Time Series HomeWork (10)

钟瑜　222018314210044

2021 年 1 月 14 日

1. (q 阶) 运动平均模型的本质是什么？它有什么特殊性质？它和后面的 MA(q) 模型有什关系？

解. 1. ***(q 阶) 运动平均模型的本质:*** *有限的线性平稳模型/有限个白噪声的线性组合*

$$X_t = \sum_{i=0}^{q} b_i \epsilon_{t-i}$$

2. ***特殊性质:*** *MA(q) 序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数是 q 步截尾的;*
3. ***它和后面的 MA(q) 模型的关系:*** *MA(q) 模型中的 $b_0 = 1$, 而 (q 阶) 运动平均模型没有进行约束.*

2. 如何证明一个时间序列是平稳的? (尽量总结所有方法)

解. 1. *定义证明: 证明二阶矩有限, 期望相同且有限, 而且自协方差函数只与时间差有关.*

2. *证明*

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$$

或者

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

3. *证明 Z_t 为平稳列, 其中:*

定理 1.1. *对平稳列 $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 设自协方差函数分别为 $\gamma_X(t)$, $\gamma_Y(t)$, 期望分别为 μ_X, μ_Y。令*

$$Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}$$

(1) 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 正交, 则 $\{Z_t\}$ 是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) - 2\mu_X\mu_Y, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

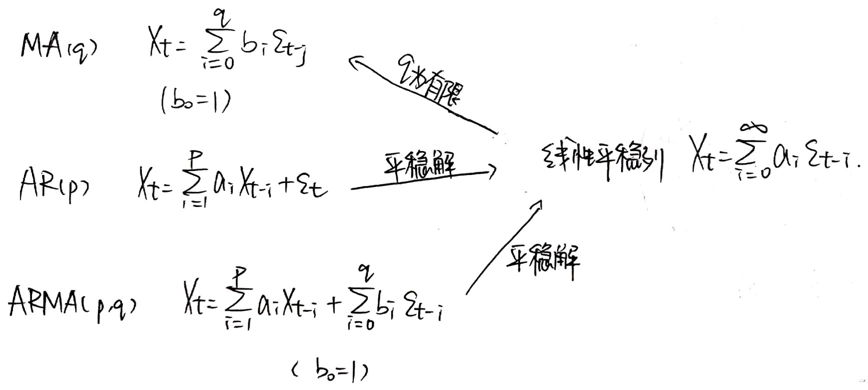
(2) 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 不相关, 则 $\{Z_t\}$ 是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k), \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

4. *证明该序列的线性变换之前是一个平稳序列.*
5. *看时序图: 平稳就是围绕着一个常数上下波动*

3. 线性平稳序列和 AR 模型，MA 模型，ARMA 模型有什么联系？线性平稳序列的自协方差公式 P25(3.5) 式在 AR 模型，MA 模型，ARMA 模型有什么应用？

解. *1. 线性平稳序列和 AR 模型，MA 模型，ARMA 模型的联系：*



2. 线性平稳序列的自协方差公式：

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+k} \tag{1}$$

对于 *MA(q)* 模型,$+\infty$ 换成 $q-k$

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k} \tag{2}$$

对于 *AR(p)* 模型和 *ARMA(p,q)* 模型,a 换成 ψ

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j \psi_{j+k} \tag{3}$$

4. 严平稳序列和弱平稳序列的关系？你觉得 AR(p) 序列，MA(q) 序列，ARMA(p,q) 序列是严平稳的吗？

解. *1. 严平稳序列和弱平稳序列的关系：*

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列 = 宽平稳序列 = 弱平稳序列。

2. 不一定.ARMA 模型 (AR 模型和 MA 模型为 ARMA 模型的特例) 中白噪声项如果是独立同分布的则该平稳列为严平稳遍历。

5. 谱密度函数和时间序列的二阶矩有什么关系？P45 线性平稳序列谱密度公式在 AR 模型，MA 模型，ARMA 模型中是如何应用的？如何利用谱密度函数来判断时间序列的自协方差函数的周期性？

解. *1.* **谱密度函数和时间序列的二阶矩的关系:** 有谱密度的平稳列必为系数平方可和的线性序列, 即二阶矩有限.

