



دفترچه‌ی سوالات آزمون آزمایشی تستی مرحله‌ی دوم

وبسایت المپیاد کامپیوتر شازرز

پنج‌شنبه و جمعه - بیست و چهارم و بیست و پنجم فروردین ۱۳۹۶

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۲۱۰

طراحی شده توسط:

علی احمدی، حمیدرضا هدایتی، ایمان غلامی، مجید گروسی و محمد صانعیان

با تشکر از:

امیرکیوان محتشمی، علی شفیع، امیر آذر مهر، شایان چشم‌جهان و کیوان رضایی

توضیحات

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- لطفاً تمام مشخصات خواسته شده در پاسخ‌برگ را وارد نمایید.
- ۲- دفترچه‌ی سوالات (به جز این صفحه) شامل شش صفحه است. بلافاصله پس از شروع آزمون، دفترچه‌ی خود را بررسی نمایید و در صورت وجود هرگونه نقص، مسئول جلسه را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ۴- استفاده از هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت، هرگونه منابع الکترونیکی (مانند اینترنت و موبایل) و وسایلی از این قبیل ممنوع است.

تمامی حقوق این آزمون برای وبسایت شازرز محفوظ است

آدرس اینترنتی: <http://shaazzz.ir>

(۱) ۱۰ توپ در یک ردیف قرار گرفته‌است که از چپ به راست با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌است. می‌خواهیم هر یک از این توپ‌ها را به یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز در بیاوریم؛ به طوری که زوجیت هر دو توپی که رنگ برابر دارند و هیچ توپی به آن رنگ میان آن دو نیست، برابر نباشد. تعداد رنگ‌آمیزی‌های متفاوت را بیابید.

الف) ۱۳۲ (ب) ۱۵۰ (ج) ۱۸۰ (د) ۲۱۰ (ه) ۲۷۶

(۲) یک عدد n رقمی جمع‌بسته است اگر جمع $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ رقم سمت راست و جمع $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ رقم سمت چپ برابر باشند. تعداد اعداد طبیعی حداکثر پنج رقمی که جمع‌بسته هستند را بیابید.

الف) ۳۲ (ب) ۷۲ (ج) ۹۶ (د) ۴۸ (ه) ۶۴

(۳) در یک عملیات برگردان یک بازه از یک دنباله، ترتیب اعداد آن بازه برعکس می‌شود، یعنی بازه‌ی $a_r, a_{r-1}, \dots, a_{l+1}, a_l$ به شکل $a_l, a_{l+1}, \dots, a_{r-1}, a_r$ در می‌آید.

تعداد جایگشت‌های متمایز از اعداد ۱ تا ۱۰ را بیابید که با تعدادی (که می‌تواند صفر باشد) عملیات برگردان بازه‌ی سه تایی بتوان آن‌ها را به شکل صعودی درآورد.

الف) ۷۲۰۰ (ب) ۳۰۲۴۰ (ج) ۶۳۵۰۴ (د) ۲۵۲ (ه) ۱۴۴۰۰

(۴) یک عدد **رعنا** است اگر باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴، ۱ باشد.

عدد $9^3 \times 7^{14} \times 5^{10} \times 2^4$ چند مقسوم‌علیه رعنا دارد؟

الف) ۵۸۳ (ب) ۳۹۱۵ (ج) ۱۱ (د) ۳۵۲ (ه) ۲۳۱

(۵) تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی خانه‌های یک جدول 3×3 با دو رنگ آبی و قرمز را بیابید که زیرجدولی 2×2 از آن وجود نداشته باشد که همه‌ی خانه‌های آن به رنگ قرمز باشد.

الف) ۲۸۹ (ب) ۲۵۳ (ج) ۴۸۰ (د) ۴۱۷ (ه) ۳۸۱

(۶) به ازای یک جدول 6×6 که با آبی و قرمز رنگ‌آمیزی شده است، تعداد سه‌تایی از خانه‌ها مانند A, B و C که A و B هم‌سطر و A و C هم‌ستون هستند و A آبی و B و C قرمز باشند را عدد **چرندی** آن جدول می‌نامیم.

