

大部分人在高中学数学时，那种感觉就像是自己乘坐着一片小竹筏，在大海里飘零；老师就像无定的海风，风往西吹，小竹筏就向西走一段，看不见海岸，茫然无所依；风往东吹，小竹筏就向东走一段，仍然看不见海岸，仍然茫然无所依——不知道自己在哪儿，也不知道应该怎么划船。这可不是学生的问题，这是老师在教学上没有全局思维、加之学习方法极度落后导致的。只要使用了正确的方法、有自信、多动脑，高中数学很简单、很有趣、很好考高分。

## 1. 高中数学的知识结构

高中数学的知识，可以大体分为两类：知识点、解题思维。

### 1.1 知识点 - 数学概念

数学的最大特点是抽象。**知识点，就是抽象的“数学概念”**。这里以“集合”、“元素”这一对概念，举例说明。具象地想，它们可能会被类比为“班级”和“属于这个班级的一个个学生”。如果抽象地想，则稍微有点难度。不过，请思考几件事：

1. 具象地思考集合，它的概念是很模糊的。这个班级里，会不会出现两个一样的同学呢？会不会按身高给同学编号呢？这些对于“班级”来说，我们不知道；但是抽象的“数学概念”的**性质**是十分确定的：集合拥有确定性、无序性、互异性。集合中不会出现相同的元素，也没有顺序——**任何数学概念最基本的就是性质**，经过这番对**性质**的思考，“集合”的面纱被揭开了一点。
2. 班级有名称，我们需要知道是 352 班，还是 567 班，才能确定这个班级里有什么同学。集合也需要让我们清晰地指出，有三种方法：列举法、描述法、图示法。在使用列举法的时候，我们自然而然的想，因为集合的“无序性”，这些元素怎么写都可以；在使用图示法的时候，同时属于 A、B 两个集合的元素，在  $A \cap B$  中只出现一次，在图像上是有重叠的这是“互异性”的体现，——**数学概念之间是互相有联系、互相支持、互相佐证的整体，你中有我，我中有你**。对“集合”的理解逐步完善。
3. 元素和集合的概念（定义）也是水乳交融的。元素是集合中的单个对象，集合是互不重复的元素组成的整体。在这里，集合的定义又把“互异性”重复了一遍，\*\*性质和定义紧密相关。元素和集合的两种关系：属于，不属于。
4. 集合与集合之间存在关系，也就是子集（包含于）、真子集（真包含于）、集合相等、空集。这些概念都是基于对元素是否相等的判断的，**环环相扣**。
5. 集合的三种运算（交、并、补），则是建立在元素、集合之间关系的。如“交集”：由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作  $A \cap B$ 。从集合关系视角， $A \subseteq A \cap B$ ，且  $B \subseteq A \cap B$ 。**环环相扣**。

由此可见，要抽象地理解数学概念，无非就是把“定义”“性质”“表示方法”“关系”“运算”这些内容都理解清楚。如果是平面几何、或者立体几何，也差不多可以分为这几类。

### 1.2 让知识自动化 - 驾轻就熟地运用，不要瞻前顾后

一个集合的概念，就用了这么多的文字去叙述，看着很费力，而且是抽象的，是不是学数学很难、很要天赋呢？绝对不是这样，高中数学涉及的内容，大部分都只是古希腊时期（大约公元前 500 年 — 公元前 300 年），以及文艺复兴时期（公元 1300 - 公元 1500 年）的数学成果，并经过了几百年的简化。这些知识是人人可以学会的，大部分人都是不得其法，弯路走多了。

如果我们非得用文字叙述，其实**每天都要做的穿衣服，比数学复杂多了**：

- 首先，要考虑今天的天气，天冷多穿，天凉少穿；
- 第二，看到衣服之后，要分辨它是什么：**\*\*这件衣服有什么性质？\*\***如果有两个长筒（袖子）分在左右、中间是一个方块（胸部和下摆）、上方有一个洞（领口），材质很柔软，那就是秋衣。

