پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۱

پاسخ کلیدی:

۱. ۲

۲. ۳۶

۳. $\frac{۹}{۱۳}$

۴. ۱۶۰

۵. ۱۸۶

۶. ۰

۷. $\frac{۵}{۷}$

۸. $\frac{۱۳}{۸}$

۹. ۵۱۳

۱۰. $\frac{۱}{۲۲۲۴۲۲۲}$

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱

پاسخ تشریحی:

۱. همه‌ی لامپ‌ها روشن خواهند شد؛ اگر و تنها اگر تمام لامپ‌های ابتدایی در یک وضعیت باشند. پس پاسخ برابر ۲ است.

۲. دقیقن یک ستون وجود دارد که خانه‌ی علامت‌دار ندارد و بقیه‌ی ستون‌ها دقیقن یک خانه‌ی علامت‌دار دارند. دو حالت داریم:

- سطر بدون علامت، یکی از سطرهای ابتدایی و انتهایی باشد: انتخاب این سطر، ۲ حالت دارد و انتخاب خانه‌های علامت‌دار نیز ۲ حالت دارد (با مشخص کردن یک خانه‌ی علامت‌دار از یک سطر، خانه‌های علامت‌دار بقیه‌ی سطرها یکتا تعیین می‌شوند). پس $۲ \times ۲ = ۴$ حالت داریم.
- سطر بدون علامت، سطری غیر از سطرهای ابتدایی و انتهایی باشد: انتخاب این سطر، ۸ حالت دارد. حال سطرهای جدول به دو قسمت (پایین سطر بدون علامت و بالای سطر بدون علامت) تقسیم می‌شوند. انتخاب خانه‌های علامت‌دار هر قسمت به مانند حالت قبل، ۲ حالت دارد. پس $۸ \times ۲ \times ۲ = ۳۲$ حالت داریم.

پس پاسخ برابر $۴ + ۳۲ = ۳۶$ است.

۳. احتمال برد روزبه را p در نظر می‌گیریم. دو دست اول ۳ حالت دارد:

- هر دو دست اول را روزبه ببرد: احتمال رخداد این حالت $\frac{۹}{۲۵}$ است و بازی پس از این دو دست تمام است.
- یکی از دو دست اول را روزبه و دیگری را ابوالفضل ببرد: احتمال رخداد این حالت، $\frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۲}{۲۵}$ است و در ادامه‌ی کار، روزبه به احتمال p برنده خواهد شد.
- هر دو دست اول را ابوالفضل ببرد: در این حالت احتمال برد روزبه وجود ندارد؛ زیرا ابوالفضل بازی را برده است.

پس: $p = \frac{۹}{۲۵} + \frac{۱۲}{۲۵} \times p$ و پاسخ برابر $p = \frac{۹}{۱۳}$ است.

۴. اگر به ازای هر کمیسیون، به ازای هر سناتور ۱ امتیاز و به ازای هر دست‌یار $\frac{۱}{۴}$ امتیاز در نظر بگیریم، در مجموع $۱ \times ۵ \times ۱۰۰ + \frac{۱}{۴} \times ۳ \times ۴۰۰ = ۸۰۰$ امتیاز داده خواهد شد. از طرفی هر کمیسیون، دقیقن ۵ امتیاز می‌سازد. پس پاسخ برابر $\frac{۸۰۰}{۶} = ۱۶۰$ است.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱

۵. یک رنگ که برای یک عدد زوج به کار رود، نمی‌تواند برای عددی فرد به کار رود و بالعکس. حال دو حالت داریم:

- از دو رنگ استفاده کنیم: یکی از این رنگ‌ها باید اعداد زوج و دیگری باید اعداد فرد را رنگ کند. پس $۶ = ۲ \times ۳$ حالت برای انتخاب رنگ داریم.
- از سه رنگ استفاده کنیم: به ۲ حالت انتخاب می‌کنیم که اعداد زوج، تک‌رنگ یا اعداد فرد، تک‌رنگ باشند. دسته‌ای (اعداد زوج یا فرد) که ۲ رنگ دارد، $۲^۵ - ۲$ حالت برای رنگ شدن دارد که از هر دو رنگ، استفاده کند. انتخاب رنگ نیز ۳ حالت دارد. پس $۱۸۰ = ۲ \times ۳۰ \times ۳$ حالت دارد.

