Ejercicios de Probabilidad para Estudiantes Universitarios

Parte 1: Conceptos fundamentales

Probabilidad básica e independencia (Lateralidad)

1. Aproximadamente el 9% de las personas son zurdas. Supón que se seleccionan 2 personas al azar de la población de EE. UU. Dado que el tamaño de muestra de 2 es muy pequeño en relación con la población, es razonable suponer que estas dos personas son independientes.

1. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean zurdas?
2. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean diestras?

Regla del producto y del complemento (Lateralidad)

2. Supón que se seleccionan 5 personas al azar.

3. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean diestras?
4. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean zurdas?
5. (c) ¿Cuál es la probabilidad de que no todas las personas sean diestras?

Regla del producto bajo independencia (Sexo y lateralidad)

3. Supón que las variables lateralidad y sexo son independientes. Sabemos que P(diestro) = 0.91 y P(mujer) = 0.50.

Se seleccionan tres personas al azar.

6. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona sea varón y diestra?
7. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras personas sean varones y diestros?
8. (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera persona sea mujer y zurda?
9. (d) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras personas sean varones diestros y la tercera persona sea mujer zurda?

Conjuntos, diagramas de Venn e independencia (Votantes bisagra)

4. Una encuesta de Pew Research encontró que 35% de los votantes registrados se identifican como Independientes, 23% se identifican como votantes bisagra (swing voters) y 11% como ambos.

10. (a) ¿Ser Independiente y ser votante bisagra son eventos disyuntos (mutuamente excluyentes)?
11. (b) Dibuja un diagrama de Venn que resuma las probabilidades.
12. (c) ¿Qué porcentaje de votantes son Independientes pero no bisagra?
13. (d) ¿Qué porcentaje de votantes son Independientes o bisagra?
14. (e) ¿Qué porcentaje de votantes no son ni Independientes ni bisagra?
15. (f) ¿El evento de que alguien sea votante bisagra es independiente del evento de que sea Independiente?

Permutaciones y ordenamientos (Estacionamiento)

5. Una pequeña empresa tiene cinco empleados: Anna, Ben, Carl, Damian y Eddy, y cinco lugares de estacionamiento no asignados en una fila. Todos los arreglos posibles de estacionamiento son igualmente probables.

16. (a) En un día dado, ¿cuál es la probabilidad de que los empleados estacionen en orden alfabético?
17. (b) ¿Cuántas formas totales hay de ordenar los cinco autos?
18. (c) Ahora considera 8 empleados. ¿Cuántas formas posibles hay de ordenar sus autos?

Parte 2: Distribuciones de probabilidad discretas

Distribución de Bernoulli

Un ensayo de Bernoulli es un experimento único con exactamente dos resultados posibles: "éxito" o "fracaso". Es el bloque fundamental para otras distribuciones discretas.

B1. (SMS de compromiso cívico)

Una ciudad envía un anuncio de servicio público (PSA) por SMS. La probabilidad de que un ciudadano lea el mensaje es $p = 0.35$. Sea X una variable aleatoria donde $X=1$ si el mensaje es leído y $X=0$ en caso contrario.

19. (a) Enuncia la función de masa de probabilidad (PMF) de X. Calcula $P(X=1)$ y $P(X=0)$.
20. (b) Calcula el valor esperado, $E[X]$, y la varianza, $Var(X)$.
21. (c) Interpreta el significado de $E[X]$ en este contexto.

B2. (Encuesta de participación electoral)

Un encuestador llama a un votante registrado. La probabilidad de que la persona confirme que votó en la última elección es $p = 0.6$. Sea Y la variable aleatoria de Bernoulli para este resultado.

22. (a) Define el "éxito" y el "fracaso" para este ensayo y sus probabilidades.
23. (b) Si el encuestador realiza 100 llamadas, ¿cuál es el número esperado de personas que confirmarán que votaron?

La distribución binomial

La distribución Binomial modela el número de éxitos en un número fijo de ensayos de Bernoulli independientes.

N1. (Asistencia a un foro)

Un concejo municipal envía 20 invitaciones a un foro público. Cada persona asiste con probabilidad $p = 0.25$, de forma independiente. Sea X el número de asistentes.

24. (a) Justifica por qué X sigue una distribución Binomial, $X \sim Bin(n=20, p=0.25)$.
25. (b) Calcula la probabilidad de que asistan exactamente 5 personas, $P(X=5)$.
26. (c) Calcula la probabilidad de que asistan al menos 3 personas, $P(X \ge 3)$.
27. (d) Calcula el valor esperado, $E[X]$, y la desviación estándar, $SD(X)$.

N2. (Compartir en redes sociales)

Se muestra una infografía a 12 personas. La probabilidad de que una persona cualquiera la comparta es $p = 0.15$, independientemente. Sea Y el número de compartidos.

28. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que nadie la comparta, $P(Y=0)$?
29. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la compartan dos o más personas, $P(Y \ge 2)$?
30. (c) ¿Qué representa $E[Y]$ para el equipo de comunicaciones?

La distribución geométrica

G1. (Primer votante indeciso)

En una encuesta telefónica, la probabilidad de contactar a un votante indeciso es $p = 0.2$. Sea T el número de llamadas realizadas hasta encontrar al primer indeciso.

31. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer indeciso sea la 3.ª persona llamada? ($P(T=3)$).
32. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más de 4 llamadas para encontrar un indeciso?
33. (c) ¿Cuál es el número esperado de llamadas necesarias?

G2. (Primera respuesta oficial)

Una periodista de investigación envía correos a funcionarios públicos. La probabilidad de obtener una respuesta es $p = 0.05$. Sea R el número de correos enviados hasta la primera respuesta.