بیشینه عدد چرندی میان همه رنگ‌آمیزی‌های ممکن چند است؟

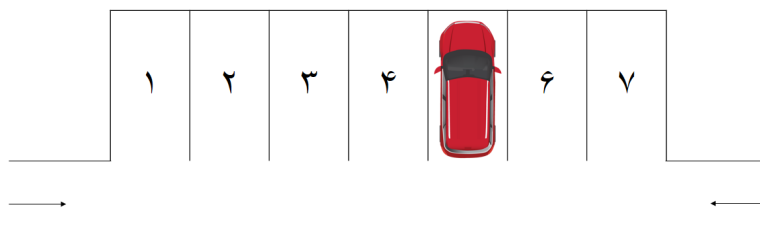
الف) ۸۱ (ب) ۲۱۰ (ج) ۱۹۲ (د) ۱۵۰ (ه) ۱۶۲

(۷) یک جایگشت مانند π **ستودنی** است اگر به ازای هر i اگر $\pi_i > \pi_{i+2}$ (در صورت وجود) و $\pi_i > \pi_{i+3}$ (در صورت وجود).

تعداد جایگشت‌های ستودنی از اعداد ۱ تا ۱۵ را بیابید.

الف) ۶۰۵ (ب) ۶۱۰ (ج) ۸۵۳ (د) ۹۷۹ (ه) ۹۸۷

(۸) در پارکینگ خانه‌ی علی هفت جای پارک در یک ردیف وجود دارد و می‌توان از دو طرف به پارکینگ وارد شد.



هر ماشین یک اولویت برای جای پارک دارد و از یکی از دو طرف وارد شده و ابتدا جای پارک خودش رو بررسی می‌کند اگر خالی بود آن‌جا پارک کرده و در غیراین‌صورت انقدر جلو میرود تا به جای خالی برسد و در آن‌جا پارک می‌کند. اگر جای پارکی وجود نداشته باشد هم از پارکینگ بیرون می‌رود. (هر جای پارک می‌تواند اولویت چند ماشین باشد) اگر هفت ماشین بخواهند در پارکینگ پارک کنند (ماشین‌ها با ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند و به همین ترتیب وارد می‌شوند)، به ازای چند حالت از اولویت‌ها و جهت وارد شدن، هفت ماشین می‌توانند در پارکینگ پارک کنند.

الف) ۲۲۵ (ب) $7! \times 2^7$ (ج) $7! \times 3^7$ (د) 7^6 (ه) ۲۲۳

اندازه یک جدول یک‌سطری برابر با تعداد ستون‌های آن است. عدد وزیری یک مجموعه از جدول‌های یک‌سطری، دومین کوچکترین اندازه میان همه جدول‌هاست.

یک جدول یک‌سطری 1×100 داریم که در خانه‌ی i -ام آن عدد i نوشته شده است.

با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

(۹) اگر یک برش با احتمال یکسان میان همه خطوط جدول که جدول را به دو قسمت ناتهی تقسیم می‌کند، جدول را به دو قسمت ناتهی تقسیم کنیم، امید ریاضی عدد وزیری این مجموعه دوتایی از جدول‌ها را با \mathbb{E} نشان دهیم، $\lfloor \mathbb{E} \rfloor$ چند است؟

الف) ۶۶ (ب) ۷۸ (ج) ۷۴ (د) ۷۵ (ه) ۶۷

(۱۰) اگر دو برش با احتمال یکسان میان همه جفت خطوط جدول که جدول را به سه قسمت ناتهی تقسیم می‌کند، جدول را به سه قسمت ناتهی تقسیم کنیم (دو برش همزمان انجام می‌شود)، امید ریاضی عدد وزیری این مجموعه سه‌تایی از جدول‌ها را با \mathbb{E} نشان دهیم، $\lfloor \mathbb{E} \rfloor$ چند است؟

الف) ۲۷ (ب) ۵۰ (ج) ۴۴ (د) ۴۹ (ه) ۳۳

(۱۱) یک جدول ۱۱×۱۱ داریم که در ابتدا همه‌ی خانه‌های آن سفید است. در هر مرحله می‌توان یک زیرمستطیل از جدول که با نقطه بالا راست اشتراک دارد را به رنگ سیاه درآورد. تعداد جدول‌های متمایزی که با انجام ۶ مرحله می‌توان به آن‌ها رسید و با انجام کمتر از ۶ مرحله نمی‌توان به آن‌ها رسید را بیابید.

الف) ۹۲۴ (ب) ۴۶۲ (ج) ۶۳۵۰۴ (د) ۲۱۳۴۴۴ (ه) ۱۰۶۷۲۲

یک عدد با ارقام ۱، ۲ و ۳ ممدپسند است اگر اختلاف هر دور رقم مجاور دقیقاً یک باشد.

