

آزمون کوتاه پاسخ شماره ۵

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره منفی ندارد اما در بین افراد با نمره برابر، در رتبه بندی کسی برتر است که تعداد غلط کمتری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. ۹ نفر در یک گروه هستند که ابوالفضل، روزبه، آرش و محمدمهدی نیز در میان آنها هستند. می خواهیم یک کمیته ۵- نفره از این ۹ نفر انتخاب کنیم؛ طوری که دو شرط زیر، برقرار باشد:

- ابوالفضل و روزبه یا هر دو در کمیته باشند، یا هیچ یک در کمیته نباشند (آنها حاضر نیستند بدون یکدیگر کاری انجام بدهند!).
- حداکثر یکی از آرش و محمدمهدی، در کمیته باشد (آنها نمی خواهند روی یکدیگر را ببینند!).

به چند طریق این کار ممکن است؟

۲. چند عدد ۵-رقمی \overline{abcde} وجود دارد که $b = a + c$ و $d = c + e$ باشد؟

۳. روزبه، ابوالفضل و محمدمهدی به نوبت با یک تاس بازی می کنند. در هر مرحله، فردی که نوبت اش است، تاس را می اندازد. بازی تا زمانی ادامه پیدا می کند که یک نفر با تاسش، عدد ۶ بیاورد که برنده ی بازی خواهد بود. اگر روزبه بازی را شروع کند، ابوالفضل نفر دوم و محمدمهدی نفر سوم باشد، احتمال برد ابوالفضل چقدر است؟

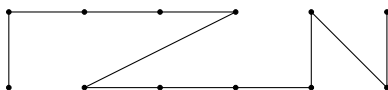
۴. مجموعه ی

$$S = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq 5; 0 \leq j \leq 1; i, j \in \mathbb{Z}\}$$

را در نظر بگیرید. می خواهیم از نقطه ی $(0, 0)$ مختصات به نقطه ی $(5, 1)$ برویم. در هر مرحله می توان از یکی نقاط S ، با یک پاره خط به یکی دیگر از نقاط S برویم که قبلن به آن نرفته ایم. به چند طریق می توان این کار را

آزمون کوتاه پاسخ ۵

انجام داد؛ طوری که مسیر کشیده شده، خودش را قطع نکند (مانند شکل زیر)؟



به چند طریق این کار را می‌توان انجام داد؟

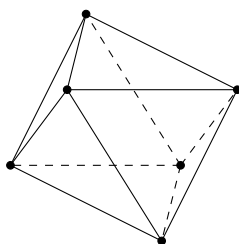
۵. به چند روش می‌توان تعداد مثبتی از خانه‌های یک جدول 8×8 را علامت زد؛ طوری که هر سه شرط زیر برقرار باشد؟

- هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری، هم‌سطر نباشند.
- هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری، هم‌ستون نباشند.
- هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری وجود نداشته باشد که یکی از آن‌ها، هم پایین‌تر باشد و هم چپ‌تر.

۶. ۴ کافر و ۸ مسلمان را دور یک دایره می‌چینیم. احتمال آن را بیابید که هیچ دو کافری، مجاور نباشند.

۷. ۴۲ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۴۲ را در یک دسته می‌گذاریم و بر می‌زنیم. از روی دسته، به ترتیب کارت‌ها را بر می‌داریم؛ تا زمانی که به یک کارت با یک عدد اول برسیم. به طور میانگین چند کارت برداشته می‌شود؟

۸. یک هشت‌وجهی منتظم، این طور ساخته می‌شود که دو هرم با قاعده‌ی مربعی، از وجه مربع روی یک‌دیگر گذاشته می‌شوند. به این ترتیب یک هشت‌وجهی منتظم با ۶ رأس و ۱۲ یال به دست می‌آید (مانند شکل زیر). مجموعه‌ای از شش یال از یک هشت‌وجهی منتظم، همیتونی نامیده می‌شود، اگر بتوان این شش یال را به ترتیبی طی کرد که از یک رأس شروع کرده، هر رأس را دقیقاً یک بار ببینیم و به رأس آغازین بازگردیم. به چند طریق می‌توان دوازده یال هشت‌وجهی را به دو مجموعه‌ی شش یالی همیتونی افراز کرد؟ توجه کنید رأس‌های هشت‌وجهی برچسب دارند و متمایز هستند.



آزمون کوتاه پاسخ ۵

۹. S را مجموعه‌ی همه‌ی سه‌تایی‌های مرتب (i, j, k) از اعداد صحیح مثبت در نظر بگیرید که $i + j + k = ۱۷$. مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk$$

۱۰. زیرمجموعه‌ی S از اعداد صحیح نامنفی، سلطانی نامیده می‌شود، اگر شامل ۰ باشد و به ازای هر $k \in S$ ، $k+۸, k+۹$ نیز در S باشند. چند زیرمجموعه‌ی S سلطانی وجود دارد؟

موفق باشید

—اسدی