آزمون تشریحی مرحله دو شازززز، تیر ۱۳۹۹

قبل خواندن راه حل ها، یه اندازه کافی رو سوال ها وقت بزارید.

۱- ابتدا اثبات میکنیم جواب حداقل $2n-1$ است. برای این کار مثالی ارائه میدهیم که حداقل $2n-1$ جعبه نیاز باشد. $2n-1$ عدد شیرینی با وزن $\frac{n}{2n-1}$ در نظر بگیرید. در هر جعبه حداکثر یک شیرینی میتوان قرار داد پس به $2n-1$ جعبه نیاز داریم.

حال کافی است اثبات کنیم که با $2n-1$ جعبه میوان دسته بندی را ارائه داد. فرض کنید حالتی وجود دارد که $2n$ تا جبعه نیاز داریم. میدانیم که حمع شیرینی های هر دو جعبه از یک بیشتر است. (در غیر این صورت تعداد جعبه های مورد نیاز کمتر از $2n$ است). پس

$a_1+a_2>1, a_3+a_4>1, \ldots, a_{n-1}+a_n>1$ است که با جمع کردن این نامساوی ها نتیجه میشود که $\sum_{i=1}^{n} a_i > n$. که این با فرض سوال در تناقض است، پس حالتی وجود ندارد که $2n$ جعبه نیاز باشد.

۲- برای حل این سوال یک گراف G میسازیم که در ابتدا دارای n راس و ۰ یال است. سپس به ازای هر دور مانند C، اگر یالی داشت که تعداد مولفه همبندی G را کاهش میداد آن یال را اضافه میکنیم.

اگر این چنین نبود یعنی تمام راس های این دور با یال های قبلی در یک مولفه همبندی هستند. میدانیم تمام مولفه همبندی ها دوبخشی است. (اگر دو بخشی نباشد دور فرد مورد نظر پیدا میشود).

چون که $|C|$ فرد است پس دو راس مجاور در C وجود دارد که در یک بخش از مولفه همبندی دو بخشی مورد نظر هستند. اگر یال بین این دو راس را اضافه کنیم قطعا در گراف حاصل دور فرد ایجاد میشود.

حال چون ما n دور داریم و حداکثر $n-1$ مرحله تعداد مولفه ها کم میشود قطعا در یک مرحله نمی توانسته ایم تعداد مولفه ها را کاهش دهیم و دور فرد ایجاد کرده ایم.

۳- الف) یک مثال ارائه میدهیم سپس اثبات میکنیم که مثال درستی است.

$$S=\{3.2^k|0\leq k\leq 5\}\cup\{3.2^5-1, 3.2^5+1\}=\{3,6,12,24,48,95,96,97\}$$

حال این پرسش پیش می آید که چرا این وضع دهی ها معتبر است.

برهان خلف میزنیم و تیم در نظر میگیریم که با هم برابرند. فرض میکنیم که جمع امتیاز دو دسته مورد نظر بر ۳ بخش پذیر است. اگر ۹۷ شرکت کند حتما باید با ۹۵ هم تیمی باشد تا جمع امتیاز تیمش بر ۳ بخش پذیر باشد حال میدانیم ۹۵ + ۹۷ از جمع امتیاز بقیه اکیدا بیشتر است پس ۹۷ نمیتواند در تیمی حضور داشته باشد. ۹۵ هم با همین استدلال در تیمی نیست.

بقیه نیز نمیتواند دو تا تیم برابر باشند چون که اگر ۳ را از انها فاکتور بگیریم چند تا توان ۲ متوالی میشوند که میدانیم نمیتوان توان های دو متمایز را به دو دسته مساوی تقسیم کرد. (جمع بزرگترین از بقیه بیش تر است).

اگر جمع امتیاز دو تیم بر ۳ بخش پذیر نباشد حتما ۹۷ در یک دسته و ۹۵ در دسته دیگر است. چون فقط این دو عدد بر ۳ بخش پذیر نیستند. حال اگر جمع امتیاز ها را به پیمانه ۳ نگاه کنیم دسته ۹۵ دارای پیمانه ۲ و دسته ۹۷ دارای پیمانه ۱ است. (بقیه اعضا چون مضرب ۳ اند تاثیر ندارند). پس در این حالت هم ممکن نیست جواب داشته باشیم.

چون در دو حالت قبلی ممکن نبود جواب وجود داشته باشد و به جز این دو حالت حالت دیگری وجود ندارد پس در کل حالتی وجود ندارد که متناقض فرض خلف ما است.

ب) اگر دو تا زیر مجموعه از افراد جمع امتیاز هاشون برابر باشد اگر قسمت اشتراک این دو زیر مجموعه را حذف کنیم دو تیم با جمع امتیاز برابر به دست می آید. پس کافیست اثبات کنیم که دو زیر محموعه با جمع برابر به ازای زیر مجموعه های ده تایی وجود دارد. میدانیم جمع کل حداکثر ۱۰۰۰ است. (کران های بهتری وجود دارد ولی ۱۰۰۰ برای ما کافی است). تعداد زیر مجموعه های ممکن 2^{10} تا است پس طبق لانه کبوتری دو زیر مجموعه با حمع برابر وجود دارند. پس ثابت میشود که هیئت داوران همیشه میتوانند دو تیم را مشخص بکنند

امتیازی: اثبات کنید که به ازای مجموعه های ۹ تایی هم دو تیم با جمع برابر وجود دارند.

۴- بزرگه همواره میبرد. میدانیم هر عدد طبیعی مانند n رو میشه به صورت ضرب دو عدد x و y نوشت به صورتی که x بزرگترین عددی است که هم مربع کامل و هم عامل n باشد.(در ادامه هر گاه عددی را به صورت ضرب دو عدد نوشتیم منظور همین x و y است).
حال بزرگه در هر مرحله عدد حاصل را به شکل زیر مینویسد، سپس x^2 را کم میکند. اگر y یک باشد برنده میشود. در غیر این صورت $n = x.y \to n - x = x.(y-1) = x'.y'$. میتوان به راحتی اثبات کرد که $y' < y$ است. حال کوچیکه اگر به توان یک عدد زوج برساند که ببزرگه در مرحله بعدی برنده میشود. اگر به توان یک عدد فرد برسانند و عدد جدید به صورت $x.y$ باشد y همان y' است.
پس هر مرحله که بزرگه بازی میکند y کم میشود و هر مرحله که کوچیکه بازی می کند کمتر مساوی میشود. پس حداکثر بعد y مرحله قطعا بزرگه میبرد.

امتیازی: کمترین تعداد مراحل مورد نیاز برای اینکه بزرگه برنده بشود را بدست بیارید.