

آزمون تعوری اول

..... ۲۰ نمره

۱. ۱۳۹۷ شکلاات داریم. دو نفر در حال بازی هستن. هر کدوم تو نوبت خودشون میتونن ۱ یا ۳ شکلاات (در صورت وجود) بخورن. کسی که تو نوبتش نتونه شکلاتی بخوره میبازه. اگر فرض کنیم دو نفر به بهترین شکل ممکن بازی میکنن. چه کسی میبره؟

..... ۲۰ نمره

۲. دنباله ای از اعداد طبیعی داریم. هر مرحله دو عدد ابتدای دنباله را در نظر میگیریم و عدد کوچک تر را با یک جمع کرده و به انتهای دنباله میفرستیم. اگر هم دو عدد برابر بودند یکی را به دلخواه به عنوان عدد کوچک تر در نظر میگیریم و اینکار را انجام میدهیم. ثابت کنید پس از متناهی گام بالاخره تمام اعداد دنباله برابر میشوند!

..... ۲۰ نمره

۳. 2^m عدد یک هر کدام روی یک برگه نوشته شده اند. هر مرحله دو برگه انتخاب می کنیم. فرض کنید اعداد نوشته شده روی این دو برگه a و b باشند. این دو عدد را پاک می کنیم و به جای آنها روی هر دو برگه $a+b$ را مینویسیم. ثابت کنید اگر این کار را $m \cdot 2^{m-1}$ بار انجام دهیم. مستقل از نحوه ی انتخاب کردن برگه ها توسط ما در نهایت مجموع اعداد نوشته شده روی برگه ها حداقل 4^m است.

..... ۲۰ نمره

۴. وجود یا عدم وجود گراف های زیر را ثابت کنید:

الف) گرافی با مینیمم درجه ۳ که دو بخشی نباشد و دور به طول ۳ نداشته باشد. (۸ نمره)

ب) به ازای هر $k \geq 2$ و $g \geq 3$ گراف k منتظمی که کمرش g باشد. (کمر گراف طول کوتاه ترین دور در گراف است) (۱۲ نمره)