

## CHAPITRE 05

## Probabilités élémentaires

## I. Introduction

## Intro

On fait remonter à la correspondance de 1654 entre Pascal et Fermat, sur un problème de jeu de hasard, l'acte de naissance du calcul des probabilités.

Après trois siècles de recherche, le calcul des probabilités a pu fournir, au début du XX<sup>e</sup> siècle, les bases théoriques nécessaires au développement de la statistique et a investi de très nombreux domaines de la vie scientifique, économique et sociale.

## Cadre

Le but des probabilités est d'essayer de **rationaliser** le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?

Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

## Point histoire - Anecdote

TABLE  
DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE  
PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 36, en

	6 Parties	5 Parties	4 Parties	3 Parties	2 Parties	1 Partie
1 <sup>re</sup> Partie	63	70	80	95	128	256
2 <sup>de</sup> Partie	63	70	80	95	128	
3 <sup>e</sup> Partie	56	60	64	64		
4 <sup>e</sup> Partie	41	40	32			
5 <sup>e</sup> Partie	14	16				
6 <sup>e</sup> Partie	8					

Il n'y a pas de parties où les 36 pistoles de mon joueur, pour le

Si on joue 36, chacun, en

	6 Parties	5 Parties	4 Parties	3 Parties	2 Parties	1 Partie
1 <sup>re</sup> Partie	63	70	80	95	128	256
2 <sup>de</sup> Partie	126	140	160	192	256	
3 <sup>e</sup> Partie	182	200	224	256		
4 <sup>e</sup> Partie	141	160	192			
5 <sup>e</sup> Partie	108	128				
6 <sup>e</sup> Partie	80					

Il n'y a pas de parties où les 36 pistoles de mon joueur, pour les



Blaise Pascal

Pierre de Fermat

Le chevalier de Méré (17<sup>e</sup> siècle) était un joueur et souhaitait connaître les stratégies amenant à un plus grand nombre de succès. Il soumet ce problème : « Deux joueurs misent chacun 32 pistoles dans un jeu en trois manches gagnantes. La partie est interrompue alors que le premier joueur a remporté deux manches et le second une seule. Quel doit être alors le gain de chacun des deux joueurs ? » Pascal et Fermat relèvent le défi et on retrouve les réponses dans leurs échanges épistolaires. Le problème décrit par le chevalier de Méré est un problème historique que l'on trouve déjà dans le Summa de Arithmetica de Luca Pacioli (1494). Pascal et Fermat sont les premiers à y apporter une solution mathématique généralisable.

C'est cependant le Hollandais Christiaan Huygens qui publie en 1657 le premier traité mathématique consacré aux probabilités : Tractatus de Rariociniis in Alea Ludo. De nos jours, les probabilités constituent une partie très importante des mathématiques.

Source : LeLivreScolaire

## II. Vocabulaire des événements

## II.1. Bases

## Définitions 1

- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité liée à l'expérience aléatoire.
- L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté  $\Omega$ .
- Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté  $\emptyset$ .
- L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.
- Pour tout événement A il existe un événement noté  $\bar{A}$  et appelé événement contraire de B.  
Il est composé des éléments de  $\Omega$  qui ne sont pas dans A. On a en particulier  $A \cup \bar{A} = \Omega$  et  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

### Exemple 1

Lancer d'un dé à six faces :

- ▶ « obtenir 2 » est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- ▶ Univers :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- ▶  $A = \text{« obtenir un 5 »}$  est un événement élémentaire que l'on peut noter  $A = \{5\}$ .
- ▶  $B = \text{« obtenir un numéro pair »}$  est un événement que l'on peut noter  $B = \{2; 4; 6\}$ .
- ▶ « obtenir 7 » est un événement impossible.
- ▶ « obtenir un nombre positif » est un événement certain.
- ▶  $\bar{B} = \text{« obtenir un nombre impair »}$  est l'événement contraire de  $B$ .

### Remarque 1

Dans toute la suite du cours, on suppose que  $\Omega$  est l'univers associé à une expérience aléatoire, et  $A$  et  $B$  deux événements associés à cet univers.

## II.2. Intersection et réunion d'événements

### Définition 2

Intersection d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à  $A$  et à  $B$  noté  $A \cap B$  (se lit « A inter B » ou « A et B »).

Réunion d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à  $A$  ou à  $B$  noté  $A \cup B$  (se lit « A union B » ou « A ou B »).

