پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۴

پاسخ کلیدی:

۱. ۱۱

۲. ۱۹۵۳

۳. ۴۸

۴. ۳۵۷

۵. ۱۲۵

۶. ۱۰۲

۷. $\frac{۶۳}{۲۶۲۱۴۴}$

۸. ۲۸۸

۹. ۳۵۰۷

۱۰. ۲۵۳

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۴

پاسخ تشریحی:

۱. فرض کنید n نفر در هر سه المپیاد، فعالیت کنند و تعداد افراد المپیاد کامپیوتر $۲n$ باشد. طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$۸۵ = (۷۴ + ۲۶ + ۲n) - (۱۷ + ۱۸ + ۱۳) + n$$

پس پاسخ برابر $n = ۱۱$ است.

۲. عبارت داده شده، تعداد دنباله‌های ناکاهشی به طول ۶۱ از اعداد $\{۰, ۱, ۲\}$ را می‌شمارد. کافی است تعداد بارهای آمدن هر رقم را محاسبه کنیم و دنباله به طور یکتا تعیین می‌شود. پس پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۰ + x_۱ + x_۲ = ۶۱$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است. پس پاسخ برابر است با:

$$\binom{۶۱ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۶۳}{۲} = ۱۹۵۳$$

۳. فرض کنید رأس A از مکعب در نقطه‌ی $(۰, ۰, ۰)$ و رأس B، در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ باشد. مورچه در ۳ یا ۵ حرکت می‌تواند به B برسد. اگر بخواهد با ۳ حرکت به نقطه‌ی B برسد، در هر جهت هر یک از محورهای مختصات، باید یک واحد به بالا برود و $۳! = ۶$ حالت برای انجام این کار داریم. اگر مورچه بخواهد ۵ حرکت انجام دهد، در جهت دو تا از محورهای مختصات، باید ۱ واحد به بالا برود و در جهت باقی‌مانده، باید ۲ واحد به بالا و ۱ واحد به پایین بیاید. محور مذکور را به ۳ حالت انتخاب می‌کنیم و حرکات به $\frac{۵!}{۳!} = ۲۰$ حالت قابل انجام است. از این ۲۰ حالت، در ۶ حالت، مورچه در گام سوم به B می‌رسد که نامطلوب است؛ پس پاسخ برابر است با:

$$۶ + ۳ \times (۲۰ - ۶) = ۴۸$$

۴. در کل $۱۵ = ۳ + ۷ + ۳ + ۲$ نقطه داریم که $۴۵۵ = \binom{۱۵}{۳}$ سه‌تایی ممکن برای مثلث می‌سازند. از این سه‌تایی‌ها، $۹۸ = \binom{۲+۷}{۳} + \binom{۲+۳}{۳} + \binom{۲+۲}{۳}$ سه‌تایی، هم‌خط هستند. پس پاسخ برابر $۴۵۵ - ۹۸ = ۳۵۷$ است.

۵. یکی از افراد دور دایره مانند A را در نظر بگیرید و فرض کنید غذا به او داده شود. از این فرد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کنیم و فواصل بین افراد غذادار را می‌بینیم. تعداد این فواصل، ۶ تاست و این فواصل در مجموع $۱۵ - ۶ = ۹$ تا هستند که هر یک می‌توانند یکی از اعداد $۰, ۱, ۲$ باشند. تنها حالت‌های ممکن برای این ۶ فاصله جایگشتی از $۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱$ یا جایگشتی از $۲, ۲, ۲, ۲, ۱, ۰$ است. پس این فواصل،

$\frac{۶!}{۳!۳!} + \frac{۶!}{۱!۱!۴!} = ۵۰$ حالت دارند. از طرفی با مشخص کردن فواصل، نحوه‌ی توزیع غذا به طور یک‌تا تعیین می‌شود. پس تعداد حالاتی که غذا به نفر A می‌رسد، ۵۰ حالت است.از طرفی احتمال رسیدن غذا به A برابر $\frac{۶}{۱۵}$ است. پس تعداد کل حالات، برابر است با:

$$۵۰ \times \frac{۱۵}{۶} = ۱۲۵$$

۶. یکی از اعداد، باید ۵ باشد. ضرب دو عدد دیگر باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. این امر وقتی امکان‌پذیر است که هر دو عدد زوج باشند یا یکی از آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر باشد و دیگری فرد باشد. این که کدام عدد ۵ باشد، ۳ حالت دارد. برای ۲ عدد دیگر،

$$۴ \times ۴ + ۲ \times ۲ \times ۵ = ۳۶$$

حالت داریم. پس پاسخ برابر $۳ \times ۳۶ = ۱۰۲$ است.

۷. در هر لحظه از مسابقه، گوییم آن لحظه *زنده* است؛ اگر در آن لحظه، هم‌چنان ابوالفضل و روزبه در مسابقه باشند. یک لحظه‌ی زنده را *فراق‌وار* گوییم؛ اگر روزبه و ابوالفضل، روبه‌روی یک‌دیگر در میز باشند.

می‌توانید بررسی کنید اگر یک لحظه‌ی زنده، فراق‌وار شود، تا پایان بازی، هر لحظه‌ی زنده، فراق‌وار باقی خواهد ماند. هم‌چنین می‌توانید بررسی کنید اگر یک لحظه‌ی زنده، فراق‌وار نباشد، به احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر در راند بعد یک لحظه‌ی زنده، فراق‌وار خواهد بود.

