

## آزمون کوتاه پاسخ شماره ۱

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره منفی ندارد اما در بین افراد با نمره برابر، در رتبه بندی کسی برتر است که تعداد غلط کمتری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل  $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$  باشد.

۱. ۲۰۰۳ لامپ با شماره های ۱, ۲, ..., ۲۰۰۳ دور یک دایره قرار داده شده اند. در ابتدا هر لامپ، می تواند خاموش یا روشن باشد. در یک لحظه، به طور همزمان روی لامپ ها، عمل زیر را انجام می دهیم:

”به ازای هر لامپ  $L$ ، اگر دو لامپ بعدی آن (دو لامپ سمت راستش) در یک وضعیت بودند،  $L$  را روشن و در غیر این صورت آن را خاموش می کنیم.”

به ازای چند وضعیت اولیه از لامپ ها، پس از این کار، تمام لامپ ها روشن می شوند؟

۲. یک جدول  $۱۰ \times ۲$  داریم. دو خانه از جدول را مجاور می گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به چند طریق می توان ۹ تا از خانه های جدول را علامت زد؛ طوری که هیچ دو خانه ای علامت داری، مجاور نباشند؟

۳. ابوالفضل و روزبه با هم بازی می کنند. هر دست را به احتمال ۶۰٪ روزبه و به احتمال ۴۰٪ ابوالفضل می برد. هر گاه اختلاف تعداد دست های برده ای این دو نفر به ۲ دست برسد، بازی تمام می شود و کسی کل بازی را می برد که تعداد دست بیشتری برده باشد. احتمال این که بازی را روزبه ببرد، چقدر است؟

۴. در یک کشور، ۱۰۰ نماینده ی مجلس وجود دارد که هر کدام، ۴ دست یار دارند. در این مجلس،  $k$  کمیسیون وجود دارد که هر یک می تواند به یکی از صورت های زیر باشد:

• ۵ سناتور

• ۴ سناتور و ۴ دست یار

## آزمون کوتاه پاسخ ۱

• ۲ سناتور و ۱۲ دست یار

می‌دایم هر سناتور در ۵ کمیسیون و هر دست یار در ۳ کمیسیون عضو است. توجه کنید لزومی ندارد که اگر یک دست یار در کمیسیون باشد، نماینده‌ی متناظر آن دست یار نیز در کمیسیون باشد.  $k$  چند است؟

۵. می‌خواهیم اعداد  $۱, ۲, \dots, ۱۰$  را با سه رنگ قرمز، سبز و آبی رنگ کنیم؛ طوری که هیچ دو عدد  $a, b$  با اختلاف فرد، هم‌رنگ نباشند. توجه کنید لزومی ندارد از هر سه رنگ استفاده شود. به چند طریق این کار ممکن است؟

۶. در یک کلاس، ۳۴ دانش‌آموز وجود دارند. صندلی‌های کلاس، در ۵ ردیف هستند که هر ردیف، ۷ صندلی دارد. امروز تنها صندلی وسط کلاس خالی است و روی هر صندلی دیگر، یک دانش‌آموز نشسته است. فردا، دوباره دانش‌آموزان روی صندلی‌ها خواهند نشست؛ طوری که صندلی هر دانش‌آموز مجاور با صندلی امروزش (صندلی جلویی، عقبی، راستی یا چپی) باشد. فردا به چند طریق، دانش‌آموزان می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند؟

۷. نامتناهی جعبه با شماره‌های  $۱, ۲, \dots$  داریم. ۳ توپ داریم. هر توپ مستقل از توپ‌های دیگر، به احتمال  $\frac{1}{n}$  در جعبه‌ی شماره  $n$  قرار دارد. احتمال این که جعبه‌ای با حداقل ۲ توپ وجود داشته باشد، چقدر است؟

۸. برای یک زیرمجموعه‌ی  $S \subseteq \{1, 2, \dots, 15\}$ ، عدد  $n$ ، یک لنگر برای  $S$  محسوب می‌شود، اگر هر دو عدد  $n, n + |S|$  عضو  $S$  باشند. به طور میانگین، یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی داده شده، چند لنگر دارد؟

۹. در یک پردیس، ۱۰ باشگاه و تعدادی دانش‌جو وجود دارد. برای هر دو دانش‌جو، باشگاهی وجود دارد که دقیقاً یکی از آن دو نفر، عضو باشگاه باشد. برای هر سه دانش‌جو نیز، باشگاهی وجود دارد که تعداد فردی از آن سه نفر، عضو باشگاه باشند. بیشینه‌ی تعداد دانش‌جوهای پردیس، چقدر است؟

۱۰. در ابتدا عدد  $۲۰۰۳$  را داریم. هر مرحله اگر عدد  $N$  را داشته باشیم، این عدد به احتمال برابر به یکی از اعداد  $۱, ۲, \dots, N-1$  تبدیل می‌شود. این تبدیل‌ها تا وقتی ادامه پیدا می‌کند که عدد برابر ۰ شود. به چه احتمالی در حین انجام اعمال، تمام اعداد  $۱, ۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$  دیده خواهند شد؟

موفق باشید

—اسدی