پاسخ کوتاه آزمون تشریحی 4 ام شازززز

سوال 1: g_n رو تعداد راه های پوشاندن یک جدول $2\times n$ با کاشی ها و شرایط مسئله در نظر بگیرید که خانه بالا چپ اون پر هستش. حالا میتونیم رابطه ای بازگشتی برای f_n و g_n پیدا کنیم!

برای راحتی f_0 و g_0 رو برابر 1 تعریف میکنیم، همچنین میدونیم $g_1 = 1$ و $f_1 = 2$ هستش!

برای g_n که $n > 1$ هستش دو حالت بیشتر نداریم، یا خونه ی تنهای سمت چپ با کاشی 1×1 پر شده که بقیه ی جدول به f_{n-1} روش پر میشه، یا با کاشی افقی 1×2 پر شده که بقیه ی جدول به g_{n-1} روش پر میشه. پس داریم: (رابطه 1)

$$g_n = g_{n-1} + f_{n-1}$$

برای f_n که $n > 1$ هستش چند تا حالت داریم، اگه خونه ی سمت چپ و بالا با کاشی 1×1 پوشیده شده باشه، برای بقیه ی جدول g_n حالت داریم، پس فرض میکنیم با کاشی 1×2 پوشیده شده. اگه این کاشی عمودی باشه برای بقیه ی جدول f_{n-1} حالت داریم، پس فرض میکنیم با کاشی افقی پوشیده شده باشه، حالا اگه خونه پایین سمت چپ با کاشی 1×1 پوشیده شده باشه، برای بقیه جدول g_{n-1} حالت داریم، و اگه با کاشی 1×2 پوشیده شده باشه برای بقیه جدول f_{n-2} حالت داریم. پس داریم: (رابطه 2)

$$f_n = g_n + f_{n-1} + g_{n-1} + f_{n-2} = 2 \times f_{n-1} + 2 \times g_{n-1} + f_{n-2}$$

حالا طبق رابطه ی 1 و 2:

$$g_n + g_{n-1} = f_n - f_{n-1} - f_{n-2}$$
$$g_n - g_{n-1} = f_{n-1}$$

با جمع این دو رابطه نتیجه میگیریم:

$$2 \times g_n = f_n - f_{n-2}$$

حالا با جایگذاری تو رابطه ی یک داریم: (رابطه 3)

$$f_n = 3 \times f_{n-1} + f_{n-2} - f_{n-3}$$

حالا $h_n = \frac{f_n}{3^n}$ تعریف میکنیم.

حالا چند تا لم رو ثابت میکنیم.

لم 1: $f_n \geq f_{n-1}$ که خب این واضحه چون هر حالتی از جدول $2 \times (n-1)$ به یه حالت متمایز از جدول $2 \times n$ متناظر میشه.

لم 2: $f_n \geq 3 \times f_{n-1}$ طبق رابطه 3 و لم یک حکم نتیجه میشه.

لم 3: ${f_{2n} \geq \ f_n}^2$ که این هم واضح هست چون هر حالتی جفت های جدول های پوشیده شده $2 \times n$ به یک حالت متمایز از جدول $2 \times 2n$ متناظر میشه.

لم 4: ${h_{2n} \geq \ h_n}^2$ طبق لم 3 این موضوع به آسونی ثابت میشه.(f_n ها مثبتن)

حالا به حل مسئله میرسیم:

الف) طبق لم 2 حکم ثابت میشه.

ب) استقرا میزنیم، $f_0 \leq 1$ و $f_1 \leq 4$ پس پایه برقراره، طبق لم 1

$$f_{n-1} \geq \ f_{n-2} \rightarrow$$
$$f_{n-1} \geq \ f_{n-2} - \ f_{n-3} \ \rightarrow$$
$$f_n \leq \ 4f_{n-1}$$

پس حکم ثابت میشه.

ج) اگه f_6 رو طبق رابطه 3 در بیاریم، به عدد 733 میرسیم که بزرگ تر از $3^6=729$ هست. پس $h_6>1$ هست، و همچنین $h_{16}>2$ حالا میتونیم استقرا بزنیم حکم به ازای $c=1$ و $c=2$ برقراره. فرض کنید حکم

به ازای مقادیر کوچیک تر از c برقراره حالا حکم رو برای c اثبات میکنیم. چون $c>2$ پس $R = \lceil\sqrt{c}\rceil < c$ حالا میدونیم طبق فرض m ای وجود داره به طوری که $h_m \geq R$ حالا طبق لم 4 میتونیم بگیم، $h_{2m} \geq R^2 \geq c$ و حکم ثابت میشه.

