Time Series HomeWork (5)

钟瑜　222018314210044

2020 年 10 月 20 日

1. 求齐次差分方程 $X_t = \sqrt{2}X_{t-1} - X_{t-2}$ 的通解.

解. 特征多项式为

$$A(x) = 1 - \sqrt{2}x + x^2 \tag{1}$$

有两个复根:$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. 则 $[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)]^{-t}$ 和 $[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)]^{-t}$ 为方程的两个解.

通解为

$$X_t = U_1[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)]^{-t} + U_2[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)]^{-t},\ t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

其中 $r.v.\ U_1, U_2$ 为由 $\{X_t\}$ 的初值 X_0, X_1 唯一决定.

2. 设 $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, 现有一阶非齐次差分方程方程 $X_t - 0.5X_{t-1} = \epsilon_t$.

   1) 判断并证明 $X_t^{(0)} = \sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j}$ 是否为上述非齐次差分方程的一个特定解?
   2) 如上定义的 $X_t^{(0)}$ 是 (弱) 平稳序列吗? 为啥?
   3) 求出上述一阶非齐次差分方程的通解 X_t? 并且写出当 $t \to \infty$ 时, 该通解 X_t 的收敛性质?

解. *1)* 是. 证明如下:

方程的特征多项式为

$$A(x) = 1 - 0.5x \tag{3}$$

则

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{B})(X_t - X_t^{(0)}) &= (1 - 0.5\mathcal{B})(X_t - X_t^{(0)}) \\
&= (1 - 0.5\mathcal{B})(0.5X_{t-1} + \epsilon_t - \sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j}) \\
&= 0.5X_{t-1} + \epsilon_t - \sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j} - 0.25X_{t-2} - 0.5\epsilon_{t-1} + 0.5\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j-1} \\
&= 0.5X_{t-1} - 0.25X_{t-2} - \sum_{j=1}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j} + 0.5\sum_{j=1}^{\infty}(0.5)^j\epsilon_{t-j-1} \\
&= 0.5X_{t-1} - 0.25X_{t-2} - 0.5\epsilon_{t-1} \\
&= 0.5\epsilon_{t-1} - 0.5\epsilon_{t-1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $t \in \mathbb{Z}$

2) 如上定义的 $X_t^{(0)}$ 是 *(弱)* 平稳序列. 因为为零均值同方差的白噪声线性组合, 其实系数列 $\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j$ 平方可和, 故 $X_t^{(0)}$ 为线性平稳序列.

3) 方程的特征多项式为

$$A(x) = 1 - 0.5x \tag{5}$$

有单根 $x = 2$. 那么 2^{-t} 为方程的解.

通解为

$$X_t = X_t^{(0)} + U2^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j \epsilon_{t-j} + U2^{-1},\ t \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

其中 *r.v.* U 为由 $\{X_t\}$ 的初值 X_0 唯一决定.

当 $t \to \infty$ 时, 该通解 X_t 的收敛到特解 $\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j \epsilon_{\infty-j} = \epsilon_\infty \sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j = \epsilon_\infty * 0 = 0$