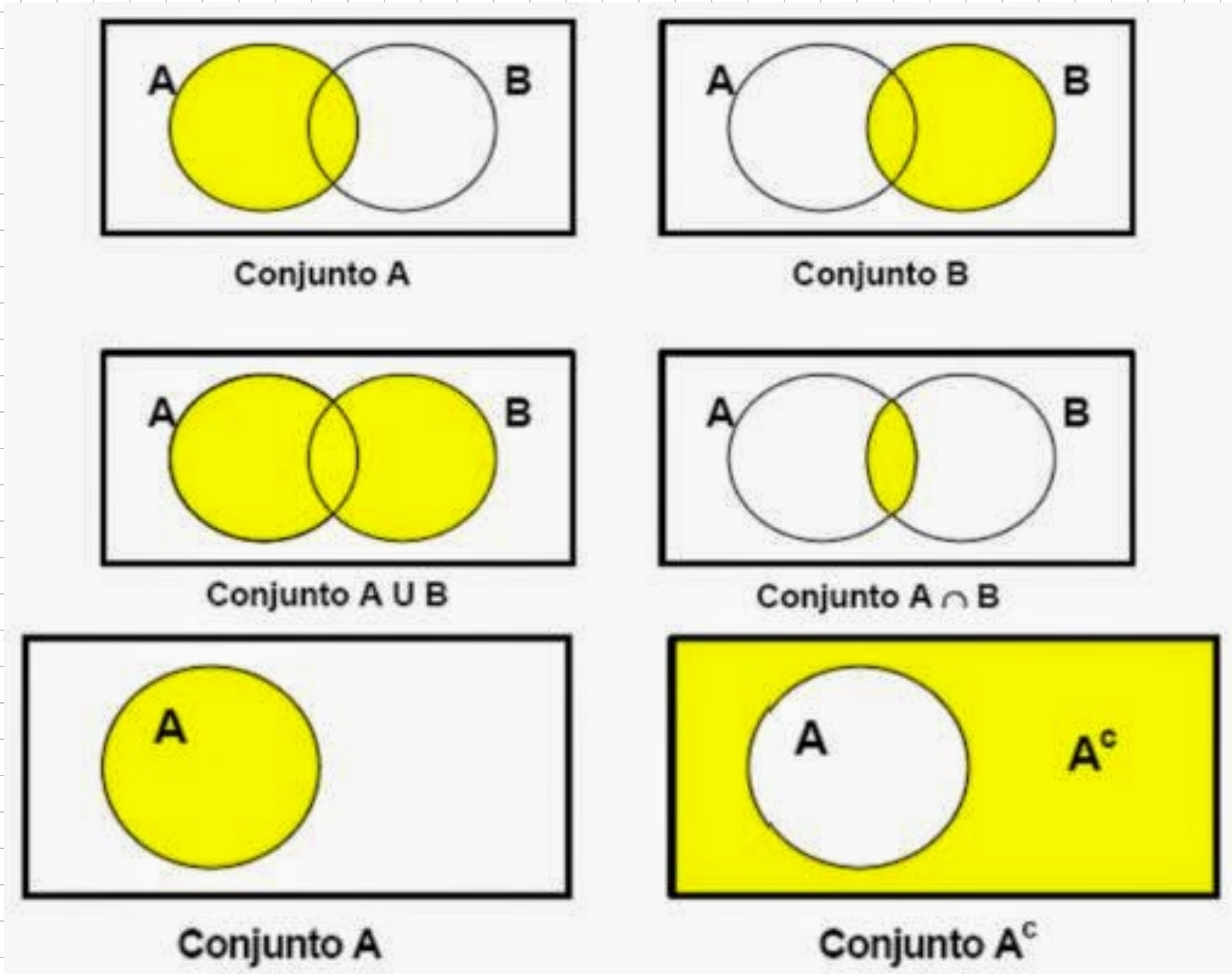
Intro a Probabilidad

La gente a menudo se refiere coloquialmente a la probabilidad...

- "¿Cúal es la probabilidad de que Boca gane este fin de semana?"
- "¿Cuál es la probabilidad de que llueva mañana?"
- "¿Cuál es la probabilidad de que un paciente responda a una nueva terapia?"

Formalizar conceptos y terminología en torno a la probabilidad es esencial para mejorar comprensión de la probabilidad.

Repaso de Nociones Elementales de Teoría de Conjuntos



Intro a Probabilidad

Hay varias interpretaciones posibles de la probabilidad, pero están (casi) completamente de acuerdo con las reglas matemáticas que la probabilidad debe seguir.

Interpretación frecuentista:

La probabilidad de un resultado es la proporción de veces que el resultado ocurriría si observáramos el proceso aleatorio un número infinito de veces.

