# پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۱۰

**پاسخ کلیدی:**

1. ۹۵
2. $\frac{۱۹}{۴۰}$
3. ۶۱
4. ۳۳۰
5. ۱۳۱۹۲۲
6. ۲۲۲۱۲
7. ۸۴
8. ۶۷۹۵۰
9. $\frac{۱}{۱۲۳۰۳۹۰}$
10. $\frac{۱۱}{۳۲}$

# پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱۰

**پاسخ تشریحی:**

۱. فرض کنید $A$ برابر تعداد بمب‌های دو ستون نخست و $B$، $C$، $D$ و $E$ به ترتیب تعداد بمب‌های ستون‌های سوم، چهارم، پنجم و ششم باشند. داریم: $A+B=۲$ و $B+C+D=۱$ و $D+E=۲$. این تنها در ۳ حالت زیر رخ می‌دهد:

$$(A,B,C,D,E)=(۱,۱,۰,۰,۲),(۲,۰,۰,۱,۱),(۲,۰,۱,۰,۲)$$

۳ حالت بالا به ترتیب برای پر کردن جدول $۱\times۲\times۱۰$، $۲\times۳\times۱۰$ و $۱\times۳\times۵$ حالت دارند که روی هم ۹۵ حالت می‌شود.

۲. مجموع اعداد تاس‌های روزبه را با $R$ و عدد تاس ابوالفضل را با $A$ نشان می‌دهیم. به ازای هر سه عددی که در تاس‌های روزبه بیاید، تنها یک عدد در تاس ابوالفضل وجود دارد که برابر با مجموع این سه عدد است. پس احتمال برابر شدن $R,A$ برابر $\frac{۱}{۲۰}$ است.

حال فرض کنید اعداد تاس‌های روزبه $x,y,z$ و عدد تاس ابوالفضل $d$ و $R<A$ باشد. حالتی را در نظر بگیرید که اعداد تاس‌های روزبه $۷-x,۷-y,۷-z$ و عدد تاس ابوالفضل $۲۱-d$ شود. در این حالت $R>A$ می‌شود و یک تناظر یک‌به‌یک بین حالات $R>A$ و حالات $R<A$ به وجود می‌آید. پس تعداد حالاتی که $R>A$ می‌شود برابر با تعداد حالاتی است که $R<A$ می‌شود. پس پاسخ برابر

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲۰}}{۲}=\frac{۱۹}{۴۰}$$

است.

۳. تعداد حالات مطلوب برابر با تعداد مسیرهای آجری از سطر بالا به سطر پایین است. با روش پویا[1] این مقدار را به دست می‌آوریم:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲ | ۲ | ۲ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۴ | ۴ | ۴ | ۳ |
| ۶ | ۸ | ۸ | ۷ | ۳ |
| ۶ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۵ | ۱۰ |

پاسخ برابر $۶۱=۱۰+۱۵+۱۶+۱۴+۶$ است.

[1] داینامیک

## پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱۰

۴. فرض کنید ابوالفضل در لحظه‌ای در یک نقطه با هر دو مختص زوج باشد. اگر در گام بعد به بالا برود، مجبور است گام بعدی را نیز بالا برود و هم‌چنین اگر گام بعد را به راست برود، مجبور است گام بعدی را نیز راست برود و دوباره به نقطه‌ای با هر دو مختص زوج می‌رسد. پس تعداد مسیرها برابر با تعداد مسیرهای عادی از $(۰,۰)$ به $(۴,۷)$ است که برابر با

$$\binom{۱۱}{۴} = ۳۳۰$$

می‌باشد.