سوال 2: نتیجه ی بازی مساوی هست! برای هر دو نفر استراتژی نباختن ارائه میدیم و حکم مسئله ثابت میشه!

روش چونه برای نباختن: در هر مرحله هر سطر یا ستونی که چنگیز انتخاب کرد، چونه هم میتونه همون رو انتخاب کنه، حالا چون برای یک شدن یک خونه ای باید حداقل 2 بار توسط چنگیز اون خونه انتخاب بشه، و در مجموع چنگیز 100×100 خونه رو میتونه انتخاب کنه، پس در نهایت حداکثر 5000 خونه یک خواهند بود و چونه نمیبازه!

روش چنگیز برای نباختن: چنگیز مستقل از حرکات چونه در مرحله ی i ام سطر i رو انتخاب کنه، حالا چون ترتیب عملیاتا رو جدول نهایی تاثیر نداره میتونیم فرض کنیم همه خونه ها یک شدن و فقط چونه داره بازی میکنه و تو هر مرحله میتونه یه سطر یا ستونو 1+ کنه. حالا چون برای صفر شدن یک خونه ای باید حداقل 2 بار توسط چونه اون خونه انتخاب بشه، و در مجموع چونه 100×100 خونه رو میتونه انتخاب کنه، پس در نهایت حداکثر 5000 خونه صفر خواهند بود و چنگیز نمیبازه!

پس حکم ثابت میشه.

سوال 3: زیرگراف القایی فراگیر روی رنگ سیاه رو گراف G نامگذاری میکنیم و به راس ها شماره میدیم، واضح هست که $\bar{G}$ همون زیرگراف القایی فراگیر روی رنگ سفید هستش، حالا یه سری لم رو اثبات میکنیم:

لم 1: اگه قطر گراف همبندی مثل G، k باشه، اونموقع G حداقل دارای $k+1$ راس هست. اثباتش هم واضحه، طبق تعریف قطر دو راس مثل a و b باید تو گراف وجود داشته باشن که فاصلشون k باشه. و تعداد راس های مسیر بینشون (چون گراف همبنده مسیری بینشون وجود داره) با احتساب a و b، $k+1$ تا هست، پس تعداد راس های G حداقل $k+1$ هست. از این لم نتیجه میشه $n>k$.

لم 2: اگه قطر G بزرگتر یا مساوی 3 باشه (یا بینهایت باشه)، اون موقع قطر $\bar{G}$ کوچکتر یا مساوی 3 هست. اثبات این لم اینطوریه که چون قطر G بزرگتر مساوی 3 هست، پس دو راس مثل u و v وجود دارن که به هم متصل نیستن و همسایه مشترک ندارن (چون اگه اینطوری نبود گراف همبند بود و قطرش کم تر یا مساوی 2 بود) حالا میدونیم تو $\bar{G}$ هر راس به یکی از u و v وصل هست(چون در غیر این صورت اون راس همسایه مشترک u و v میشد) حالا برای هر دو تا راس تو $\bar{G}$ میتونیم یه مسیر به طول حداکثر 3 مشخص کنیم، و اینجوری حکم مسئله ثابت میشه. u و v که به هم تو $\bar{G}$ وصل هستن و فاصلشون یک هست. v هم فاصلش با هر راس دیگه ای مثل a حداکثر 2 هست چون a یا مستقیم به v وصل هست که فاصلش یک میشه، یا به u وصل هست که اونموقع مسیر به طول 2 ای بین v و a وجود داره. u هم دقیقا با همین روش ثابت میشه فاصلش با هر راس دیگه ای حداکثر 2 هست. حالا دو تا راس مثل a و b اگه در نظر بگیریم که هیچ کدوم u و v نباشن. اونموقع چون هر کدوم از a و b حداقل به یکی از u و v وصلن و u و v هم به هم وصلن. نتیجه میشه که بین این دو تا راس مسیری به طول حداکثر 3 وجود داره.پس فاصلشون کمتر مساوی 3 هست.پس هر دو جفتی تو $\bar{G}$ فاصلشون کم تر مساوی 3 هست و حکم ثابت میشه.

