پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۳

پاسخ کلیدی:

۱. ۲۲

۲. ۱۳۶۵

۳. $\frac{۱}{۲}$

۴. ۲۱۶

۵. $\frac{۱}{۵}$

۶. $\frac{۳۷}{۷۲}$

۷. ۳۸

۸. $\frac{۱۵}{۴۴}$

۹. ۷۶۸۰

۱۰. ۵۶۷

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۳

پاسخ تشریحی:

۱. اگر پاسخ ۹ یا ۱۰ تا از پرسش‌ها یک‌سان باشد، ما دست کم به ۴ سوال، پاسخ صحیح خواهیم داد. از طرفی حالتی را در نظر بگیرید که هر گزینه، پاسخ دست کم ۲ سوال باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید پاسخ دست کم ۵ تا از سوال‌ها، گزینه‌ی ۱ باشد. اگر ما به ۵ سوال با گزینه‌ی ۱، پاسخ گزینه‌ی ۲ و به دیگر سوال‌ها، پاسخ گزینه‌ی ۱ بدهیم، دست کم به ۷ سوال پاسخ غلط خواهیم داد.

پس باید تعداد حالاتی را بشماریم که پاسخ ۹ یا ۱۰ تا از پرسش‌ها یک‌سان باشد. به ۲ حالت گزینه‌ای را که پاسخ دست کم ۹ سوال است، انتخاب می‌کنیم. انتخاب پرسش‌ها نیز $\binom{۱۰}{۹}+\binom{۱۰}{۱۰}=۱۱$ حالت دارد. پس پاسخ برابر $۲\times ۱۱ = ۲۲$ است.

۲. اگر کوچک‌ترین عضو a باشد، بزرگ‌ترین عضو $۱۳-a$ خواهد بود و هر یک $۱۲-۲a$ عضو بین آن‌ها، ۲ حالت دارند. پس با احتساب aـ‌های مختلف $(۰, ۱, \dots, ۶)$، پاسخ برابر

$$۲^{۱۰}+۲^{۸}+\dots+۲^{۰}=۱۳۶۵$$

است.

۳. می‌توان فرض کرد، حتی اگر برنده زودتر از دست هفتم مشخص شود، بازی‌کنان تمام ۷ دست را بازی می‌کنند و این کار، برنده را تغییر نخواهد داد. به این ترتیب احتمال بردن ابوالفضل در دست nـ‌ام، برابر احتمال برد روزبه در دست $۸-n$ـ‌ام خواهد بود. بنابراین طبق تقارن، پاسخ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۴. به !۴ حالت، خانه‌های قرمز را انتخاب می‌کنیم. یکی از خانه‌های قرمز را در نظر می‌گیریم. خانه‌ی آبی هم‌سطر آن ۳ حالت و خانه‌ی آبی هم‌ستون آن نیز ۳ حالت دارد. ۲ خانه‌ی آبی باقی‌مانده به طور یکتا تعیین می‌شوند. پس پاسخ برابر $۲۴\times ۳\times ۳ = ۲۱۶$ است.

۵. احتمال برد ابوالفضل را p در نظر بگیرید. اگر ابوالفضل برده باشد، یکی از دو حالت زیر رخ داده است:

- ابوالفضل تیر اول را به هدف زده باشد و روزبه تیر اول را به هدف نزده باشد که احتمال آن، $\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$ است.
- هر دو نفر، تیر اول را به هدف زده باشند که احتمال آن، $\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$ است و در ادامه‌ی کار، ابوالفضل به احتمال p می‌برد.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۳

پس:

$$p = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} \times p$$

پس پاسخ برابر $p = \frac{۱}{۵}$ است.