با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

(۱۲) تعداد اعداد یازده رقمی ممدپسند را بگویید.

الف) ۳۲ (ب) ۴۸ (ج) ۶۴ (د) ۷۲ (ه) ۹۶

(۱۳) باقی‌مانده جمع اعداد ۱۱ رقمی ممدپسند بر ۷ چند است؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

(۱۴) شازگل پس از اینکه دستگاه گراف‌سازش خراب شد یک دستگاه جایگشت‌ساز برای خود پیدا کرد. اما این دستگاه برای این که یک جایگشت بسازد، یک دنباله ورودی می‌گیرد که هم اندازه جایگشت مورد نظر است و عدد i - ام آن برابر است با تعداد زیردنباله‌های صعودی در میان i عدد اول جایگشت. شازگل می‌داند اگر ورودی غلط به دستگاه بدهد دستگاه می‌سوزد، او که نمی‌خواهد این دستگاهش هم خراب شود. از شما می‌خواهد مشخص کنید که چند تا از جایگشت‌های زیر می‌تواند دنباله توصیف کننده یک جایگشت باشد.

• $\langle ۱, ۲, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۸ \rangle$

• $\langle ۱, ۱, ۲, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۷ \rangle$

• $\langle ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ \rangle$

• $\langle ۱, ۳, ۷, ۹, ۱۷ \rangle$

• $\langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rangle$

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

(۱۵) به چند طریق می‌توان ۸ مهره در خانه‌های یک جدول 4×4 قرار داد به طوری که:

- در هر خانه حداکثر یک مهره باشد.
- سطرها دو به دو متمایز باشند. (دو سطر متمایزند اگر ستونی وجود داشته باشد که در یک سطر در آن ستون مهره باشد و در دیگری نباشد.)
- ستون‌ها دو به دو متمایز باشند. (دو ستون متمایزند اگر سطری وجود داشته باشد که در آن سطر و یک ستون مهره باشد و در دیگری نباشد.)
- در هر سطر و در هر ستون زوج مهره وجود داشته باشد.

الف) ۳۶۰ (ب) ۷۲ (ج) ۸۰ (د) ۳۶ (ه) ۱۸۰

به یک رشته دودویی می‌گوییم اگر حرف‌های آن ۰ یا ۱ باشد.

عدد رمزی یک رشته برابر است با تعداد زیر دنباله‌های متمایز آن رشته.

با توجه به توضیحات بالا به چهار سوال زیر پاسخ دهید

(۱۶) عدد رمزی رشته‌ی دودویی ۱۰۱۱۱۰۱۱۰۰ چند است؟

الف) ۱۱۰ (ب) ۱۳۰ (ج) ۱۳۲ (د) ۱۸۰ (ه) ۱۵۷

(۱۷) طول کوتاه‌ترین رشته‌ی دودویی که عدد رمزی آن ۱۱ باشد چند است؟

الف) ۸ (ب) ۷ (ج) ۶ (د) ۵ (ه) ۴

(۱۸) طول کوتاه‌ترین رشته‌ی دودویی که عدد رمزی آن ۱۴۲ باشد چند است؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۲

(۱۹) چند رشته‌ی دودویی وجود دارد که عدد رمزی آن ۶۷ باشد؟

الف) ۴۴ (ب) ۶۶ (ج) ۱۰۲۴ (د) ۵۱۲ (ه) ۶۸

(۲۰) گراف ۸ راسی G گولاخ است اگر:

- G ساده باشد.
- تنها یک تطابق کامل داشته باشد
- ماکسیمال باشد. (اکیداً زیر گراف هیچ گرافی نباشد که دو شرط بالا را دارد.)

عدد یکتا یک گراف برابر است با $\sum_{i=1}^n d_i^2$.

بیشینه عدد یکتا میان همه گراف‌های ۸ راسی گولاخ چند است؟

الف) ۱۴۰ (ب) ۱۶۸ (ج) ۲۱۰ (د) ۱۵۶ (ه) ۱۹۴

مجموعه‌ای از یال‌ها در یک گراف وزن‌دار **دورساز** است اگر بتوان یال‌های این مجموعه را به تعدادی دور افزاز کرد.
دنباله عددی یک مجموعه دورساز دنباله همه اعداد روی یال‌های این مجموعه است که به صورت نزولی مرتب شده‌است.
مجموعه دوردوری یک گراف برابر است با مجموعه‌ای که بزرگترین دنباله عددی را میان همه مجموعه‌های دورساز آن گراف دارد.

