پاسخنامه آزمون تستی اول شازززز، دی ۱۴۰۰

اگر آزمون را نداده اید، پاسخنامه را نگاه نکنید.

۱- چند جایگشت از حروف کلمه «چیزبرگر» وجود دارد که حرف آخر آن نقطه داشته باشد؟

۱) ۲۸۸۰ ۲) ۲۱۶۰ ۳) ۱۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰ ۵) ۱۰۸۰

پاسخ: گزینه ۵) ۱۰۸۰

از بین حروف «چیزبرگر» فقط حروف «چ»، «ز» و «ب» اگر در انتهای کلمه باشند نقطه خواهد داشت. به ۳ حالت حرف آخر را مشخص می کنیم و بقیه حروف را به $\frac{۶!}{۲!}$ مشخص می کنیم. چون حرف «ر» ۲ بار آمده است.

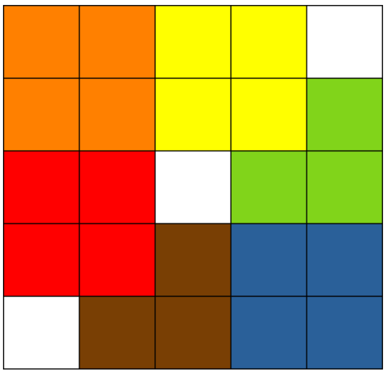
$$۳ \cdot \frac{۶!}{۲!} = ۱۰۸۰$$

۲- باید حداقل چند خانه از یک جدول 5×5 را مسدود کنیم تا نتوان یک ۳-مینو یا دوران های آن را در جدول قرار داد؟ (۳-مینو یک کاشی L شکل با ۳ خانه است.)

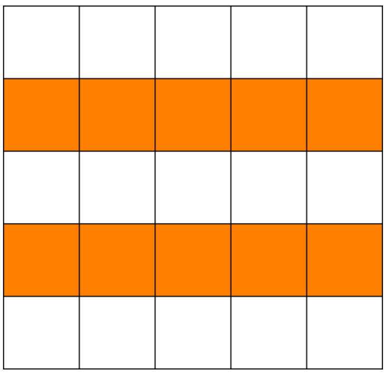
۱) ۱۲   ۲) ۱۰   ۳) ۸   ۴) ۹   ۵) ۷

پاسخ: گزینه ۲) ۱۰

ابتدا به این توجه کنید که در یک مربع 2×2 باید حداقل ۲ مربع را مسدود کنیم تا ۳-مینو در آن جا نگیرد.
در نتیجه در شکل زیر باید برای مربع های رنگی حداقل ۸ تا خانه مسدود کنیم.
از طرفی از دو ۳-مینو رنگ شده هم باید حداقل یکی مسدود کنیم.
که در کل باید حداقل ۱۰ خانه را مسدود کنیم.



با مسدود کردن ۱۰ خانه نیز میتوان مثال معتبر ساخت که در شکل نشان داده شده است.



۳- چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ وجود دارد که هیچ ۳ اندیس $i < j < k$ وجود نداشته باشند که $a_i < a_j < a_k$ یا $a_i < a_k < a_j$؟

۱) ۰   ۲) ۱۰۲۴   ۳) ۷۲۰   ۴) ۵۱۲   ۵) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۴) ۵۱۲

یک جایگشت مطلوب است اگر جلوی هر عدد حداکثر یک عدد بزرگتر از آن وجود داشته باشد. پس عدد ۱ یا در اندیس ۱۰ است یا در اندیس ۹.
یک جدول ۱×۱۰ در نظر بگیرید، اعداد را از کوچک به بزرگ به جدول اضافه می کنیم.
برای هر عدد از ۱ تا ۹ دو انتخاب داریم، چون یا باید در آخرین خانه خالی یا در یکی مانده به آخرین خانه خالی قرار بگیرد.
پس جواب برابر $۲^{۹} = ۵۱۲$ است.

۴- آشمز به تازگی یک دستگاه برای مرتب سازی اعداد از کیومرث خریده. اما وقتی که می خواست از دستگاه استفاده کنه متوجه شد که این دستگاه نمی تونه هر دنباله عددی رو از کوچک به بزرگ مرتب کنه. پس پیش کیومرث رفت و گفت: «کلک زدی کیومرث! این دستگاه نمی تونه همه دنباله ها رو مرتب کنه.»

کیومرث به آشمز گفت که اگر متن قرارداد رو دقیق می خوندی می فهمیدی که این دستگاه برای مرتب کردن دنباله در هر مرحله ۳ تا عدد مجاور توی دنباله می گیره و ترتیبشونو برعکس می کنه. اگه این کار شدنی نباشه دستگاه کار نمی کنه.

آشمز که فهمید کلک خورده رفت خونه و حالا می خواست ببینه این دستگاه چقد به کارش میاد.

آشمز ۴ تا دنباله زیر رو به دستگاه داد. شما بگین که این دستگاه چند تا از این دنباله ها رو می تونه از کوچک به بزرگ مرتب کنه؟

$$\langle 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle \qquad \langle 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4\rangle$$

$$\langle 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4\rangle \qquad \langle 1, 8, 7, 4, 5, 6, 2, 3\rangle$$

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۴

پاسخ: گزینه ۳) ۲

جایگشت را A می‌نامیم و عضو i ام آن را با A_i نشان می‌دهیم. هدف این است که $A_i = i$ شود.

