Fundamentos en Estadística

V. Trujillo

GRC-MERVEX (CO de Vigo. IEO)

Marzo 2021

7.- Probabilidades

¿Qué es la probabilidad?[1]

La probabilidad, con fines prácticos, la podríamos definir[2] como:

Üna frecuencia a priori; y la frecuencia, como una probabilidad a posteriori"[3]

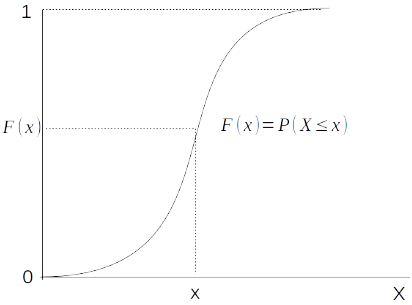
La función de probabilidad(P), no es más que la probabilidad de que una variable aleatoria(X) tome un determinado valor: $P(x_i) = p_i$.

Con fines didácticos, nos fijaremos simplemente en el caso de variables aleatorias continuas.

Función de distribución de probabilidad $F(x)$

La función de distribución nos da la probabilidad de que la variable tome valores iguales o menores que un valor dado de la variable. Que no es más que el resultado de acumular sus probabilidades[4]:

$$\boldsymbol{P(X \leq x) = F(x)} \tag{1}$$



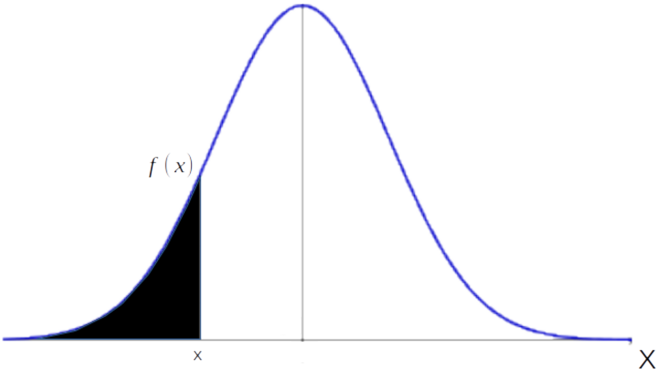
La función de distribución de probabilidad siempre está entre 0 y 1.

Si conozco la función de probabilidad puedo conocer cualquier valor de la variable o sus intervalos (a, b):

$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}^5 \tag{2}$$

Función de densidad de probabilidad (pdf) $f(x)$

La función de densidad de probabilidad (pdf) permite obtener **áreas** de probabilidad. La probabilidad de $\boldsymbol{X \leq x}$ se representa como el área que hay entre el origen y **x**.



Para el caso de una variable aleatoria continua X, y si existe una función de distribución $F(X)$, existe a su vez una función de probabilidad $f(x)$ cuya relación será:

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

En general:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Es decir que la función de densidad de la probabilidad $f(x)$, no es más que la derivada, cuando sea derivable, de la función de distribución acumulada $F(x) \Longrightarrow f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ o dicho de otro modo, la función de distribución no es más que la integral de la función de densidad.[6]

8.- Funciones de distribución

Distribución normal

La función de densidad de probabilidad de la distribución normal $f(x)$ se define por dos parámetros, la media(μ) y la varianza(σ^2).

$$X \ \cap \ N(\mu, \sigma^2)$$

Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

- Normalización de variables:

Existen tantas distribuciones normales como medias y varianzas haya. Para calcular probabilidades, y evitar el problema anteriormente citado, se recurre a una distribución especial que se denomina **unitaria**, reducida o **tipificada**, donde la media es cero y la varianza o desviación típica es uno. A esta función se le llama $f(z)$.

Todas las distribuciones normales se pueden reducir a esta unitaria, y para ello se convierte x a z mediante el proceso denominado tipificación:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

De esta forma $Z \cap N(0,1)$ sólo hace falta tener una tabla de asignación para el cálculo de probabilidades de todas las posibles distribuciones normales.

- Propiedades y características:

- Es simétrica respecto a la media:

  $\Rightarrow$ la media = la mediana = la moda = μ.

