

# آزمون طئوری سوم

..... ۲۰ نمره

۱. نواری داریم که از سمت راست نامتناهی است!  $n$  مهره یکسان هر کدام در خانه ای از این نوار وجود دارد. (ممکن است در یک خانه چند مهره وجود داشته باشد). در هر مرحله اگر حداقل دو مهره در یک خانه وجود داشت، میتوانیم یکی از آنها را دو واحد به سمت چپ ببریم و یکی دیگر را یک واحد به سمت راست. و اگر دو مهره در دو خانه متوالی وجود داشت، میتوانیم مهره ی سمت چپ را حذف کنیم و مهره ی سمت راست را یک واحد به سمت راست ببریم.

الف: ثابت کنید این مراحل پایان پذیر هستند

ب: ثابت کنید وضعیت نهایی مهره ها یکتا است (مهره ها یکسان هستند)

..... ۲۰ نمره

۲.  $2n+3$  نقطه داریم. هیچ سه تایی از اون ها روی یک خط نیستن. هیچ چهارتایی هم روی یک دایره نیستن. ثابت کنید دایره ای وجود داره که سه نقطه روی محیطش،  $n$  نقطه داخلش و  $n$  نقطه خارجش قرار داره!

..... ۲۰ نمره

۳. آرایه ای از اعداد 1 تا  $n$  داریم که هیچ دو عضو متوالی ای در آن برابر نیست و هیچ زیر دنباله ی 4 تایی که به شکل  $xyxy$  ( $x \neq y$ ) باشد در این آرایه وجود ندارد. طول دنباله حداکثر چقدر است؟ (اعضای زیر دنباله لزوماً متوالی نیستند)

..... ۲۰ نمره

۴. فرض کنید  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند و  $s$  عدد صحیح دلخواهی باشد. تعداد زیر مجموعه های  $m$  عضوی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, m+n-1\}$  را بیابید که مجموع اعضای هر یک به پیمانه  $n$  با  $s$  برابر باشد.