Interpretación bayesiana:

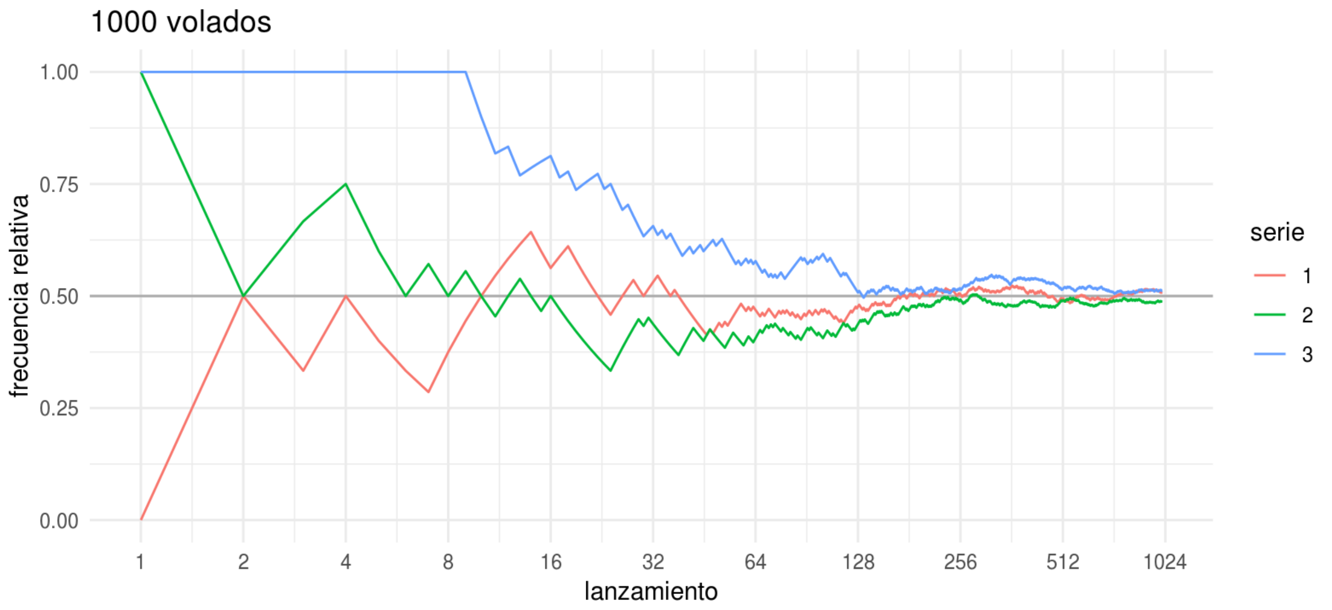
Un bayesiano interpreta la probabilidad como un grado subjetivo de creencia: para el mismo evento, dos personas separadas podrían tener diferentes puntos de vista y, por lo tanto, asignar diferentes probabilidades.

Ampliamente popularizado por el avance revolucionario en tecnología y métodos computacionales durante los últimos veinte años.

PROBABILIDAD (interpretación frecuentista)

La probabilidad de un resultado es la proporción de veces que el resultado ocurriría si observó el proceso aleatorio un número infinito de veces.

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{\# de formas en que puede suceder el evento}}{\text{\# de resultados posibles totales}}$$



Conceptos básicos

Experimento:
Operación que consiste en observar los resultados en ciertas condiciones.

Evento (E) :
Conjunto de uno o más resultados de un experimento. Se puede hablar de evento simple, que es un resultado del espacio muestral con una sola característica. Un evento conjunto es, por su parte, un resultado del espacio muestral con dos o más características.

Espacio muestral (Ω):
Conjunto de todos los posibles eventos o resultados que puedan ocurrir.

Punto muestral o Elementos:
Cada uno de los elementos indivisibles del espacio muestral.

Experimento Aleatorio

Un experimento aleatorio es una acción o proceso que conduce a uno de varios posibles resultados.

• Por ejemplo, lanzar una moneda conduce a dos posibles resultados: cara o cruz.

La probabilidad de un resultado es la proporción de veces que el resultado ocurriría si el fenómeno aleatorio se podía observar un número infinito de veces.

• Si se lanza una moneda justa un número infinito de veces, se obtendría cara al 50% del tiempo

Resultados y eventos

Un resultado en un estudio o experimento es el resultado observable después de realizar la experimentar.

- La suma de las caras de dos dados lanzados.
- La respuesta de un paciente tratado con una terapia experimental.
- El volumen total de huevos en una nidada puestos por una rana.

Un evento es una colección de resultados.

- La suma después de lanzar dos dados es 7.
- 22/30 pacientes en un estudio tienen una buena respuesta a 1 terapia.
- El volumen total de huevos en una nidada es superior a 750 mm 3.

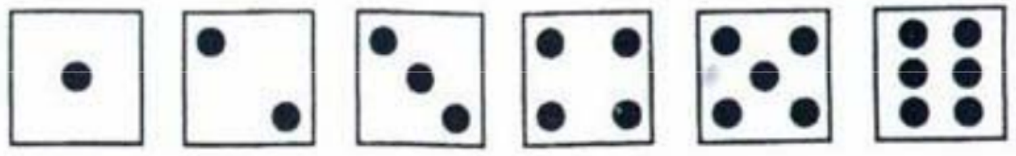
Se puede hacer referencia a los eventos mediante letras.

- Suponga que el evento A es el evento de lanzar un número menor que 3 en un dado.

$$A = \{1, 2\}$$

Espacio muestral

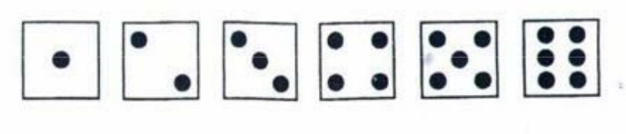
Espacio muestral de 1 tirada de 1 dado



Espacio de Eventos

¿De que hablamos cuando hablamos de la probabilidad de algo? Para evitar abusos, nos vamos a centrar en una clase particular de conjuntos.