### Exemple 2

On considère l'ensemble des chiffres. On note  $A$  « obtenir un chiffre pair » et  $B$  « obtenir un chiffre strictement inférieur à six » :

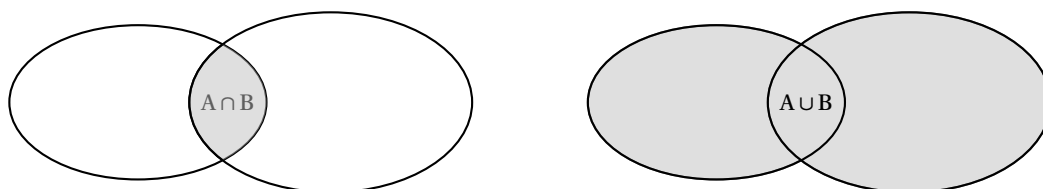
- ▶  $A \cap B = \text{« obtenir un chiffre pair et inférieur strictement à six »}$  :  $A \cap B = \{2; 4\}$ .
- ▶  $A \cup B = \text{« obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six »}$  :  $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$ .

### Remarque 2

Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que les événements sont *disjoints* ou *incompatibles*.

## II.3. Représentation des événements

### Illustration 1 - Diagramme en patates (ou diagramme de Venn)



### Illustration 2 - Tableau

On peut utiliser un tableau (à double entrée) pour représenter une situation de probabilités.

### Illustration 3 - Arbre

On peut utiliser un arbre pour représenter une situation de probabilités.

## III. Calculs de probabilités

### III.1. Définition

#### 🗨️ Définition 3

La *probabilité* d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue. On dit qu'il y a *équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, on a :  $P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ .

#### 📌 Remarque 3

Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'*équiprobabilité* on a généralement dans l'énoncé une expression du type :

- on lance un dé non pipé,
- dans une urne, il y a des boules indiscernables au toucher,
- on rencontre au hasard une personne parmi...

### III.2. Propriétés

#### ⚙️ Propriétés 1

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(\Omega) = 1$ .
- $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

#### 🔗 Exemple 3

On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard. A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » :

►  $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ .

B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 » :

►  $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$ .

Calcul des probabilités :

►  $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ .

►  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$ .

►  $P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

►  $P(A \cap B) = \frac{3}{20} = 0,15$ .

►  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65$ .

## IV. Probabilités conditionnelles

### IV.1. Définition

#### 🗨 Définition 4

On suppose que  $P(B) \neq 0$ .

- On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B ou de A sachant B la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé.
- Cette probabilité vaut  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

#### 🔗 Exemple 4

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- B : « la face obtenue porte un numéro pair » ;
- A : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

- L'événement « A sachant B » correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de 3 » parmi les éventualités de B, autrement dit parmi  $\{2; 4; 6\}$ . Il n'y a donc que l'issue « obtenir 6 » qui correspond.

Et comme on est en situation d'équiprobabilité, on obtient  $P_B(A) = \frac{1}{3}$ .

- Par le calcul, on a  $P(B) = \frac{3}{6}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  donc, d'après la formule :  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$ .

### IV.2. Propriétés

#### ⚙ Propriété 2 - Formule des probabilités composées

Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$$

#### ⚙ Propriétés 3

Soit S un événement de probabilité non nulle, on a :

- $0 \leq P_S(A) \leq 1$  ;
- $P_S(\Omega) = 1$  ;
- $P_S(\emptyset) = 0$  ;
- $P_S(\bar{A}) = 1 - P_S(A)$  ;
- $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B) - P_S(A \cap B)$  ;
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors  $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B)$  ;
- $P_S(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_S(\overline{A \cup B}) = 1 - P_S(A \cup B)$ .

#### 🔑 Théorème 1 - Formule des probabilités totales

Pour tous A et B de probabilité non nulle :

$$P(A) = P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A).$$

### IV.3. Événements indépendants

#### 🗨️ Définition 5

On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

#### 🔗 Exemple 5

On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

A = « Tirer un as »      B = « Tirer un cœur »      C = « Tirer un as rouge ».

Indépendance de A et B :

- ▶  $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$  et  $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ .
- ▶  $P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A) \times P(B)$ , les événements A et B sont donc indépendants.

Indépendance de B et C :

- ▶  $P(B) = \frac{1}{4}$  et  $P(C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ .
- ▶  $P(B \cap C) = \frac{1}{32} \neq P(B) \times P(C)$ , les événements B et C ne sont donc pas indépendants.

#### 📌 Remarque 4

Dans le cas où A et B sont des événements de probabilités non nulles, on a :

—  $P(A \cap B) = P(B) \times P_A(B) = P(A) \times P_B(A) = P(A) \times P(B)$ , d'où  $P_B(A) = P(A)$  et  $P_A(B) = P(B)$ .

#### ⚙️ Propriété 4

Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et  $\bar{B}$  ;  $\bar{A}$  et B ;  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont également des événements indépendants.