Time Series HomeWork (3)

钟瑜 222018314210044

2020 年 9 月 22 日

1. 如果输入的序列 $\{X_t\}$ 是由 (3.4) 定义的线性平稳序列，则从保时线性滤波器 H 输出的序列 $\{Y_t\}$ 也是线性平稳序列。

解. 设则从保时线性滤波器 H 输出的序列 $\{Y_t\}$，其中序列 $H=\{Y_t\}$ 为绝对可和的实数列, 要证明其为线性平稳序列，只需证明 $\mathbb{E}Y_t$ 为常数，自协方差函数只与时间差有关。

因为 $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\epsilon_{t-j}, t\in\mathbb{Z}$ 为线性平稳序列，故 $\mathbb{E}X_t=0$, 因此

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbb{E}|h_jX_{t-j}|=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|h_j|\mathbb{E}|X_{t-j}|=0<\infty \tag{1}$$

由测度论的推论可知，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_t&=\mathbb{E}(\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_jX_{t-j})\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbb{E}(h_jX_{t-j})\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_j\mathbb{E}(X_{t-j})\\&=0\end{aligned} \tag{2}$$

再由

$$\mathbb{E}(X_tX_s)=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ka_{k+(t-s)} \tag{3}$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbb{E}|h_jh_iX_{t-j}X_{s-i}|&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|h_jh_i|\mathbb{E}|X_{t-j}X_{s-i}|\\&\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|h_jh_i|\sqrt{\mathbb{E}|X_{t-j}|^2|X_{s-i}|^2}\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|h_jh_i|\sigma^2\sum_{-\infty}^{\infty}(a_j)^2\\&=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|h_j|^2\sum_{-\infty}^{\infty}|a_j|^2\\&<\infty\end{aligned} \tag{4}$$

由测度论的推论可知，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_tY_s &= \mathbb{E}(\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_jX_{t-j})(\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_iX_{s-i}) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_jh_iX_{t-j}X_{s-i}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_jh_i\mathbb{E}(X_{t-j}X_{s-i}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_jh_i\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_ka_{k+(t-s)} \\ &= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j^2\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_ka_{k+(t-s)}\end{aligned} \tag{5}$$

这就说明 $\{Y_t\}$ 是平稳序列，有自协方差函数

$$\gamma_l = \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j^2\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_ka_{k+l}, l \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

2. 证明绝对可和必能推出平方可和。

解. 且考虑单边

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j| < \infty$$

那么

$$\lim_{j\to\infty}|a_j| = 0$$

$$\Rightarrow \lim\frac{a_j^2}{|a_j|} = 0$$

根据正项级数比较原则的极限形式可知

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2 < \infty$$

同理可知由

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j| < \infty$$

可推得

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^2 < \infty$$