Espacio muestral de 1 tirada de 1 dado



Espacio Eventos de 1 tirada de 1 dado

$\varnothing$	4	5	4 5	6	4 6	5 6	4 5 6
1	1 4	1 5	1 4 5	1 6	1 4 6	1 5 6	1 4 5 6
2	2 4	2 5	2 4 5	2 6	2 4 6	2 5 6	2 4 5 6
1 2	1 2 4	1 2 5	1 2 4 5	1 2 6	1 2 4 6	1 2 5 6	1 2 4 5 6
3	3 4	3 5	3 4 5	3 6	3 4 6	3 5 6	3 4 5 6
1 3	1 3 4	1 3 5	1 3 4 5	1 3 6	1 3 4 6	1 3 5 6	1 3 4 5 6
2 3	2 3 4	2 3 5	2 3 4 5	2 3 6	2 3 4 6	2 3 5 6	2 3 4 5 6
1 2 3	1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 4 5	1 2 3 6	1 2 3 4 6	1 2 3 5 6	1 2 3 4 5 6

Espacio de Eventos

¿De que hablamos cuando hablamos de la probabilidad de algo? Para evitar abusos, nos vamos a centrar en una clase particular de conjuntos.

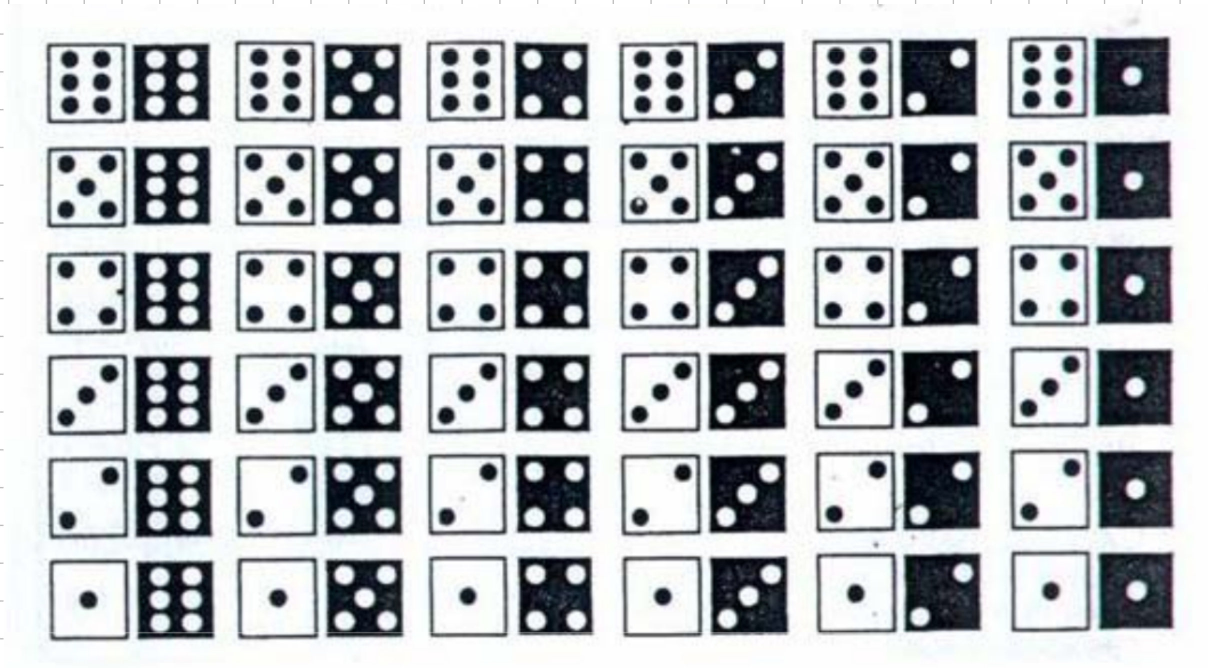
El espacio de enventos, al cual llamaremos F , es un conjuntos de subconjuntos de Ω , donde cada elemento de F es a su vez un evento, el ∅ pertenece a F , Ω pertenece a F y las operaciones lógicas no son ambiguas (~ def aproximada) .

Importante: En probabilidad, el espacio de eventos como tal debe satisfacer ciertas propiedades (que sea un sigma-algebra)