2. P45 线性平稳序列谱密度公式:

定理 6.2. 如果 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $WN(0,\sigma^2)$, 实数列 $\{a_j\}$ 平方可和, 则线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda}\right|^2. \tag{6.4}$$

对于 *MA(q)* 模型, 由于

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \epsilon_{t-j} = B(\mathcal{B})\epsilon_t$$

故

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-q}^{q}\gamma_k e^{-ik\lambda}$$

对于 *AR(P)* 模型, 由于

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \epsilon_t = A(\mathcal{B})^{-1}\epsilon_t$$

故

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|A(e^{i\lambda})^{-1}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2}$$

对于 *ARMA(p,q)* 模型,

由于 ARMA 序列的 $\{\gamma_k\}$ 绝对可和，以及平稳解的线性序列表达式，可得 ARMA(p,q) 序列 (2.6) 有谱密度

$$\begin{aligned} f(\lambda) =& \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-ik\lambda} && (13.16)\\ =& \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{B(e^{i\lambda})}{A(e^{i\lambda})}\right|^2 && (13.17)\end{aligned}$$

3. 利用谱密度函数来判断时间序列的自协方差函数的周期性:

对于 *AR(p)* 模型,

$$\begin{aligned}\gamma_t =&A^{-1}(\mathscr{B})\sigma^2\psi_{-t} &(9.15)\\ =&\sigma^2\sum_{j=1}^{p}c_jA^{-1}(z_j^{-1})z_j^{-t} &(9.16)\\ =&\sigma^2\sum_{j=1}^{p}A_j\rho_j^{-t}\cos(\lambda_jt+\theta_j),\quad t\ge 0 &(9.17)\end{aligned}$$

可见如果 $\{z_j\}$ 中有靠近单位圆的复根则 $\{\gamma_k\}$ 的衰减振荡特性会显现出来。

$$T=\frac{2\pi}{\lambda_j}$$

6. 平稳序列经过线性变换后得到的序列还是平稳的吗？两个平稳序列的和序列还是平稳的吗？两个平稳序列的和序列的谱密度函数是对应序列的谱密度函数的和吗？

解. *1.* 平稳序列经过线性变换后得到的序列还是平稳的

2. 两个平稳序列的和序列*:*

定理 1.1. 对平稳列 $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 设自协方差函数分别为 $\gamma_X(t)$, $\gamma_Y(t)$, 期望分别为 μ_X, μ_Y。令

$$Z_t=X_t+Y_t,t\in\mathbb{Z}$$

(1) 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 正交, 则 $\{Z_t\}$ 是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k)=\gamma_X(k)+\gamma_Y(k)-2\mu_X\mu_Y,\quad k=0,1,2,\ldots$$

(2) 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 不相关, 则 $\{Z_t\}$ 是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k)=\gamma_X(k)+\gamma_Y(k),\ k=0,1,2,\ldots.$$

3. 两个平稳序列的和序列的谱密度函数当然不一定是对应序列的谱密度函数的和*:*

定理 6.3. 设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是相互正交的零均值平稳序列, c 是常数, 定义

$$Z_t=X_t+Y_t+c,\quad t\in\mathbb{Z}.$$

1. 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 分别有谱函数 $F_X(\lambda)$ 和 $F_Y(\lambda)$, 则平稳序列 $\{Z_t\}$ 有谱函数 $F_Z(\lambda)=F_X(\lambda)+F_Y(\lambda)$.

2. 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 分别有谱密度 $f_X(\lambda)$ 和 $f_Y(\lambda)$, 则 $\{Z_t\}$ 有谱密度 $f_Z(\lambda)=f_X(\lambda)+f_Y(\lambda)$.