# پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۵

**پاسخ کلیدی:**

۱. ۴۱

۲. ۳۳۰

۳. $\frac{30}{91}$

۴. ۲۵۲

۵. ۱۲۸۶۹

۶. $\frac{7}{33}$

۷. $\frac{43}{14}$

۸. ۶

۹. ۱۱۶۲۸

۱۰. ۱۴۳۰

## پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۵

**پاسخ تشریحی**:

۱. اگر هیچ یک از آرش و محمدمهدی در کمیته نباشند،

$$\binom{۵}{۵} + \binom{۵}{۳} = ۱۱$$

حالت و اگر دست کم یکی از آن‌ها در کمیته باشند،

$$۲ \times \left[\binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۲}\right] = ۳۰$$

پس پاسخ برابر $۴۱ = ۱۱ + ۳۰$ است.

۲. داریم $a > ۰$؛ پس $b > c$. همچنین داریم $e \geq ۰$؛ پس $d \geq c$. از طرفی برای هر سه‌تایی $(b, c, d)$ که $b > c$ و $d \geq c$، یک زوج یکتای $(a, e)$ وجود خواهد داشت که $\overline{abcde}$، ویژگی‌های خواسته شده را داشته باشد. پس پاسخ برابر است با:

$$\sum_{c=۰}^{۹} (۹ - c)(۱۰ - c) = \sum_{c=۰}^{۹} c^۲ - ۱۹c + ۹۰ = ۳۳۰$$

۳. احتمال بردن ابوالفضل را $p$ می‌گیریم. بردن ابوالفضل در دو حالت ممکن است:

- ابوالفضل در پرتاب اولش می‌برد که احتمال آن $\frac{۱}{۶} \times \frac{۵}{۶}$ است.
- در سری اول، هیچ کس نمی‌برد و کار به سری دوم می‌کشد که احتمال آن $(\frac{۵}{۶})^۳$ خواهد بود و در ادامه‌ی کار، ابوالفضل به احتمال $p$ خواهد برد.

پس:

$$p = \frac{۵}{۶^۲} + \frac{۵^۳}{۶^۳} \times p$$

پس پاسخ برابر $p = \frac{۳۰}{۹۱}$ است.

۴. نقاط با $y = ۰$ را آبی و نقاط با $y = ۱$ را قرمز می‌کنیم. نقاط آبی باید به ترتیب $x$ و نقاط قرمز نیز باید به ترتیب $y$ بیایند. همچنین نقطه‌ی $(۰, ۰)$ باید در ابتدای مسیر و نقطه‌ی $(۵, ۱)$ باید در انتهای مسیر باشد. پس پاسخ برابر تعداد جایگشت‌های ۵ شیء یک‌سان قرمز و ۵ شیء یک‌سان آبی خواهد بود (پس از تعیین جایگشت، ترتیب نقاط به طور یکتا تعیین می‌شود). پس پاسخ برابر $۲۵۲ = \binom{۱۰}{۵}$ است.

## پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۵

۵. فرض کنید $k$ خانه انتخاب شوند. به $\binom{۸}{k}^۲$ حالت، می‌توان سطرها و ستون‌های این $k$ خانه را انتخاب کرد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید این سطرها و ستون‌ها، $k$ سطر و $k$ ستون ابتدایی باشند. به طور یکتا، خانه‌های علامت‌دار باید روی قطر اصلی باشند (چرا؟). پس پاسخ برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{۸} \binom{۸}{k}^۲ = -۱ + \sum_{k=۰}^{۸} \binom{۸}{k}^۲ = -۱ + \binom{۱۶}{۸} = ۱۲۸۶۹$$

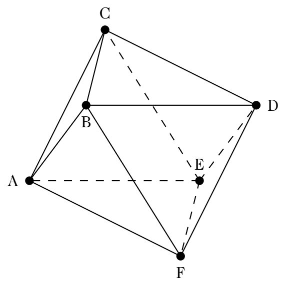
۶. تعداد کل حالات چیدن $۱۱! = (۱ - ۸ + ۴)!$ است. برای محاسبه‌ی تعداد حالات مطلوب ابتدا مسلمان‌ها را دور دایره می‌چینیم. این کار به $۷! = (۱ - ۸)!$ طریق قابل انجام است. حال در هر یک از ۸ فضای خالی بین مسلمان‌ها، حداکثر یک کافر می‌تواند قرار بگیرد. ۴ تا از این فضاها را برای کافرها انتخاب می‌کنیم و سپس آن‌ها را جایگشت می‌دهیم. این کار به $\binom{۸}{۴} \times ۴!$ طریق قابل انجام است. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۷! \times \binom{۸}{۴} \times ۴!}{۱۱!} = \frac{۷}{۳۳}$$

۷. در امید ریاضی این خاصیت وجود دارد که امید ریاضی جمع چند متغیر برابر با جمع امید ریاضی تک‌تک آن‌هاست (چه آن متغیرها از هم مستقل باشند و چه نباشند).

۱۳ عدد اول و ۲۹ عدد غیر اول داریم. یکی از اعداد غیر اول را در نظر بگیرید. ۱۴ جایگاه ممکن برای این عدد نسبت به اعداد اول در دسته کارت وجود دارد (قبل از اعداد اول، بین عدد اول نخست و عدد اول دوم و …). پس احتمال و امید ریاضی این که این عدد قبل از تمام اعداد اول بیاید، $\frac{۱}{۱۴}$ است و پاسخ برابر $\frac{۴۳}{۱۴} = ۱ + \frac{۱}{۱۴} \times ۲۹$ می‌شود.

