به نام خدا

راه حل سری اول ۳+۱ – شازز

۱۳۹۰/۸/۶

سوال اول •• طراح: علیرضا فرهادی

مساله خواسته است تا طوری جاده ها رو جهت دهی کنیم تا هیچ دوری در آن وجود نداشته باشد. اگر یک جهت دهی مطلوب را در نظر بگیریم یک شهر وجود دارد که از آن هیچ جاده‌ای خارج نشده است (چرا؟). حال اگر به ترتیب این شهر ها را در یک صف بچینیم و آن‌ها را با جاده‌هایشان حذف کنیم و این کار را تا حذف همه‌ی شهرها ادامه دهیم، ترتیبی از شهر ها به دست می‌آید که جاده ها فقط از سمت راست به چپ هستند. چون در ابتدا هر دو شهری به هم وصل بوده‌اند، این نحوه‌ی چینش برای جهت دهی مطلوب یکتاست (چرا؟). به ازای هر نحوه چیدن شهرها در یک صف و جهت دهی جاده ها از راست به چپ، جاده‌های حاصل هیچ دوری نخواهند داشت، پس جهت دهی مطلوب است. پس یک تنظر یک به یک بین جواب مساله و تعداد حالت چینش شهرها در یک صف وجود دارد که خود برابر $n!$ است.

سوال دوم •• طراح: حامد صالح

این مسئله دو راه حل داره یکی با فرض این که تعداد درخت ها در ابتدا مینیموم بوده و دیگری آن که بدون استفاده از این فرض و اثبات در حالت کلی. از اونجایی که راه دوم کلی تر از راه اول ه به گفتن راه دوم بسنده می کنیم :دی حالا خود راه:

اگر اصطلاحات یا قضیه های استفاده شده در این راه حل را نمی دانید صفحه ۱۱۴ و ۱۱۵ وست (در نسخه ی انگلیسی که میوفته تو بخش ۳.۱) را نگاه کنید کلش هست تو اون دو صفحه :دی

یک گراف دوبخشی از روی این جدول می سازیم به این صورت:
به ازای هر سطر در بخش بالا و به ازای هر ستون در بخش پایین یک راس می گزاریم. و بین دو سطر و ستون یال می گزاریم به شرطی که در خانه ی آن سطر و ستون در حدول درخت وجود داشته باشد.

ما در این سوال می خواهیم ثابت کنیم که می توان حداکثر نصف درختان (یال ها) را انتخاب کرد به طوری که در هر سطر و ستون (راس ها) حداقل یک درخت وجود داشته باشد. این گزاره دقیقن مترادف با این است که ثابت کنیم تعداد اعضای کوچکترین پوشش یالی این گراف کوچکتر یا مساوی نصف تعداد کل یال هاست.

کوچکترین پوشش راسی این گراف را در نظر می گیریم. آن را مجموعه A می نامیم و مجموعه ی متمم آن را B . می دانیم بین هیچ دو راسی که هر دو در مجموعه B اند یالی وجود ندارد زیرا حداقل یک سر از هر یال در پوشش راسی قرار دارد. حال چون درجه تمام رئوس مجموعه B حداقل ۲ است و هیچ یالی هم در بین خودشان وجود ندارد تعداد یال های بین دو مجموعه A و B حداقل ۲ برابر اندازه ی مجموعه B است: $e \geq 2*|B|$ (نتیجه ۱)

راه حل سری اول ۳+۱ – شازززز
۱۳۹۰/۸/۶

حال طبق قضیه $Gallai$ اندازه بزرگترین تطابق + اندازه کوچکترین پوشش یالی برابر n است. (نتیجه ۲)

هم چنین طبق قضیه $König$ در گراف دو بخشی ما اندازه بزرگترین تطابق برابر اندازه ی کوچکترین پوشش راسی است که اگر این را در نتیجه ۲ جای گزاری کنیم نتیجه می گیریم اندازه ی کوچکترین پوشش راسی + اندازه ی کوچک ترین پوشش یالی برابر n است. (نتیجه ۳)

هم چنین مجموعه B نیز متمم کوچکترین پوشش راسی بود: $n=|A|+|B|$ (نتیجه ۴)

از دو نتیجه ۳ و ۴ بدست می آید که اندازه B برابر با اندازه کوچکترین پوشش یالی است و با جای گزاری آن در نتیجه ۱ به این نتیجه می رسیم: تعداد یال ها بزرگ‌تر مساوی دو برابر اندازه کوچکترین پوشش یالی است که این همان چیزی بود که می خواستیم ثابت کنیم.

سوال سوم •• طراح: سعید ایلچی

n را تعداد شهر ها بگیرید و دنباله ی $d_1, d_2, \ldots, d_n$ را تعداد جاده هایی که به شهرهای ۱ تا n وصل است.

حالا $cost$ را برابر بگیرید با جفت جاده هایی که با هم تقاطع دارند.

این مقدار را به ۲ صورت می شماریم.

از یک طرف با توجه به شرط آخر شازززانه بودن ، این مقدار برابر n است .

از سوی دیگر این مقدار برابر است با $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}$ به طوری که $\binom{n}{r}$ برابر است با تعداد راه های انتخاب r شی از n شی متمایز.

حال می توان ثابت کرد که این مجموع در $d_1=d_2=\ldots=d_n=2$ کمترین مقدار خود را می گیرد. فرض کنید این طور نباشد و مینیمم در حالت دیگری اتفاق بیافتد. در این صورت i ای داریم که $d_i>2$ و j داریم که $d_j<2$ حال از d_i یکی کم و به d_j یکی اضافه کنید. واضح است که مجموع کم میشود پس این مجموع در $d_1=d_2=\ldots=d_n=2$ مینیمم است.

حال چون اگر $d_1=d_2=\ldots=d_n=2$ این مجموع مساوی n میشود. پس $d_1=d_2=\ldots=d_n=2$ که این همان حکم مساله است.