

# CT

## 摘要

CT 技术在当代社会已广泛应用在临床医学、工业工程等领域。在本题中首先通过建立离散模型并对其简化从而对 CT 仪器参数进行了标定；建立平行束滤波反投影重建模型，通过 Radon 变换及 R-L 滤波器解决了成像问题，并通过对平行束滤波反投影重建模型进行优化，使模型具有降噪能力，从而得到了更精确符合实际的图形与吸收率值。

**关键词：**

# 1 问题重述

CT 可以在不破坏样品的情况下, 利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像, 由此获取样品内部的结构信息。本题 X 射线的发射器和探测器的相对位置固定不变, 整个发射-接收系统绕位于正方形托盘下方某处旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向, 发射接收装置装有 512 个等距单元探测器, 用于测量位置固定不动的二维待测介质吸收衰减后的射线能量, 并且通过增益等处理方式得到 180 组接收信息。然而由于存在系统误差, 所以需要对安装好的 CT 系统进行参数标定, 通过已知模板对 CT 系统的参数进行标定, 并根据标定的参数对未知结构的样品进行成像。

具体问题重述如下:

- (1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成标定模板, 模板的几何信息如图 2 给出, 相应的数据文件见附件 1, 其中每一点的数据值反映了该点的吸收强度“吸收率”。应用于模板的接收信息见附件 2。问题一要求根据模板及其接收信息对 **CT 系统** 进行参数标定, 确定出此 **CT 系统** 实际的旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元间距离以及该 **CT 系统** 使用的 X 射线的 180 个方向。
- (2) 利用问题一所标定的 **CT 系统** 相关参数以及所建立模型, 使用附件 3 所给未知介质的接收信息, 确定出该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状以及吸收率等信息。另外利用附件 4 中数据给出图 3 中所给 10 个位置处的吸收率。
- (3) 附件 5 为利用该 **CT 系统** 得到的另一未知介质的接收信息。同样利用问题 1 中的标定参数与模型, 给出未知介质的系列相关信息并给出图 3 中 10 个位置处的吸收率。
- (4) 对问题 1 中参数标定的精度以及稳定性进行分析, 并在此基础上建立新模型, 建立对应的标定模型, 以改进标定精度和稳定性, 并说明理由。

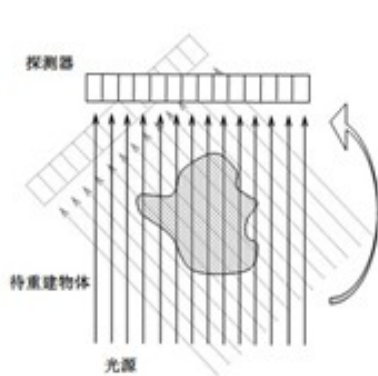


图 1: CT 系统示意图

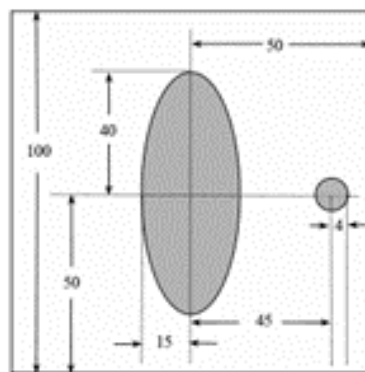


图 2: 模板示意图

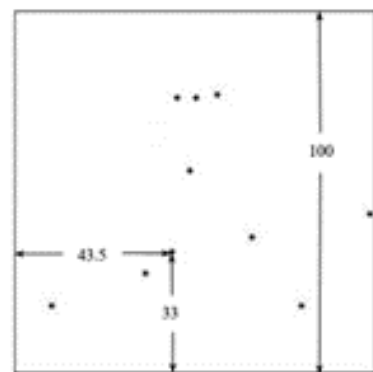


图 3: 十个位置示意图

## 2 问题分析

## 3 模型假设

## 4 符号说明

## 5 问题一求解

### 5.1 理论基础

由所阅读的文献，CT 机通常对衰减系数公式做如下处理：

$$P = \ln \frac{I_0}{I} = \mu L \quad (1)$$

问题中，使用的 CT 系统的原理是使用 X 射线照射在样品上物体吸收部分射线的能量，使得射线强度产生衰减，射线的衰减呈指数变化。那么对于长度为  $l$  的均匀同质物体，吸收率为  $\rho$ ，则探测器上对应位置得到的接收信息  $D$  应满足：

