

آزمون تستی اول شازرز، دی ۱۴۰۰



زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.

آزمون شامل ۲۰ سوال ۵ گزینه ای است.

هر پاسخ درست ۴ نمره و هر پاسخ غلط ۱ نمره منفی دارد.

ترتیب سوالات به صورت تصادفی است، پیشنهاد میشود همه سوالات را بخوانید.

در قسمت پانویس تعریف xor و برخی تعاریف گراف نوشته شده است.



۱- چند جایگشت از حروف کلمه «چیزبرگر» وجود دارد که حرف آخر آن نقطه داشته باشد؟

- (۱) ۲۸۸۰ (۲) ۲۱۶۰ (۳) ۱۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰ (۵) ۱۰۸۰

۲- باید حداقل چند خانه از یک جدول 5×5 را مسدود کنیم تا نتوان یک ۳-مینو یا دوران های آن را در جدول قرار داد؟ (۳-مینو یک کاشی L شکل با ۳ خانه است.)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۷

۳- چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ وجود دارد که هیچ ۳ اندیس $i < j < k$ وجود نداشته باشند که $a_i < a_j < a_k$ یا $a_i < a_k < a_j$ ؟

- (۱) ۰ (۲) ۱۰۲۴ (۳) ۷۲۰ (۴) ۵۱۲ (۵) ۲۴۰

۴- آشمز به تازگی یک دستگاه برای مرتب سازی اعداد از کیومرث خریده. اما وقتی که می خواست از دستگاه استفاده کنه متوجه شد که این دستگاه نمی تونه هر دنباله عددی رو از کوچک به بزرگ مرتب کنه. پس پیش کیومرث رفت و گفت: «کلک زدی کیومرث! این دستگاه نمی تونه همه دنباله ها رو مرتب کنه.»

کیومرث به آشمز گفت که اگر متن قرارداد رو دقیق می خوندی می فهمیدی که این دستگاه برای مرتب کردن دنباله در هر مرحله ۳ تا عدد مجاور توی دنباله می گیره و ترتیبشونو برعکس می کنه. اگه این کار شدنی نباشه دستگاه کار نمی کنه.

آشمز که فهمید کلک خورده رفت خونه و حالا می خواست ببینه این دستگاه چقد به کارش میاد. آشمز ۴ تا دنباله زیر رو به دستگاه داد. شما بگین که این دستگاه چند تا از این دنباله ها رو می تونه از کوچک به بزرگ مرتب کنه؟

$\langle 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4 \rangle$

$\langle 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$

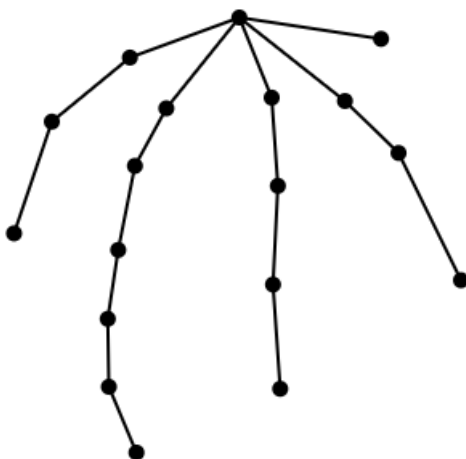
$\langle 1, 8, 7, 4, 5, 6, 2, 3 \rangle$

$\langle 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4 \rangle$

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۰ (۵) ۴



۵- دانشمندان به تازگی کشف کرده اند که بیماری کرونا به مورچه ها سرایت کرده است. مرد مورچه ای که از این اتفاق با خبر شده تصمیم گرفته که روشی برای قرار دادن مورچه هایش در کلونی شان پیدا کند که مورچه ها بیش از حد به هم نزدیک نباشند و در استفاده از فضا صرفه جویی کرده باشد. کلونی مورچه ها به شکل زیر است.