پس پاسخ برابر ۱۸۶ است.

۶. صندلی‌ها را به صورت شترنجی با سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کنید؛ طوری که صندلی وسط، سیاه باشد. هر دانش‌آموز با صندلی سیاه باید به یک صندلی سفید برود و بالعکس. ۱۸ نفر در ابتدا روی صندلی سفید و ۱۶ نفر روی صندلی سیاه نشسته‌اند. این ۱۸ نفر باید در ۱۷ صندلی سیاه جای بگیرند که امکان ندارد. پس پاسخ برابر ۰ است.

۷. **راه ۱**: دو حالت داریم:

- هر سه توپ در یک جعبه قرار بگیرند: احتمال این که هر سه توپ در جعبه‌ی i باشند، برابر $(\frac{۱}{۲^i})^۳$ است؛ پس احتمال این امر $\frac{۱}{۷} = \ldots + (\frac{۱}{۴})^۳ + (\frac{۱}{۲})^۳$ است.
- دو توپ در یک جعبه و دیگری در جعبه‌ای دیگر قرار گیرد. انتخاب توپ تنها ۳ حالت دارد. احتمال این که دو توپ در جعبه‌ی i و دیگری در جعبه‌ای دیگر باشد، برابر

$$۳ \times (\frac{۱}{۲^i})^۲ \times (۱ - \frac{۱}{۲^i}) = ۳ \times \left((\frac{۱}{۲^i})^۲ - (\frac{۱}{۲^i})^۳\right)$$

است. پس احتمال این امر برابر است با:

$$۳ \times \left[\ \left((\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۴})^۲ + \ldots +\right) - \left((\frac{۱}{۲})^۳ + (\frac{۱}{۴})^۳ + \ldots\right)\right] = ۳ \times (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۷})$$

پس پاسخ برابر

$$\frac{۱}{۷} + \frac{۳}{۳} - \frac{۳}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

است.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱

راه ۲: احتمال این که جعبه‌ی iـام حداقل ۲ توپ داشته باشد، برابر است با:

$$3 \times ((\frac{1}{2^i})^2(1-\frac{1}{2^i})) + (\frac{1}{2^i})^3 = \frac{3}{4^i} - \frac{2}{8^i}$$

از طرفی اگر در جعبه‌ی iـام حداقل ۲ توپ باشد، امکان ندارد این اتفاق در جعبه‌ای دیگر بیفتد. پس احتمال خواسته شده، برابر با جمع احتمال‌ها به ازای iـ های مختلف است. پس پاسخ برابر است با:

$$(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\ldots) - (\frac{2}{8}+\frac{2}{64}+\ldots) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

۸. برای محاسبه‌ی مجموع تعداد لنگرها به ازای زیرمجموعه‌های مختلف، کافی است به ازای هر n ببینیم، چند زیرمجموعه وجود دارد که n، لنگر آن زیرمجموعه باشد و این مقادیر را به ازای nـ های مختلف جمع کنیم.

فرض کنید n، لنگر زیرمجموعه‌ی S با k عضو باشد. پس $n, n+k$ عضو S هستند. پس S حداقل ۲ عضو دارد و $k \geq 2$ است. از طرفی $n+k \leq 15$ است و $k \leq 15-n$ می‌باشد. $k-2$ عضو دیگر S (به جز $n, n+k$) می‌توانند به طور مستقل از ۱۳ عضو دیگر $\{1, 2, \ldots, 15\}$ انتخاب شوند. پس S، $\binom{13}{k-2}$ حالت دارد. پس با در نظر گرفتن kهای مختلف $\binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \ldots + \binom{13}{13-n}$ زیرمجموعه داریم که n لنگر آن‌ها باشد.