- 第三，如果是秋衣，\*\*要如何操作才能穿上呢？\*\*那么要用右手捏着领口提起来，用左手捏住左侧，使衣服摊开，然后迅速用右手抓住背心下摆，用大拇指捻开上下两层，露出可以让身体钻进去的洞，捏着下摆向头上套去.....
- .....（此处省略秋裤、上衣、裤子、袜子、鞋子）

穿衣服的过程，如果要好好叙述出来，可能需要几千几万字，绝对不简单。但是我们竟然可以不用思考、毫无负担地每天重复、几乎不出错，这是为什么呢？因为我们熟练地从细节开始，通过一次次地强化重复，完全掌握了“穿衣服”的知识体系。这个金字塔结构的体系是怎样呢：

1. 第一级别：对于学会熟练穿衣服的人来说，穿衣服就是一件事：思考一次。
2. 第二级别：如果需要对每个步骤去细分，那么可以分为 6 件事：穿秋衣、穿秋裤、穿上衣、穿裤子、穿袜子、穿鞋子。
3. 第三级别：穿秋衣可以分为 7 步：1.....2.....3.....4.....5.....6.....7.....

当我们把第三级别的 7 个操作熟练完成之后，那么这 7 个操作就组合成了第二级别一个操作：穿秋衣。当我们把第二级别的 6 个步骤熟练掌握之后，就组合成了第一级别的操作：穿衣服。于是我们就获得了一个自动化知识点，“穿衣服”，非常轻松。

世界上的所有知识，都是这样学会的，当然也包括数学。还\*以集合为例，对于一个熟练的学生来说，集合，就是集合，需要什么概念，马上就能自然而然地用出来，集合是第一级别的知识点，已经是自动化知识点；这个第一级别的知识点，是由“定义”“性质”“表示方法”“关系”“运算”这些第二级别的知识构成的。而从 0 开始学习数学，就是需要一点点地从第三级别的“确定性、无序性、互异性”和“交、并、补”这些知识一点点熟悉、积累。\*那些所谓的数学天才，只是比普通人积累了更多的自动化知识点，更擅长于积累自动化知识点而已，他们并不能同时想 8 道题，或者一瞬间思考 5 种可能的解法。

在使用这些第一级别的自动化知识点时候，大脑的思维只需要在可能出现特殊情况时提醒自己就够了，不要瞻前顾后、患得患失、浪费思考的能量、怕自己有所遗漏（如果有，早在学的时候就发现了）。果断出招。

注意：知识分三级并不是固定的，而且在学习的时候也不需要思考这是第几级的知识。重要的是如何从小块的知识逐步组合成大块的知识、并且自动化使用。

### 1.3 构建知识图谱 - 给知识点在大脑中定居

经过 1.2 的分析，应该知道如何去掌握大大小小的数学知识点了。高中数学涉及的知识点，包括了“函数”“导数”“三角函数”“概率”“数列”“空间立体几何”“平面解析几何”“圆锥曲线”等一系列大的课题，总量不算多也绝不算少。学习就像往脑子里写书，这本书没有目录是绝对不行的。如果没有目录，每次想找到自己学过的知识就像大海里捞针，效率极其低下。所以，知识的体系化十分重要（这适用于所有学科）。

现在的高中教育大幅增加了考试的频率，如果跟随着每次考试的卷子，零散地学习这些内容，很容易造成遗忘、漏掉某些没掌握的内容、或者重复学习浪费时间。一个更高效的方法是将知识知识串联成网络，可以更好地巩固记忆，减少知识点的遗漏。

具体方法是：

1. 构建一个全面的知识图谱，将每个大的领域罗列出来，并将其细分为一个个的考点，但不要添加细节。（细节应该记在脑子里、形成自动化知识点。）
2. 针对性补强。当构建完成这个知识图谱之后，就可以轻松地知道哪部分的知识点不够清晰、没有自动化。请注意，除非时间高度紧缺，请不要放弃高中数学的任何一个不擅长的知识点。高考数学 80% 的题目都是基础题，并不需要花太多力气就能得到这些分数。