لم ۱: زوجیت شماره جایگاهی که هر عدد در آن قرار دارد ناوردا است.

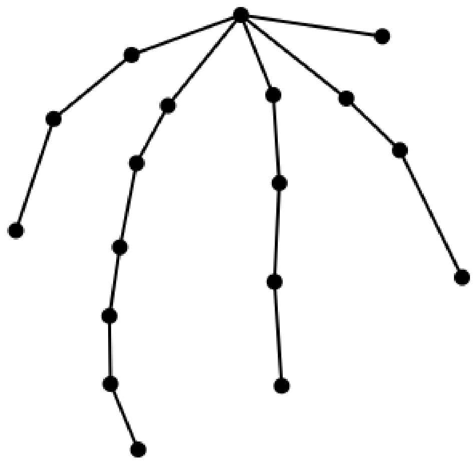
اثبات لم ۱: فرض کنید در یک عملیات ترتیب A_i و A_{i+1} و A_{i+2} را معکوس کردیم. در این عملیات A_{i+1} که ثابت می‌ماند ولی A_i و A_{i+2} جا به جا می‌شوند که چون زوجیت i با $i+2$ برابر است لم ۱ ثابت می‌شود.

طبق لم ۱ اگر زوجیت i با A_i برابر نباشد، آشمز هیچ‌گاه نمی‌تواند به هدفش برسد. همچنین اگر به ازای هر i این شرط برقرار باشد او می‌تواند به هدفش برسد.

اثبات: در این صورت اندیس های زوج شامل اعداد زوج و اندیس های فرد شامل اعداد فرد هستند. پس کافی‌ست هر کدام از این دو دسته را به طور مجزا مرتب کنیم و از آنجایی که می‌توان در یک عملیات بدون تغییری در یک دسته، دو عضو متوالی در دسته ی دیگر را جا به جا کرد، به هدفمان می رسیم.

پس دنباله های $\langle 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4\rangle$ و $\langle 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4\rangle$ را می‌توان مرتب کرد.

۵- دانشمندان به تازگی کشف کرده اند که بیماری کرونا به مورچه ها سرایت کرده است.
مرد مورچه ای که از این اتفاق با خبر شده تصمیم گرفته که روشی برای قرار دادن مورچه هایش در کلونی شان پیدا کند که مورچه ها بیش از حد به هم نزدیک نباشند و در استفاده از فضا صرفه جویی کرده باشد.
کلونی مورچه ها به شکل زیر است.



هر راس نشان دهنده یک اتاقک و یال ها نشان دهنده تونل های بین اتاقک ها هستند.
مرد مورچه ای می خواهد بداند به چند طریق می تواند بعضی از اتاقک های کلونی را انتخاب کند که بین هیچ دو اتاقک انتخاب شده تونل نباشد و اتاقک انتخاب نشده ای نباشد که با انتخاب آن شرط قبلی برقرار بماند به عبارت دیگر هر اتاقکی که انتخاب نشده حداقل به یک اتاقک انتخاب شده تونل داشته باشد.

۱) ۹۲ ۲) ۱۲۸ ۳) ۶۰ ۴) ۴۲ ۵) ۱۰۳

پاسخ سوال ۵: گزینه ۱) ۹۲

ابتدا سوال را برای مسیر n راسی حل میکنیم، $f(n)$ را برابر حاصل برای یک مسیر n راسی میگیریم.

$$f(n) = f(n-۲) + f(n-۳)$$

چرا که اگر راس اول مسیر را انتخاب کنیم، راس دوم مسیر انتخاب نشده و برای بقیه رئوس $f(n-۲)$ حالت داریم و در غیر اینصورت، راس دوم مسیر قطعا انتخاب شده (وگرنه راس اول مسیر تنها به راس دوم مسیر تونل دارد و نه خودش و نه راس دوم مسیر انتخاب نشده) و راس سوم مسیر قطعا انتخاب نشده و برای بقیه مسیر $f(n-۳)$ حالت داریم.

$$f(۱) = ۱, f(۲) = ۲, f(۳) = ۲, f(۴) = ۳, f(۵) = ۴, f(۶) = ۵, f(۷) = ۷, \cdots$$

راسی در شکل که به آن ۵ تونل وصل شده را راس ریشه مینامیم، اگر ریشه را انتخاب کنیم، راس اول ۵ مسیر به طول های ۱، ۳، ۴، ۶ و ۳ که بعد از حذف ریشه ایجاد شده اند را نمیتوانیم انتخاب کنیم و برای هر مسیر به طول n ایجاد شده، $f(n-۱)$ حالت داریم، پس در این حالت در کل $۱ \times f(۲) \times f(۳) \times f(۵) \times f(۲) = ۳۲$ حالت داریم.

همچنین اگر راس ریشه انتخاب نشده باشد، پس از حذف ریشه، برای هر مسیر به طول n ایجاد شده، $f(n)$ حالت داریم:
$f(۱) \times f(۳) \times f(۴) \times f(۶) \times f(۳) = ۶۰$ همچنین یک مسیر تک راسی داریم و قطعا تنها راس این مسیر در تمام حالاتی که شمرده ایم انتخاب شده پس راس ریشه در تمامی حالات به حداقل یک راس انتخاب شده وصل است.

پس در کل $۹۲ = ۳۲ + ۶۰$ حالت داریم.