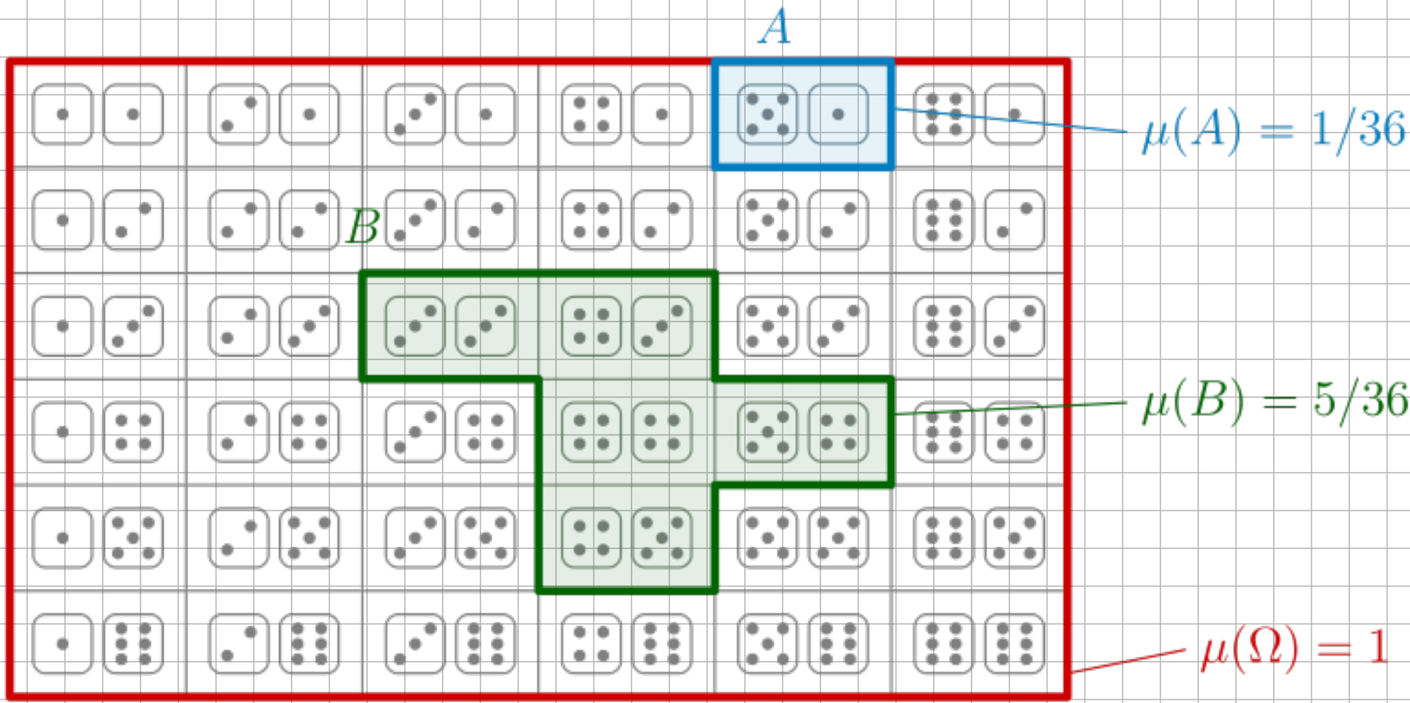
ASIGNAREMOS LA MEDIDA DE PROBABILIDAD P
AL ESPACIO DE EVENTOS F
CREADO A PARTIR DEL ESPACIO MUESTRAL Ω

