DOC 01

Dérivation

I. Variations d'une fonction

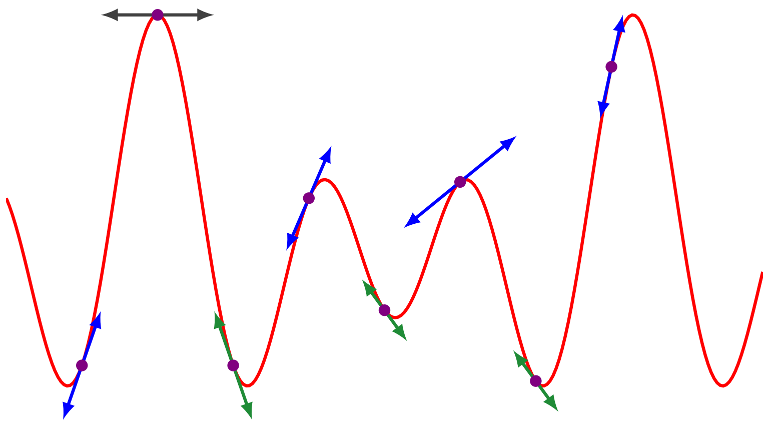
I.1. Introduction

Intro

Étudier, sans la courbe, les variations d'une fonction est fastidieux, mais grâce à un nouvel outil, la **dérivation**, on peut le faire « assez facilement ».

Idée

L'idée est de « remplacer » (localement) la courbe par sa tangente.



On peut donc constater que :

- les « tangentes bleues montent » et que la courbe « suit la même direction » ;
- les « tangentes vertes descendent » et que la courbe « suit la même direction » ;
- la « tangente grise est horizontale » et que la courbe « change de direction ».

La tangente et la courbe vont donc dans la « même direction » !

Rappels 1 - Idée

Une tangente est une **droite**, et savoir si une droite « monte ou descend » est simple : il suffit de connaître sa **pente** (ou son **coefficient directeur**).

On rappelle que l'équation (réduite) d'une droite est de la forme $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m \text{ la pente} \\ p \text{ l'ordonnée à l'origine} \end{cases}$.

- si $m > 0$, la droite est croissante ;
- si $m < 0$, la droite est décroissante ;
- si $m = 0$, la droite est horizontale.

Il ne reste donc « plus qu'à » trouver un moyen de déterminer la pente des tangentes !

I.2. Nombre dérivé

Définition 1 - Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in \text{I}$.
On appelle **nombre dérivé** de f en a, la pente (si elle existe !) de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a.
Dans le cas où la tangente existe, on dit que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ ce nombre dérivé.

Propriété 1

Si f est dérivable en a, une équation de la tangente Γ_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$\Gamma_a : y = f'(a) \times (x-a) + f(a).$$

Remarques 1

On va utiliser des formules qui donnent **tous** les $f'(a)$!

Pour déterminer l'équation de la tangente, on **remplace** les a, et on calcule $f'(a)$ puis $f(a)$!

I.3. Fonction dérivée

Propriétés 2

On a les fonctions dérivées suivantes (les ensembles de définition et dérivabilité ne sont pas indiqués) :

$f(x) = \dots$	$f'(x) = \dots$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$x^n \quad (n \geqslant 1)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \geqslant 1)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Théorème 1

On a les formules de dérivations suivantes (u et v sont des **fonctions**) :

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku \quad (k \text{ cstte})$	ku'
$u \times v$	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemples 1, de base

Pour dériver une fonction, on repère la ou les formules à utiliser, puis on raisonne éventuellement sur les composées !

$g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+5}$

$\leadsto$ on va utiliser u/v avec $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v(x) = x^2+5 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$;

$\leadsto$ $g' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ donc $g'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+5) - 2x \times (x+2)}{(x^2+5)^2} = \dfrac{x^2+5-2x^2-4x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}$.

Remarques 2

Pour la dérivée d'un **quotient**, on ne développe pas le dénominateur, on le laisse sous forme d'un carré ! Si des choses sont simplifiables, on n'hésite pas à les **simplifier** !

II. Étude générale

II.1. Méthode

Théorème 2

Pour étudier une fonction f sur un intervalle I :

— on calcule sa dérivée $f'(x)$ sur I ;

— on étudie, si besoin en « transformant », le **signe** de $f'(x)$ sur I ;

— on dresse le **tds** de $f'(x)$ sur et on en déduit le **tdv** de f sur I grâce à $f' \oplus \Rightarrow f \nearrow$ et $f' \ominus \Rightarrow f \searrow$;

— on complète le tdv de f avec les images (ou les limites).

II.2. Exemple

Illustration 1

Soit f la fonction définie que $[0;7]$ par $f(x) = x^3 - 11x^2 + 39x - 20$.

— f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 22x + 39$;

— on utilise Δ pour déterminer le signe de $f'(x)$;

x	0		3		$\frac{13}{3}$		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

— le théorème fondamental permet de dresser le tableau de variations de f ;

x	0		3		$\frac{13}{3}$		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-20	$\nearrow$	25	$\searrow$	m	$\nearrow$	57

avec $m \approx 23{,}8$.

— on peut proposer la courbe suivante pour terminer.