پاسخ نامه آزمون تستی مرحله یک شازززز، بهمن ۱۳۹۹

اگر آزمون را هنوز ندادید، پاسخ نامه را نگاه نکنید.

۱- گزینه ۱.

می خواهیم ثابت کنیم برای یک آرایه دلخواه اگر اعداد آرایه $\langle A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_n \rangle$ باشند، امید ریاضی عدد نهایی $A_{۱} - A_{۲}$ است. برای اثبات این ادعا از استقرا استفاده می کنیم. پایه استقرا: $n = ۲$ در اولین حرکت $\langle A_{۱}, A_{۲} \rangle$ با یک حرکت به $\langle A_{۱} - A_{۲} \rangle$ تبدیل می شود.

فرض استقرا: برای هر آرایه به طول $n - ۱$ امیدریاضی عدد نهایی $A_{۱} - A_{۲}$ است.

حکم استقرا: برای هر آرایه به طول n امیدریاضی عدد نهایی $A_{۱} - A_{۲}$ است.

گام استقرا: گر در حرکت اول ۲ عدد سمت چپ را انتخاب کنیم به آرایه $\langle A_{۱} - A_{۲}, A_{۳}, \ldots, A_n \rangle$ می رسیم که طبق فرض استقرا امیدریاضی عدد نهایی بعد از این حرکت $A_{۱} - A_{۲} - A_{۳}$ است. اگر در حرکت اول $A_{۳}$ و $A_{۲}$ را انتخاب کنیم به آرایه $\langle A_{۱}, A_{۲} - A_{۳}, \ldots, A_n \rangle$ می رسیم که طبق فرض استقرا امید ریاضی عدد نهایی بعد از این حرکت $A_{۱} - A_{۲} + A_{۳}$ است. اگر جفت دیگری انتخاب کنیم، از آن جا که دو عدد اول تغییری نمی کنند، امید ریاضی جواب بعد از حرکت اول $A_{۱} - A_{۲}$ است.

$$\frac{(A_{۱} - A_{۲}) * (n - ۳) + (A_{۱} - A_{۲} - A_{۳}) + (A_{۱} - A_{۲} + A_{۳})}{n - ۱} = A_{۱} - A_{۲}$$

پس امیدریاضی عدد نهایی برابر $۱ - ۲ = -۱$ است.

۲- گزینه ۴.

می توانیم فرض کنیم ابتدا علیرضا ۲ تاس ۶ وجهی خود را می اندازد و سپس عمو تاس ۱۲ وجهی خود را پرتاب می کند. اگر عدد دو تاس علیرضا a و b باشد او میتواند مجموع های $a, b, a+b$ را با انتخاب بعضی تاس ها بسازد.

اگر $a \neq b$ باشد میتواند دید که هر ۳ عدد $a, b, a+b$ با هم متفاوتند پس در ۳ حالت از ۱۲ حالت تاس عمو علیرضا برنده میشود. اگر $a = b$ باشد او فقط دو عدد $a, a+b$ را میتواند بسازد و فقط در ۲ حالت از ۱۲ حالت تاس عمو برنده بازی علیرضا است.

میدانیم احتمال مساوی بودن a و b برابر $\frac{۱}{۶}$ است. پس جواب برابر $\frac{۱۷}{۷۲} = \frac{۲}{۱۲} \cdot \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۱۲} \cdot \frac{۵}{۶}$ است.

۳- گزینه ۴.

جواب برای یک جدول با n سطر و m ستون برابر $۲^{n+m} - ۱$ است. در کل ۲^{n+m} حالت برای انتخاب کردن سطر و ستون هایی که قرار است اعداد داخل آن ها را افزایش دهیم وجود دارد. می خواهیم ثابت کنیم به ازای ۲ تا از این حالات جداول حاصل با هم برابر می شوند و به ازای بقیه حالات جدول ها متفاوت هستند.

حالت ۱: همه سطر ها را انتخاب کنیم و هیچ کدام از ستون ها را انتخاب نکنیم.

حالت ۲: همه ستون ها را انتخاب کنیم و هیچ کدام از سطر ها را انتخاب نکنیم.