۶- عمو صفر یک جدول ۸×۱ دارد. او می خواهد در بعضی از خانه های این جدول مهره قرار دهد. به یک بازه در جدول می گوییم «نسبتا خالی» اگر تعداد خانه های خالی آن از تعداد خانه هایی که مهره دارند اکیداً بیشتر باشد.
عمو صفر تعداد بازه های نسبتا خالی جدولش را می شمارد و به فکر فرو می رود.
اگر به ازای هر کدام از $۲^۸$ حالت قرار دادن مهره در خانه های جدول تعداد بازه های نسبتا خالی را بنویسیم، مجموع این اعداد چند است؟

۱) ۲۷۴۱   ۲) ۵۴۸۲   ۳) ۳۷۶۵   ۴) ۴۰۹۶   ۵) ۷۵۳۰

پاسخ: گزینه ۳) ۳۷۶۵

به یک بازه «نسبتا پر» می‌گوییم اگر تعداد خانه های پرش اکیدا بیشتر از تعداد خانه های خالی اش باشد، همچنین به یک بازه «مساوی» می‌گوییم اگر تعداد خانه های پرش برابر تعداد خانه های خالی اش باشد.
می‌دانیم تعداد کل بازه های یک جدول = تعداد بازه های نسبتا پر + تعداد بازه های نسبتا خالی + تعداد بازه های مساوی.
همچنین با ایجاد تناظر یک به یک (گذاشتن خانه خالی بجای خانه پر و خانه پر بجای خانه خالی)، می‌توان فهمید مجموع تعداد بازه های نسبتا پر به ازای همه جدول ها برابر مجموع تعداد بازه های نسبتا خالی به ازای همه جدول ها است.
جمع تعداد بازه های مساوی به ازای همه جدول ها برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{۴}(۸ - ۲i + ۱) \cdot \binom{۲i}{i} \cdot ۲^{۸-۲i} = ۱۶۸۶$$

همچنین جمع تعداد بازه ها به ازای همه جدول ها برابر است با $\binom{۹}{۲} \cdot ۲^۸ = ۹۲۱۶$
پس داریم تعداد بازه های نسبتا پر + تعداد بازه های نسبتا خالی = ۲ × تعداد بازه های نسبتا خالی.
$۹۲۱۶ - ۱۸۲۶ = ۷۵۳۰$
پس تعداد بازه های نسبتا خالی برابر ۳۷۶۵ است.

۷- یک جدول ۱۱×۱۱ داریم که بعضی از خانه های آن مسدود شده اند. خانه (i, j) مسدود شده اگر $|i-j| > ۱$. منظور از خانه (x, y) خانه واقع در سطر $x + ۱$ ام و ستون $y + ۱$ ام است. روی هر خانه مسدود نشده یک عدد نوشته شده است. عدد روی خانه (i, j) برابر $۲i - j$ است.

وزن یک مسیر در جدول برابر با مجموع اعداد نوشته شده روی خانه های مسیر است.

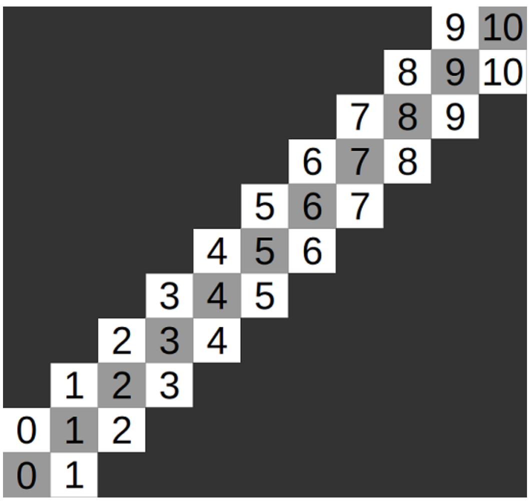
میانگین وزن همه مسیر ها از خانه $(۰, ۰)$ به خانه $(۱۰, ۱۰)$ چند است؟

توجه داشته باشید که یک مسیر از خانه های مسدود شده نمی گذرد و همچنین از خانه (x, y) فقط می توانیم به دو خانه $(x + ۱, y)$ و $(x, y + ۱)$ برویم.

۱) ۸۵/۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۹۰/۵ ۴) ۹۵/۵ ۵) ۹۰

پاسخ: گزینه ۲) ۱۰۵

میدانیم که چون جدول قرینه است میانگین جمع i های خانه های مسیر همه ی مسیر ها برابر میانگین جمع j های آن ها است و از آنجایی که میانگین خطی است میانگین $۲i - j$ خانه های مسیر ها برابر ۲ برابر میانگین i های آن ها منهای میانگین j های آن ها است.
پس جواب برابر میانگین i های خانه های همه مسیر ها است. در شکل زیر روی هر خانه i آن نوشته شده. میدانیم خانه های خاکستری در همه مسیر ها و خانه های سفید در دقیقا نصف مسیر ها حضور دارند پس میانگین جمع i های خانه های مسیر ها برابر $۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۱۰ + \frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۰}{۲} + \frac{۰+۱+۲+\cdots+۹}{۲}$ است که برابر $\binom{۱۱}{۲} + \frac{\binom{۱۱}{۲}}{۲} + \frac{۱۰}{۲}$ و در نتیجه برابر ۱۰۵ است.



۸- سهیل ۱۰۲۴ تا کارت خریده که روی همه آن ها عدد ۰ نوشته شده است.
رادال ۳ دستگاه دارد که هر کدام از دستگاه ها به ترتیب عملیات های زیر را انجام می دهند.