عدد **نادوردوری** یک گراف برابر است با جمع یال‌هایی که در مجموعه دوردوری آن گراف وجود ندارد.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید

(۲۱) عدد نادوردوری K_{12} که روی یال بین راس i و راس j ، عدد $i \oplus j$ نوشته شده‌است را بیابید.

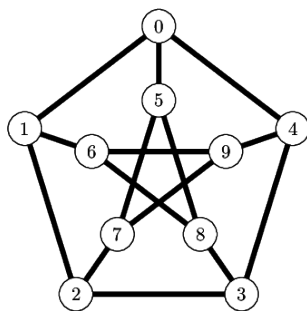
الف) ۱۳ (ب) ۱۴ (ج) ۱۵ (د) ۱۶ (ه) ۱۷

(۲۲) مجموعه دوردوری برای همه گراف‌های چند تا از دسته‌ها یکتاست؟

- تنها گراف K_8 که روی یال بین راس i و راس j ، عدد $i + j$ نوشته شده‌است.
- تنها گراف $K_{4,4}$ که روی یال بین راس i و راس j ، عدد $i \text{ OR } j$ نوشته شده‌است.
- همه‌ی گراف‌های همبند ۵ راسی با ۷ یال که روی همه یال‌ها عدد ۱ نوشته شده‌است.
- همه گراف‌های n راسی که بیش از $\frac{n}{2}$ یال برشی دارند.

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۲۳) به چند طریق می‌توان روی یال‌های گراف پترسن اعداد ۱ و ۲ قرار داد به طوری که عدد نادوردوری آن ۵ باشد و مجموعه دوردوری آن نیز یکتا باشد؟ (توجه کنید که راس‌های گراف پترسن به شکل زیر برچسب گذاری شده‌است.)

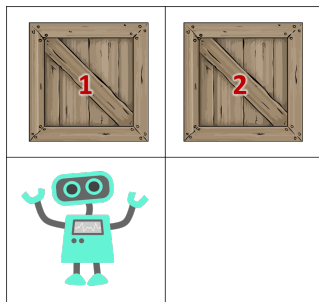


الف) ۲۷۰۰ (ب) ۳۲۴۰ (ج) ۲۱۶۰ (د) ۲۸۸۰ (ه) ۳۵۴۰

(۲۴) کمیته علمی IOI می‌خواهد برای ده روز جلسه برگزار کند. در قوانین کمیته نوشته شده است که یک نفر حداکثر یک روز می‌تواند غیبت کند و حداکثر سه روز متوالی می‌تواند با تاخیر در جلسه حاضر شود. حامد فقط برای این‌که شما را اذیت کند از شما می‌پرسد که یک نفر به چند حالت می‌تواند در جلسات شرکت کند. (دو حالت متمایز است اگر روزی وجود داشته باشد که در هر دو حالت در آن روز یک کار را انجام نداده‌باشد.)

الف) ۱۸۷۱ (ب) ۳۷۴۲ (ج) ۷۵۷۶ (د) ۳۷۸۰ (ه) ۳۷۸۸

(۲۵) در گوشه پایین سمت راست یک جدول 2×2 یک ربات قرار گرفته است. در خانه i -ام سطر اول نیز یک مکعب قرار دارد که روی آن عدد i نوشته شده است.



یک ربات مأموریت دارد تا دو مکعب سطر بالا را به همان ترتیب به سطر پایین منتقل کند. ربات به شکل زیر عمل می‌کند:

اگر ربات در سطر اول باشد، دستانش خالی باشد و در خانه‌ای قرار داشته باشد که در آن مکعب وجود دارد، آن مکعب را بر می‌دارد.

اگر ربات در سطر آخر باشد، در دستش مکعبی باشد و خانه‌ای که در آن قرار دارد در ستون عدد مکعب در دستش باشد آن را در آن جا رها می‌کند.

اگر ربات در هر ثانیه به احتمال یکسان به یکی از همسایه‌های ضلعی‌اش برود، امید ریاضی تعداد مراحل لازم تا هر دو مکعب از سطر بالا به سطر پایین برسند چند است؟

الف) ۱۱,۵

ب) ۱۲

ج) ۱۲,۵

د) ۱۳

ه) ۱۳,۵