در هر دو حالت ۱ و ۲ همه خانه های جدول برابر ۱ می شوند. حالا می خواهیم ثابت کنیم بقیه جداول یکتا هستند. برای این کار از جدول ها تناظر یک به یک به حالت های انتخاب می دهیم. یعنی می توان از روی جدول، انتخاب ها را بازیابی کرد. اگر انتخاب ها نه حالت ۱ باشد و نه حالت ۲، حداقل یک خانه از جدول برابر ۰ می شود یا حداقل یک خانه از جدول برابر ۲ می شود.

اگر یک خانه از جدول برابر ۰ باشد قطعا سطر و ستون آن خانه انتخاب نشده اند. و اگر یک خانه از جدول برابر ۲ باشد قطعا سطر و ستون آن خانه انتخاب شده اند. می خواهیم ثابت کنیم یک وضعیت انتخاب شدن یا نشدن یک سطر/ستون را بدانیم وضعیت انتخاب شدن یا نشدن همه ستون/سطر ها را می فهمیم.

اگر آن سطر/ستون انتخاب شده باشد، به ازای همه خانه های در آن سطر/ستون اگر آن خانه ۱ باشد یعنی ستونی/سطری که آن خانه در آن قرار دارد انتخاب نشده و اگر برابر ۲ باشد یعنی آن ستون/سطرانتخاب شده است. به طور مشابه برای وقتی که این سطر/ستون انتخاب نشده باشد. پس اگر نه در حالت ۱ و نه در حالت ۲ باشیم انتخاب ها به طور یکتا بازیابی می شود.

پس در کل $۲^{n+m} - ۱$ جدول متفاوت داریم. حالا باید $۲^{۱۳۹۹+۱۳۹۹} - ۱$ را به پیمانه ۵ محاسبه کنیم.

می دانیم $۱۶ = ۲^{۴}$ به پیمانه ۵ برابر ۱ است. پس به ازای هر x داریم، $۲^{x+۴} \overset{۵}{\equiv} ۲^{x}$.

پس از آن جا که $۱۳۹۹ + ۱۳۹۹$ به پیمانه ۴ برابر ۲ است، $۲^{۱۳۹۹+۱۳۹۹} \overset{۵}{\equiv} ۲^{۲}$. از آن جا که $۴ = ۲^{۲}$ جواب مسئله برابر ۳ است.

۴- گزینه ۵.

تعداد حروفی که حداقل یک بار در دنباله ظاهر میشوند را i بنامید. برای انتخاب کردن این i حرف از بین ۵ حرف ما $\binom{5}{i}$ حالت داریم.

اگر x_j را تعداد تکرار های حرف jام بنامیم می دانیم که $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j = 10,\ 1 \le x_j$ است.

شروط بالا مثل معادله سیاله است و می دانیم تعداد جواب های آن $\binom{9}{i-1}$ است. حال میدانیم تمامی تکرار های یک حرف به صورت متوالی هستند. پس اگر تعداد تکرار و ترتیب آمدن آنها در رشته را مشخص کنیم رشته به صورت یکتا ساخته میشود. تعداد ترتیب های آمدن i حرف برابر $i!$ است. پس میتوان گفت اگر دقیقا i حرف یک بار ظاهر بشوند تعداد رشته های ممکن $i! \times \binom{9}{i-1} \times \binom{5}{i}$ است.

حال برای بدست اوردن جواب نهایی باید به ازای i از ۱ تا ۵ این عبارت را محاسبه و جمع نمایید. جواب نهایی که بدست می آید برابر ۲۷۵۴۵ است.

۵- گزینه ۵.

از اصل متمم استفاده می کنیم. تعداد کل گراف های ۶ راسی با ۷ یال $6435 = \binom{15}{7}$ است، اگر گراف ۶ راسی ۳ مولفه همبندی باشد حداکثر میتواند ۶ یال داشته باشد. (اثبات به عهده خواننده). اگر گراف بخواهد ناهمبند باشد باید دو مولفه داشته باشد (اگر بیشتر از دو مولفه باشد تعداد یال ها به ۷ نمیرسد).