لم 2 ثابت میکنه که زوج هایی که k اشون بیشتر از 3 هست زشت نیستن، حالا برای بقیه زوج مرتب ها بررسی میکنیم. وقتی $n=1$ هست طبق لم 1 هیچ زوج زشتی نداریم! وقتی $n=2$ هست فقط $k=1$ رو میتونیم داشته باشیم که اگه یال بین 1 و 2 رو سیاه کنیم قطر G یک و قطر $\bar{G}$ بینهایت میشه و نتیجه میشه $(2,1)$ زوج زشتی هست. وقتی هم که $n=3$ هست اگه همه یال هارو سیاه کنیم قطر G یک و قطر $\bar{G}$ بینهایت میشه و نتیجه میشه $(3,1)$ زوج زشتی هست. و اگه دو تا یال رو سیاه و دیگری رو سفید کنیم قطر G دو و قطر $\bar{G}$ بینهایت میشه و نتیجه میشه $(3,2)$ زوج زشتی هست. و به ازای $k=3$ هم طبق یک نمیتونه زوجمون زشت باشه.

حالا فرض میکنیم $n>3$ و ثابت میکنیم $k=1$ و$k=2$ و $k=3$ زوج های زشتی هستن، و همه حالت ها بررسی میشن.

برای $k=1$: میتونیم همه ی یال ها رو سیاه کنیم. در این صورت قطر G یک و قطر $\bar{G}$ بینهایت میشه و نتیجه میشه $(n,1)$ زوج زشتی هست.

برای $k=2$: میتونیم همه ی یال ها به جز یال بین 1 و 2 رو سیاه کنیم، در این صورت قطر G دو و قطر $\bar{G}$ بینهایت میشه و نتیجه میشه $(n,2)$ زوج زشتی هست.

برای $k=3$: میتونیم یال بین 1 و 2 و یال بین 2 و 3 و یال بین هر دو راسی مثل a و b که $a,b\geq3$ هستن رو سیاه کنیم و بقیه رو سفید کنیم. در این صورت فاصله ی 1 و 4 توی G برابر 3 هست پس قطر G حداقل برابر 3 هست، و فاصله ی بین 3 و 2 توی $\bar{G}$ حداقل برابر 3 هست، چون 3 فقط به 1 یال داره و 1 هم به 2 یال نداره. پس قطر $\bar{G}$ هم حداقل برابر 3 هست، و طبق لم 2 این نابرابری ها همشون به برابری تبدیل میشن و قطر G و $\bar{G}$ برابر 3 میشه و نتیجه میشه $(n,3)$ زوج زشتی هست.

پس همه حالات بررسی شدن و مسئله حل شد!

سوال 4: مسئله رو به گراف ساده ی جهت دار G مدل میکنیم. طبق فرض مسئله برای هر دو راسی مثل a و b راسی مثل c وجود داره که از c هم به a یال داشته باشیم. پس میتونیم پرنت a و b رو راس c تعریف کنیم.

حالا اول لم زیر رو ثابت میکنیم،

لم 1: اگر در گراف ساده ی جهت داری مثل H با $n>m$ راس، برای هر زیر مجموعه m تایی از رئوس مثل $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ راسی مثل c وجود داشته باشد که از c به همه ی a_i ها یال داشته باشیم، آنگاه $n \geq 2^{m+1}-1$.

اثبات: حکم رو با استقرا روی m ثابت میکنیم. حکم به ازای $m=1$ واضح هست. باید یه دوری داشته باشیم چون گراف متناهی هست. و چون گراف ساده هست مینیمم دور دارای 3 راس هست حداقل پس حکم برای پایه درست هست. حالا فرض کنید حکم به ازای $m-1$ برقرار هست و حکم به ازای m رو ثابت میکنیم:

اولش ثابت میکنیم که مینیمم درجه ورودی حداقل m هستش. فرض کنید اینطور نباشه، ینی راسی مثل u وجود داره که کمتر از m راس بهش یال دارن. راس u و تمام همسایه های اون رو B بنامید، حالا تا وقتی که تعداد رئوس موجود تو B کمتر از m هست یه راس دلخواه از خارج B به B اضافه کنید. چون $n>m$ هست پس میشه اینکارو کرد و اینکار چون m متناهی هست تموم میشه. حالا مجموعه رئوس B رو در نظر بگیرید، طبق فرض راسی مثل c وجود داره که به همه ی اعضای B (از جمله u) یال جهت دار داره. دقت کنید که c عضو B نیست چون گراف ساده هست. و این با فرض این که همه راس هایی که به u یال جهت دار دارن عضو B هستن در تناقض هست و حکم ثابت میشه.