۱. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $۲x$ تولید می‌کند.

۲. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $۲x + ۱$ تولید می‌کند.

۳. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $۴x + ۲$ تولید می‌کند.

سهیل که از اعداد تکراری خسته شده است، می‌خواهد با استفاده از دستگاه های رادال کاری کند که روی کارت هایش دقیقا همه اعداد ۱ تا ۱۰۲۴ نوشته شده باشد.
اما رادال به ازای هر بار استفاده از دستگاه هایش، ۱ تومان از سهیل می‌گیرد.
سهیل باید حداقل چند تومان پول داشته باشد تا بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۳۰۸۲ ۲) ۴۶۰۸ ۳) ۶۹۱۳ ۴) ۶۹۲۳ ۵) ۳۰۷۳

پاسخ: گزینه ۴) ۶۹۲۳

فرض کنید میخواهیم کارت x را با کارت ۰ بسازیم، x را در مبنای ۲ در نظر بگیرید:
عملیات نوع اول یک بیت ۰ به انتهای x اضافه میکند. عملیات نوع دوم یک بیت ۱ به انتهای x اضافه میکند. عملیات نوع سوم به انتهای x در مبنای ۲، رشته «۱۰» را اضافه میکند.
پس میتوان دید تعداد عملیات های مورد نیاز برای تبدیل ۰ به x برابر تعداد بیت های x در مبنای ۲ منهای تعداد زیر رشته های ۱۰ x در مبنای دو میباشد چرا که اگر از عملیات نوع ۳ صرف نظر کنیم، تعداد عملیات های مورد نیاز برابر تعداد بیت های x در مبنای دو میشود و به ازای هر زیر رشته ۱۰ در مبنای دو x میتوان بجای استفاده از یک عملیات نوع دوم و یک عملیات نوع اول، از یک عملیات نوع سوم استفاده کرد.
برای ساخت ۱۰۲۴ به ۱۰ عملیات نیاز داریم(مبنای ۲ ۱۰۲۴ شامل ۱۱ بیت و ۱ زیررشته ۱۰ میباشد). حال حاصل را به ازای ۱ تا ۱۰۲۳ حساب میکنیم. (تمام اعدادی که مبنای ۲ انها کمتر یا مساوی ۱۰ بیت دارد) تعداد کل بیت های اعداد ۱ تا ۱۰۲۳ در مبنای ۲ برابر است با:
$$\sum_{i=۱}^{۱۰} ۲^{i-۱} = ۹۲۱۷$$
همچنین تعداد کل زیررشته های ۱۰ درمبنای ۲ اعداد ۱ تا ۱۰۲۳ برابر است با:
$۹ \cdot \frac{۲^{۱۰}}{۲^۲} = ۹ \cdot ۲^۸ = ۲۳۰۴$ چرا که تعداد اعدادی که بیت i ام انها برابر ۰ و بیت $i + ۱$ ام آنها برابر ۱ است برابر $۲^۸$ است. پس جواب در کل برابر $۱۰ + ۹۲۱۷ - ۲۳۰۴$ برابر ۶۹۲۳ است.

۹- به ۲ عدد $a \leq b$ یک جفت مولایی می‌گوییم اگر $a \leq a \oplus b$. ($\oplus$ عملگر xor است که در پانویس توضیح داده شده است.)

در چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۸ هر دو عدد متوالی یک جفت مولایی هستند؟

۱) ۲۵۹۲ ۲) ۱۱۵۲ ۳) ۲۸۸ ۴) ۱۰۲۴ ۵) ۵۷۶

پاسخ: گزینه ۱) ۲۵۹۲

لم: شرط لازم و کافی برای مولایی بودن جفت $a \leq b$ این است که با ارزش ترین بیت‌شان متفاوت باشد.

اثبات: شماره ی با ارزش ترین بیت a را x و شماره ی با ارزش ترین بیت b را y می‌نامیم. $(x \leq y)$

- $x = y$: در این صورت بیت x ام $a \oplus b$ صفر است پس بزرگترین بیت $a \oplus b$ کمتر اکید از x است و از هر دوی a و b کمتر است.
- $x \neq y$: در این صورت با ارزش ترین بیت $a \oplus b$ دقیقا y است، پس $a \leq a \oplus b$ و لم ثابت می‌شود.

حال هر ۸ عدد را بر اساس با ارزش ترین بیت یک‌شان دسته بندی می‌کنیم و سوال به تعداد جایگشت هایی معادل می‌شود که هر ۲ عدد متوالی‌اش در ۲ دسته متفاوت باشد.

تعداد اعضای دسته ها به صورت $۱, ۱, ۲, ۴$ است.

اگر اعضای دسته‌ای که ۴ عضو دارد را با ۱ و سایر اعداد را با ۰ نمایش دهیم، به هر جایگشت یک رشته باینری طول ۸ نسبت داده خواهد شد که یکی از حالات زیر را دارد :

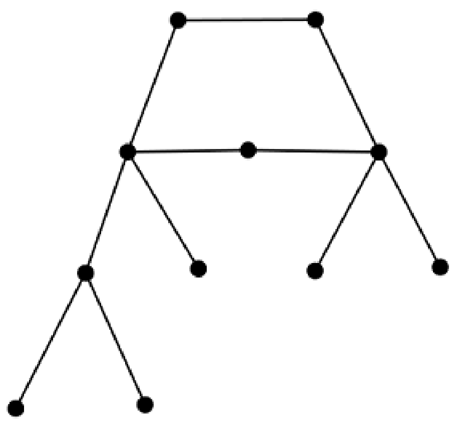
۱) ۱۰۱۰۱۰۱۰ ۲) ۰۱۰۱۰۱۰۱ ۳) ۱۰۰۱۰۱۰۱ ۴) ۱۰۱۰۰۱۰۱ ۵) ۱۰۱۰۱۰۰۱

تعداد جایگشت هایی که حالات ۱ و ۲ بهشان نسبت داده شده هر کدام $۴! \times ۴!$ است.