۲ حالت داریم :

حالت ۱- گراف به دو مولفه ۱ و ۵ تایی تبدیل شود. گراف های ۵ راسی با ۷ یال حتما همبند است زیرا اگر بتوان بخش ۵ راسی را به دو مولفه همبندی تقسیم کرد در کل با مولفه تک راسی دیگر ۳ مولفه داریم که پیشتر فهمیدیم همچین حالتی نداریم. در نتیجه تعداد این حالت برابر $720 = \binom{10}{7} \times 6$ است. ۶ حالت برای انتخاب راسی که در یک مولفه همبندی است و $\binom{10}{7}$ حالت برای انتخاب یال ها.

حالت ۲- گراف به دو مولفه ۲ و ۴ تایی تقسیم شود که $15 = \binom{6}{2}$ حالت دارد. ابتدا دو راس مولفه ۲ راسی را انتحاب می کنیم سپس کل ۶ یال در مولفه ۴ راسی و یک یال مولفه ۲ بخشی را باید انتخاب بکینم که فقط یک حالت دارد.

پس در کل $6435 - 720 - 15 = 5700$ حالت داریم.

۶- گزینه ۱.

اگر به ازای هر تسبیح مورد قبول، یک گراف n راسی بسازیم (این گراف طوقه ندارد ولی ممکن است یال چند گانه داشته باشد.) که هر راس نشان دهنده یک رنگ باشد و به ازای هر دو دانه مجاور بین رنگ آن دو یال بگذاریم میتوان دید که گراف حاصل اویلری خواهد بود و بین هر دو راس حداقل یک یال وجود دارد. حال میتوان دید که بر عکس این شرط نیز برقرار است. یعنی اگر بتوان یک گراف n راسی و ۱۰۱ یالی ارائه داد که بین هر دو راس حداقل یک یال باشد و گراف تور اویلری داشته باشد آنگاه میتوان تسبیحی با n رنگ ارائه داد.

حال برای اینکه ببینیم با x رنگ میتوان ساخت یا نه کافیست سعی کنیم یک گراف اویلری بسازیم. ابتدا باید $\binom{x}{۲}$ یال بگذاریم که بین هر جفت راس حداقل یک یال باشد. سپس اگر x زوج بود چون درجه همه رئوس فرد است باید حداقل $\frac{x}{۲}$ تا یال دیگر اضافه کنیم. اگر تعداد یال هایی که اضافه کرده ایم از ۱۰۱ حداقل ۲ تا کمتر باشد و x نیز حداقل ۳ باشد میتوان تعداد دور به طول ۲ یا ۳ به گراف اضافه کرد تا تعداد یال ها ۱۰۱ شود. (حالت های دیگر با توجه به محدودیت های این سوال پیش نمی آید ولی میتوان با حالت بندی فهمید که میتوان ساخت یا نه).

از آنجایی که ما در ابتدا حداقل $\binom{x}{۲}$ تا یال میگذاریم کافیست تا x کمتر مساوی از ۱۴ را بررسی کنیم که با همین روش میتوان فهمید که به ازای همه x های بین ۳ تا ۱۴ میتوان تسبیح را رنگ کرد.

۷- گزینه ۵.

میتوانیم عدد کارتی که از دسته اول انتخاب میشود را با $x_۱ + ۱$ نشان داد. کارت دسته دوم را $x_۲ + ۹$ و کارت دسته سوم را $x_۳ + ۱۷$ نشون داد. میدانیم که $۰ \leq x_i \leq ۷$ است و همچنین داریم

$$(۱ + x_۱) + (۹ + x_۲) + (۱۷ + x_۳) = ۳۶ \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹$$

حال سوال تبدیل به تعداد جواب های معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹$ می شود. اگر محدودیت $x_i \leq ۷$ را در نظر نگیریم تعداد جواب های این معادله $\binom{۱۱}{۲} = ۵۵$ است. (اگر علتش را نمی دانید معادله سیاله را جست جو کنید). حال حالت هایی که شرط $i \leq ۷$ را نقض می کنند را کم میکنیم.

ابتدا ۳ حالت برای اینکه یکی از مجهول ها ۹ و دو تای دیگری ۰ باشند داریم. سپس ۶ حالت برای اینکه یکی از مجهول ها ۸ و یکی ۱ و اخری ۰ باشد.

جواب نهایی $۴۶ = ۶ - ۳ - ۵۵$ میشود.

