جواب آزمون تئوری اول

۱- طبق برهان خلف فرض کنید حکم درست نباشد. آن گاه جدولی که حکم را نقض کرده است در نظر بگیرید. در این جدول ۲ خانه که دارای عدد ۱ و ۸۱ هستند. اگر این دو خانه در دو گوشه ی مقابل جدول نباشند مسیر بین ۱ و ۸۱ که شامل خود این دو خانه باشد حداکثر ۱۶ خانه دارد (چرا؟) حال این مسیر را در نظر بگیرید. هر دو خانه ی مجاور در این مسیر حداکثر اختلافشان پنج است(طبق برهان خلف). عدد اول این مسیر یک و هر خانه بعد از آن در مسیر حداکثر پنج تا از قبلی بیشتر است. پس خانه ی اخر حداکثر $5 * 15 + 1 = 76$ است. پس خانه ی اخر نمی تواند ۸۱ باشد.

اگر در دو گوشه ی مقابل جدول باشند دو مسیر خانه مجزا(به جز خانه های شروع و پایان) با تعداد خانه های کمینه(یعنی شامل ۱۷ خانه) از خانه ی عدد یک تا خانه ی عدد ۸۱ وجود دارد. اولین خانه ی این مسیرها یک است. هر خانه بعد از آن حداکثر پنج تا از خانه ی قبلی بیشتر است و از طرفی اگر خانه ی دوم دو مسیر را در نظر بگیرید، چون عدد شش در حداکثر یکی از این دو خانه آمده است پس عدد یکی از این دو خانه حداکثر پنج است. پس عدد خانه ی آخر این مسیر حداکثر $5 * 15 + 5 = 80$ است. پس خانه ی آخر این مسیر نمی تواند ۸۱ باشد. این تناقض حکم را نتیجه می دهد.

۲- جواب این سوال ۴۹ می شود. مثال آن جدول ۱۶*۱۶ است که درابتدا تمام خانه های آن به رنگ ۱ است.سپس در ستون **i** ام به ازای $1 \le i \le 16$ در سطر های $i\%16, (i+1)\%16, (i+2)\%16$ آن رنگ های جدید را اضافه می کنیم. حال در هر سطر و ستون ۳ رنگ جدید داریم که با رنگ ۱ در کل ۴رنگ وجود دارد.

اثبات بهینگی: برای آنکه ثابت کنیم جواب بیش تر نمی شود جدول ها را به ۲ حالت تقسیم می کنیم:

حالت اول- حالتی که در آن سطری وجود داشته باشد که تمام رنگ هایش با رنگ های سطر اول یکسان باشد: فرض کنید سطری که تمام رنگ هایش با رنگ های سطر اول متفاوت است سطر**i** باشد در این حالت هر ستونی را که در نظر بگیریم دو خانه ی آن در سطر های اول و **i**ام متفاوت است پس به جز رنگ هایی که در دو سطر **i** ام و اول آمده حداکثر ۲ رنگ جدید می تواند داشته باشد پس تعداد رنگ های متفاوت برابر می شود با

۱۶*۲+(تعداد رنگ های سطر اول و**i** ام)=۳۲+۴*۲=۴۰

پس در این حالت حداکثر ۴۰ رنگ متفاوت داریم.

حالت دوم- حالتی که هر سطر حداقل در یک رنگ با سطر اول مشترک باشد: در این حالت در سطر اول حداکثر ۴ رنگ وجود دارد و بعد از آن در هر سطر حداکثر ۳ رنگ جدید وجود دارد زیرا حداقل یکی از رنگ ها در سطر اول آمده است.

۳- مجموعه ی **A[i]** را **k** نقطه ی دلخواه از نقاطی در نظر بگیرید که فاصله شان تا نقطه ی **i** برابر باشد. **B[i][j]** را تعداد مجموعه هایی که نقطه های **i**م و **j**م هر دو در آن آمده اند تعریف می کنیم. **S** را برابر مجموع تمام **B[i][j]** ها که در آن **i < j** است تعریف می کنیم. از طرفی می دانیم $S = n\binom{k}{2}$(چرا؟). از طرفی می دانیم **B[i][j] <= ۲** زیرا به ازای هر نقطه مانند **x** که **i** و **j** در **A[x]** باشند، فاصله ی **i** و **j** با **x** برابر است. درنتیجه **x** روی عمود منصف خط **ij** قرار دارد. حال تمام چنین **x**هایی را در نظر بگیرید. با توجه به آن که همه ی آن ها روی عمود منصف خط **ij** هستند و روی یک خط بیش از دو نقطه وجود ندارند(هیچ سه نقطه ای هم خط نیستند) پس تعداد آن ها حداکثر دوتاست و **B[i][j] <= ۲**. درنتیجه $S \le 2\binom{n}{2}$ پس :

$$n * (n-1) \ge n * \binom{k}{2} \to (n-1) \ge \frac{k * (k-1)}{2} \to 2(n-1) \ge k^2 - k \to 2n \ge k^2 - k + 2$$
$$> k^2 - k + \frac{1}{4} = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \to k < \sqrt{2n} + 1/2$$