در هر راند به احتمال $\frac{۱}{۴}$، لحظه، زنده خواهد ماند. هم‌چنین به ازای هر $۱ \leq k \leq ۵$، پس از پایان راند kـام، وضعیت به احتمال $\frac{۱}{۸^k}$، زنده و غیر فراق‌وار خواهد بود؛ پس به احتمال $\frac{۱}{۴^k} - \frac{۱}{۸^k}$، لحظه‌ای زنده و فراق‌وار است. در راند ۶ـام، یک وضعیت فراق‌وار به احتمال $\frac{۱}{۴}$ و یک وضعیت غیر فراق‌وار به احتمال $\frac{۱}{۸}$، زنده خواهد ماند. هم‌چنین توجه کنید یک وضعیت در پایان راند ۶ـام، اگر زنده باشد، حتمن فراق‌وار است. پس به طور کلی‌تر برای هر $۱ \leq k \leq ۶$ می‌توان نتیجه گرفت در پایان راند kـام، وضعیت به احتمال $\frac{۱}{۴^k} - \frac{۱}{۸^k}$، زنده و فراق‌وار خواهد بود. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۱}{۴^۶} - \frac{۱}{۸^۶} = \frac{۲^۶ - ۱}{۸^۶} = \frac{۶۳}{۲۶۲۱۴۴}$$

۸. برای سطر اول، !۴ حالت داریم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید اعداد سطر اول، $۱, ۲, ۳, ۴$ باشند. برای آن که شرط سوم برقرار باشد، سطر دوم تنها ۴ حالت دارد:

- ۳، ۴، ۱، ۲

- ۳، ۴، ۲، ۱
- ۴، ۳، ۱، ۲
- ۴، ۳، ۲، ۱

با حالت‌بندی، باقی‌مانده‌ی جدول در حالات بالا، به ترتیب ۴، ۲، ۲ و ۴ حالت خواهد داشت. پس پاسخ برابر $۴! \times (۴ + ۲ + ۲ + ۴) = ۲۸۸$ است.

۹. گراف ۲ـ منتظم، متشکل از تعداد دور است. ۳ حالت داریم:

- گراف، یک دور ۸ رأسی باشد که $\frac{(۸-۱)!}{۲} = ۲۵۲۰$ حالت داریم (تقسیم بر ۲ به خاطر این است که هر حالت را ۲ بار می‌شماریم. مانند مسئله‌ی جایگشت دوری گردن‌بند است).
- گراف، یک دور ۳ رأسی و یک دور ۵ رأسی باشد که $\binom{۸}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} \times \frac{(۵-۱)!}{۲} = ۶۷۲$ حالت داریم.
- گراف، دو دور ۴ رأسی داشته باشد که $\frac{\binom{۸}{۴}}{۲} \times \frac{(۴-۱)!}{۲} \times \frac{(۴-۱)!}{۲} = ۳۱۵$ حالت داریم (تقسیم بر ۲ به خاطر این است که دورها شماره ندارند).

پس پاسخ برابر $۲۵۲۰ + ۶۷۲ + ۳۱۵ = ۳۵۰۷$ است.

۱۰. $c_{i,j}$ را تعداد دانش‌آموزانی در نظر بگیرید که به پرسش‌های i, j، پاسخ درست داده‌اند $(۱ \le i < j \le ۱۰)$. به همین ترتیب، $w_{i,j}$ را تعداد دانش‌آموزانی در نظر بگیرید که به این دو پرسش، پاسخ درست نداده‌اند.

فرض کنید یک دانش‌آموز به k پرسش، پاسخ درست داده باشد. پس این دانش‌آموز، در مجموع $c_{i,j}$ـ‌ها و $w_{i,j}$ـ‌ها،

$$\binom{k}{۲} + \binom{۱۰ - k}{۲} = k^۲ - ۱۰k + ۴۵ = (k - ۵)^۲ + ۲۰ \ge ۲۰$$

بار آمده است. پس:

$$\sum_{۱ \le i < j \le ۱۰} (c_{i,j} + w_{i,j}) \ge ۲۰n$$

اگر آزمون، خنده‌دار نباشد، به ازای هر i, j داریم:

$$c_{i,j}, w_{i,j} \le ۵۶$$

پس:

$$۲۰n \leq \sum_{۱\leq i<j\leq ۱۰} (c_{i,j}, w_{i,j}) \leq ۲ \times \binom{۱۰}{۲} \times ۱۰ = ۵۰۴۰$$

پس اگر آزمون، خنده‌دار نباشد، داریم $n \leq ۲۵۲$. پس اگر $n \geq ۲۵۳$ باشد، آزمون حتمن خنده‌دار است. کافی است مثالی برای $n = ۲۵۲$ بدهیم که آزمونی خنده‌دار نباشد. در این صورت پاسخ برابر **۲۵۳** خواهد شد. از آن‌جایی که $\binom{۱۰}{۵} = ۲۵۲$، می‌توان به هر یک از دانش‌آموزان یک زیرمجموعه‌ی پنج سواله‌ی متمایز با بقیه، نسبت داد. به این ترتیب، به ازای هر i, j، خواهیم داشت $c_{i,j} = w_{i,j} = ۵۶$. پس پاسخ برابر **۲۵۳** است.