3. **化被动学习为主动学习**。既然知道了哪里知识没有巩固好，哪些题不会做，那么就可以高效地精耕细作自己的薄弱知识点，不用再大水漫灌。

- **被动学习**：跟随老师、考试的节奏进行，一直循环：做题->总结错题->做题->总结错题->做题->总结.....，就像用有很大空洞的渔网在大海里捞鱼，总有漏网之鱼；并且相当一部分时间都用在了重复地做自己会做的题上。
- **主动学习**：做题->找到错题相关的体系->分析哪个区域的知识不清晰->从题库自选相关习题加深理解

以下是一个高中数学知识图谱的例子，但请注意，这份图谱可能因为高考年份、省份不同，与实际的考点大纲有差别。

集合、映射、函数、导数及微积分

三角函数与平面向量

数列与不等式

解析几何

立体几何

统计与概率

其他部分内容

## 1.4 解题思维 - 数学方法

大部分人学数学，只注意了“数学概念”的抽象，而忽视了“解题思维”的抽象——更精确地说，是“数学方法”。（这种抽象的关键在于去除掉这个问题原本所应用的问题的细节，单纯看这种想法的产生是为了什么原因，以及想要解决怎样的困境）直观地说，数学方法，就是在“求解”和“求证”中用到的一些技巧，如“数学归纳法”、“反证法”、“数形结合”、“换元法”、“分类讨论思想”、“化归思想（把复杂问题转化为简单问题或熟悉的问题）”、“待定系数法”、“构造法”、“极限思想”、“利用不等式性质（如均值不等式）”等等。只有将数学概念和数学方法两者相结合，才能真正搞明白数学。

当学习一个“数学方法”时，首要的就是要敏锐的发现正在使用的是哪种方法。然后，分析这种方法产生的原因、解决的问题（目的）、具体的步骤。下面是“数学归纳法”的例子：

数学归纳法产生的原因和目的

## 1. 产生的原因

### ◦ 探索自然数的规律

数学归纳法起源于人类对自然数及其性质的研究。许多数学命题涉及无穷多个自然数（例如，1, 2, 3, ...），而直接逐一验证每个自然数显然不现实。因此，需要一种方法，可以通过有限步骤推导出对无穷多个数都成立的结论。例如，证明自然数的和公式  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  的普遍性，逐一验证显然不可能。

### ◦ 逻辑严密性的要求

数学家需要一种既可以概括无限个自然数规律，又能保证逻辑严密的方法。数学归纳法利用“递归”思想，通过对基本情况的验证和递推规则，建立严密的证明框架。

### ◦ 解决无穷性的问题

自然数的集合是无穷的，直接处理无穷集合非常困难，而归纳法通过递归逻辑，将无穷问题化为“初始情况”和“递推步骤”两个有限步骤，使问题变得可解。

## 2. 目的、解决的问题

### ◦ 验证数学命题对所有自然数的普适性

它旨在证明某些命题对无穷多个自然数都成立。例如：

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

数学归纳法通过验证基础情况（如  $n=1$ ）和递推关系（由  $n=k$  推导  $n=k+1$ ），实现命题的普适证明。

### ◦ 简化推理过程

数学归纳法减少了对无限多个情况的逐一验证需求。通过两步逻辑归纳，可以覆盖整个自然数范围，显著提高效率。

### ◦ 提供通用证明工具

数学归纳法不仅用于数列公式证明，还广泛应用于集合论、组合数学和算法分析等领域，成为一种通用的逻辑推理工具。

## 3. 归纳法的步骤、背后的思想 数学归纳法的思想本质上是：

- **基石（Base Case）**：验证命题在某个初始自然数（通常是  $n=1$ ）上成立。
- **递归锁链（Inductive Step）**：通过假设命题在  $n=k$  成立，推导出  $n=k+1$  也成立，构成逻辑递归链。
- **无限传递（Infinite Domino Effect）**：因为命题对初始值成立，并且每一步都能传递到下一步，从而可以“传播”到所有自然数。