تعداد جایگشت هایی که حالات ۳ و ۴ و ۵ بهشان نسبت داده شده هر کدام $۴! \times ۴! - ۴! \times ۲! \times ۲!$ است (روی هم دسته نبودن دو ۰ مجاور متمم می‌زنیم)

پس جواب ۲۵۹۲ می‌شود.

۱۰- چند جفت راس در گراف مقابل وجود دارند که به هم مسیری با طول زوج داشته باشند؟ (در کل $\binom{۱۱}{۲}$ جفت راس متفاوت وجود دارد.)



۱) ۴۷ ۲) ۴۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰ ۵) ۵۵

پاسخ: گزینه ۱) ۴۷

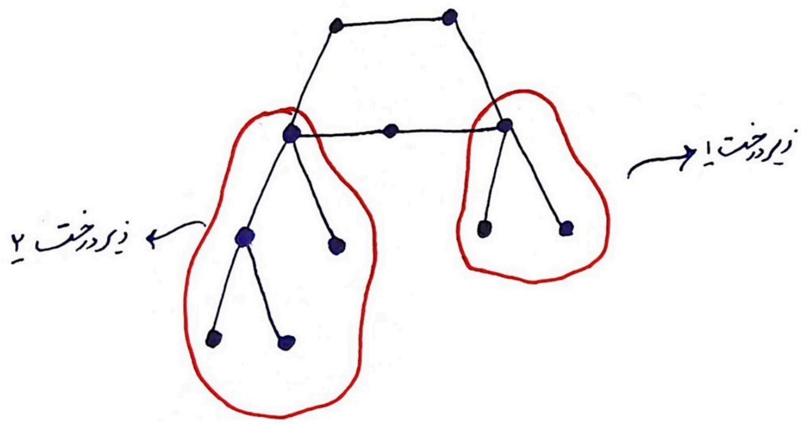
اگر مقدار A برابر با تعداد جفت راس هایی باشد که فقط مسیر به طول فرد به هم دارند طبق اصل متمم جواب برابر است با $\binom{۱۱}{۲} - A$.

راس هایی که فقط مسیر فرد به هم دارند هر دو در یکی از زیر درخت های ۱ یا ۲ هستند. (اگر در دو طرف باشند بینشان یک دور به طول فرد هست همچنین نمی‌توانند هر دو در دور باشند.)

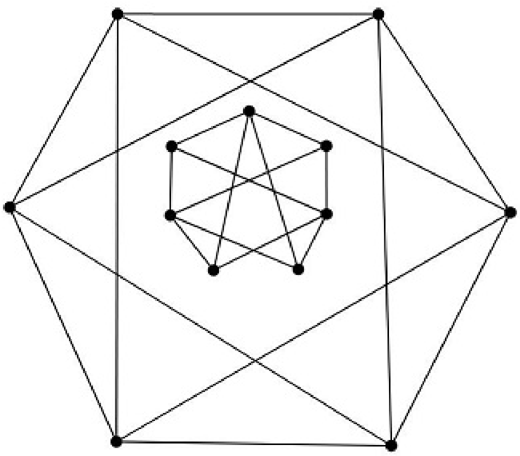
اگر هر دو در زیر درخت ۱ باشند ۲ حالت داریم.

و اگر هر دو در زیر درخت ۲ باشند هم ۶ حالت داریم.

مقدار A برابر است با ۸ و جواب ۴۷ است.



۱۱- چند جفت راس در گراف مقابل وجود دارند که به هم گشتی با طول زوج داشته باشند؟
(در کل $\binom{۱۳}{۲}$ جفت راس متفاوت وجود دارد.)



۱) ۲۷ ۲) ۱۵ ۳) ۷۸ ۴) ۲۱ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه ۵) ۲۴

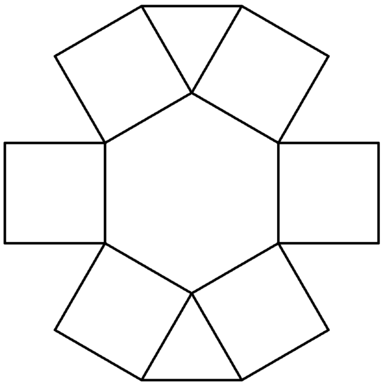
مولفه بیرونی که ۶ راس دارد، دور فرد دارد پس بین هر دو راسش هم گشت زوج و هم گشت فرد دارد.

مولفه درونی دو بخشی است. یک بخش آن ۳ راس و بخش دیگر ۴ راس دارد.

در این مولفه فقط رئوسی به هم گشت به طول زوج دارند که در یک بخش از گراف باشند.

