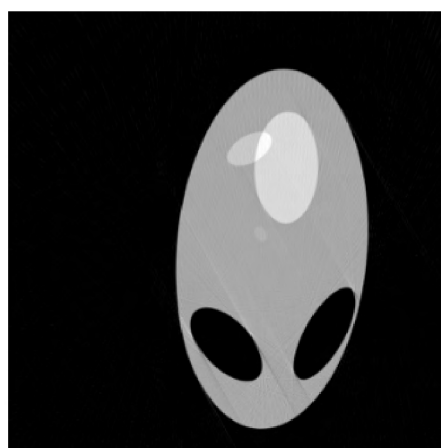


图 12 考虑旋转角度,并对吸收系数作非负处理后的重构图像

6 确定图像中图形的几何信息

赛题中不仅要求重构图像,而且要求给出附件 3 中各个几何图形的信息,也就是要求给出附件 3 中 6 个椭圆的中心坐标、两个半轴长、旋转角度及吸收系数。

为此,首先提取各个椭圆的边界,然后对其作二次曲线拟合,得到一般椭圆的方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (12)$$

其中, $b^2 - ac < 0$.

对一般斜椭圆方程(12)推导出其中心坐标、两个半轴长及倾斜角度的计算公式.将得到的椭圆信息作为初始值,采用最小二乘法,可以得到更精确的结果。

7 对含有噪声的接收信息的处理

观察附件 5 的数据,可以发现其数据主要集中在探测器中间,两边的数值较小.采用问题 2 同样的方法进行图像重构,结果见图 13.从图 13 可以看到,重构图像四周应为空气,其吸收系数为 0.当某些位置的 X 射线沿某些角度穿过该图

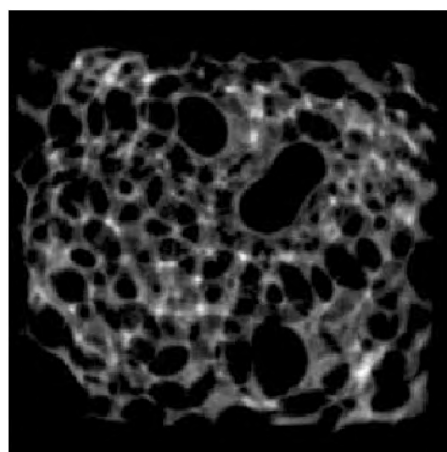


图 13 对附件 5 的重构图像

像时,其吸收强度应为0,而附件5中相应的接收信息不为0.这说明接收信息中含有噪声.

取出这些接收信息进行分析,可以知道它们满足 $[0, 0.3]$ 的均匀分布.因此,可以将接收信息小于0.3的部分置为0.

另一种方法是,在迭代过程中,不必等到数值结果收敛,只要相邻两次迭代的误差小于噪声水平就停止迭代.

8 参赛论文评述

本节简要评述论文评阅时发现的一些问题.

1) 增加了额外的假设条件

部分参赛队在建立模型时,额外增加了赛题中没有的条件.例如,相当一部分参赛队假设旋转中心在探测器的中点,赛题中没有提及这个条件,在建立模型时,不仅需要给出旋转中心的坐标,而且应该给出旋转中心在探测器中的位置.在第4节的第3步中,用旋转中心与探测器左端点之间的距离来表示这个位置.当然也可以用旋转中心与探测器中点之间的距离来表示,但不应直接假设旋转中心就是探测器的中点.

另一个相当普遍的例子是,假设CT系统是均匀旋转的,每次旋转角度为 1° ,或假设每次旋转角度约为 1° ,用最小二乘法确定旋转角度.赛题中明确说明,由于安装时存在误差,所以才需要标定,且明确要求给出CT系统的180个方向.假设CT系统均匀旋转,降低了问题求解的难度,也不满足实际的要求.

还有少部分参赛队,在已经得到各个方向的角度后,再对这些角度进行拟合,以此来说明CT系统是均匀旋转的,显得画蛇添足.

2) 用较少信息进行标定

部分参赛队采用纯几何方法来确定 μ 和 d .如图14所示,由相邻两条射线之间的距离相等可以得到

$$d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_2}{2}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_3}{2}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_2}{2}\right)^2}, \quad (13)$$

而

$$l_i = \frac{I_i}{\mu},$$

其中, l_i 为X射线经过圆的长度.由此可得关于 μ 的方程

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{I_2}{2\mu}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{I_1}{2\mu}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{I_3}{2\mu}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{I_2}{2\mu}\right)^2}. \quad (14)$$

解得 μ ,再用式(13)计算得到 d .