۶. تاس‌ها را با شماره‌های ۱, ۲, ۳ شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم اعداد تاس‌ها، به ترتیب x, y, z باشند. احتمال این را محاسبه می‌کنیم که نتوان با این اعداد، یک مثلث تشکیل داد. برای این کار، باید $x \geq y + z$ یا $y \geq x + z$ یا $z \geq x + y$ باشد. احتمال این ۳ امر برابر است. پس کافی است یکی را حساب کنیم و حاصل را در ۳ ضرب کنیم. احتمال این که $x \geq x + y$ باشد، برابر است با:

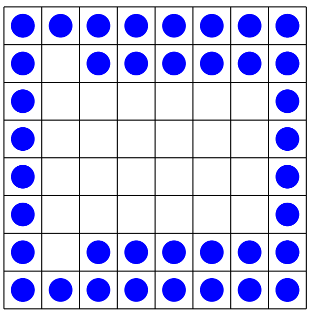
$$\frac{۰ + ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵}{۶^۳} = \frac{۳۵}{۲۱۶}$$

پس پاسخ برابر

$$۱ - ۳ \times \frac{۳۵}{۲۱۶} = \frac{۳۷}{۷۲}$$

است.

۷. اگر خانه‌های تخته شترنج را به صورت شترنجی با سیاه و سفید رنگ کنیم، هر قطر فقط یک رنگ دارد. پس خانه‌های سیاه و خانه‌های سفید در محاسبه‌ی پاسخ مسئله مستقل از یک‌دیگر هستند. با در نظر گرفتن یک جهت از قطرها، تعداد خانه‌های قطرهای سیاه‌رنگ، به ترتیب ۲, ۴, ۶, ۸, ۶, ۴, ۲ است؛ پس حداکثر $۱۹ = ۲ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲$ مهره‌ی فیل در خانه‌های سیاه داریم. به همین ترتیب، حداکثر ۱۹ مهره‌ی فیل در خانه‌های سفید خواهد بود. پس پاسخ حداکثر برابر ۳۸ است. برای ۳۸ نیز، مثال زیر را در نظر بگیرید:



پس پاسخ برابر ۳۸ است.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۳

۸. احتمال این که ابوالفضل با عدد n شروع کند و با عدد ۱ کار را تمام کند، p_n در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

- ابوالفضل با یکی از ارقام ۲ و ۴ شروع کند: در این حالت، اولین باری که رقم ۱ یا ۳ را بنویسد، کار تمام می‌شود (چرا؟). پس $p_۲ = p_۴ = \frac{۱}{۲}$ است.
- ابوالفضل با رقم ۱ شروع کند: اگر رقم بعدی، یکی از ارقام ۱، ۲ و ۴ باشد، کار تمام می‌شود و اگر ۳ باشد، به حالت $p_۳$ می‌رسیم. پس $p_۱ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \times p_۳$ است.
- ابوالفضل با رقم ۳ شروع کند: اگر رقم بعدی، ۲ یا ۴ باشد، کار تمام است. هم‌چنین اگر رقم بعدی ۳ باشد به حالت $p_۳$ و اگر ۱ باشد به حالت $p_۱$ می‌رویم. پس $p_۳ = \frac{۱}{۴} \times p_۳ + \frac{۱}{۴} \times p_۱$ است.

با حل معادلات به دست آمده برای $p_۱, p_۳$ به دست می‌آید:

$$p_۳ = \frac{۱}{۱۱}, p_۱ = \frac{۳}{۱۱}$$

پس پاسخ برابر

$$p = \frac{۱}{۴}(p_۱ + p_۲ + p_۳ + p_۴) = \frac{۱۵}{۴۴}$$

است.

۹. بین هر دو سکه، یک دکمه می‌گذاریم. هرگاه دو سکه‌ی مجاور را پشت و رو می‌کنیم، عملن دکمه‌ی بین آن‌ها را فشار داده‌ایم. دکمه‌ها به ترتیب باید زوج، زوج، فرد، فرد، زوج، زوج، فرد و فرد بار فشار داده شوند. این که این ترتیب زوج و فرد، از کجای دایره شروع شود، ۴ حالت دارد (چرا؟). پس اکنون به ازای هر دکمه می‌دانیم باید فرد بار زده شود یا زوج بار. دکمه‌های فرد باید حداقل یک بار فشار داده شود و علاوه بر این‌ها، یک دکمه باید دو بار زده شود. دو حالت داریم:

- این دکمه از دکمه‌های فرد باشد که $\frac{۶!}{۳!}$ حالت برای ترتیب دکمه‌ها داریم. انتخاب این دکمه نیز ۴ حالت دارد.
- این دکمه از دکمه‌های زوج باشد که $\frac{۶!}{۲!}$ حالت برای ترتیب دکمه‌ها داریم. انتخاب این دکمه نیز ۴ حالت دارد.

پس پاسخ برابر است با:

$$۴ \times (۴ \times \frac{۶!}{۳!} + ۴ \times \frac{۶!}{۲!}) = ۷۶۸۰$$

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۳

۱۰. ثابت می‌کنیم اگر 3^{2n} کارت با شماره‌های $1, 2, \ldots, 3^{2n}$ داشته باشیم، پس از $2n$ مرحله، عدد کارت آخر (c)، خاصیت زیر را دارد:

$$3^n \leq c \leq 3^{2n} - 3^n + 1$$

اگر این حکم را ثابت کنیم، پاسخ مسئله برابر $3^6 - 2 \times 3^4 + 2 = 567$ خواهد شد.

به اثبات حکم می‌پردازیم. c در مرحله‌ی $(2n - 1)$ـ‌ام، بزرگ‌ترین کارت در میان ۳ کارت بوده است. هر کدام از این ۳ کارت، در مرحله‌ی $(2n - 3)$ـ‌ام، بزرگ‌ترین کارت در میان ۳ کارت بوده‌اند؛ پس c بزرگ‌ترین کارت در میان ۹ کارت بوده است. به همین ترتیب ثابت می‌شود c بزرگ‌ترین کارت در میان 3^n کارت بوده است. پس $c \geq 3^n$. به همین روش با در نظر گرفتن مراحل زوج ثابت می‌شود $c \leq 3^{2n} - 3^n + 1$.

حال ثابت می‌کنیم هر $3^n \leq c \leq 3^{2n} - 3^n + 1$ قابل دست‌یابی است. کافی است با استقرا روی i ثابت کنیم می‌توان طوری اعمال را انجام داد که پس از $2i$ مرحله، دست کم $3^{n-i} - 1$ عدد بزرگ‌تر از c و دست کم $3^{n-i} - 1$ عدد کوچک‌تر از c وجود داشته باشد. به ازای $i = 0$، حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای i برقرار باشد و می‌خواهیم حکم را به ازای $i + 1$ ثابت کنیم. فرض کنید اعداد باقی‌مانده پس از مرحله‌ی $(2i)$ـ‌ام،

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{3^{2(n-i)}}$$

باشند که c یکی از آن‌هاست. اعداد را به شکل زیر، گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \ldots, \{a_{3^{n-i}} - 5, a_{3^{n-i}} - 4, a_{3^{n-i}} - 3\}$$

باقی اعداد را نیز طوری گروه‌بندی می‌کنیم که عدد c و $(3^{n-i} - 1)$ـ‌امین عدد از نظر بزرگی، بزرگ‌ترین اعداد دسته‌های خود باشند. پس از انجام گام $(2i + 1)$ـ‌ام، دست کم $3^{n-i-1} - 1$ عدد کوچک‌تر از c و $3^{n-i} - 1$ عدد بزرگ‌تر از c باقی می‌مانند. در مرحله‌ی $2i + 2$، مانند روش قبل، این بار $3^{n-i} - 3$ عدد بزرگ‌تر را به دسته‌های ۳ـ‌تایی تقسیم می‌کنیم و باقی اعداد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد c و $(3^{n-i-1} - 1)$ـ‌امین عدد از نظر کوچکی، کوچک‌ترین عدد دسته‌ی خود باشند. به این ترتیب خواسته‌ی ما برآورده می‌شود و حکم ثابت می‌شود.