

آزمون کوتاه پاسخ شماره ۲

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره‌ی منفی ندارد اما در بین افراد با نمره‌ی برابر، در رتبه‌بندی کسی برتر است که تعداد غلط کم‌تری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. ۱۰۰۰ اتاق با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ داریم. در ابتدا ۱۰۰۰ نفر در اتاق ۱ هستند و در بقیه‌ی اتاق‌ها کسی نیست. هر مرحله به طور هم‌زمان، به ازای هر اتاق i که بیش از یک نفر دارد، یکی از افراد آن به اتاق شماره‌ی $i + 1$ می‌رود. پس از ۶۰ مرحله، چند اتاق شامل حداقل ۱ نفر هستند؟
۲. به چند طریق می‌توان ۸ خانه از یک جدول 8×8 را علامت زد؛ طوری که هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری، هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند و همچنین هیچ یک از ۴ خانه‌ی گوشه‌ی جدول، علامت زده نشود؟
۳. از دانش‌آموزان یک کلاس ۱۰ نفره، یک امتحان گرفته شد. هر مسئله توسط دقیقین ۷ دانش‌آموز حل شد. می‌دانیم ۹ تا از دانش‌آموزان، هر یک ۴ مسئله حل کرده‌اند. نفر دیگر کلاس، چند مسئله حل کرده است؟
۴. ابوالفضل یک سکه را مرتب می‌اندازد؛ تا زمانی که یکی از دو اتفاق زیر رخ دهد:

- دو سکه‌ی متوالی، شیر بیاید.
- بلافاصله پس از یک پرتاب خط، یک پرتاب شیر بیاید.

احتمال این که مورد اول رخ بدهد، چقدر است؟

۵. یک بازی با ۹ دست، بین روزبه و ابوالفضل برگزار می‌شود. هر کسی که ۵ دست را ببرد، کل بازی را برده است. احتمال برد ابوالفضل در هر دست، $\frac{2}{3}$ است. احتمال این را بیابید که دقیقین در دست ۷-ام، بازی تمام شود.

آزمون کوتاه پاسخ ۲

۶. ۹ نفر در یک گروه هستند که ابوالفضل، روزبه، آرش و محمدمهدی نیز در میان آنها هستند. می‌خواهیم یک کمیته‌ی ۵- نفره از این ۹ نفر انتخاب کنیم؛ طوری که دو شرط زیر، برقرار باشد:

- ابوالفضل و روزبه یا هر دو در کمیته باشند، یا هیچ یک در کمیته نباشند (آنها حاضر نیستند بدون یکدیگر کاری انجام بدهند!).

- حداکثر یکی از آرش و محمدمهدی، در کمیته باشد (آنها نمی‌خواهند روی یکدیگر را ببینند!).

به چند طریق این کار ممکن است؟

۷. یک چندوجهی داریم. می‌دانیم می‌توان از یکی از رئوس شروع کرد و از هر یال، دقیقاً یک بار عبور کرد و در رأسی دیگر، کار را تمام کرد. اگر f, v و e به ترتیب تعداد وجه‌ها، رأس‌ها و یال‌های چندوجهی باشند، کمیته‌ی ممکن مقدار $f + v + e$ چقدر است؟ (راهنمایی: می‌توانید از این استفاده کنید که $f + v + e$ همواره زوج است)

۸. کیسه‌ی A ، شامل ۴ توپ سفید و ۲ توپ قرمز و کیسه‌ی B ، شامل ۳ توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است. یکی از کیسه‌ها را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک توپ به طور تصادفی از آن بیرون می‌کشیم. بدون این که توپ را به کیسه برگردانیم، یک بار دیگر این کار را انجام می‌دهیم (انتخاب یک کیسه به طور تصادفی و بیرون کشیدن یک توپ تصادفی از آن). فرض کنید توپ دوم، سیاه در آمده است. احتمال آن را بیابید که توپ اول، قرمز باشد.

۹. یک جدول ۵ در ۵ داریم. به چند طریق می‌توان خانه‌های این جدول را با ارقام ۰ و ۱ پر کرد؛ طوری که به ازای هر خانه‌ی ۱، دست کم یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

- تمام خانه‌های هم‌سطر آن، ۱ باشند.

- تمام خانه‌های هم‌ستون آن، ۱ باشند.

۱۰. در ابتدا عدد ۱۲۱ را داریم. در هر مرحله، رقم وسط به طور تصادفی با یکی از دو رقم کناری، جابه‌جا می‌شود. احتمال آن را بیابید که پس از ۱۰ مرحله، رقم وسط ۲ باشد.

موفق باشید

—اسدی