

آزمون کوتاه پاسخ شماره ۶

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره منفی ندارد اما در بین افراد با نمره برابر، در رتبه بندی کسی برتر است که تعداد غلط کمتری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ را که از ۲۷ مکعب واحد ساخته شده است، روی زمین گذاشته ایم. به چند طریق می توان دو مکعب واحد از یک بلوک $3 \times 3 \times 1$ انتخاب کنیم؛ طوری که زاویه ی خط متصل کننده ی مراکز آن دو مکعب واحد با زمین، 45° باشد؟

۲. فرض کنید تعدادی عدد داریم. میانه ی این اعداد به این صورت تعریف می شود:

اعداد را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم؛

- اگر تعداد اعداد فرد باشد، میانه برابر عدد وسط است.
- اگر تعداد اعداد زوج باشد، میانه برابر میانگین دو عدد وسط است.

مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, 2008\}$ را در نظر بگیرید. برای هر زیرمجموعه ی ناتهی و سره $A \subset S$ ، میانه ی آن زیرمجموعه را در نظر می گیریم. میانگین این اعداد چیست؟

۳. ابوالفضل در مزرعه ی خود ۵ گاو، ۴ خوک و ۷ اسب دارد. او به چند طریق می تواند حیوان ها را به دسته های دوتایی تقسیم کند؛ طوری که دو حیوان هر دسته، نوع متفاوتی داشته باشند؟ توجه کنید حیوان های هم نوع نیز اسم دارند و متمایز هستند.

^۱زیرمجموعه ی سره، زیرمجموعه ای است که برابر خود مجموعه نباشد

آزمون کوتاه پاسخ ۶

۴. فرض کنید در ابتدا در نقطه‌ی $(0, 0)$ مختصات هستیم و هر مرحله می‌توانیم یک واحد به بالا، پایین، چپ یا راست برویم. پس از ۱۰۰ مرحله در چند نقطه‌ی متفاوت می‌توانیم باشیم؟

۵. فرض کنید S ، کوچک‌ترین زیرمجموعه از اعداد صحیح باشد که ۰ را داشته باشد و به ازای هر $x \in S$ ، اعداد $3x, 3x+1$ نیز در S باشند. تعداد اعداد کمتر از ۲۰۰۸ را که در S هستند، بیابید.

۶. یک جدول سودوکو، یک جدول 9×9 است که خانه‌های آن با اعداد $1, 2, \dots, 9$ پر می‌شود و همچنین هر سطر، هر ستون و هر یک از زیرجدول‌های 3×3 مشخص شده در شکل زیر، شامل تمام اعداد $1, 2, \dots, 9$ باشند. یک جدول سودوکو در نظر بگیرید که دو عدد آن طبق شکل زیر مشخص شده‌اند. احتمال آن را بیابید که در خانه‌ی علامت‌دار، عدد ۳ قرار بگیرد.

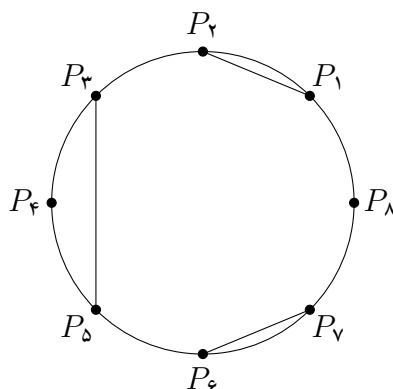
۱								
	۲							
			●					

۷. فرض کنید P_1, P_2, \dots, P_8 ، ۸ نقطه‌ی متفاوت روی دایره باشند. می‌خواهیم تعدادی از پاره‌خط‌های دوبه‌دوی بین نقاط را بکشیم؛ طوری که:

- هر P_i ، انتهای حداکثر یک پاره‌خط باشد.
- هیچ دو پاره‌خطی متقاطع نباشد.

آزمون کوتاه پاسخ ۶

برای مثال، یک حالت معتبر در زیر کشیده شده است:



به چند طریق این کار ممکن است؟

۸. به چند طریق می‌توان ۸ زیرمجموعه‌ی A_1, A_2, \dots, A_8 از $\{1, 2\}$ انتخاب کرد؛ طوری که به ازای هر دو عدد طبیعی m, n ، اگر m بر n بخش پذیر باشد، $A_n \subset A_m$ باشد.

۹. فرض کنید در ابتدا در نقطه‌ی $(0, 0)$ باشیم. فرض کنید در مرحله‌ای در نقطه‌ی (x, y) باشیم. در این صورت:

- احتمال رفتن ما به هر یک از خانه‌های $(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)$ برابر $1/4$ است.
- احتمال رفتن ما به هر یک از خانه‌های $(x-1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y-1), (x+1, y+1)$ برابر $1/5$ است.
- به احتمال $1/4$ نیز در این مرحله حرکت نمی‌کنیم.

احتمال آن را بیابید که پس از ۶ مرحله، در نقطه‌ای با مختصات زوج باشیم؛ یعنی هم x آن زوج باشد و هم y آن.

۱۰. تعداد هشت‌تایی‌های مرتب $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ از اعداد صحیح نامنفی را بیابید؛ طوری که به ازای هر $1 \leq k \leq 4$ و $0 \leq a_k \leq k$ و $19 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4$ باشد.

موفق باشید

—اسدی