هر راس نشان دهنده یک اتاقک و یال ها نشان دهنده تونل های بین اتاقک ها هستند. مرد مورچه ای می خواهد بداند به چند طریق می تواند بعضی از اتاقک های کلونی را انتخاب کند که بین هیچ دو اتاقک انتخاب شده تونل نباشد و اتاقک انتخاب نشده ای نباشد که با انتخاب آن شرط قبلی برقرار بماند به عبارت دیگر هر اتاقکی که انتخاب نشده حداقل به یک اتاقک انتخاب شده تونل داشته باشد.

۹۲ (۱) ۱۲۸ (۲) ۶۰ (۳) ۴۲ (۴) ۱۰۳ (۵)

۶- عمو صفر یک جدول 8×1 دارد. او می خواهد در بعضی از خانه های این جدول مهره قرار دهد. به یک بازه در جدول می گوییم «نسبتا خالی» اگر تعداد خانه های خالی آن از تعداد خانه هایی که مهره دارند اکیداً بیشتر باشد.

عمو صفر تعداد بازه های نسبتا خالی جدولش را می شمارد و به فکر فرو می رود. اگر به ازای هر کدام از 2^8 حالت قرار دادن مهره در خانه های جدول تعداد بازه های نسبتا خالی را بنویسیم، مجموع این اعداد چند است؟

۲۷۴۱ (۱) ۵۴۸۲ (۲) ۳۷۶۵ (۳) ۴۰۹۶ (۴) ۷۵۳۰ (۵)



۷- یک جدول 11×11 داریم که بعضی از خانه های آن مسدود شده اند. خانه (i, j) مسدود شده اگر $|i - j| > 1$. منظور از خانه (x, y) خانه واقع در سطر $x + 1$ ام و ستون $y + 1$ ام است. روی هر خانه مسدود نشده یک عدد نوشته شده است. عدد روی خانه (i, j) برابر $2i - j$ است. وزن یک مسیر در جدول برابر با مجموع اعداد نوشته شده روی خانه های مسیر است. میانگین وزن همه مسیر ها از خانه $(0, 0)$ به خانه $(10, 10)$ چند است؟ توجه داشته باشید که یک مسیر از خانه های مسدود شده نمی گذرد و همچنین از خانه (x, y) فقط می توانیم به دو خانه $(x + 1, y)$ و $(x, y + 1)$ برویم.

(۱) ۸۵/۵ (۲) ۱۰۵ (۳) ۹۰/۵ (۴) ۹۵/۵ (۵) ۹۰

۸- سهیل ۱۰۲۴ تا کارت خریده که روی همه آن ها عدد ۰ نوشته شده است. رادال ۳ دستگاه دارد که هر کدام از دستگاه ها به ترتیب عملیات های زیر را انجام می دهند.

۱. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $2x$ تولید می کند.
۲. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $2x + 1$ تولید می کند.
۳. اگر یک کارت با عدد x به آن بدهیم، آن را نابود کرده و کارتی با عدد $4x + 2$ تولید می کند.

سهیل که از اعداد تکراری خسته شده است، می خواهد با استفاده از دستگاه های رادال کاری کند که روی کارت هایش دقیقاً همه اعداد ۱ تا ۱۰۲۴ نوشته شده باشد. اما رادال به ازای هر بار استفاده از دستگاه هایش، ۱ تومان از سهیل می گیرد. سهیل باید حداقل چند تومان پول داشته باشد تا بتواند به هدفش برسد؟

(۱) ۳۰۸۲ (۲) ۴۶۰۸ (۳) ۶۹۱۳ (۴) ۶۹۲۳ (۵) ۳۰۷۳

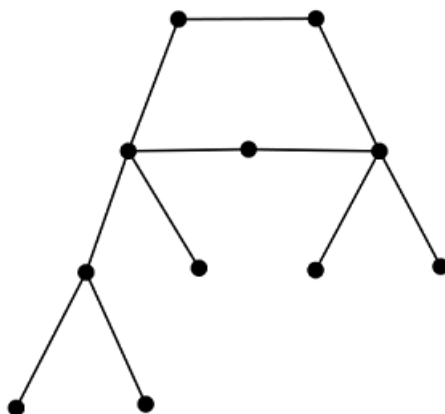
۹- به ۲ عدد $a \leq b$ یک جفت مولایی می گوئیم اگر $a \leq a \oplus b$. (\oplus عملگر xor است که در پانویس توضیح داده شده است).

در چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۸ هر دو عدد متوالی یک جفت مولایی هستند؟

(۱) ۲۵۹۲ (۲) ۱۱۵۲ (۳) ۲۸۸ (۴) ۱۰۲۴ (۵) ۵۷۶



۱۰ - چند جفت راس در گراف مقابل وجود دارند که به هم مسیری با طول زوج داشته باشند؟
(در کل $\binom{11}{2}$ جفت راس متفاوت وجود دارد.)



۵۵ (۵)

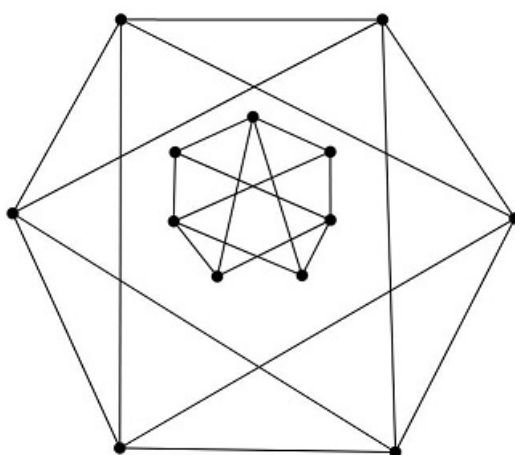
۳۰ (۴)

۲۰ (۳)

۴۵ (۲)

۴۷ (۱)

۱۱ - چند جفت راس در گراف مقابل وجود دارند که به هم گشتی با طول زوج داشته باشند؟
(در کل $\binom{13}{2}$ جفت راس متفاوت وجود دارد.)



۲۴ (۵)

۲۱ (۴)

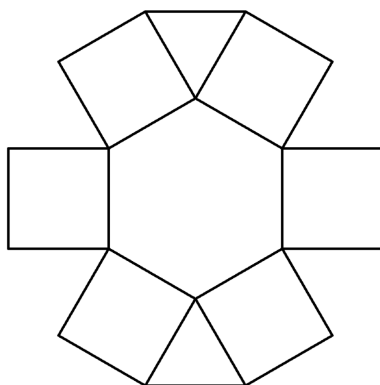
۷۸ (۳)

۱۵ (۲)

۲۷ (۱)

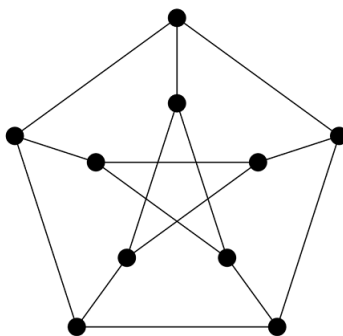


۱۲- به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را در ناحیه های شکل زیر قرار داد به گونه ای که ضرب اعداد هر دو ناحیه مجاور ضلعی حداکثر برابر ۱۵ شود؟



- ۱۶ (۵) ۲۴ (۴) ۳۲ (۳) ۸ (۲) ۱۲ (۱)

۱۳- به ازای هر دو راس u و v در گراف زیر، طول کوتاه ترین گشت به طول زوج بین u و v را به دست می‌آوریم. حاصل جمع این $\binom{10}{2}$ عدد چند است؟



- ۱۲۰ (۵) ۱۸۰ (۴) ۹۰ (۳) ۱۵۰ (۲) ۱۷۴ (۱)

۱۴- چند جایگشت متفاوت از اعداد $\langle 0, 0, 16, 32, 1, 2, 6, 9, 14, 13, 12 \rangle$ داریم که هر دو عدد مجاور در مبنای دو دقیقا در یک بیت تفاوت داشته باشند؟

- ۱۶ (۵) ۱۲ (۴) ۸ (۳) ۴ (۲) ۲۴ (۱)



یک جدول سودوکوی 2×2 یا شیدوکوی یک جدول 4×4 است که بعضی خانه های آن با اعداد ۱ تا ۴ پر شده اند. به یک جدول شیدوکو «نسبتاً صحیح» می گوئیم اگر:

۱. در هیچ سطری دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

۲. در هیچ ستونی دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

۳. در هیچ کدام از ۴ ناحیه 2×2 دو عدد یکسان وجود نداشته باشد.