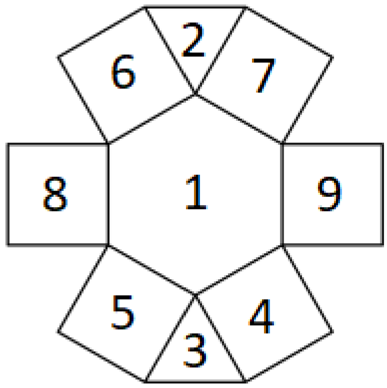
پس جواب برابر است با $۲۴ = \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} + \binom{۶}{۲}$.

۱۲- به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را در ناحیه های شکل زیر قرار داد به گونه ای که ضرب اعداد هر دو ناحیه مجاور ضلعی حداکثر برابر ۱۵ شود؟



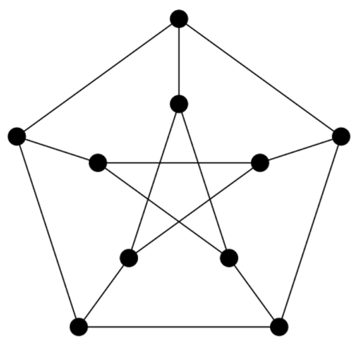
۱) ۱۲　　۲) ۸　　۳) ۳۲　　۴) ۲۴　　۵) ۱۶

پاسخ: گزینه ۵) ۱۶



ناحیه های شکل را مانند شکل بالا شماره داده ایم.
ابتدا توجه کنید که ۸ و ۹ باید حداکثر ۱ همسایه داشته باشند و آن همسایه نیز باید ۱ باشد در نتیجه اعداد ۸ و ۹ باید در ناحیه های ۸ و ۹ قرار بگیرند.
همچنین در ناحیه ۱ فقط عدد ۱ می‌تواند قرار بگیرد. (در غیر این صورت اعداد ۸ و ۹ در ناحیه های ۲ و ۳ خواهند بود.)
حال اعداد ۲ تا ۷ باقی مانده و ناحیه های ۲ تا ۷ حال جایگاه عدد هفت را مشخص میکنیم که ۴ حالت دارد زیرا نمی‌تواند در ناحیه های ۲ و ۳ باشد مثلث مجاور عدد هفت هم باید ۲ باشد که باعث میشود مثلث دیگر شکل مقدار ۳ بگیرد. (در غیر این صورت مثلث دیگر همسایه ای دارد که ضرب بیش از ۱۵ دارد.)
عدد ۶ هم چون نمی‌تواند مجاور عدد ۳ باشد در کنار مثلث با عدد ۲ خواهد بود.
۲ حالت هم برای جا گذاری ۴ و ۵ خواهیم داشت.

۱۳- به ازای هر دو راس v و u در گراف زیر، طول کوتاه ترین گشت به طول زوج بین v و u را به دست می‌آوریم.
حاصل جمع این $\binom{۱۰}{۲}$ عدد چند است؟



۱) ۱۷۴ ۲) ۱۵۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰ ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۵) ۱۲۰

می‌توان دید که طول کوتاه ترین گشت زوج یک راس به راس های مجاورش برابر ۴ و به بقیه راس ها برابر ۲ است.

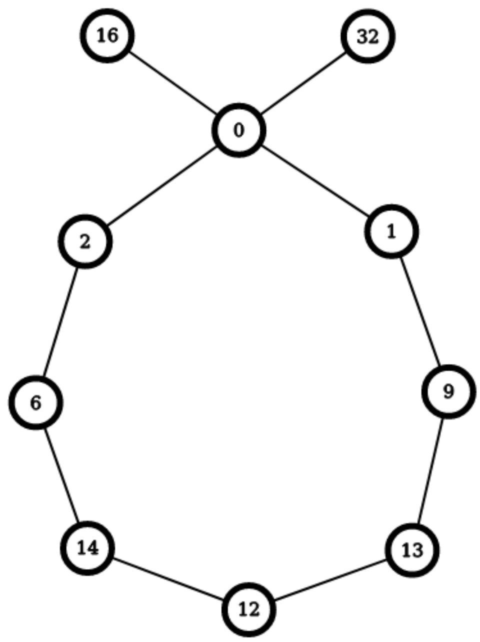
پس جواب برابر $۱۰ \times \frac{۳ \times ۴ + ۶ \times ۲}{۲} = ۱۲۰$ است.

۱۴- چند جایگشت متفاوت از اعداد $\langle$۱۲, ۱۳, ۱۴, ۹, ۶, ۲, ۱, ۳۲, ۱۶, ۰, ۰$\rangle$ داریم که هر دو عدد مجاور در مبنای دو دقیقا در یک بیت تفاوت داشته باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴) ۱۲

می‌دانیم در دنباله هایی که شرط مسئله را دارند بین هر ۲ عدد متوالی یک یال در گراف زیر وجود دارد پس می‌توان دنباله را به صورت مسیری نشان داد که ۲ بار از ۰ می‌گذرد.
می‌توان دید تعداد مسیر های شروع شونده از ۱۶ و ۳۲ هر کدام برابر ۴ (۲ حالت برای جهت دور و ۲ حالت برای اینکه اول دور بزنیم یا اول به راس ۳۲ برویم)، و تعداد مسیر های شروع شونده از راس های ۱ و ۲ هر کدام برابر ۲ است.