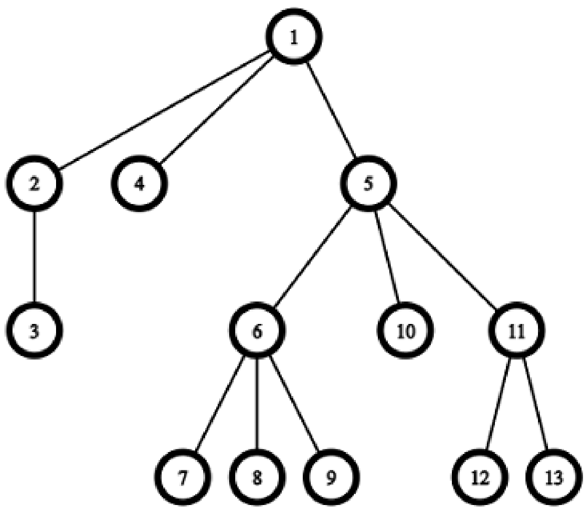
۸- گزینه ۲.
جواب مساله ۰ است و کلا گرافی وجود ندارد که همچین خاصیتی داشته باشد.
لم ۱: ثابت کنید اگر گراف دو تا دور داشته باشد که این دو در یه راس اشتراک داشته باشند بزرگی آن حداقل ۴ میشود.
لم ۲: ثابت کنید اگر درون گرافی دو تا دور وجود داشته باشد که مسیری بین این دو دور وجود داشته باشد باز هم زیبایی آن حداقل ۴ میشود.
طبق این دو لم در هر گرافی که بزرگی آن کمتر از ۴ است، حداکثر یک دور دارد که میتوان دید بین هر دو راس یا یک یا دو مسیر وجود دارد. پس بزرگی آن حداکثر ۲ است و نمی تواند ۳ باشد.
اثبات لم های گفته شده به خواننده سپرده میشود !

۹- گزینه ۵.
ابتدا میگوییم اگر به ازای فاصله i آرین میبرد $A_i = "W"$ و در غیر این صورت $A_i = "L"$ حال برای پیدا کردن A_i ها میتوان گفت که به ازای فاصله های ۱ تا ۵ آرین با یک حرکت میبرد. به ازای i ها بزرگ تر اگر حداقل یکی از $A_{i-۲}$ یا $A_{i-۵}$ مساوی $"L"$ بود آنگاه آرین میتواند ببرد.
با نوشتن تقریبا ۲۰ تای اول دنباله A میتوان فهمید که ۵ تای اول A به $"W"$ هستند و سپس الگوی $"LLWWLWW"$ که طول ۷ دارد تکرار میشود. پس میتوان با استفاده از باقی مانده بر ۷ مقادیر ۵۰ و ۶۰ و ۷۰ جواب را پیدا کرد. که $A_{۵۰} = "W", A_{۶۰} = "W", A_{۷۰} = "L"$ است و با گزینه ۵ تطابق دارد.

۱۰- گزینه ۱.
تابع $val(u, v) = hard(P_{u,v})$ را تعریف میکنیم. حال سوال تبدیل به جمع مقادیر val میشود.
میتوان $val(u, v)$ را کمترین عدد x در نظر گرفت که اگر فقط یال های با وزن کمتر مساوی x را در نظر بگیریم u و v در یک مولفه همبندی باشند. (اثبات به عهده خواننده).
حال میخواهیم تعداد جفت های u و v را بشماریم که val انها برابر w است. ابتدا یال های با وزن کمتر اکید از w را در نظر گرفته و مولفه های همبندی را پیدا می کنیم. سپس یال های با وزن w را به ترتیب اضافه میکنیم. اگر یال اضافه شده بین دو مولفه همبندی مختلف $S_۱$ و $S_۲$ بود انگاه باید $|S_۱|.|S_۲|.w$

را به جواب اضافه کنیم. چون رئوس این دو دسته با یال های با وزن کمتر از w به هم یال نداشتند و بعد از اضافه کردن یال های با وزن w به هم مسیر پیدا کردند پس مقدار val این جفت ها برابر w است.
اگر این فرآیند را انجام دهیم فقط یال های $(۵,۸)$, $(۲,۳)$, $(۳,۷)$, $(۱,۴)$, $(۸,۶)$, $(۱,۲)$, $(۱,۸)$ بین دو مولفه مختلف هستند و جمع مقادیر $|S_۱|.|S_۲|.w$ برای این یال ها برابر ۱۵۱ می شود.