34. (a) Calcula la probabilidad de que la primera respuesta llegue en el correo n.º 10, $P(R=10)$.
35. (b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener la primera respuesta dentro de los primeros 3 correos, $P(R \le 3)$?
36. (c) ¿Cuál es el número esperado de correos que la periodista necesita enviar para obtener una respuesta?

La distribución de Poisson

La distribución de Poisson modela el número de eventos que ocurren en un intervalo fijo de tiempo o espacio, dada una tasa promedio constante.

P1. (Llamadas a la línea de ayuda)

Una línea de ayuda electoral recibe en promedio $\lambda = 4$ llamadas por hora. Supón un proceso de Poisson. Sea X el número de llamadas en una hora.

37. (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir exactamente 0 llamadas en una hora dada?
38. (b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir 3 o más llamadas en una hora dada?
39. (c) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al menos una llamada en un intervalo de 30 minutos? (Pista: ajusta λ).

P2. (Reportes de infraestructura ciudadana)

Una aplicación municipal recibe reportes a una tasa promedio de $\lambda = 18$ por día.

40. (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir exactamente 20 reportes en un día dado?
41. (b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir a lo sumo 15 reportes, $P(X \le 15)$?
42. (c) ¿Cuál es el número esperado de reportes en una jornada laboral de 8 horas?

Parte 3: Distribuciones continuas y Teorema de Bayes

La distribución normal

Asegúrate de dibujar un gráfico para cada caso.

43. (a) $Z > -1.13$
44. (b) $Z < 0.18$
45. (c) $Z > 8$
46. (d) $|Z| < 0.5$

ND3. Análisis de desempeño electoral.

En ciencia política es común comparar resultados electorales entre distritos o estados. Dos candidatos del “Partido X” compitieron para gobernador en dos estados distintos. La candidata Smith se postuló en el Estado A, bastión tradicional del partido, mientras que el candidato Jones se postuló en el Estado B, un estado “bisagra” altamente competitivo.

- Las proporciones de voto de los candidatos a gobernador del Partido X en el Estado A siguen una distribución normal con media 58% y desviación estándar 4%.
- Las proporciones de voto en el Estado B siguen una distribución normal con media 47% y desviación estándar 6%.
- Recuerda: un mejor desempeño corresponde a una mayor proporción de voto.

47. (a) Escribe la notación abreviada para estas dos distribuciones normales.
48. (b) ¿Cuáles son los puntajes Z de Smith y Jones? ¿Qué indican esos Z?
49. (c) ¿Smith o Jones tuvo un mejor desempeño relativo a su estado? Explica.
50. (d) ¿Qué porcentaje de candidatos históricos superó Smith en el Estado A?
51. (e) ¿Qué porcentaje de candidatos históricos superó Jones en el Estado B?

52. (f) Si las distribuciones de voto no fueran aproximadamente normales, ¿cambiarían tus respuestas a (b)–(e)? Explica.

Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes nos ayuda a actualizar nuestras creencias sobre una probabilidad a partir de nueva evidencia.

Y1. (Clasificador de mensajes cívicos)

El 30% de los mensajes entrantes son “relacionados con lo cívico” (C), por lo que $P(C) = 0.30$. Un modelo de aprendizaje automático tiene:

- Una sensibilidad de 0.90: $P(\text{Positive} \mid C) = 0.90$
- Una especificidad de 0.80: $P(\text{Negative} \mid \neg C) = 0.80$

53. (a) Un mensaje es clasificado como “Positive”. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sea cívico, $P(C \mid \text{Positive})$?
54. (b) Si un mensaje es clasificado como “Negative”, ¿cuál es la probabilidad de que en realidad fuera cívico (falso negativo), $P(C \mid \text{Negative})$?

Y2. (Verificación del registro de votantes)

El 5% de los registros tiene un error significativo (E), por lo que $P(E) = 0.05$. Un algoritmo marca registros sospechosos con el siguiente desempeño:

- Identifica correctamente el 95% de los registros con error: $P(S \mid E) = 0.95$
- Marca incorrectamente el 2% de los registros correctos: $P(S \mid \neg E) = 0.02$

55. (a) Un registro es marcado como sospechoso. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga un error, $P(E \mid S)$?
56. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un registro tenga un error aunque **no** haya sido marcado, $P(E \mid \neg S)$?
57. (c) **Interpreta** el resultado de (a). ¿Es la marca un indicador confiable de error?

Y3. Predisposición a la trombosis.

Se usa una prueba genética para determinar si las personas tienen predisposición a la trombosis. Se cree que el 3% de las personas realmente tienen esta predisposición. La prueba es 99% precisa si la persona realmente tiene la predisposición (es decir, la probabilidad de un test positivo dado que tiene la predisposición es 0.99). La prueba es 98% precisa si la persona no tiene la predisposición. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar que da positivo en la prueba realmente tenga la predisposición?

Y4. Nunca es lupus.

El lupus es una enfermedad que se estima padece el 2% de la población. Una prueba para lupus es 98% precisa si la persona realmente tiene la enfermedad. La prueba es 74% precisa si la persona no tiene la enfermedad. Hay una frase de la serie *House*: “Nunca es lupus”. ¿Crees que hay algo de verdad en esta afirmación? Usa la probabilidad de que una persona que da positivo realmente tenga lupus para respaldar tu respuesta.

Y5. Análisis de encuesta a la salida (Exit Poll).

Una encuesta a la salida encontró que el 53% de los encuestados votó por el Candidato A. Además, estimaron que, de quienes votaron por el Candidato A, el 37% tenía título universitario. De quienes votaron en contra del Candidato A, el 44% tenía título universitario. Supón que seleccionamos al azar una persona de la encuesta y tiene título universitario. ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado por el Candidato A?