پاسخ سوالات تئوری سوم

سوال ۱: t(i) رو تعداد مهره های داخل خانه ی i ام در نظر بگیرید.

الف: عدد S رو به این صورت تعریف میکنیم.

$S=(\sum t(i)*i)*n$

واضحه که S بینهایت نیست چون حداکثر n تا از t(i) ها ناصفر هستن. اگر در یک مرحله حرکت اول را انجام دهیم(یکی از دو مهره خانه را دو واحد به سمت چپ و دیگری را یک واحد به سمت راست ببریم) S به اندازه ی n واحد کم میشود. و اگر حرکت دوم را انجام دهیم(مهره ی سمت چپ دو مهره ی متوالی را به راست ببریم و دیگری را حذف کنیم) S حداقل به اندازه ی S/n ام واحد کم میشود. پس در هر مرحله عدد S حداقل یک واحد کم میشود و چون S نمیتواند منفی باشد پس بعد از مدتی دیگر نمیتوانیم مرحله ای انجام دهیم.

ب: عدد S رو به این صورت تعریف میکنیم.

$S=(\sum fib(i)*t(i))$

به طوری که fib(i) عضو i ام دنباله ی فیبوناچی است. اگر دقت کنین میبینید که بعد از انجام هر یک از دو حرکت مقدار S تغییر نمیکند. حال حالت نهایی را در نظر بگیرید. میتوان ثابت کرد حالت نهایی همان نمایش عدد S در مبنای فیبوناچی است که یکتاست. ما در صورتی نمیتوانیم حرکتی انجام دهیم که اولا در هر خانه حداکثر یک مهره باشد. دوما دو خانه ی متوالی وجود نداشته باشند که در هر دوی آنها مهره وجود داشته باشد. و همچنین ارزش خانه ی i ام نوار برابر fib(i) است که این همان شروط مبنای فیبوناچی است. پس حکم ثابت شد و حالت نهایی یکتاست.

سوال ۲: دو نقطه ای که کمترین فاصله رو از هم دارن بگیرین A و B. واضحه که تو دایره ای که این دو نقطه قطرشن هیچ نقطه ی دیگه ای وجود نداره. حالا خطی که از A و B میگذره رو اسمشو بزارین L, میدونیم که روی این خط نقطه ی دیگه ای وجود نداره طبق فرض سوال. پس طبق اصل لانه کبوتری یه سمت از این خط هست که حداقل n+1 نقطه توش قرار داشته باشه. نقطه های این سمت رو در نظر بگیرین. هر نقطه با A و B تشکیل یک دایره میده. به هر نقطه شعاع دایره ی متناظرش رو نسبت بدین. واضحه که عدد هیچ دو نقطه ای تو این طرف L عدد برابر بهشون نسبت داده نشده! (چون وگرنه ۴ نقطه وجود داشتن که روی دایره بودن) حالا نقطه هارو بر حسب عدداشون سورت کنید. n+1 امین نقطه رو در نظر بگیرین و اسمشو بزارین C, اگه دقت کنید میبینید که دایره ای که از A و B و C میگذره تمام شرایط مسئله رو داره. n نقطه داخلشه. ۳ نقطه روش و n نقطه خارجش. پس حکم مسئله ثابت میشه و همچین دایره ای وجود داره.

سوال ۳: ثابت میکنیم جواب مسئله برابر $2n-1$ است. اول یک دنباله مثال میزنیم که طولش $2n-1$ باشه و شرایط مسئله رو داشته باشه.