$$D = f(\rho l) \quad (2)$$

### 5.2 数据分析

通过分析附件一和附件二，我们得到了如下信息：

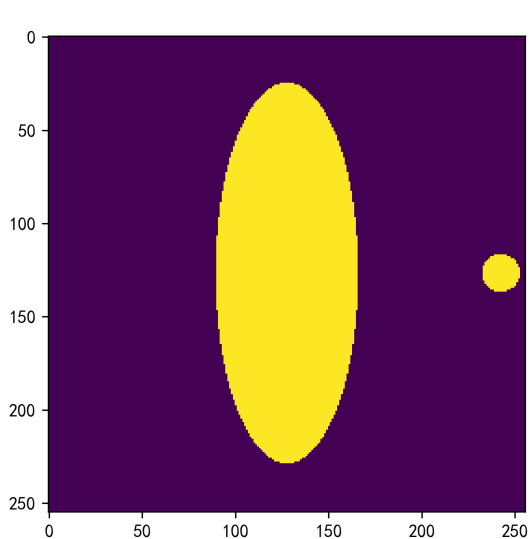


图 4: 附件 1 信息

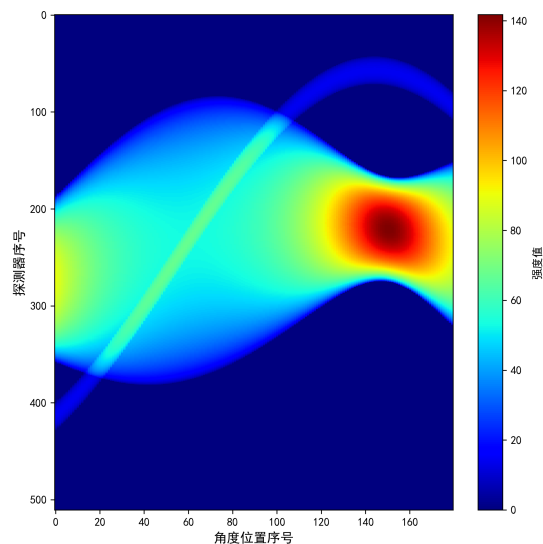


图 5: 附件 2 信息

根据图 5，我们可以明显地看出窄条为圆形模板的投影，而另一部分是椭圆形模板的投影，并且二者有重叠部分。二者重叠部分为 X 射线同时穿过椭圆和圆形模板，而为 0 的地方则表示 X 射线经过空气直接打到单元探测器上。

### 5.3 理论公式

在此问题中, 介质为均匀介质且吸收率为 1, 根据公式 2, 此时探测器获得的数值即与穿过的长度有关。在这一问题中, 我们转换成某一方向的直线穿过标定模板的长度求解。

我们假设椭圆中心为坐标原点, 椭圆中心与圆中心连线为 X 轴, 过坐标原点垂直于 x 轴方向为 y 轴, 建立平面直角坐标系。旋转中心假设为  $R(x_0, y_0)$ , 标定模板椭圆和圆的方程分别为:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1, m = 15, n = 40; (x - 45)^2 + y^2 = 4^2$$

由于题目中 X 射线会进行旋转, 故我们假设长度为  $d$  的射线旋转角度为  $\theta$ , 则射线长度公式为

$$x \cos \theta + y \sin \theta = d$$

与椭圆方程进行联立, 可求得该射线与椭圆相交弦长长度:

$$p = \frac{2mn\sqrt{r^2 - d^2}}{r^2}, \text{ 这里 } r^2 = m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta$$

对于圆上的部分, 设圆心坐标为  $(G, 0)$ , 圆半径为  $r_0$ , 其中  $G = 45, r_0 = 4$ , 那么容易求出其弦长表达式为:

$$p_1 = 2\sqrt{r_0^2 - (G \cos \theta - d)^2}$$

同时, 由于在整个旋转过程中, 直线与椭圆或圆不一定有交点, 那么这种情况下, 我们对整个角度范围进行整合, 可以得到总的投影长度为:

$$p_t = \frac{2mn\sqrt{\max(0, m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta - d^2)}}{m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta} + 2\sqrt{\max(0, r_0^2 - (G \cos \theta - d)^2)}$$

考虑到实际情况中, 探测器的中心与坐标原点有一定的偏移, 那么在上式的基础上, 我们需要对投影长度进行修正。

易证, 在探测器能探测到物体的前提下, 沿垂直于探测器方向的探测器位置变化对投影长度没有影响。即在探测器位置发生变化时, 只需要考虑沿探测器方向的位置变化。

那么对于旋转中心坐标  $R(x_0, y_0)$ , 探测器中心与旋转中心在探测器平面上的投影的有向距离  $d_0$ , 对于探测器上一条射线, 其与探测器中心的距离为  $d$ , 那么容易求出, 该点与坐标原点在探测器上的投影的距离  $d'$  的值为:

$$d' = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + d_0 + d$$

## 6 问题二求解

### 6.1 定义目标函数

### 6.2 构造价格的概率分布模型

#### 6.2.1 GBM 描述价格的微分方程

#### 6.2.2 对数收益形式

#### 6.2.3 模拟收益生成路径

#### 6.2.4 计算风险度量

### 6.3 条件约束

#### 6.3.1 种植面积总和约束

#### 6.3.2 非负性约束

#### 6.3.3 地块类型与用途约束

#### 6.3.4 可持续性发展约束

#### 6.3.5 风险控制约束

### 6.4 鲁棒优化模型求解

#### 6.4.1 定义决策变量

#### 6.4.2 确定目标函数

#### 6.4.3 输出结果

## 7 问题三求解

### 7.1 预期销售量、亩产量和种植成本的相关性分析

### 7.2 建立交叉弹性矩阵

### 7.3 条件约束

#### 7.3.1 种植面积总和约束

#### 7.3.2 非负性约束

#### 7.3.3 地块类型与用途约束

#### 7.3.4 可持续性发展约束

#### 7.3.5 风险控制约束

#### 7.3.6 交叉弹性约束

### 7.4 适应度函数

### 7.5 模型求解

#### 7.5.1 数据输入

#### 7.5.2 定义聚类中心

#### 7.5.3 初始化

#### 7.5.4 簇分配

#### 7.5.5 质心更新

#### 7.5.6 目标函数

#### 7.5.7 算法终止判定

#### 7.5.8 结果输出

### 7.6 比较分析

## 8 模型的检验

1. 残差 P-P 图
2. 单样本 K-S 检验
3. 灵敏度分析

## 9 模型的评价与改进

- 9.1 模型的优点
- 9.2 模型的缺点
- 9.3 模型的改进

## 参考文献



## 附录

### 附录 1 支撑材料

10 问题一第一小问代码

11 问题一第二小问代码

12 问题二代码

13 问题三代码