۵. حرکت روزبه به مانند یک مارپیچ خواهد بود. کافی است خطوط افقی و عمودی را که روزبه از روی آن‌ها حرکت می‌کند، مشخص کنیم؛ پس از آن مسیر به طور یک‌تا معیّن می‌گردد. این خطوط باید از بین تمام خطوط ممکن (۵ خط ممکن برای حرکت به بالا زیرا خط آخر حتمن باید انتخاب شود، ۶ خط ممکن برای حرکت به پایین، ۶ خط ممکن برای حرکت به چپ و ۶ خط ممکن برای حرکت به راست) انتخاب شوند. تعداد خطوط جهت‌ها باید برابر باشد؛ پس تعداد مسیرها برابر است با:

$$\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۰}^۳ + \binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}^۳ + \binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}^۳ + \binom{۵}{۳}\binom{۶}{۳}^۳ + \binom{۵}{۴}\binom{۶}{۴}^۳ + \binom{۵}{۵}\binom{۶}{۵}^۳ = ۱۳۱۹۲۲$$

۶. فرض کنید $\pi$ یک جایگشت باشد. منظور از $g(\pi)$ تعداد دورهای گراف جایگشت $\pi$ است. ثابت می‌کنیم $f(\pi) = ۷ - g(\pi)$. عناصر هر دور به طول $k$ از گراف جایگشت $\pi$ را با $k - ۱$ مرحله می‌توان به سر جای خود برد. پس می‌توان هر جایگشت $\pi$ را با $۷ - g(\pi)$ مرحله، مرتب کرد. از طرفی با هر جابه‌جایی، مقدار $۷ - g(\pi)$ حداکثر یک واحد کم می‌شود و این مقدار باید در انتها برابر ۰ شود. پس دست کم $۷ - g(\pi)$ مرحله نیاز است. پس پاسخ برابر

$$۷ \times ۷! - \sum_{\pi} g(\pi)$$

است. از آن‌جایی که تعداد دورهای به طول $k$ در میان کل گراف جایگشت‌ها برابر

$$\binom{۷}{k} \times (k-۱)! \times (n-k)! = \frac{۷!}{k}$$

است، پاسخ برابر

$$۷! - \sum_{k=۱}^{۷} \frac{۷!}{k} = ۲۲۲۱۲$$

می‌باشد.

## پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۱۰

۷. شیر را با ۱ و خط را با ۰ نشان می‌دهیم. $f(n)$ را تعداد رشته‌های دودویی به طول $n$ در نظر بگیرید که زیررشته‌ی متوالی ۱۰۱۰۱۰ ندارند. $g(n)$ را تعداد رشته‌های دودویی به طول $n$ در نظر بگیرید که زیررشته‌ی متوالی ۱۰۱۰۱۰ را دارند، امّا $n-۱$ رقم اول آن شامل زیررشته‌ی متوالی ۱۰۱۰۱۰ نیست. یک رشته از $f(n)$ در نظر بگیرید و سعی کنید با اضافه کردن کم‌ترین تعداد رقم ممکن به انتهای آن، به رشته‌ای برسید که شامل ۱۰۱۰۱۰ باشد. این کم‌ترین تعداد رقم یکی از اعداد $۲,۴,۶$ است. پس با یک تناظر می‌توان دریافت که:

$$f(n)=g(n+۲)+g(n+۴)+g(n+۶)$$

حال به مسئله‌ی احتمال خود برمی‌گردیم. فرض کنید تعداد پرتاب‌های ما $t$ باشد. با استفاده از رابطه‌ی بالا، احتمال این را که تعداد پرتاب‌ها از $n$ بیش‌تر باشد، به دست می‌آوریم:

$$P(t>n)=۴P(t=n+۲)+۱۶P(t=n+۴)+۶۴P(t=n+۶)$$

از طرفی مقدار امید ریاضی خواسته شده برابر با $\sum_{n=۰}^{\infty} P(t>n)$ است؛ زیرا هر پرتاب در این سیگما به اندازه‌ی احتمال رخ‌دادنش محاسبه می‌شود. پس پاسخ برابر

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\Big(۴P(t=n+۲)+۱۶P(t=n+۴)+۶۴P(t=n+۶)\Big)=۴+۱۶+۶۴=۸۴$$

است.

۸. یک گراف ۶ـ‌رأسی بسازید و بین دو رأس $i,j$ یال بکشید، اگر دو خانه‌ی قرمز هم‌سطر یا هم‌ستون در سطرها یا ستون‌های $i,j$ وجود داشته باشد. درجه‌ی هر رأس دقیقن ۲ است و گراف به تعدادی دور افراز می‌شود. با حالت‌بندی روی این دورها پاسخ ۶۷۹۵۰ به دست می‌آید.