Espacio muestral V2

Espacio muestral de 1 tirada de 2 dados

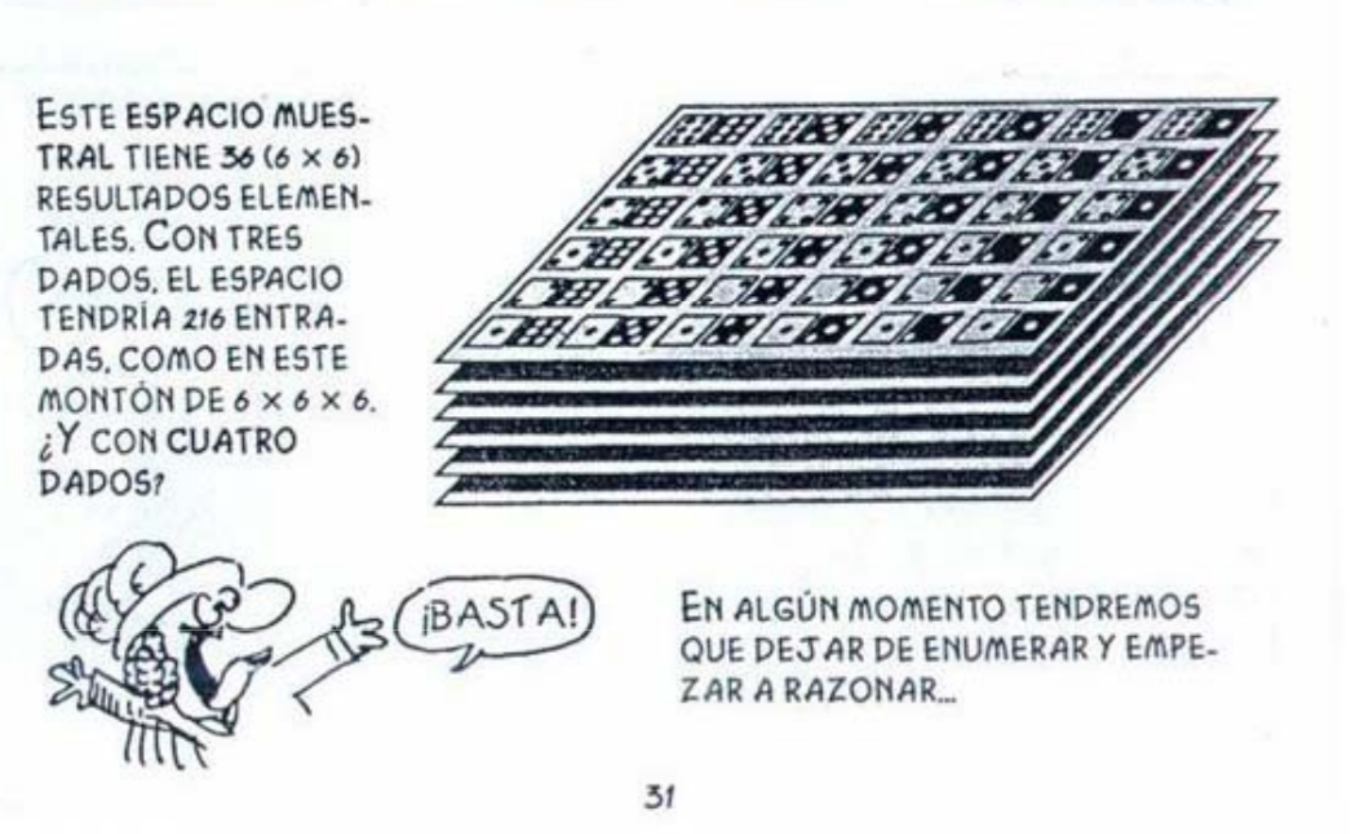


Eventos y Probabilidad en el Espacio Muestral V2



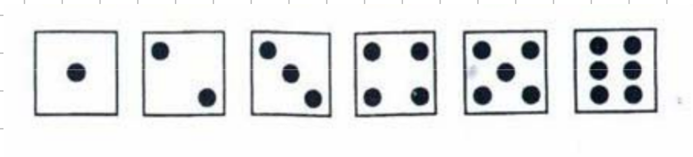
Espacio muestral V3

Espacio muestral de 1 tirada de 3 dado (crece muy rápido)



Eventos Elementales

En la teoría de la probabilidad, un evento elemental (también llamado evento atómico o punto muestral) es un evento que contiene solo un resultado único en el espacio muestral.



1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6

En el caso discreto, se puede asignar probabilidad a los eventos elementales y operar con las reglas de probabilidad para construir la probabilidad de los eventos compuestos (ej: que sea par)

ESTO NO VALE EN EL CASO DE UN ESPACIO CONTINUO

Eventos Elementales y Eventos

LO BELLO DE UTILIZAR SUCESOS EN LUGAR DE RESULTADOS ELEMENTALES ES QUE LOS PODEMOS COMBINAR PARA OBTENER OTROS DISTINTOS UTILIZANDO OPERACIONES LÓGICAS. LAS PALABRAS CLAVE SON **Y**, **O** Y **NO**.

ES DECIR, CON LOS SUCESOS E Y F, PODEMOS FORMAR NUEVOS SUCESOS:

E **Y** F: TANTO EL SUCESO E COMO EL F OCURREN.

E **O** F: OCURRE EL SUCESO E, O EL F, O LOS DOS.

NO E: EL SUCESO E NO OCURRE.

Eventos Elementales y Eventos

UN **SUCESO** ES UN CONJUNTO DE RESULTADOS ELEMENTALES. LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO ES LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE LOS RESULTADOS ELEMENTALES DEL CONJUNTO. POR EJEMPLO, ALGUNOS SUCESOS EN LA VIDA DE UN JUGADOR CON DOS DADOS SERÍAN:

DESCRIPCIÓN DEL SUCESO	RESULTADOS ELEMENTALES DEL SUCESO	PROBABILIDAD
A: TIRADA TOTAL SUMA 3	$\{(1,2), (2,1)\}$	$P(A) = \frac{2}{36}$
B: TIRADA TOTAL SUMA 6	$\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$	$P(B) = \frac{5}{36}$
C: DADO BLANCO CAE EN 1	$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$	$P(C) = \frac{6}{36}$
D: DADO NEGRO CAE EN 1	$\{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$	$P(D) = \frac{6}{36}$

Propiedades de la Probabilidad

Propiedades Básicas

$P(\emptyset) = 0$ La probabilidad de conjunto vacío es cero.

$A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$. La probabilidad de obtener un dos es menor a la de obtener un número par.

$P(\Omega) = 1$

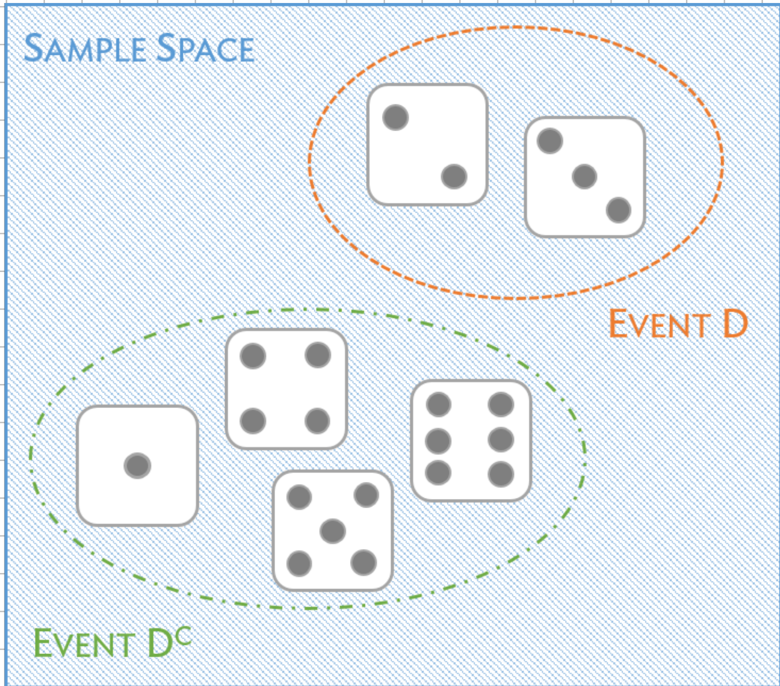
$0 \leq P(A) \leq 1$

Complementos

El complemento de un evento A se denota por A^C. Un evento y su complemento están relacionados matemáticamente:

