آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۱۰

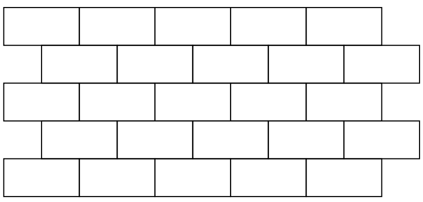
- مدت آزمون ۱۰۰ دقیقه است.
- آزمون شامل ۱۰ چالش بوده و امتیاز هر چالش برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره‌ی منفی ندارد؛ امّا در بین افراد با نمره‌ی برابر، در رتبه‌بندی کسی برتر است که تعداد غلط کم‌تری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. جدول 6×3 زیر را در نظر بگیرید. در هر خانه از این جدول یک بمب یا یک عدد وجود دارد. عدد هر خانه باید برابر با تعداد بمب‌های مجاور آن خانه باشد. توجه کنید دو خانه در این سوال مجاورند، اگر رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق خانه‌های مشخص نشده‌ی جدول زیر می‌توانند با بمب و عدد پر شوند؟

	۲		۱		۲

۲. ابوالفضل یک تاس ۲۰ـوجهی با وجه‌های $1, 2, \ldots, 20$ و روزبه سه تاس عادی (۶ـوجهی) دارد. ابوالفضل و روزبه تاس‌های‌شان را می‌اندازند. احتمال آن را بیابید که عدد تاس ابوالفضل از مجموع اعداد تاس‌های روزبه بیش‌تر باشد.

۳. شکل زیر از آجرها را در نظر بگیرید:



دو آجر را مجاور گوییم، اگر بخشی از محیط‌شان مشترک باشد. می‌خواهیم از هر سطر یک آجر انتخاب کنیم؛ طوری که آجرهای هر دو سطر متوالی، مجاور باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

آزمون کوتاه‌پاسخ ۱۰

۴. ابوالفضل در ابتدا در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ قرار دارد و هر مرحله می‌تواند یک واحد به راست یا بالا حرکت کند. ابوالفضل تنها می‌تواند به نقاط (x, y) برود که xy زوج باشد. به چند طریق او می‌تواند به نقطه‌ی $(۸, ۱۴)$ برسد؟

۵. روزبه در ابتدا در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ قرار دارد و می‌خواهد به نقطه‌ی $(۶, ۶)$ برسد. در ابتدا جهت او به سمت راست است. او ابتدا یک گام به جلو می‌رود؛ سپس در هر مرحله یا یک واحد جلو می‌رود و یا جهت‌ش را ۹۰° پادساعت‌گرد چرخانده و سپس یک واحد حرکت می‌کند. روزبه تنها می‌تواند به نقاط (x, y) برود که $|x|, |y| \leq ۶$ باشد و هم‌چنین روزبه نمی‌تواند به نقطه‌ی تکراری برود. چند مسیر مختلف برای روزبه وجود دارد؟

۶. فرض کنید در ابتدا جایگشت π از اعداد $۱, ۲, \ldots, ۷$ را داریم. در هر مرحله می‌توان دو عنصر جایگشت را جابه‌جا کرد. کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای مرتب کردن جایگشت را $f(\pi)$ می‌نامیم. مجموع مقادیر $f(\pi)$ را به ازای تمام جایگشت‌های ممکن از اعداد $۱, ۲, \ldots, ۷$ بیابید.

۷. یک سکه داریم. این سکه را آن‌قدر می‌اندازیم تا ۶ پرتاب متوالی پدید آید که به ترتیب «شیر، خط، شیر، خط، شیر و خط» باشند. امید ریاضی تعداد پرتاب‌هایی که انجام می‌دهیم، چیست؟

۸. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول ۶×۶ را با قرمز و آبی رنگ کرد؛ طوری که تعداد خانه‌های قرمز هر سطر و هر ستون دقیقن برابر ۲ باشد؟

۹. ۱۳۹۵ پارکینگ با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, ۱۳۹۵$ به ترتیب در یک ردیف قرار دارند. ۱۳۹۵ ماشین می‌خواهند در این پارکینگ‌ها، پارک شوند. *عدد راحتی* یک پارکینگ، برابر با فاصله‌ی آن پارکینگ تا نزدیک‌ترین پارکینگ پر است. ماشین یکم پس از ورود به پارکینگ، یکی از پارکینگ‌ها را به طور تصادفی انتخاب کرده و در آن پارک می‌کند. پس از آن هر ماشین به هنگام ورود به پارکینگ، در میان پارکینگ‌های خالی که عدد راحتی بیشینه دارند، یکی را به طور تصادفی انتخاب کرده و در آن پارک می‌کند. احتمال آن را بیابید که آخرین ماشین در پارکینگ شماره ۱ پارک کند.

۱۰. فرض کنید $x_۰ = ۳$ باشد. در مرحله‌ی nـام یک سکّه می‌اندازیم؛ اگر به رو آمد $x_n = ۱ - x_{n-۱}$ و اگر به پشت آمد $x_n = \frac{۱}{x_{n-۱}}$ است. احتمال آن را بیابید که $x_۶ = ۳$ باشد.

موفق باشید

ـاسدی