CHAPITRE 03

Pré-requis : Généralités sur les fonctions

I. Généralités sur les fonctions

I.1. Courbe, tableau de valeurs

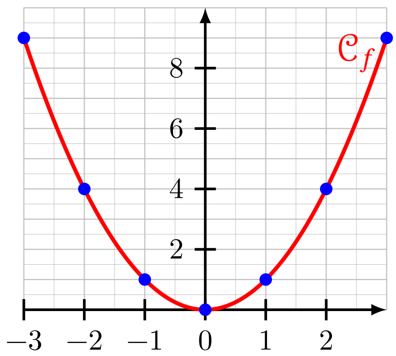
Méthode 1

Une fonction peut se donner :
- par sa formule ($f(x) = \dots$) ;
- par sa courbe dans un repère ;
- par un tableau de valeurs.

Exemple 1

Soit $f(x) = x^2$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de coordonnées $\left(x\,; f(x)\right)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



I.2. Image, antécédent, équation

Méthodes 2

Déterminer l'**image** d'un réel x par une fonction f revient à déterminer la valeur de $f(x)$:
- soit par **calculs** : on remplace x ;
- soit dans le tableau de valeurs : on cherche x dans la première ligne ;
- soit on utilise la courbe : on part des abscisses et on lit l'ordonnée du point de la courbe.

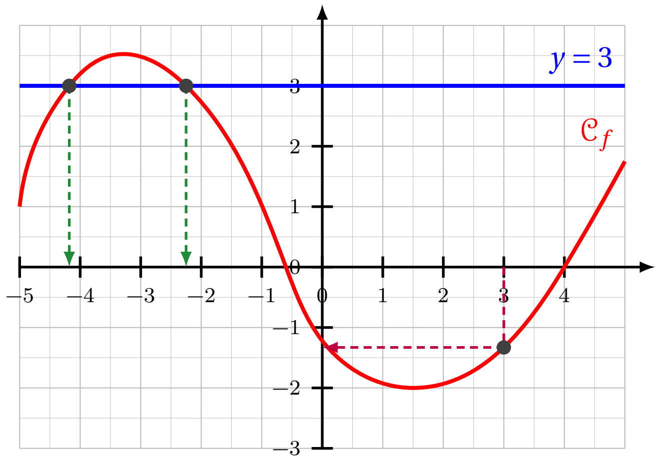
Déterminer les (éventuels) antécédents de y par f revient à chercher **tous** les x tels que que $y = f(x)$:
- par **calculs** ; en résolvant l'équation $f(x) = y$;
- via le tableau de valeurs : on cherche y dans la deuxième ligne ;
- avec la courbe : on regarde les points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale de hauteur y.

Remarques 1

Les calculs **algébriques** donnent toujours les valeurs exactes, mais la résolution d'**équations** (pour les antécédents) n'est pas toujours simple !

Le travail sur la courbe est le plus simple, il s'agit de **lectures graphiques**, et il faut (autant que faire se peut) travailler avec la courbe pour vérifier ses résultats !

Illustration 1



On peut donc « lire » l'image de 3 par f : $f(3) \approx -1{,}35$.
On peut donc « lire » les antécédents de 3 par f : environ $-2{,}25$ et $-4{,}2$.

I.3. Tableau de signes, tableau de variations

Méthodes 3

Le **tableau de signes** d'une fonction permet de consigner, dans un tableau (sic), les intervalles (endroits) sur lesquels la fonction est positive (+) ou négative (−).
Graphiquement, une fonction est positive si sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, négative sinon.

Le **tableau de(s) variations** d'une fonction permet de consigner, dans un tableau (sic), les intervalles (endroits) sur lesquels la fonction est croissante (↗) ou décroissante (↘).
Graphiquement, une fonction est croissante si sa courbe « monte », décroissante sinon.

Illustration 2 - Remarque

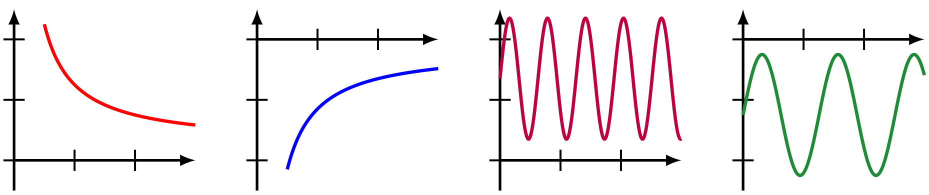
En travaillant sur la courbe donnée précédemment :

x	-5		$-0{,}6$		4		5
$f(x)$		+	0	−	0	+	

x	-5		$-3{,}25$		$1{,}5$		5
f	-1	↗	$3{,}5$	↘	-2	↗	$1{,}75$

Il ne faut pas « mélanger » le signe et les variations d'une fonction !