P (A) + P (A^C) = 1

P (A) = 1 - P (A^C)



Complementos

El complemento de un evento A se denota por A^C. Un evento y su complemento están relacionados matemáticamente:

P (A) + P (A^C) = 1

P (A) = 1 - P (A^C)

P(E) = 1- P(NO E)

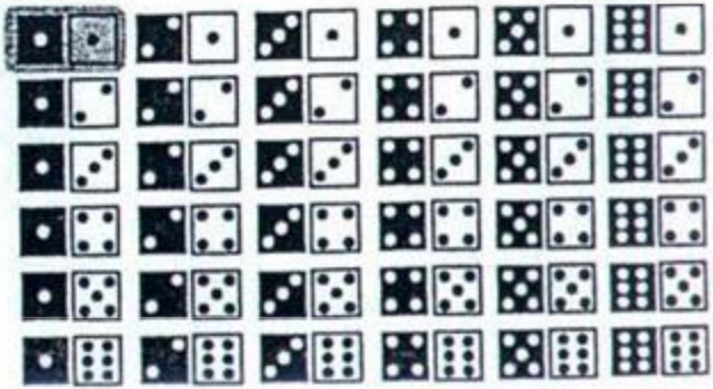
ESTA FÓRMULA RESULTA ÚTIL CUANDO P(NO E) ES MÁS FÁCIL DE CALCULAR QUE P(E). POR EJEMPLO, SI E ES EL SUCESO DE NO OBTENER UN DOBLE UNO. ENTONCES EL SUCESO NO E, OBTENER UN DOBLE UNO, TIENE UNA PROBABILIDAD P(NO E) $= \frac{1}{36}$.

ASÍ QUE

$$P(E) = 1 - P(\text{NO } E)$$

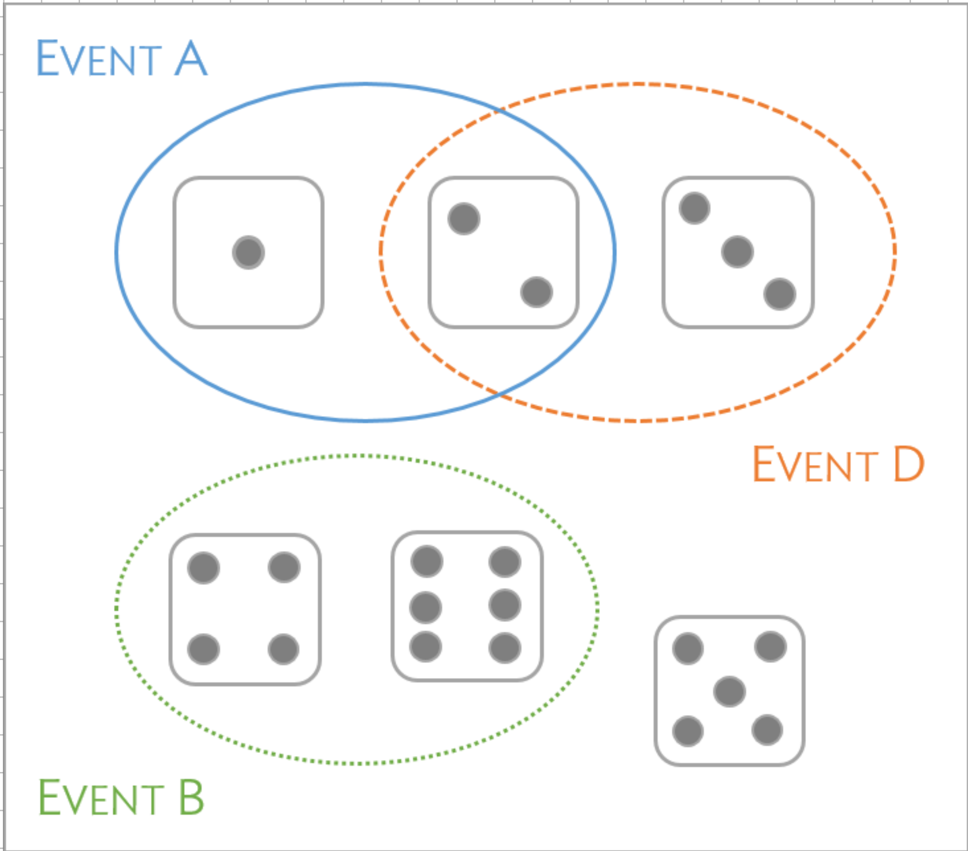
$$= 1 - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{35}{36}$$



Eventos disjuntos / mutuamente excluyentes

Dos eventos o resultados se denominan disjuntos o mutuamente excluyentes si no pueden ambos suceder al mismo tiempo.



Regla de suma para eventos disjuntos

Si A y B representan dos eventos disjuntos, entonces la probabilidad de que ocurra cualquiera es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

El símbolo $\cup$ denota la unión de dos eventos; es decir, P (A o B).