经过以上的梳理，数学归纳法在大脑中一定不再是“一片模糊”了。这些问题如果自己想不出来，可以让 ChatGPT 解答。

另外，“数学方法”同样可以构建出来一个“知识图谱”、或者加入到“数学概念”的知识图谱中去。

## 2 心理建设

### 2.1 不要数学焦虑 - 可笑的心理阻碍

“数学焦虑”，是一种很常见的心理现象，表现为“害怕犯错、担心无法解决数学问题”，以致于“避免数学相关的活动，例如不愿意做数学作业或选择数学相关的职业。”出现数学焦虑，并不代表没有学好数学的能力。甚至第一位获得“菲尔兹奖”的得主玛丽安·米尔扎哈妮也有这种心理障碍，要知道，“菲尔兹奖”是数学最高奖项，只有世界上那些作出最杰出的数学研究的人才能获得。她认为自己不擅长数学，可这怎么可能呢？

这种心理的出现和真实能力并没有关联，这是教育的失误。为什么会出现数学焦虑呢？

1. 过去失败的经历，如考试成绩差或被批评，可能导致对数学的消极情感。

2. 思维定式：“数学能力是天生的”这种固定思维让学习者丧失信心，认为数学“难学且无法改变”。
3. 教学方式问题：教师过于强调正确答案或忽视学生个体差异，可能让学生感到不被支持。
4. 家庭和社会影响：父母、同学或社会传递的“数学困难”观念，可能让学生感到压力。

这些让你对“数学焦虑”的原因，其实都和数学关系不大。它们都是心理的因素。

1. 错误是学习的一部分，数学学习本质上是一个不断试错的过程 —— 如果此时“不巧”有人因为你暂时的失误打击你，则会让你对数学产生负面情绪，这是那个人的错。
2. 在欧美的一些学校，有“数学焦虑”的老师是不被允许教数学的，因为他们的“数学焦虑”会传染给学生。对数学拥有积极态度（好玩、有趣）的老师，他所教授的学生在数学成绩上表现的更好。
3. 如果不幸拥有数学焦虑的老师、父母，试图反抗他们的影响。
4. 很多人把自己的失败归咎于天赋，这是很愚蠢的行为 —— 因为他们根本就没体验过高效的方法，也不知道这些方法的存在。如果连方法的好坏都不知道，又怎么能正确归因呢？

**数学绝对是人类最有趣的知识**，这种魅力源于它深刻的逻辑性、广泛的应用性以及探索未知的无尽潜力。数学不仅是一门工具性的学科，它更是一种语言，一种抽象而优雅的表达形式，帮助我们理解自然世界的运作，揭示隐藏在现象背后的规律。

1. 数学的有趣在于它的简洁与优雅。一些复杂的问题可以通过几个简单的符号和公式表达。例如，牛顿发现的万有引力公式  $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ ，虽然表达短小，却揭示了宇宙天体运动的奥秘。数学的这种“以小见大”的特性，赋予了它独特的美感。
2. 数学有趣的另一个来源在于它与自然的紧密联系。从花朵的花瓣排列到蜂巢的六边形结构，从河流的分叉到星系的螺旋形态，数学模型无处不在。例如，斐波那契数列和黄金比例在自然界中频繁出现，展示了数学与生物世界的和谐统一。
3. 数学不仅仅是总结已有的规律，它更是探索未知的利器。人类通过数学去回答“什么是无穷大？”、“平行线会在某种几何中相交吗？”、“宇宙的形状是否有限？”等看似无法解答的问题。像黎曼几何这样的抽象数学理论，最初仅仅是数学家的“思维游戏”，但后来却成为爱因斯坦广义相对论的数学基础。
4. 数学不仅存在于理论领域，更深入到我们生活的方方面面。工程师通过数学设计桥梁，经济学家用数学预测市场，程序员通过数学构建算法，甚至电影的特效也离不开数学的支持。从智能手机的运行原理到人工智能的核心算法，数学无处不在。
5. 数学还有趣的一点是它对思维方式的塑造。学习数学不仅是记忆公式和解题，更是学习一种思考问题的方式。数学教会我们如何分解复杂问题、如何抽象本质、如何运用逻辑推理一步步找到答案。这种思维能力不仅仅适用于数学领域，还可以应用到我们生活中的每一个角落。
6. 数学还激发了人类的好奇心。为什么质数的分布如此神秘？为什么某些方程有无穷多个解？为什么某些问题似乎永远无法被证明？正是这种永无止境的问题和挑战，让数学成为探索未知、挑战极限的乐园。
7. 数学的趣味性还体现在它的教育价值中。数学题就像智力游戏，激发我们的想象力和创造力。比如，用数学解决数独、魔方等问题，既锻炼了我们的脑力，也让我们感受到逻辑的魅力。对于孩子们来说，数学是开启好奇心和理性思维的大门；对于成年人来说，数学是培养抽象思维和解决复杂问题能力的工具。