حالا چون گراف ساده هست، میدونیم میانگین درجات ورودی کمتر یا مساوی $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ هست. پس راسی وجود داره که درجه ورودیش کمتر یا مساوی $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ باشه، اسم این راس رو v بذارید. اسم مجموعه افرادی که به v یال جهت دار دارن رو بذارید A، حالا ثابت میکنیم مجموعه A همه ی شرایط فرض استقرا(برای

m-1) رو داره، اولا که میدونیم |A|≥m برقرار هست پس شرط اول برقرار هست. حالا یک زیر مجموعه دلخواه m-1 عضوی از A مثل B رو در نظر بگیرید. به مجموعه ی B، راس v رو اضافه کنید، حالا این برای B طبق فرض باید راسی مثل c باشد که به همه ی راس های B یال جهت دار داشته باشد، چون $v \in B$، پس $c \in A$ است. پس در زیر گراف القایی رئوس مجموعه A برای هر m-1 راس، راسی وجود داره که به همه ی آن ها یال جهت دار داشته باشه. پس $|A| \geq 2^m - 1$ هست. و از طرفی میدونیم $|A| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ پس:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq |A| \geq 2^m - 1 \;\rightarrow\; n - 1 \geq 2^{m+1} - 2 \;\rightarrow\; n \geq 2^{m+1} - 1$$

پس لم 1 ثابت میشه.

حالا با برهان خلف مسئله رو ثابت میکنیم، فرض میکنیم G هیچ دوری به طول کم تر یا مساوی $2 \times k$ نداشته باشد، حالا گراف جهت دار H رو از روی G به اینصورت میسازیم که از راس v به راس u یال میگذاریم اگر و تنها اگر مسیری به طول حداکثر k تو G از راس v به راس u باشه. واضحه که تعداد رئوس H با G برابره.

حالا ثابت میکنیم H ساده هستش: اگه تو این گراف یه راس به خودش وصل باشه اونموقع تو G دوری وجود داره که طولش کمتر مساوی k هست و حکم نقض میشه! و اگه دو راس مثل u و v وجود داشته باشن که هم از u به v یال داشته باشیم هم از v به u، اونموقع دوری به طول حداکثر $2 \times k$ توG وجود داره و بر خلاف فرض خلف هست، پس H ساده هست، حالا ثابت میکنیم هر زیر مجموعه ی 2^k راسی از H مثل A رو اگه بگیریم راسی مثل c وجود داره که از c به همه ی رئوس A یال جهت دار وجود داره.

k مرحله حرکت زیر رو تو G انجام میدیم و تو هر مرحله اگه تعداد رئوس مجموعه A برابر t باشه این تعداد رو به کمتر یا مساوی $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ راس کاهش میدیم. و در آخر به یه راس میرسیم که همون c مورد نظر ما هست:

تو هر مرحله، راس هارو جفت جفت میکنیم (اگه t فرد بود یک راس رو دست نمیزنیم) و پرنت هر جفت رو جای خودش میگذاریم، حالا مجموعه ی جدیدی که تولید میشه حداکثر $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ تا راس داره چون هر دو راس با یک راس جایگزین شدن (ممکن هستش کم تر از این مقدار داشته باشه چون بعضی از پرنت ها ممکنه یکی باشن).

پس در آخر حتما یه راس باقی میمونه، حالا ثابت میکنیم c در گراف H به همه ی رئوس مجموعه ی ابتدایی A یال جهتدار وجود داره، چون ما k مرحله انجام دادیم و تو هر مرحله هر راسی با خودش یا یکی از رئوسی که بهش یال داره جابجا میشه، پس کوتاه ترین مسیر از c به هر کدوم از این راس ها کمتر مساوی k هست! پس تو H از c به همه ی این رئوس یال جهت دار وجود داره!

حالا طبق لم 1 میتونیم بگیم تعداد رئوس H حداقل به اندازه ی $2^{2^k+1} - 1$ هستش. و میدونیم تعداد رئوس G (n) با تعداد رئوس H برابره. و از طرفی میدونیم:

$$2 \times \left(2^{2^k} - 1\right) \geq n \rightarrow$$

$$\left(2^{2^k+1} - 2\right) \geq n \rightarrow$$

$$2^{2^k+1} - 1 > n$$

ولی این ممکن نیست چون ما تو بالا ثابت کردیم:

$$2^{2^k+1} - 1 \leq n$$

پس به تناقض میرسیم و مسئله ثابت میشه!