Como se muestra en la diapositiva anterior, los eventos A y B son disjuntos.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/6 + 2/6 = 4/6$

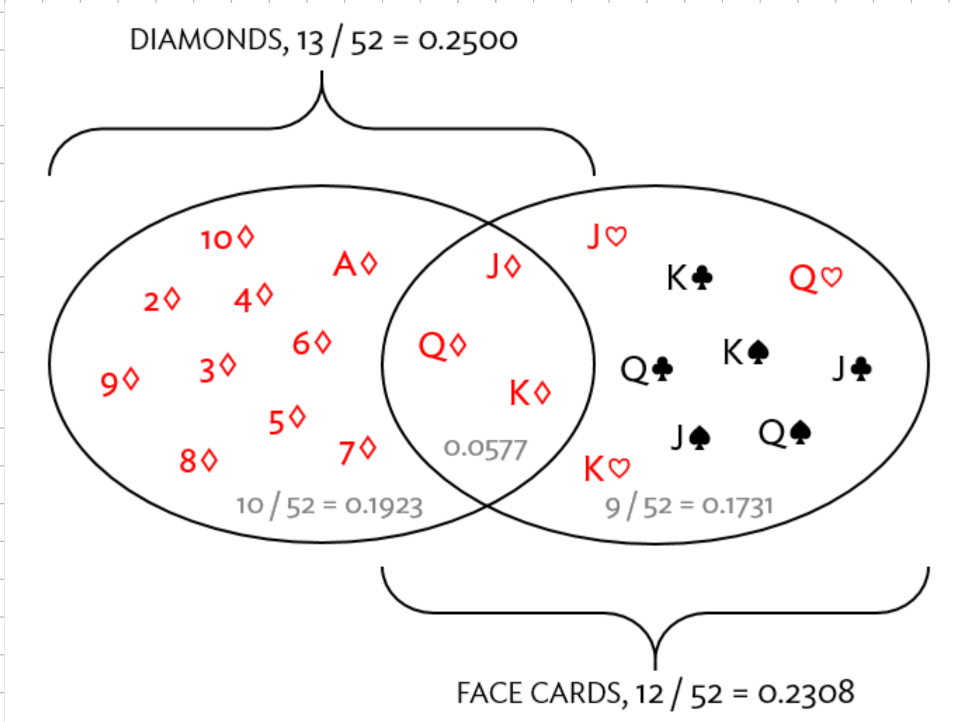
- Intuitivamente, esto tiene sentido; la probabilidad de sacar un 1, 2, 4 o 6 en un dado de seis caras es 4/6.

Si hay k eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_k$, entonces la probabilidad de que uno de estos los resultados ocurrirán es

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

Regla de adición general

Supongamos que estamos interesados en la probabilidad de sacar un diamante o una figura de una baraja estándar de 52 cartas.



!¡¿P(diamante o figura) = 13/52 + 12/52!¡?

Regla general de adición. . .

Para corregir el conteo doble de las tres cartas que se encuentran en ambos eventos, reste el probabilidad de que ocurran ambos eventos...

$$
\begin{aligned}
P(\text{diamante o figura}) &= P(\text{diamante}) + P(\text{figura}) - P(\text{diamante y figura}) \\
&= 13/52 + 12/52 - 3/52 \\
&= 22/52
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para dos eventos A y B cualesquiera, la probabilidad de que ocurra cualquiera es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

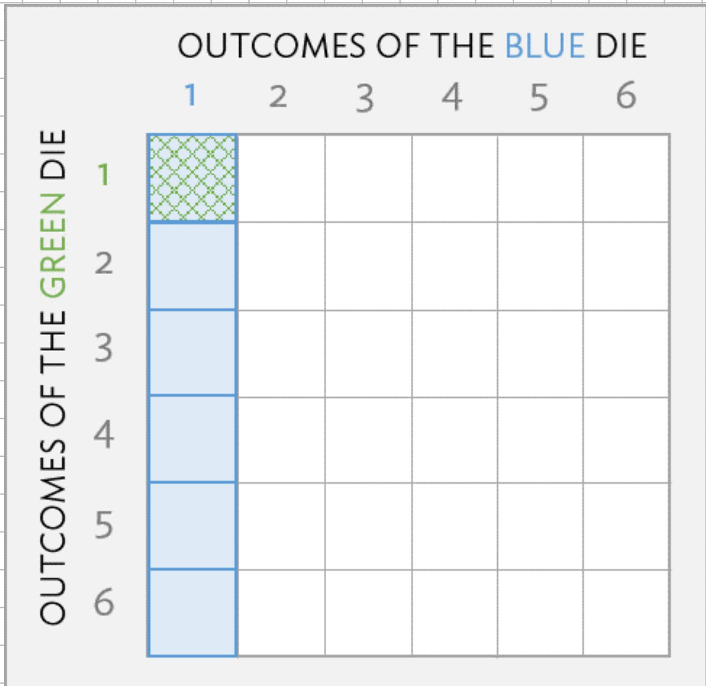
El símbolo $\cap$ denota la intersección de dos eventos; es decir, P (A y B).

Eventos independientes

Dos eventos A y B son independientes si la probabilidad de que tanto A como B ocurran es igual el producto de sus probabilidades separadas.

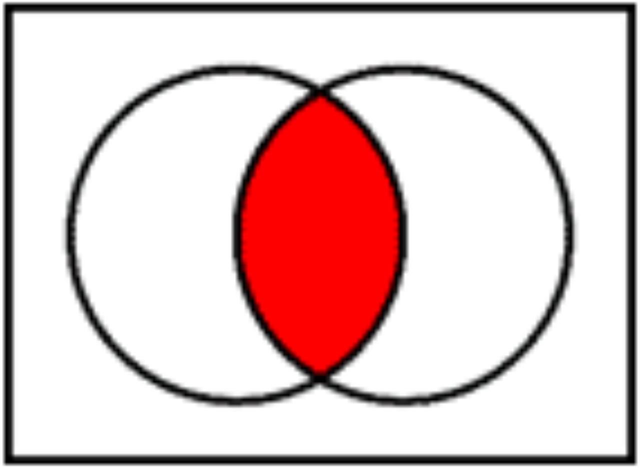
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Se lanza un dado azul y un dado verde. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos unos?