- une fonction peut être décroissante et positive ;
- une fonction peut être croissante et négative ;
- une fonction peut être positive et changer « très souvent de variations » ;
- toutes les combinaisons sont possibles !



Méthodes 4

Un tableau de variations (ou une courbe) permet de :

— déterminer un maximum, un minimum : valeurs Max et min de la **L2** du tableau de variations ;

— déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$: on « place » k sur les flèches ;

— déterminer le tableau de signes (sans passer par la courbe) : on place les « 0 » et on « suit les flèches ».

Illustration 3

On donne le tableau de variations d'une fonction f :

x	-5		a		-2		b		3		c		5		10
f	2	↘ 1,75	0	↘	-5	↗	0	1,75 ↗	4	↘ 1,75	0	↘	-3	↗	-1

▷ le maximum de f est 4, atteint en $x = 3$;
▷ le minimum de f est -5, atteint en $x = -2$;
▷ l'équation $f(x) = 1{,}75$ admet 3 solutions ;
▷ l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions (notées a, b et c).

On peut donc en déduire le tableau de signes de $f(x)$:

x	-5		a		b		c		10
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

II. Rappels et compléments sur les équations et les tableau de signes

II.1. Équations classiques

Exemples 2

Pour les équations du 1er degré, on « isole » le x :

— $3x + 5 = 10 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = 5/3$.

— $2x + 9 = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + 2x = 4 - 9 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -5/4$.

Exemples 3

Pour les équations du 2d degré, on utilise Δ (ou la calculatrice et le module `équation`) :

— $x^2 - 6x + 5 = 0$: $\Delta = 16$ et les deux racines sont $x_1 = 5$ et $x_2 = 1$.

— $3x^2 + 7x - 10 = 0$: $\Delta = 169$ et les deux racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -10/3$.

Exemples 4

On peut rappeler la méthode liée aux équations-produit (produit nul) :

— $(x-2)(4x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -6/4 = -3/2$.

— $(x+2)(x^2+6x+9) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -3$ (grâce à Δ).

On peut également rappeler la méthode liée aux équations/quotient (produit en croix) :

— $\frac{3}{2x+5} = 7 \Rightarrow 3 \times 1 = (2x+5) \times 7 \Rightarrow 3 = 14x + 35 \Rightarrow 14x = -32 \Rightarrow x = -32/14 = -16/7$.

— $\frac{2x}{x+1} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow (x+1)(x+1) = 2x(x+3) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 6x \Rightarrow -x^2 - 4x + 1 = 0$ et Δ donne $x = -2 \pm \sqrt{5}$.

II.2. Étude de signes

Rappel 1

Pour étudier le signe d'une fonction, le plus simple est de travailler sur un tableau de signes :

- ⇝ il ne faut avoir que des produits et/ou des quotients ; si besoin on met au même dénominateur, on factorise, etc
- ⇝ on « remplit » une ligne par facteur ;
- ⇝ la dernière ligne repose sur la **règle des signes**.

Les expressions classiques à savoir étudier :

- ⇝ un **carré** est toujours positif (il peut quand même s'annuler...) ;
- ⇝ une **exponentielle** est toujours strictement positive ;
- ⇝ les fonctions affines $mx + p$, pour lesquelles on « utilise » le signe de m après le zéro ;
- ⇝ les trinômes $ax^2 + bx + c$ pour lesquelles le signe de a est à l'extérieur des éventuelles racines ;

Exemples 5

⇝ $f(x)3x + 18$:

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

⇝ $f(x) = -2x^2 + 10x + 12$:

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

⇝ $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 3}$:

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemples 6

⇝ $f(x) = -4x + 20 - \dfrac{16}{x}$ sur $[0{,}5 ; 6{,}5]$:

— en mettant au même dénominateur, on obtient $\dfrac{-4x^2}{x} + \dfrac{20x}{x} - \dfrac{16}{x} = \dfrac{-4x^2 + 20x - 16}{x}$;

— le dénominateur (x) est strictement positif sur $[0{,}5 ; 6{,}5]$;

— pour le numérateur, $\Delta = 144$ et les deux racines sont 1 et 4 ;

Ainsi on obtient :

x	$0{,}5$		1		4		$6{,}5$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	