به یک جدول نسبتاً صحیح، «صحیح» می گوئیم اگر خانه خالی نداشته باشد.

به یک جدول شیدوکو خراب می گوئیم اگر نتوان خانه های خالی آن را طوری پر کرد که به یک جدول شیدوکو صحیح تبدیل شود.

_____ با توجه به متن بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید. _____

۱۵- به چند حالت می توان خانه های خالی جدول شیدوکو زیر را پر کرد به طوری که به یک جدول صحیح تبدیل شود و $A + B$ برابر ۵ باشد؟ ۲ حالت یکسان اند اگر جدول های حاصل یکسان باشند.

	A	۲	
۱			
			B

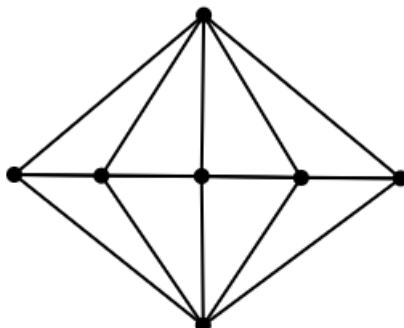
۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) ۴ (۵)

۱۶- کمترین k که یک جدول شیدوکو نسبتاً صحیح خراب با دقیقاً k خانه خالی وجود داشته باشد چند است؟

۵ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱ (۵)

۱۷- بیشترین k که یک جدول شیدوکو نسبتاً صحیح خراب با دقیقاً k خانه خالی وجود داشته باشد چند است؟

۱۱ (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۰ (۵)



_____ با توجه به گراف بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید. _____

۱۸- چند دور در این گراف وجود دارد؟

- ۷۰ (۵) ۱۱۰ (۴) ۱۰۰ (۳) ۱۲۰ (۲) ۹۰ (۱)

۱۹- حداقل چند یال از گراف حذف کنیم تا دوری به طول فرد نداشته باشد؟

- ۵ (۵) ۳ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) ۶ (۱)

۲۰- حداقل چند یال از گراف حذف کنیم تا دوری به طول زوج نداشته باشد؟

- ۵ (۵) ۷ (۴) ۴ (۳) ۶ (۲) ۸ (۱)



پانویس

دستگاه xor

دستگاه «ایکس-ار» (xor) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می‌برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه‌تر، تعداد رقم‌های آن دو عدد را برابر می‌کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر شبیه وقتی که بخواهیم آن‌ها را جمع کنیم) می‌نویسد به صورتی که رقم i -ام عدد اول بالای رقم i -ام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می‌کند: اگر مساوی بودند زیر آن‌ها و در سطر سوم یک رقم 0 می‌نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آن‌ها رقم 1 می‌گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای 10 و تحویل آن در خروجی، کار پایان می‌یابد. مثلاً اگر به دستگاه اعداد 5 و 12 را بدهیم، دستگاه با تبدیل آن‌ها به مبنای دو، عددهای $(1100)_2$ و $(0101)_2$ را تولید کرده در دو سطر می‌نویسد و با توجه به آن‌ها عدد $(1001)_2$ در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد 9 را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. در نتیجه $12 \oplus 5 = 9$.

گشت

گشت در یک گراف یک دنباله $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ از رئوس (v_i) و یال‌ها (e_i) می‌باشد به طوری که v_i و v_{i-1} نقاط پایانی برای e_i به ازای $i = 1, 2, 3, \dots, n$ باشد.

گذر

به گشتی که یال‌های تکراری نداشته باشد، گذر می‌گوییم.

مسیر

به گذری که رئوس تکراری نداشته باشد (البته به جز رئوس آغاز و پایان)، مسیر می‌گوییم. طول مسیر برابر با تعداد یال‌هایی است که می‌پیماییم.

دور

به مسیری که رأس ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبق باشد، دور می‌گوییم.