Time Series HomeWork (4)

钟瑜　222018314210044

2020 年 9 月 29 日

1. 对例 2.2 中的调和平稳序列求极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}X_t \tag{1}$$

证. 由例 *2.2* 知 $X_t = b\cos(at+U), t\in\mathbb{Z}$, 其中 $r.v$ U 在 $(-\pi,\pi)$ 内均匀分布.
令 $Y_t = U$，显然 $\{Y_t\}$ 为严平稳遍历时间序列.
由定理 *4.1(2)*,$X_t = \Phi(Y_{t+1},...,Y_{t+m}) = b\cos(at+U)$ 也是严平稳遍历序列故由定理 *4.1(1)*,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}X_t = \mathbb{E}X_1 = \int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+U) = 0, a.s. \tag{2}$$

2. 设 $\{X_t\}$ 是严平稳序列，对多元函数 $\varphi(x_1,...,x_m)$, 证明

$$Y_t = \varphi(X_{t+1},..,X_{t+m}), t\in\mathbb{Z}$$

是严平稳序列。

证. 由于 $\{X_t\}$ 是严平稳序列，故对 $\forall n\in\mathbb{N}_+, k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_1\le x_1,...,X_n\le x_n) = \mathbb{P}(X_{1+k}\le x_{1+k},...,X_{n+k}\le x_{n+k})$$

故对多元函数 $\varphi(x_1,...,x_m)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1\le y_1,...,Y_n\le y_n) &= \mathbb{P}(\varphi(X_{1+1},...,X_{1+m})\le y_1,...,\varphi(X_{n+1},...,X_{n+m})\le y_n)\\
&= \mathbb{P}((X_{1+1},...,X_{1+m})\le \varphi^{-1}(y_1),...,(X_{n+1},...,X_{n+m})\le \varphi(y_n))\\
&= \mathbb{P}((X_{1+1+k},...,X_{1+m+k})\le \varphi^{-1}(y_{1+k}),...,(X_{n+1+k},...,X_{n+m+k})\le \varphi(y_{n+k}))\\
&= \mathbb{P}(\varphi(X_{1+1+k},...,X_{1+m+k})\le y_{1+k},...,\varphi(X_{n+1+k},...,X_{n+m+k})\le y_{n+k})\\
&= \mathbb{P}(Y_{1+k}\le y_{1+k},...,Y_{n+k}\le y_{n+k})
\end{aligned} \tag{3}$$

即 $Y_t = \varphi(X_{t+1},..,X_{t+m}), t\in\mathbb{Z}$ 是严平稳序列。