- La distribución normal tiene una propiedad muy importante:

$$x_i \cap N(\mu_i,\, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum x_i \cap N(\sum \mu_i,\, \sum \sigma_i^2);\quad i = 1, \ldots, k \quad \textit{independientes}$$

Si unas determinadas variables x_i se distribuyen normalmente, la suma de esas variables se distribuirá como una normal de media, la suma de las medias y de varianza, la suma de las varianzas.

Distribución t de Student

Las desviaciones de las medias muestrales respecto a la media paramétrica se distribuyen como una normal, si dividimos estas desviaciones por la desviación típica paramétrica se distribuirán como una normal de media 0 y desviación típica 1 (tipificación).

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)}{n} \quad ; X_1, \ldots, X_n \;\; variables\ aleatorias\ independientes$$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt(n)} \qquad Z \cap N(0,1)$$

Pero como σ suele ser desconocida y utilizamos como estimador de la desviación típica paramétrica(σ) la desviación típica muestral[7] (S_n), resulta que este cociente ya **no** se distribuye normalmente, sino que toma un forma más aplanada y abierta, ya que la varianza paramétrica "fluctúa' 'más. Esta es precisamente la denominada distribución t de Student (seudónimo de W.S. Gossett).

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt(n)}$$

Su función de densidad es:

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2} \quad ;\Gamma\ es\ la\ función\ gamma$$

- Propiedades y características:

Es simétrica alrededor de cero y toma valores desde $(-\infty, +\infty)$ y su forma depende de los grados de libertad ν.

Al igual que ocurría con la normal, existen muchas distribuciones t, pero en este caso **no** se pueden reducir a una unitaria. Así que existen tablas de la función de distribución de la probabilidad para diferentes grados de libertad, aproximándose a una normal de media 0 y desviación típica 1 cuando los grados de libertad son muy altos $(n \geq 30)$.

Distribución χ^2

Es una distribución de densidad debida a K. Pearson cuyos valores van de 0 a $+\infty$. La distribución es asimétrica y se aproxima asintóticamente al eje horizontal en la cola de la derecha.

No existe una sola distribución χ^2 sino que hay una para cada número de grados de libertad (ν). Así que, χ^2 es función de los grados de libertad ν. La curva empieza siendo en forma de {{L}} para $\nu = 1$ pero a medida que los grados de libertad aumentan, se va haciendo más simétrica aproximándose a una distribución normal.

Se define como:

$$Sea\ X = Z_1^2 + ... + Z_\nu^2 \quad ; Z_i\ variables\ aleatorias\ independientes\ tipificadas$$
$$\Rightarrow Z \cap N(0,1) \quad \Rightarrow \quad entonces \quad \underline{X \cap\ \chi_\nu^2}$$

Su función de densidad es:

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Propiedades y características:

- La distribución χ^2 **no** se puede reducir a una unitaria.
- El valor esperado de esta distribución (la media en el muestreo) es los grados de libertad.

$$E[\chi^2_\nu] = \nu \tag{6}$$

- Si $z \cap N(0,1) \Rightarrow z^2 \cap \chi^2_{(1)}$
- $$\left.\begin{array}{lcl} Si\ x & \cap & \chi^2_{(\nu_1)} \\ & & \\ Si\ y & \cap & \chi^2_{(\nu_2)} \end{array}\right\} \quad x, y\ independientes \Rightarrow (x+y)\ \cap\ \chi^2_{(\nu_1+\nu_2)})$$

Si tengo muchas variables que se distribuyen como una χ^2, la suma de estas variables se distribuye como un χ^2 con la suma de los grados de libertad.

$$Si \quad \boldsymbol{x_i} \ \cap \ \boldsymbol{\chi^2_{(\nu_i)}} \Rightarrow \sum \boldsymbol{x_i} \ \cap \ \boldsymbol{\chi^2_{(\sum \nu_i)}}$$

Esta última propiedad permite, entre otros tratamientos, realizar el análisis de varianza.

INSTITUTO ESPAÑOL DE OCEANOGRAFÍA