پس در مجموع در میان زیرمجموعه‌های مختلف، $13\binom{13}{0} + 12\binom{13}{1} + \ldots + \binom{13}{12}$ لنگر داریم. با دوگانه‌شماری یا محاسبه‌ی مستقیم، مقدار بالا برابر 13×2^{12} به دست می‌آید. از آن‌جایی که در کل 2^{15} زیرمجموعه داریم، پاسخ برابر $\frac{13}{8}$ است.

۹. هر دانش‌جو، در زیرمجموعه‌ای از باشگاه‌ها عضو است. هیچ دو دانش‌جویی، مجموعه‌ی باشگاه‌های یک‌سان ندارد (طبق شرط اول مسئله). حال فرض کنید دانش‌جویی، عضو زیرمجموعه‌ی ناتهی S از باشگاه‌ها باشد. برای هر زیرمجموعه‌ی $T \neq S$ از باشگاه‌ها، $f(T)$ را زیرمجموعه‌ای از باشگاه‌ها تعریف می‌کنیم که در دقیقن یکی از S, T موجود باشند. واضح است که $f(f(T)) = T$ و $f(T) \neq T$. پس 2^{10} زیرمجموعه‌ی ممکن، به جفت‌های $\{T, f(T)\}$ افراز می‌شوند. از آن‌جایی که $S \neq T$، پس هر باشگاه در هیچ یا دقیقن دو تا از زیرمجموعه‌های $S, T, f(T)$ آمده است. پس طبق شرط دوم مسئله، نمی‌توان دو دانش‌جو با زیرمجموعه‌های $T, f(T)$ یافت. پس پاسخ حداکثر برابر ۵۱۳ خواهد بود (یکی برای S، یکی برای $f(S)$ و از هر یک از ۵۱۱ جفت باقی‌مانده حداکثر یک زیرمجموعه).

حال روشی ارائه می‌دهیم که ۵۱۳ دانش‌جو داشته باشیم. یک باشگاه مانند c در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک

دانش‌جو در هیچ باشگاهی عضو نباشد و بقیه‌ی ۵۱۲ دانش‌جو، همگی در c عضو باشند و تمام ۲^9 زیرمجموعه‌ی دیگر از ۹ باشگاه دیگر را بسازند. این ساختار، با شروط مسئله نیز تناقضی ندارد.

پس پاسخ برابر ۵۱۳ است.

۱۰. به استقرای قوی روی n، ثابت می‌کنیم اگر با عدد n شروع کنیم، احتمال این که به عدد m برسیم ($m < n$)، برابر $\frac{1}{m+1}$ است. برای پایه‌ی استقرا، $m = n - 1$ را در نظر می‌گیریم. m تنها می‌تواند در گام اول ظاهر شود و احتمال آن $\frac{1}{m+1} = \frac{1}{n}$ است. پس حکم برای پایه‌ی استقرا، برقرار است. فرض کنید حکم به ازای $n < k$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ نیز برقرار است. اگر در گام نخست، یکی از اعداد $m+1, m+2, \ldots, k$ تولید شود (به احتمال $\frac{k-m}{k}$)، در ادامه طبق فرض استقرا به احتمال $\frac{1}{m+1}$ عدد m را خواهیم دید. اگر در ابتدا عدد m تولید شود (به احتمال $\frac{1}{k}$) که m تولید شده است. اگر در ابتدا عددی کم‌تر از m تولید شود، m تولید نخواهد شد. پس احتمال به وجود آمدن m برابر است با:

$$\frac{k-m}{k} \times \frac{1}{m+1} + \frac{1}{k} = \frac{k-m+m}{k \times (m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

و حکم ثابت می‌شود.

پس پاسخ برابر $\frac{1}{2224222} = \frac{1}{1001} \times \frac{1}{101} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{2}$ است.