توجه: می‌توان با مقداری محاسبات جبری، رابطه‌ی بازگشتی

$$f(n)=n(n-۱)f(n-۱)+\frac{n(n-۱)^۲}{۲}f(n-۲)$$

را به دست آورد که $f(n)$ جواب مسئله برای یک جدول $n\times n$ است.

۹. برای آن که پارکینگ شماره ۱ در انتها پر شود، باید پارکینگ شماره ۲ در ابتدا پر شود (که احتمال آن $\frac{۱}{۱۳۹۵}$ است). اگر پارکینگ ۲ در ابتدا پر شود، پارکینگ ۱۳۹۵ در مرحله‌ی بعد پر می‌شود و پارکینگ‌های $۳,۴,\ldots,۱۳۹۴$ یکی پس از دیگری پر می‌شوند؛ تا به وضعیتی برسیم که هیچ دو پارکینگ مجاور خالی وجود نداشته باشد. این

وضعیت را وضعیت *بحرانی* می‌نامیم. فرض کنید در این وضعیت دقیقن $k$ پارکینگ خالی (شامل ۱ ) وجود داشته باشد. احتمال آن که پارکینگ ۱ در انتها پر شود $\frac{1}{k}$ خواهد بود. پس باید $k$ را محاسبه کنیم و در انتها پاسخ برابر $\frac{1}{1395} \times \frac{1}{k}$ خواهد شد.

فرض کنید $n + 2$ پارکینگ متوالی داریم و در ابتدا پارکینگ شماره ۱ پر شده باشد و طبق قانون گفته شده پارکینگ‌ها یکی پس از دیگری پر شوند. تعداد پارکینگ‌های خالی پس از رسیدن به وضعیت بحرانی را $f(n)$ می‌گوییم. ما می‌خواهیم $f(1392)$ را محاسبه کنیم تا مقدار $k - 1$ به دست آید. با استقرا می‌توان ثابت کرد:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2^{n-1} + 1 & if \quad 2^n \leq x \leq \frac{3}{2} \times 2^n - 2 \\ 2^n & if \quad \frac{3}{2} \times 2^n - 1 \leq x \leq 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

داریم $f(1392) = 881$. پس پاسخ برابر $\frac{1}{1223090} = \frac{1}{881+1} \times \frac{1}{1395}$ است.

۱۰. توابع $f(x) = 1 - x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. داریم $f(f(x)) = x$ و $g(g(x)) = x$. همچنین داریم $f(g(x)) = 1 - \frac{1}{x}$ و $g(f(g(x))) = \frac{x}{x-1}$ و $f(g(f(g(x)))) = \frac{1}{1-x} = g(f(x))$ و در نهایت

$$g(f(g(f(g(x))))) = 1 - x = f(x)$$

پس به ازای هر $n$، مقدار $x_n$ برابر با یکی از اعداد $x, \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{1-x}, 1 - x$ است. با پر کردن یک جدول پویای[2] ۲ـبعدی، احتمال خواسته شده محاسبه می‌گردد (هر سطر مربوط به یک $x_i$ و ستون آن مربوط به احتمال برابر شدن با مقدار بالای ستون است):

| $n$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $1 - \frac{1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $1 - x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | $\frac{1}{2}$ | ۰ | ۰ | ۰ | $\frac{1}{2}$ |
| ۲ | $\frac{1}{2}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ | ۰ |
| ۳ | ۰ | $\frac{3}{8}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ | ۰ | $\frac{3}{8}$ |
| ۴ | $\frac{3}{8}$ | ۰ | $\frac{5}{16}$ | ۰ | $\frac{5}{16}$ | ۰ |
| ۵ | ۰ | $\frac{11}{32}$ | ۰ | $\frac{5}{16}$ | ۰ | $\frac{11}{32}$ |
| ۶ | $\frac{11}{32}$ | | | | | |

[2] دینامیک