پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۲

پاسخ کلیدی:

۱. ۳۱

۲. ۲۱۶۰۰

۳. ۶

۴. $\frac{۱}{۴}$

۵. $\frac{۲۰}{۸۱}$

۶. ۴۱

۷. ۲۰

۸. $\frac{۷}{۱۵}$

۹. ۹۶۲

۱۰. $\frac{۱۷۱}{۵۱۲}$

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۲

پاسخ تشریحی:

۱. در هر وضعیت، سمت راست‌ترین اتاق نفردار را در نظر بگیرید. با استقرا می‌توان ثابت کرد در مراحل فرد، این اتاق، یکی به سمت راست می‌رود (در واقع یکی به تعداد اتاق‌های نفردار اضافه می‌شود) و در مراحل زوج، این اتاق، ۲ نفره خواهد شد و اتاق نفرداری اضافه نخواهد شد. پس در انتها $۳۱ = \frac{۶۰}{۲} + ۱$ اتاق نفردار خواهیم داشت.

۲. انتخاب خانه‌ی علامت‌دار ستون اول، ۶ حالت دارد. پس از آن انتخاب خانه‌ی علامت‌دار ستون آخر، ۵ حالت خواهد داشت. حال ستون دوم را در نظر بگیرید. تنها ۲ خانه از آن نمی‌توانند علامت‌دار باشند. پس انتخاب خانه‌ی علامت‌دار آن ۶ حالت دارد. به همین ترتیب ستون‌های سوم، چهارم و ...و هفتم، به ترتیب ۵، ۴، ...و ۱ حالت برای انتخاب خانه‌ی علامت‌دار دارند. پس پاسخ برابر

$$۳۰ \times ۶! = ۲۱۶۰۰$$

۳. اگر تعداد مسئله‌ها را p و تعداد مسئله‌های حل شده توسط نفر ۱۰ـام را n بگیریم، در مجموع، $۷p = ۳۶ + n$ مسئله توسط دانش‌آموزان حل شده است. پس $p = \frac{۳۶+n}{۷}$. از آن‌جایی که $n \geq ۰$، کوچک‌ترین nـای که بتواند در رابطه‌ی بالا صدق کند، ۶ است. از طرفی داریم $n \leq p$؛ بنابراین $۷n \leq ۳۶ + n$ و در نتیجه $n \leq ۶$. پس پاسخ برابر ۶ است.

۴. اگر در مرحله‌ای، سکه‌ای خط بیاید، امکان رخ دادن مورد اول وجود ندارد. پس باید هم‌واره شیر بیاید تا امکان رخ دادن مورد اول وجود داشته باشد. پس تنها حالت رخ دادن مورد اول، این است که در دو مرحله‌ی اول، هر دو سکه شیر بیاید که احتمال آن $\frac{۱}{۴}$ است.

۵. احتمال این که بازی در دست هفتم با برد ابوالفضل تمام شود، برابر است با:

$$\left[\binom{۶}{۴} \times (\frac{۲}{۳})^{۴} \times (\frac{۱}{۳})^{۲}\right] \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱۵ \times ۳۲}{۳^{۷}}$$

و احتمال این که بازی در دست هفتم با برد روزبه تمام شود، برابر است با:

$$\left[\binom{۶}{۴} \times (\frac{۱}{۳})^{۴} \times (\frac{۲}{۳})^{۲}\right] \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱۵ \times ۴}{۳^{۷}}$$

پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۱۵ \times ۳۶}{۳^{۷}} = \frac{۲۰}{۸۱}$$

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۲

۶. اگر هیچ یک از آرش و محمدمهدی در کمیته نباشند،

$$\binom{۵}{۵} + \binom{۵}{۳} = ۱۱$$

حالت و اگر دست کم یکی از آن‌ها در کمیته باشند،

$$۲ \times \left[\binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۲}\right] = ۳۰$$

پس پاسخ برابر $۴۱ = ۱۱ + ۳۰$ است.

۷. خاصیت گفته شده در مسئله، داشتن یک مسیر اویلری است.

دو ۴ـوجهی یک‌سان را از یک وجه هم‌نهشت، به هم می‌چسبانیم. به این ترتیب یک ۶ـوجهی با ۵ رأس و ۹ یال به دست می‌آید که مسیر اویلری دارد. پس مثالی با $f + v + e = ۲۰$ داریم.

حال ثابت می‌کنیم کم‌تر از ۲۰، ممکن نیست. اگر تعداد رأس‌ها کم‌تر از ۵ باشد، چندوجهی ما باید چهاروجهی باشد که مسیر اویلری ندارد. پس $v \geq ۵$. پس درجه‌ی هر رأس دست کم ۳ است. از طرفی اگر چندوجهی بخواهد مسیر اویلری داشته باشد، حداکثر ۲ رأس درجه فرد دارد. پس مجموع درجات، حداقل $۱۸ = ۴+۴+۴+۳+۳$ خواهد بود؛ پس حداقل ۹ یال داریم. اگر تعداد وجه‌ها ۴ باشد، هر وجه باید مثلث باشد؛ زیرا تنها ۳ وجه دیگر برای مجاور شدن با آن می‌ماند. پس چندوجهی باید چهاروجی باشد که نمی‌تواند مسیر اویلری داشته باشد. پس حداقل ۵ وجه داریم. پس پاسخ حداقل $۱۹ = ۹ + ۵ + ۵$ خواهد بود. از طرفی طبق فرمول اویلر، $f + v + e$ زوج است و حکم ثابت می‌شود.

۸. تعریف می‌کنیم:

$$A \equiv \text{مجموعه‌ی حالاتی که توپ دوم سیاه است}$$

$$B \equiv \text{مجموعه‌ی حالاتی که توپ اول قرمز است}$$

داریم:

$$P(A) = (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times (\frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵})) = \frac{۱}{۴}$$

و

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۴} \times (\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۷}{۱۵}$$

پس پاسخ برابر

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۷}{۱۵}$$

است.

۹. یک سطر را *ناقص* می‌گوییم؛ اگر تمام ارقام آن ۱ نباشد. به همین ترتیب یک ستون ناقص را تعریف می‌کنیم. یک رقم، ۰ است؛ اگر و تنها اگر محل تقاطع یک سطر ناقص و یک ستون ناقص باشد. اگر تعداد ۱ـها کم‌تر از ۲۵ باشد، سطر ناقص و ستون ناقص وجود دارد. پس انتخاب سطرهای ناقص، $۲^۵ - ۱$ و انتخاب ستون‌های ناقص، $۲^۵ - ۱$ حالت دارد. به ازای هر حالت انتخاب این سطرها و ستون‌های ناقص، یک حالت از پاسخ مسئله ساخته می‌شود. یک حالت نیز، این است که تعداد ۱ـها ۲۵ باشد. پس پاسخ برابر $۳۱ \times ۳۱ + ۱ = ۹۶۲$ است.

۱۰. p_n را احتمال آن در نظر بگیرید که پس از n مرحله، رقم وسط برابر ۲ باشد. داریم:

$$p_{n+۱} = \frac{۱ - p_n}{۲}$$

با نوشتن p_n به ازای $n = ۰, ۱, \ldots, ۱۰$، پاسخ به دست می‌آید. هم‌چنین می‌توان حدس زد $p_n = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۲})^n$ و با استقرا روی n، این حکم را ثابت کرد. پس پاسخ برابر $\frac{۱۷۱}{۵۱۲} = \frac{۱}{۳ \times ۲^۹} + \frac{۱}{۳}$ است.