۸. فرض کنید شکل هشت‌وجهی، مانند زیر باشد:




اگر به رأس‌های یک دور همیلتونی، ترتیب بدهیم، $۶ \times ۲$ حالت برای نوشتن آن وجود دارد. انتخاب دو رأس اول دور یک همیلتونی ترتیب‌دار، $۴ \times ۶$ حالت دارد. حال فرض کنید دور همیلتونی را از $A$ شروع کنیم و

# پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۵

ابتدا به $B$ برویم. اگر در مرحله‌ی بعد به $D$ برویم، ادامه‌ی کار باید $CEF$ یا $FEC$ باشد و اگر به $C$ یا $F$ برویم، سه حالت برای کامل کردن دور داریم. پس $(۲ + ۲ \times ۳) \times ۴ \times ۶$ دور همیلتونی ترتیب‌دار داریم. پس $\frac{۶\times۴\times(۲+۲\times۳)}{۶\times۲} = ۱۶$ دور همیلتونی داریم. می‌توانید بررسی کنید به جز چهار دور همیلتونی، مکمل بقیه‌ی دورها، خود یک دور همیلتونی است. پس $\frac{۱۶-۴}{۲} = ۶$ زوج از این دورها داریم.

۹. **راه ۱:** فرض کنید ۱۹ شی در یک ردیف داریم و ۵ تا از آن‌ها را به $\binom{۱۹}{۵}$ حالت انتخاب می‌کنیم. اگر شیء دوم و شیء چهارم از اشیاء انتخاب شده را حذف کنیم، ردیف ما به سه قسمت ناتهی تقسیم می‌شود. به ازای هر $i, j, k$ طبیعی که $i + j + k = ۱۷$، دقیقن $ijk$ حالت ایجاد کرده‌ایم (با اشیاء اول و دوم و سوم انتخاب شده). پس یک تناظر یک به چند بین این دو مسئله ایجاد می‌شود و پاسخ برابر $\binom{۱۹}{۵} = ۱۱۶۲۸$ است.

**راه ۲:** فرض کنید:

$$s_n = \sum_{i+j+k=n} ijk$$

تابع مولد زیر را می‌سازیم:

$$\sum_{n\geq ۰} s_n x^n = \Big(\sum_{n\geq ۰} n x^n\Big)^۳ = \Big(\frac{x}{(۱-x)^۲}\Big)^۳ = \frac{x^۳}{(۱-x)^۶}$$

پس $s_n$ برابر ضریب $x^n$ در تابع مولد بالاست که برابر با ضریب $x^{n-۳}$ در تابع مولد $(۱-x)^{-۶}$ یا $\binom{n+۲}{۵}$ می‌باشد. پس پاسخ برابر $s_{۱۷} = \binom{۱۹}{۵}$ است.

۱۰. هر زیرمجموعه‌ی سلطانی، اعداد $۰, ۸, ۹, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۲۴ - ۲۷, ۳۲ - ۳۶, ۴۰ - ۴۵, ۴۸ - ۵۸$ و اعداد بیش‌تر از ۵۵ را دارد. پس اعدادی که در یک زیرمجموعه‌ی سلطانی نیستند، باید زیرمجموعه‌ای از اعداد $۱ - ۷, ۱۰ - ۱۵, ۱۹ - ۲۳, ۲۸ - ۳۱, ۳۸ - ۳۹, ۴۶, ۴۷, ۵۵$ باشند. شکل زیر از این اعداد را در نظر بگیرید:

```
                 ۵۵
               ۴۶   ۴۷
             ۳۷   ۳۸   ۳۹
           ۲۸   ۲۹   ۳۰   ۳۱
         ۱۹   ۲۰   ۲۱   ۲۲   ۲۳
       ۱۰   ۱۱   ۱۲   ۱۳   ۱۴   ۱۵
     ۱    ۲    ۳    ۴    ۵    ۶    ۷
   *    *    *    *    *    *    *    *
(۰, ۰)*    *    *    *    *    *    *    *(۱۶, ۰)
```

## پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۵

هر عدد اگر در زیرمجموعه‌ی سلطانی نباشد، اعداد زیرین آن نیز نباید در زیرمجموعه باشند. حال یک مسیر از $(۰,۰)$ به $(۱۶,۰)$ در نظر بگیرید که در هر مرحله از نقطه‌ی $(x,y)$ بتواند به یکی از نقاط $(x+۱, y-۱)$ یا $(x+۱, y+۱)$ برود و هم‌چنین هیچ‌گاه از محور $x$، پایین‌تر نرود. با در نظر گرفتن این مسیر در شکل بالا و حذف اعداد روی مسیر از اعداد طبیعی، یک زیرمجموعه‌ی سلطانی مطلوب تولید می‌شود. هر زیرمجموعه‌ی سلطانی مطلوب نیز به یک مسیر این‌چنینی متناظر است. پس پاسخ برابر تعداد این مسیرهاست که برابر با عدد کاتالان ۸ـام یا $C_۸ = \frac{۱}{۸+۱}\binom{۱۶}{۸} = ۱۴۳۰$ است.