

## آزمون کوتاه پاسخ شماره ۹

- مدت آزمون ۱۰۰ دقیقه است.
- آزمون شامل ۱۰ چالش بوده و امتیاز هر چالش برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره‌ی منفی ندارد؛ اما در بین افراد با نمره‌ی برابر، در رتبه‌بندی کسی برتر است که تعداد غلط کم‌تری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل  $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$  باشد.

۱. یک کلاس ۱۲ صندلی در ۳ ردیف ۴-تایی دارد. ۶ پسر و ۶ دختر می‌خواهند روی این صندلی‌ها بنشینند؛ طوری که:

- هیچ پسری در صندلی کنار، صندلی جلویی یا صندلی عقبی یک پسر دیگر نباشد.
- هیچ دختری در صندلی کنار، صندلی جلویی یا صندلی عقبی یک دختر دیگر نباشد.

به چند طریق این کار ممکن است؟

۲. یک جدول با ۱۵ سطر و ۳ ستون داریم. در ابتدا یک مهره در خانه‌ی پایین-چپ جدول وجود دارد. در هر مرحله می‌توان یکی از دو کار زیر را انجام داد:

- مهره را یک واحد به راست برد (حرکت  $\rightarrow$ ).
- مهره را یک واحد به چپ و یک واحد به بالا برد (حرکت  $\nearrow$ ).

به چند طریق می‌توان مهره را به خانه‌ی وسط سطر بالا رساند؟

۳. ابوالفضل و روزبه با هم بازی می‌کنند. هر کس در نوبت خود یک تاس می‌اندازد. هرگاه پس از پرتاب یک نفر، مجموع اعداد تمام تاس‌های انداخته شده تا آن لحظه بر ۷ بخش‌پذیر شود، بازی تمام می‌شود و آن فرد می‌برد. اگر ابوالفضل بازی را شروع کند، به چه احتمالی برنده می‌شود؟

## آزمون کوتاه پاسخ ۹

۴. در ابتدا اعداد  $1, 2, \dots, n$  به ترتیب از چپ به راست نوشته شده‌اند. ابوالفضل و روزبه با هم بازی می‌کنند. هر فرد در نوبت خود دو عدد مجاور را پاک کرده و به جای آن‌ها ضرب یا جمع‌شان را می‌نویسد. آن‌ها این کار را آنقدر انجام می‌دهند که تنها یک عدد روی تخته بماند. اگر عدد نهایی فرد باشد، ابوالفضل و در غیر این صورت روزبه بازی را می‌برد. ابوالفضل بازی را شروع می‌کند. ۱۳۹۵-امین عدد طبیعی  $n$  که روزبه بازی را می‌برد، چیست؟

۵. ابوالفضل و روزبه روی یک جدول  $8 \times 8$  با هم بازی می‌کنند. ابتدا ابوالفضل  $k$  خانه از جدول انتخاب کرده و حرف «A» را در آن‌ها می‌نویسد؛ سپس روزبه  $k + 1$  خانه از جدول انتخاب می‌کند و حرف «R» را در آن‌ها می‌نویسد. اگر ۳ خانه‌ی متوالی هم‌سطر یا هم‌ستون وجود داشته باشند که با گذاشتن حروف آن‌ها در کنار هم یکی از دو عبارت «RAA» یا «AAR» به دست آید، ابوالفضل بازی را می‌برد. کمینه‌ی مقدار  $k$  را بیابید؛ طوری که ابوالفضل استراتژی برد داشته باشد.

۶. در ابتدا زوج مرتب‌های

$$(1395, 2), (1394, 3), (1393, 4), \dots, (699, 698)$$

به ترتیب روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله می‌توان دو زوج مرتب مجاور  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  انتخاب کرد و پس از پاک کردن آن‌ها، زوج مرتب  $(\frac{x_1 y_1 x_2}{y_2}, \frac{x_1 y_1 y_2}{x_2})$  را نوشت. این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا تنها یک زوج مرتب روی تخته باقی بماند. زوج مرتب نهایی چند حالت مختلف دارد؟

۷. فرض کنید  $a, b, c$  اعداد حقیقی مثبت باشند. چندجمله‌ای‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$ax^2 + bx + c, \quad bx^2 + cx + a, \quad cx^2 + ax + b$$

بیشینه‌ی مجموع تعداد ریشه‌های حقیقی این سه چندجمله‌ای چیست؟

۸. مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, \dots, 11\}$  را در نظر بگیرید. تعداد توابع  $f: A \rightarrow A$  را بیابید که:

• به ازای هر  $n \in A$  داشته باشیم،  $f(n) \leq n$ .

• مقادیر  $f(n)$  شامل دقیقاً ۱۰ عدد مختلف باشد.

۹. ۱۱ نفر شامل ابوالفضل و روزبه دور یک دایره هستند و می‌خواهند یک نماینده برای خود برگزینند. برای این کار آن‌ها رأی‌گیری می‌کنند و هر کس به یکی از دو فرد مجاور خود رأی می‌دهد. در انتها اگر کسی بیش از هر کس

## آزمون کوتاه پاسخ ۹

دیگر رأی بیاورد، نماینده می‌شود؛ در غیر این صورت از میان آن‌هایی که رأی بیش‌تری آورده‌اند، یک نفر به طور تصادفی به عنوان نماینده انتخاب می‌شود. می‌دانیم ابوالفضل و روزبه مجاور هستند و ابوالفضل به روزبه رأی داده است. احتمال آن را بیابید که روزبه به عنوان نماینده انتخاب شود.

۱۰. ابوالفضل و روزبه با هم بازی می‌کنند. ابوالفضل یک جدول  $1395 \times 1395$  و روزبه  $1394$  جدول این‌چنینی دارد. هر کدام از بازی‌کن‌ها هر یک از جدول‌های خود را با اعداد  $1, 2, \dots, 1395^2$  پر می‌کند؛ طوری که اعداد هر سطر و اعداد هر ستون به صورت صعودی قرار گرفته باشند. هیچ دو جدول روزبه نباید کاملن یک‌سان باشند. پس از پر کردن جدول‌ها، ابوالفضل به جدول‌های روزبه نگاه می‌کند. سپس می‌تواند در هر مرحله دو عدد از جدول خود را جابه‌جا کند؛ طوری که خاصیت صعودی بودن حفظ شود. در پایان، یک جدول از جداول روزبه به طور تصادفی انتخاب می‌شود. اگر دو عدد وجود داشته باشد که در جدول انتخاب شده هم‌ستون باشند؛ ولی در جدول ابوالفضل هم‌سطر باشند، ابوالفضل بازی را می‌برد. اگر ابوالفضل جدول ابتدایی را به صورت بهینه پر کند، تعداد جابه‌جایی‌هایی که نیاز دارد تا مطمئن باشد که می‌برد، چیست؟

موفق باشید

—اسدی