$<1,2,1,3,1,4,1,....,n,1>$

واضحه که طول این دنباله $2n-1$ هست و شرایط مسئله رو داره.
حالا با استقرا روی n ثابت میکنیم هر دنباله ای که شرایط مسئله رو داره طولش حداکثر $2n-1$ هست. حکم به ازای $n=1,2$ برقرار هست. حالا فرض میکنیم حکم به ازای مقادیر کوچک تر از n برقراره و حکم رو به ازای n ثابت میکنیم.$(n>2)$ اگه همه ی اعداد حداکثر یک بار اومده بودن که حکم مسئله ثابت میشه$(n=<2n-1)$.
پس عددی وجود داره که حداقل دوبار اومده باشه. اولین عددی رو از سمت چپ در نظر بگیرید که اولین جایی که اومده مینیمم هست. فرض کنید این عدد t باشه.
و قبل اولین ظهور t در دنباله x عدد وجود داشته باشه. واضح هست که این x عدد متمایز هستند و در جای دیگه از دنباله تکرار نشدن (چون اگه تکراری وجود داشته باشه یا جای دیگه اومده باشن t اولین عددی نیست که حداقل دوبار اومده) پس اگه $x>0$ باشه میتونیم عضو اول دنباله رو حذف کنیم و چون میدونیم یه بار اومده دنباله ی جدیدی که تولید میشه توش $n-1$ عضو متمایز هست و طبق فرض استقرا طولش حداکثر $2n-3$ هست. پس اگه عضو اولو برگردونیم سر جاش ثابت میشه طول دنبالمون تو این حالت حداکثر برابر $2n-2$ هست و حکم ثابت میشه. پس میتونیم فرض کنیم $x=0$ هست. یعنی ما اولین عضو دنبالمون عدد t هست.
حالا فرض کنید بین اولین t و دومین t, به تعداد y عدد مختلف داشته باشیم.
میدونیم که هیچ کدوم این y عدد برابر t یا برابر با یه عدد بعد دومین t نیستن.
طبق فرض استقرا طول این قسمت حداکثر $2y-1$ هست. و بعد از دومین t (با

احتساب خود دومین t) $n-y$ تا عدد مختلف وجود داره. و طول این قسمت میشه حداکثر $2n-2y-1$. الان ما همه ی اعضا رو شمردیم به جز اولین t. اون رو هم که بشمریم در مجموع طول دنبالمون حداکثر میشه $2n-1$. پس حکم مسئله ثابت شد.

....

سوال ۴: فرض کنید

$X=\{1,2,....,m+n-1\}$

$Y=\{1,2,....,n\}$

لم ۱: برای هر عدد صحیح S تعداد زیر مجموعه های m عضوی از مجموعه X که مجموع اعضای هر یک به پیمانه ی n با s همنهشت است برابر تعداد دنباله های $(y_1,y_2,...,y_m)$ از اعضای Y است به طوری که $y_1<=y_2<=....<=y_m$ و

$\sum y_i = s - C(m,2) \pmod n$.

اثبات: فرض کنید $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ زیر مجموعه ای از X باشد به طوری که $x_1<x_2....<x_m$ و $\sum x_i = s \pmod n$ قرار میدهیم $y_i=x_i-i+1$ و در این صورت y_i ها شرایط لم ۱ را دارند. پس تناظری یک به یک بین y_iها و x_i ها وجود دارد.

لم ۲: برای هر عدد صحیح s تعداد دنباله های $(y_1,y_2,...,y_m)$ از اعضای Y به طوری که $y_1<=y_2<=....<=y_m$ و $\sum y_i = s \pmod n$ برابر $C(m+n-1,m)*1/n$ است.

اثبات: فرض کنید P_s مجموعه همه دنباله های $(y_1,y_2,...,y_m)$ از اعضای Y باشد که $y_1<=y_2<=....<=y_m$ و $\sum y_i = s \pmod n$. اگر $y_m<n$ باشد. $g(y_1,y_2,...,y_m)$ را برابر $(y_1+1,y_2+1,...,y_m+1)$ تعریف میکنیم و اگر k کوچک ترین اندیسی باشد که $y_{k+1}=n$ باشد, $g(y_1,y_2,...,y_m)$ را برابر n-k تا ۱ در ابتدا و در انتها به ترتیب y_1+1 و y_2+1 و ... y_k+1 تعریف میکنیم. اگر $(y_1,y_2,...,y_m)$ عضو P_s باشد, آنگاه $g(y_1,y_2,...,y_m)$ برابر P_{s+m} است. و به سادگی میتوان دید g تناظر یک به یکی بین P_s و P_{s+m} برقرار میکند. نتیجه میگیریم:

$|P_0|=|P_m|=|P_{2m}|=...=|P_{(n-1)*m}|$

و چون n و m نسبت به هم اولند پس

$\{0,m,2m,...(n-1)m\}$

یک دستگاه کامل مانده ها به پیمانه n است. پس تمام P_i ها با هم برابرند و چون در مجموع $C(m+n-1,m)$ دنباله ی مطلوب داریم.تعداد اعضای هر کدام از آنها $C(m+n-1,m)*1/n$ است.

حالا طبق لم ۱ و ۲ ثابت شد که جواب مسئله برابر هست با $C(m+n-1,m)*1/n$.