۱۱- گزینه ۴.
رئوس را مطابق شکل زیر شماره گذاری می کنیم.



واضح است که در حالت بهینه روی هر راس حداکثر یک بار عملیات انجام خواهیم داد. چون اگر بیش از یک بار عملیات انجام داده باشیم می توانیم اولین عملیاتی که روی آن راس انجام داده ایم را حذف کنیم. درخت حاصل بعد از عملیات ها تغییری نکرده است.
از طرفی حتما حالت بهینه ای وجود دارد که عملیات ها را به ترتیب ارتفاع (از بالا به پایین) انجام دهیم. چون اگر ۲ راس مانند v و u وجود داشته باشند که u جد v و در اجرای عملیات ها اول روی راس v عملیات انجام دهیم و سپس روی راس u عملیات انجام دهیم، می توانیم عملیات راس v راس حذف کنیم و درخت نهایی بعد از عملیات ها تغییر نخواهد کرد.
از طرفی اگر روی راسی عملیات انجام دهیم قطعا زیر درخت آن را به رنگ این راس در درخت هدف در آورده ایم، چون این آخرین عملیاتی خواهد بود که روی این راس انجام می شود.

می خواهیم ثابت کنیم جواب بهینه ای وجود دارد که روی راس ۱ عملیات انجام نداده باشیم. اگر روی راس ۱ عملیات انجام دهیم، باید روی رئوس ۲ و ۴ و ۵ نیز عملیات انجام دهیم تا انها سفید بشوند. حال اگر در این حالت عملیاتی که روی راس ۱ انجام دادیم را انجام ندهیم ولی روی راس های ۲ و ۴ و ۵ عملیات انجام دهیم به همان نتیجه میرسیم ولی یک عملیات کمتر انجام داده ایم.
پس راس ۴ سفید میشود. حالا باید زیر درخت راس ۵ را حل کنیم. باید روی راس ۵ عملیات انجام دهیم چون در حال حاضر سیاه است. پس کل زیر درخت راس ۵ سفید خواهد شد.
سپس باید روی رئوس ۶ و ۱۱ نیز عملیات انجام دهیم. و لازم نیست روی راس ۱۰ عملیات انجام دهیم. در اخر باید روی رئوس ۳ و ۴ و ۷ و ۹ و ۱۲و ۱۳ عملیات انجام دهیم تا رنگشان درست شود.
پس در کل باید حداقل ۹ عملیات انجام دهیم. و مثال با ۹ عملیات هم داریم.

۱۲- گزینه ۳.

برای حل سوال، روی $f(x)$ حالت بندی می کنیم. اگر فقط y هایی را پیدا کنیم که حداقل یک x وجود داشته باشد که $f(x) = y$ سریع تر به حل سوال می رسیم.
برای این کار کافی است x هایی را پیدا کنیم که $f(x) = x$ چون اگر x مطلوب باشد این شرط حتما برقرار است. برای راحت تر کردن این کار می توانیم روی تعداد ۱ های سمت چپ $f(x)$ حالت بندی می کنیم.
حالا باید حساب کنیم به ازای هر کدام از این رشته ها مانند y چند x وجود دارد که $f(x) = y$. فرض کنید S یک رشته باینری به طول n باشد، $t(S)$ را تعریف می کنیم کوچک ترین عدد طبیعی مانند i که n بر i بخش پذیر باشد و اگر i کاراکتر اول رشته s را $\frac{n}{i}$ بار کنار هم بنویسیم، رشته حاصل برابر S باشد. به ازای هر رشته مانند y که $f(y) = y$ دقیقا $t(y)$ عدد مانند x وجود دارند که $f(x) = y$. پس به ازای همه رشته های باینری به طول n مانند S که $f(S) = S$ اگر عدد متناظر این رشته $d(S)$ باشد، باید جمع $d(S) * t(S)$ را حساب کنیم.