Eventos independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$



$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 0.0278$$

Probabilidad condicional: concepto

La probabilidad condicional de un evento A, dado un segundo evento B, es la probabilidad de A pasando, sabiendo que el evento B ha sucedido.

- Esta probabilidad condicional se denota P (A | B).
  Lanza una moneda justa tres veces. Sea A el evento de que ocurran exactamente dos caras, y B el caso de que ocurran al menos dos cabezas.

- P (A | B) es la probabilidad de tener exactamente dos caras entre los resultados que tener al menos dos cabezas.

- Condicionamiento en B significa que el espacio muestral consta de {HHH, HHT, HTH, THH}, todos los conjuntos posibles de tres lanzamientos donde al menos dos se produjeron cabezas.

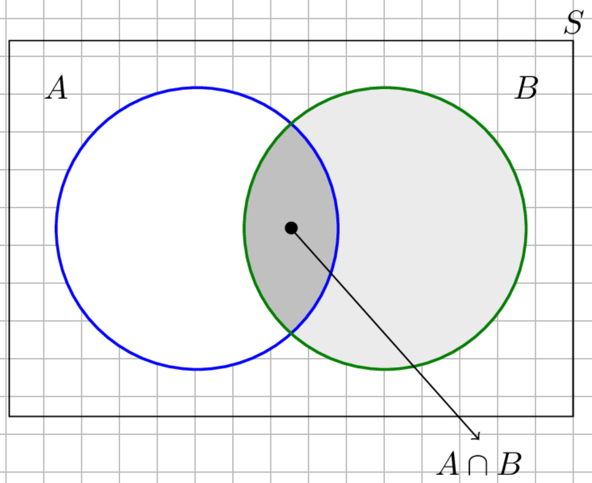
- En este conjunto de resultados, A, consta de los tres últimos, por lo que P (A | B) = 3/4

Probabilidad condicional: definición formal

Siempre que $P(B) > 0$, $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$

Una consecuencia de la definición de probabilidad condicional:

• Si $P(A \mid B) = P(A)$, entonces A y B son independientes; saber que B no ofrece información sobre si A ocurrió.



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Regla general de multiplicación

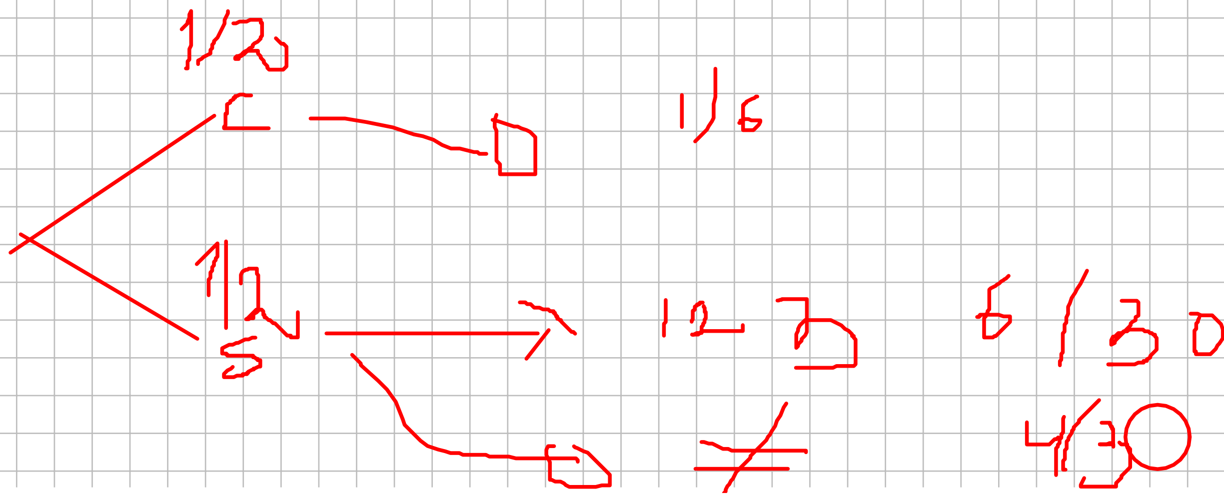
Si A y B representan dos resultados o eventos, entonces

$$P\ (A \cap B) = P\ (A \mid B)\ P\ (B).$$

Esto se deduce de reorganizar la definición de probabilidad condicional:

$$P\ (A \mid B) = P\ (A \cap B)\ /\ P\ (B)$$

$$\longrightarrow \quad P\ (A \mid B)\ P\ (B) = P\ (A \cap B)$$



Definición Axiomática de la Probabilidad

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, con espacio muestral Ω, espacio de eventos F y medida de probabilidad P, tal que $P(E)$ es la probabilidad de algún evento E y $P(\Omega)=1$.

* La probabilidad de un evento es un número real no negativo:

$$P(E) \in \mathbb{R},\ P(E) \geq 0 \ \forall\, E \in F$$

* La probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos elementales en todo el espacio muestral es 1

$$P(\Omega) = 1.$$

* Supuesto de σ-aditividad: Cualquier secuencia contable de conjuntos disjuntos $E_1, E_2, \ldots$ satisface

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$