

سوال اول : یک کوچولو ۲۵ امتیاز

تابع فیبوناچی به صورت تعریف می شود:

$$f(1)=1$$

$$f(2)=2$$

$$f(n \geq 3) = f(n-1) + f(n-2)$$

نمایش عدد x در مبنای فیبوناچی به صورت $a_n a_{n-1} \dots a_1$ است که در آن a_i یا $+$ است یا 1 ، همواره 1 است، هیچ دو رقم کنار هم برابر 1 نیستند و $\sum a_i \times f(i) = x$. می توان اثبات کرد این نمایش برای هر عدد یکتاست. برای مثال نمایش 2 در این مبنا به صورت $1+$ است و همین طور 3 به صورت $1++$ نوشته می شود ولی 5 را اگر به صورت $11+$ بنویسیم دو رقم کنار هم 1 می شوند و شرط نقض می شود. در نتیجه 5 در این مبنا به صورت $1+++$ نوشته می شود. به عنوان مثالی دیگر 12 نیز به صورت $1+1+1$ نوشته می شود.

یک کوچولو که به تازگی مبنای فیبوناچی را یاد گرفته، از شما خواسته در حل این مسأله به او کمک کنید: تمامی اعداد $+$ تا 10^5 را به ترتیب در مبنای فیبوناچی می نویسیم. فرض کنید تعداد 1 ها در این لیست برابر x باشد، باقی مانده x بر 4 چند است؟

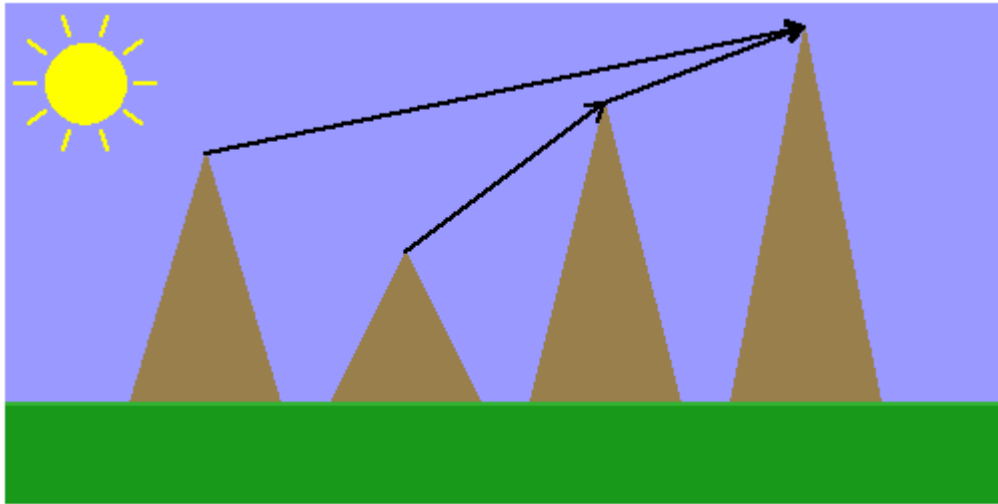
سوال دوم : کتیبه ۳۵ امتیاز

در حفاری های اخیر در نزدیک شازرزآباد، یک کتیبه پیدا شده است. باستان شناسان پس از رمز گشایی کتیبه دریافتند که شازرزآباد در گذشته 6 شهر داشته است. برای شروع تحقیقات، آن ها می خواهند سیستم ارتباطی شازرزآباد را مورد مطالعه قرار دهند.

می دانیم در نقشه ی شازرزآباد بین هر دو شهر به احتمال $\frac{1}{3}$ یک جاده ی دو طرفه وجود دارد. به یک نقشه "یک پارچه" می گوئیم، اگر از طریق جاده های آن، بتوان از هر شهری به هر شهر دیگر رسید. فرض کنید احتمال "یک پارچه" بودن نقشه ی شازرزآباد برابر با P باشد. شما باید باقی مانده ی مقدار $[P \times 147852369]$ را بر Δ بیابید. $([x])$ یا جز صحیح x برابر است با بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x

سوال سوم : رشته کوه ۴ امتیاز

در رشته کوه های البرز ۱۰۰۰ کوه وجود دارد که از چپ به راست با شماره های ۱ تا ۱۰۰۰ شماره گذاری شده اند. می دانیم وقتی در قله کوه i ام ایستاده ایم ($i < 1000$) و به سمت راست نگاه می کنیم، دورترین کوهی که می بینیم a_i است. (دورترین کوه یعنی کوهی که اندیس اش از کوه های دیگری که می بینیم بیشتر است) برای مثال در شکل زیر، دنباله a برابر است با $\{4,3,4\}$.



دنباله a به ازای حالات مختلف رشته کوه چند حالت مختلف دارد؟ باقی مانده ی تقسیم ۹ رقم سمت راست تعداد بر Δ را به عنوان جواب اعلام کنید.

« موفق باشید ... »