## 2.2 警惕那些“聪明孩子” - 尽量少地问同学

，给别人答疑和自己做题是完全不同的两件事情。刚开始，你会觉得，为什么他们连这个也不会？很多人的基础不一样，理解不同，表达受限，.....，所以，他们其实自己也未必知道自己卡在什么位置。有的题目，其实按照他们的思路也能做，这个时候，老师的教导就是帮助他们打通关节，按照他们的思路去解题，是比你教会他们怎么按照你的思路解题更有用的。因为答疑的最高目的，不是为了某道题本身，而是要帮助同学怎么学会解题思路。

# 能力

计算能力

## 什么是学习方法

learn how to learn the thing you want to learn

预习复习，看例题，做习题，找错题，错题本，小题大作，这样的简单片面的东西。

尽力自己构建出来包含考点和考纲的知识图谱

针对性补强，效果也会更加好。具体什么知识点，只要你能分析出来，专项训练，突破，其实并不算很难

## 应试技巧

安排时间

适当的“投机取巧”曾经有同学问过我一道选择题，类似是 $f(x) \leq a$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围。给了四个选项，分别是 $a > 1$ ， $a \geq 1$ ， $a < 1$ 和 $a \leq 1$ 我告诉他说，这道题直接求解 $f(x)$ 的最大值其实很难，但是如果我们观察到“如果对于某个 $a$ 能满足这个不等式，那么比它大的所有 $a$ 都应该被包括进去”那么很显然，直接选择 $a \geq 1$ 这个选项，因为如果它不对，其他选项就更不可能对。

不要想自己的方法超纲不超纲，做出来比不会做强。很多老师不建议学生使用超纲方法答题的根本原因就是，学生们对这些知识没有经过系统的训练，基本都是稀里糊涂乱用的。多数情况并不是“使用了超纲知识被扣分了”，反而是“你以为你用了正确的方法，实际上用错了”

果你去细看，某些知识点的考查，就是有固定范式的，某几个东西就是喜欢在一起考查。事实上，这点也非常有用，尤其是看的多了之后，根本不用你去死记硬背，就能达到“看他撅屁股，我就知道他拉什么shit”的程度

## 尽量多的多思考 相信自己的大脑

不要身体上勤劳、思维上懒惰

1. 其实当时是在学着以出题人角度看待题目；
2. 寻找题干中的提示，尽量一眼能看出考点

通过建造规律提升泛化知识的能力

做题先慢后快，追求准确率，提高做题自信心，做到一遍就对，不去检查。对于题：出题人想考什么？它涉及了哪个知识点？它用了哪些方法？如果涉及了多个方法，这 $N$ 个方法是如何巧妙组合起来的？

听课时，当心“能力错觉”

多做题、多总结，正确归因

错题本不抄原题，只记错题点和解题技巧

间断回忆法

错题好题

## 拒绝浪费时间的行为，提高效率

题海战术

无用的抄字、抄题目、抄公式、抄答案

重复做已经熟练的部分

拒绝形式主义、学样子、表演式学习

拒绝做“苦工”，找出学习中的垃圾工作

**不要自我设限**

“我就这点水平，要我再去看书，不可能的。你就告诉我，考试的时候两长两短的时候，我怎么办吧！”