

بک کوچولو ..... ۲۵ امتیاز

عدد  $x$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n \leq x < f_{n+1}$  حال در جایگاه  $n$  ام  $1$  بگذارید و  $x = x - f_n$  قرار دهید این الگوریتم را تا زمانی که  $x \neq 0$  است ادامه دهید. حال چون  $f_n \leq x < f_{n+1}$  پس  $f_n \leq x - f_n < f_{n-1}$  بنابراین وقتی جایگاه  $n$  ام را  $1$  میکنیم بعد از آن دیگر جایگاه  $n$  ام و جایگاه  $n - 1$  ام  $1$  نمی شوند. پس الگوریتم درست عمل می کند.

پیچیدگی الگوریتم نیز می شود:  $O(n \lg n)$

کتیبه ..... ۳۵ امتیاز

یک مجموعه از یالها را در نظر بگیرید و آن را  $S$  بنامید. حال با استفاده از  $DFS$  می توان همبندی این مجموعه را چک کرد. احتمال وجود این مجموعه هم که مساوی است با:  $\frac{2^{15-|S|}}{3^{15}}$ .

بنابراین اگر مجموعه  $S$  را داشته باشیم می توانیم همبندی آن و احتمال وجودش را در  $O(n^2)$  چک کنیم. حال چون تعداد این مجموعه ها  $2^{\binom{n}{2}}$  است، میتوانیم همه ی مجموعه ها را جداگانه محاسبه کنیم.

بنابراین پیچیدگی الگوریتم کلی می شود:  $O(2^{\binom{n}{2}} \times n^2)$

رشته کوه ..... ۴۰ امتیاز

فرض کنید کسی که در قله ی کوه  $1$  ایستاده دورترین کوهی که می بیند  $x$  باشد. در این صورت هیچ  $i$  ای وجود ندارد که  $(1 < i < x)$  و  $a_i$  بزرگتر از  $x$  باشد (چرا؟) پس دو مجموعه ی  $1$  تا  $x - 1$  و  $x$  تا  $n - 1$  را می توان جدا گرفت و جوابشان را جداگانه به دست آورد و در هم ضرب کرد. در نتیجه می توان جواب را برای  $n$  های مختلف به صورت بازگشتی از روی  $n$  های کوچکتر به دست آورد. ( $d_n$  به معنای جواب مساله برای  $n$  کوه است)

$$d_n = \sum_{x=2}^n d_{x-1} \times d_{n-x+1}$$

برای پیاده سازی هم می توان آرایه  $d$  را به صورت داینامیک پر کرد. بنابراین پیچیدگی الگوریتم کلی می شود:  $O(n^2)$

پ.ن: راه دیگر برای حل این مساله این است که می توان جواب آن را با اعداد کاتالان تناظر داد و برای حل کاتالان کافی حاصل یک ترکیب را حساب کنیم.