یک جدول سودوکوی ۲×۲ یا شیدوکو یک جدول ۴×۴ است که بعضی خانه های آن با اعداد ۱ تا ۴ پر شده اند. به یک جدول شیدوکو «نسبتاً صحیح» می گوییم اگر:

۱. در هیچ سطری دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

۲. در هیچ ستونی دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

۳. در هیچ کدام از ۴ ناحیه ۲×۲ دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

به یک جدول نسبتاً صحیح، «صحیح» می گوییم اگر خانه خالی نداشته باشد.
به یک جدول شیدوکو خراب می گوییم اگر نتوان خانه های خالی آن را طوری پر کرد که به یک جدول شیدوکو صحیح تبدیل شود.

با توجه به متن بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید.

۱۵- به چند حالت می توان خانه های خالی جدول شیدوکو زیر را پر کرد به طوری که به یک جدول صحیح تبدیل شود و $A + B$ برابر ۵ باشد؟ ۲ حالت یکسان اند اگر جدول های حاصل یکسان باشند.

	A	۲	
۱			
			B

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۴

۱۶- کمترین k که یک جدول شیدوکو نسبتاً صحیحِ خراب با دقیقاً k خانه خالی وجود داشته باشد چند است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۱

۱۷- بیشترین k که یک جدول شیدوکو نسبتاً صحیحِ خراب با دقیقاً k خانه خالی وجود داشته باشد چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴ ۵) ۱۰

پاسخ سوال ۱۵: گزینه ۱) ۳

طبق شرط $A + B = ۵$ عدد B می تواند به طور یکتا از روی A تعیین شود. از آنجا که A هم سطر با ۲ و هم ناحیه با ۱ است هیچ کدام از این اعداد نمی تواند باشد. همچنین اگر $A = ۴$ در این صورت $B = ۱$ و می توان دید که ناحیه بالا راست در هیچ خانه ای نمی تواند ۱ داشته باشد.
تنها حالت ممکن یعنی $A = ۳$ و $B = ۲$ را می نویسیم و جدول تا جایی که به طور یکتا به دست بیاید حل می کنیم تا به جدول زیر برسیم.

۴	۳	۲	۱
۱	۲		
۳			۲
۲			

حالت بندی روی این جدول را به چند شکل می توان انجام داد. به عنوان مثال می توانیم خانه های خالی ناحیه بالا راست و پایین چپ (هرکدام ۲ حالت) جایگذاری کرده و جواب های مطلوب را به دست آوریم. در نهایت ۳ جدول زیر معتبر خواهند بود.

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۳	۴

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳

پاسخ سوال ۱۶: گزینه ۴) ۲

	۱	۲	۴
۳	۲	۱	
۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲

مثال برای ۲ که در شکل ارائه شده است.

از طرفی اگر حالتی باشد با تنها یک خانه خالی، یعنی سه عدد از بین ۴،۳،۲،۱ هستند که ۴ بار در جدول هستند و با هم تناقضی ندارند. (فرض می‌کنیم ۳،۲،۱ باشند.)

حال ادعا می‌کنیم اگر ۳ خانه مربوط به عدد ۴ را به علاوه خانه خالی در نظر بگیریم و خانه آخر را با ۴ پر کنیم تناقضی ندارد.

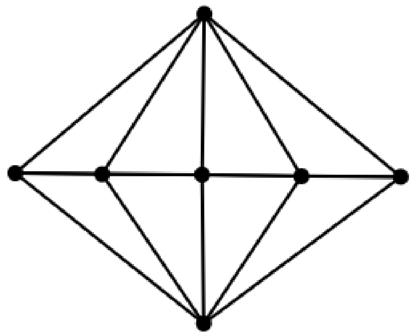
از چهار مربع در هر کدام هر سه عدد ۳،۲،۱ وجود دارد در نتیجه نمی‌توانیم شرط ۳ را نقض کنیم همچنین در هر سطر و ستون نیز هر سه عدد ۳،۲،۱ ظاهر شده اند و شرط های ۲،۱ را نیز نمی‌توانیم نقض کنیم.

پاسخ سوال ۱۷: گزینه ۲) ۱۳

		۱	
			۲
	۱		

در این جدول نمی‌توان عدد ۱ در ناحیه پایین-راست جدول نوشت.

مثال برای ۱۳ ارائه شده و با ۱۴ خانه خالی می‌توان جدول را به شکل کامل پر کرد.



با توجه به گراف بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید.

۱۸- چند دور در این گراف وجود دارد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰ ۵) ۷۰

۱۹- حداقل چند یال از گراف حذف کنیم تا دوری به طول فرد نداشته باشد؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳ ۵) ۵

۲۰- حداقل چند یال از گراف حذف کنیم تا دوری به طول زوج نداشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷ ۵) ۵

پاسخ سوال ۱۸: گزینه ۱) ۹۰

راس های بالا و پایین را در نظر بگیرید. هیچ دوری بدون این دو راس تشکیل نمی شود. و هر دور دیگری یک یا دو تا از این راس ها را شامل می شود.