$۰۰۰۰۰ \rightarrow ۱ : ۰ * ۱ = ۰$
$۱۰۰۰۰ \rightarrow ۵ : ۱۶ * ۵ = ۸۰$
$۱۰۱۰۰ \rightarrow ۵ : ۲۰ * ۵ = ۱۰۰$
$۱۱۰۰۰ \rightarrow ۵ : ۲۴ * ۵ = ۱۲۰$
$۱۱۰۱۰ \rightarrow ۵ : ۲۶ * ۵ = ۱۳۰$
$۱۱۱۰۰ \rightarrow ۵ : ۲۸ * ۵ = ۱۴۰$
$۱۱۱۱۰ \rightarrow ۵ : ۳۰ * ۵ = ۱۵۰$
$۱۱۱۱۱ \rightarrow ۱ : ۳۱ * ۱ = ۳۱$

که جمع این اعداد ۷۵۱ می شود.

۱۳- گزینه ۲.

کامل مثل سوال قبل عمل می کنیم.

$۰۰۰۰۰۰ \rightarrow ۱ : ۰ * ۱ = ۰$
$۱۰۰۰۰۰ \rightarrow ۶ : ۳۲ * ۶ = ۱۹۲$
$۱۰۱۰۰۰ \rightarrow ۶ : ۴۰ * ۶ = ۲۴۰$
$۱۰۱۰۱۰ \rightarrow ۲ : ۴۲ * ۲ = ۸۴$
$۱۰۰۱۰۰ \rightarrow ۳ : ۳۶ * ۳ = ۱۰۸$
$۱۱۰۰۰۰ \rightarrow ۶ : ۴۸ * ۶ = ۲۸۸$
$۱۱۰۱۰۰ \rightarrow ۶ : ۵۲ * ۶ = ۳۱۲$
$۱۱۰۰۱۰ \rightarrow ۶ : ۵۰ * ۶ = ۳۰۰$
$۱۱۰۱۱۰ \rightarrow ۳ : ۵۴ * ۳ = ۱۶۲$
$۱۱۱۰۰۰ \rightarrow ۶ : ۵۶ * ۶ = ۳۳۶$
$۱۱۱۰۱۰ \rightarrow ۶ : ۵۸ * ۶ = ۳۴۸$
$۱۱۱۱۰۰ \rightarrow ۶ : ۶۰ * ۶ = ۳۶۰$
$۱۱۱۱۱۰ \rightarrow ۶ : ۶۲ * ۶ = ۳۷۲$
$۱۱۱۱۱۱ \rightarrow ۱ : ۶۳ * ۱ = ۶۳$

که جمع این اعداد برابر ۳۱۶۵ می شود.

۱۴- گزینه ۲.

P را برابر احتمال بردن کشی در یک مرحله در نظر بگیرید. به احتمال $\frac{۱}{۱۰۰۱}$ ام تعداد گل های انتخاب شده i $(۰ \leq i \leq ۱۰۰۰)$ است و اگر تعداد گل های انتخاب شده i باشد احتمال برد $\frac{i}{۱۰۰۰}$ است. در نتیجه $P = \frac{۱}{۱۰۰۱} \times \sum_{i=۰}^{۱۰۰۰} \frac{i}{۱۰۰۰}$ است که با محاسبه این مقدار به $P = \frac{۱}{۲}$ میرسیم.

حال ans را برابر امید ریاضی تعداد حرکات قرار بدید میدانیم که $ans = P \times ۱ + (۱ - P) \times (ans + ۱)$ است زیرا یا در حرکت اول کشی میبرد و اگرنه تعداد حرکاتمان $ans + ۱$ می شود. که با حل معادله بالا به $ans = \frac{۱}{P}$ می رسیم. که ans در این مسئله برابر ۲ میشود.

۱۵- گزینه ۴.

مانند سوال قبل هدف در اوردن احتمال برد کشی در یک مرحله P است. با روش سوال قبل بدست میآید که $P = \frac{۱}{۳۲} \times \sum_{i=۰}^{۳۱} \frac{i^۲}{۱۰۰۰}$ است. حال با توجه به این که $\sum_{i=۰}^{n} i^۲ = \frac{n * (n + ۱) * (۲ * n + ۱)}{۶}$ است میتوان حساب کرد که $P = \frac{۶۵۱}{۲۰۰۰}$ است و در نتیجه طبق معادله استفاده شده در حل سوال قبل جواب برابر $\frac{۲۰۰۰}{۶۵۱}$ است.