这种方法仅对没有误差的测量信息是正确的,如果接收信息含有噪声,纯几何法就会产生较大的误差.更好的方法是,对式(14)用最小二乘法来确定 μ ,这样可以充分利用接收信息,而不仅仅用3条X射线的接收信息.

3) 没有注意到离散与连续之间的区别

部分参赛队利用穿过小圆的X射线数来确定探测器单元之间的距离 d ,这实际上是假设恰有两条X射线是小圆的切线,切点的连线恰好是小圆的直径.这在连续的情况下是对的,但现在X射线是离散的,相邻两条X射线之间存在一定的间距(图14).事实上,对不同的方向,穿过小圆的X射线数是不同的,对附件2而言,有28和29两种情况,这样,探测器单元的间距可以是

$$d = \frac{2 \times 4}{28} \approx 0.2857(\text{mm}),$$

也可以是

$$d = \frac{2 \times 4}{29} \approx 0.2759(\text{mm}),$$

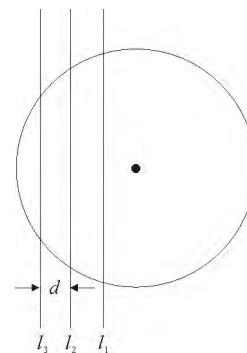


图14 纯几何法示意图

还可以用它们的平均值来确定

$$d=\bar{d}=0.2808(\text{mm}),$$

结果相差很大.

类似地,假设必有一条 X 射线经过椭圆的长轴或短轴、与椭圆水平或垂直相切、经过椭圆与圆的内公切线等,所有这些都是同一种近似,在标定问题中是远远不够的.较好的做法是,将这些方法得到的数值作为相应参数的初始值,用最小二乘法寻找最优参数值.

4) 没有按要求完成赛题

赛题明确要求对问题 2 和问题 3 分别生成数据文件,并对文件名、格式都作了规定,但还是有不少队没有按要求来做.

问题 2 和问题 3 还要求给出 10 个特征点的吸收系数,但有些队没有在纸质论文中给出这 10 个点的数值结果.同样地,问题 1 中 180 个角度是要求标定的,但有些队没有给出标定结果.

5) 没有考虑实际应用的方便性

在给出 180 个角度时,大多数队采用“度”作为单位,但也有少部分参赛队采用“弧度”作为单位.这在数学上当然没有问题,但是实际应用时,还需换算成“度”才能使用,否则既不直观也不方便.

6) 缺少检验

判别模型的优劣需要对模型进行检验,绝大多数队都没有考虑到这一点.这是一个老生常谈的问题了,如果不做检验,如何说明所建立的模型是正确的,所用的求解方法是有效的呢?

对标定问题,应给出各个参数的取值,利用式(2)和式(3)计算得到探测器的接收信息.然后利用自己建立的模型和求解方法对自己构造的接收信息进行参数标定,来确定 CT 系统的各个参数,并与给定的参数进行比较,以此来检验模型和求解方法的好坏.进一步,给接收信息加上一定水平的测量误差,以分析求解方法的稳定性.这样,得到的模型和求解方法才是可靠的.

参考文献

- [1]谭永基,蔡志杰.数学模型[M].上海:复旦大学出版社,2011.
- [2]张朋,张慧滔,赵云松.X 射线 CT 成像的数学模型及其相关问题[J].数学建模及其应用,2012,1(1):1-12.
- [3]全国大学生数学建模竞赛组委会.2017 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL].[2017-09-14].<http://www.mcm.edu.cn/html—cn/node/460baf68ab0ed0e1e557a0c79b1c4648.html>.

Parameters Calibration and Image Reconstruction of CT System

CAI Zhijie

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Contemporary Applied Mathematics, Shanghai 200433, China;

3. Key Laboratory of Nonlinear Mathematical Models and Methods of Ministry of Education, Shanghai 200433, China)

Abstract: In this paper, mathematical models for parameters calibration of CT system are established. Using these parameters, image reconstruction of the received data is presented. Finally, some comments on the students' papers of Problem A in CUMCM 2017 are given.

Key words: parameters calibration; image reconstruction; least square

作者简介

蔡志杰(1968—),男,博士,教授,博士生导师,应用数学专业,主要研究方向是工业应用数学、应用偏微分方程.