اگر دور تنها یکی از راس های بالا یا پایین را داشته باشد، می توان دید که بخش وسط دور یک بازه از این ۵ راس است. برای انتخاب راس بالا یا پایین ۲ حالت و برای یک بازه از ۵ راس میانی $\binom{۵}{۲}$ حالت لازم است. (در مجموع ۲۰ حالت)

اگر هر دو راس بالا پایین در دور آمده باشد، هر کدام از آن ها دو همسایه در ۵ راس میانی دارند. اگر این دو را با دو بازه نشان بدهیم، تنها حالاتی از این دو بازه خوب هستند که اشتراک ناتهی داشته باشند. از اصل متمم برای شمارش این بازه ها استفاده می کنیم. کل حالات جفت بازه ها برابر $\binom{۵}{۲}^{۲} = ۱۰۰$ است. تعداد جفت بازه هایی که اشتراک نداشته باشند را با استفاده از معادله سیاله زیر می توان به دست آورد.

$$a_{۱} + a_{۲} + a_{۳} + a_{۴} + a_{۵} = ۴$$

$$a_{۱}, a_{۳}, a_{۵} \geq ۰$$

$$a_{۲}, a_{۴} \geq ۱$$

$$\rightarrow \binom{۶}{۴} = ۱۵$$

بسته به اینکه کدام یک از بازه ها زودتر آمده باشد، ۳۰ حالت بد خواهیم داشت.
جواب مسئله برابر $۲۰ + (۱۰۰ - ۳۰) = ۹۰$ بدست می آید.

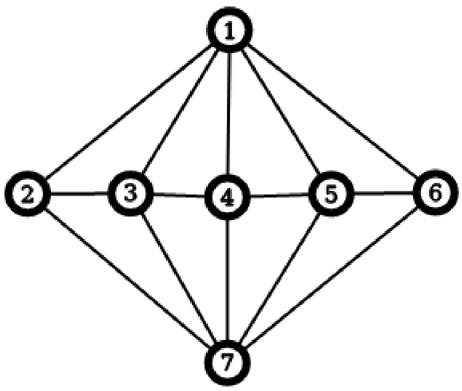
پاسخ سوال ۱۹: گزینه ۳) ۴

با حذف ۴ یال میانی (یال های (۲, ۳)، (۳, ۴)، (۴, ۵) و (۵, ۶))، میتوان یک گراف دوبخشی (بدون دور فرد) ساخت.

حال ۴ دور زیر را در نظر بگیرید.

(۱, ۲, ۳) (۷, ۳, ۴) (۱, ۴, ۵) (۷, ۵, ۶)

این ۴ دور دو به دو یال مجزا هستند (در یالی اشتراک ندارند) و همچنین همه آنها طول فرد (۳) دارند پس باید از هر دور حداقل ۱ یال حذف کرد تا گراف حاصل دور فرد نداشته باشد.



پاسخ سوال ۲۰: گزینه ۵) ۵

اثبات می‌کنیم با ۴ تا نمی‌شود.

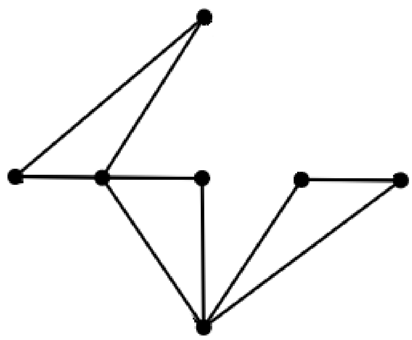
می‌توان دید از ۵ راس وسط حداکثر یکی از آن ها می‌تواند هم به راس بالا یال داشته باشد هم به پایین (وگرنه دور به طول ۴ به وجود می‌آید) پس باید به جز یک راس از هر راس دیگر دقیقا یکی از ۲ یال به بالا یا پایین اش پاک شده باشد و یال های دیگر پاک نمی‌شوند.

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم تعداد یال های پاک شده بالا کمتر باشند (وگرنه می‌توان شکل را وارونه کرد) و می‌دانیم این تعداد حداکثر برابر ۲ است.

به راحتی می‌توان دید یکی از جفت راس های $(۲,۶), (۴,۶), (۳,۵), (۲,۴)$ وجود دارد که هر دو راس آن همچنان به بالا یال دارد و به همراه مسیر بین آن دو توسط یال های وسط باعث تشکیل دور به طول ۴ یا ۶ می‌شود.

پس با حذف ۴ یال نمی‌توان به شکلی بدون دور زوج رسید.

مثال با ۵ یال:



پانویس

دستگاه xor

دستگاه «ایکس-اُر» (xor) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می‌برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه‌تر، تعداد رقم‌های آن دو عدد را برابر می‌کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر شبیه وقتی که بخواهیم آن‌ها را جمع کنیم) می‌نویسد به صورتی که رقم i-ام عدد اول بالای رقم i-ام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می‌کند: اگر مساوی بودند زیر آن‌ها و در سطر سوم یک رقم ۰ می‌نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آن‌ها رقم ۱ می‌گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای ۱۰ و تحویل آن در خروجی، کار پایان می‌یابد. مثلا اگر به دستگاه اعداد ۵ و ۱۲ را بدهیم،دستگاه با تبدیل آن‌ها به مبنای دو، عددهای $(0101)_2$ و $(1100)_2$ را تولید کرده در دو سطر می‌نویسد و با توجه به آن‌ها عدد $(1001)_2$ در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد ۹ را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. در نتیجه $9 = 12 \oplus 5$.

گشت

گشت در یک گراف یک دنباله ی $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ از رئوس (v_i) و یال ها (e_i) می باشد به طوری که v_i و v_{i-1} نقاط پایانی برای e_i به ازای $i = 1, 2, 3, \ldots n$ باشد.

گذر

به گشتی که یال های تکراری نداشته باشد، گذر می گوییم.

مسیر

به گذری که رئوس تکراری نداشته باشد (البته به جز رئوس آغاز و پایان)، مسیر می گوییم.
طول مسیر برابر با تعداد یال هایی است که می پیماییم.

دور

به مسیری که رأس ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبق باشد، دور می گوییم.