پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۸

پاسخ کلیدی:

۱. ۱۸۰

۲. ۳۹

۳. ۶۵۲۸۰

۴. ۲۰۵۰۳

۵. ۴۸۴۰۰

۶. ۳۳۸۴

۷. $\frac{۱۷۹۳}{۱۲۸}$

۸. ۷۹۲

۹. $\frac{۵۱۱}{۷۶۷}$

۱۰. ۴۹

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۸

پاسخ تشریحی:

۱. اعضای S را به زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۴, ۸\}$، $\{۳, ۶\}$، $\{۵, ۱۰\}$، $\{۷\}$ و $\{۹\}$ افراز می‌کنیم. هر کدام از این زیرمجموعه‌ها، اگر n عضو داشته باشند، $n + ۱$ حالت برای بودن یا نبودن اعضای‌شان در T داریم. پس پاسخ برابر $۵ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۸۰$ است.

۲. حداکثر عدد فاکتوریلی که می‌توانیم استفاده کنیم، $۵! = ۱۲۰$ است. با اعداد $۰!, ۱!, ۲!$ می‌توان اعداد صحیح نامنفی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را ساخت. بودن یا نبودن اعداد $۳!, ۴!, ۵!$ در جمع، $۲^۳ = ۸$ حالت دارد و سپس به ۵ حالت می‌توان یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را به آن اضافه کرد (باقی‌مانده بر ۶). در این شمارش عدد ۰ را نیز می‌شماریم. پس پاسخ برابر $۲^۳ \times ۵ - ۱ = ۳۹$ است.

۳. اگر تمام توابع $f_۱, f_۲, \dots, f_۸$، یک‌به‌یک باشند، تابع

$$f_۸\Big(f_۷\big(\dots f_۱(x)\big)\Big)$$

نیز یک‌به‌یک است؛ اما اگر تنها یکی از آن‌ها یک‌به‌یک نباشد، تابع گفته شده نیز یک‌به‌یک نیست و تابعی ثابت خواهد بود. از آن‌جایی که هر تابع به ۲ روش می‌تواند یک به یک باشد و در کل ۴ روش دارد، پاسخ برابر $۴^۸ - ۲^۸ = ۶۵۲۸۰$ است.

۴. تعداد اسکناس‌های ۲ تومانی، ۵ تومانی و ۱۰ تومانی‌ای را که روزبه برای پرداخت استفاده می‌کند، به ترتیب x، y و z می‌نامیم. پس $۲x + ۳y + ۵z = ۲۰۱۰$. واضح است که y باید زوج، x باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد. پس معادله‌ی بالا، به معادله‌ی $۱۰x' + ۱۰y' + ۱۰z = ۲۰۱۰$ تبدیل می‌شود. پس $x' + y' + z = ۲۰۱$. هر پاسخ از این معادله نیز، یک پاسخ از جواب مسئله‌ی اصلی را می‌دهد. پس پاسخ برابر $\binom{۲۰۳}{۲} = ۲۰۵۰۳$ است.

۵. هر یک از مختص‌های x, y در هر مرحله ۱ واحد تغییر می‌کند. برای آن که پس از دقیقن ۱۲ مرحله، هر مختص برابر ۶ باشد، باید هر مختص ۹ بار زیاد و ۳ بار، کم شود. پس هر مختص $\binom{۱۲}{۳}$ حالت دارد. پس پاسخ برابر $\binom{۱۲}{۳}^۲ = ۴۸۴۰۰$ است.

۶. هرگاه ابوالفضل یک آجر برمی‌دارد، ۴ آجر برای برداشتن آزاد می‌شوند. پس تعداد انتخاب‌ها برای برداشتن آجر $۴ - ۱ = ۳$ تا زیاد می‌شود. پس $۱ \times ۴ \times ۷ \times ۱۰ \times ۱۳ = ۳۶۴۰$ روش داریم. در تعدادی از این روش‌هایی که شمرده‌ایم، تعداد لایه‌هایی که از آن‌ها آجر برمی‌داریم، ۵ لایه است. تعداد این روش‌ها $۱ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۲۵۶$ است که نامطلوب هستند. پس پاسخ برابر $۳۶۴۰ - ۲۵۶ = ۳۳۸۴$ است.

۷. فرض کنید به جای ۱۰، n نقطه‌ی این‌چنینی داشته باشیم. دو حالت داریم:

- تمام نقاط، y برابر داشته باشند. احتمال این امر $\frac{۲}{۲^n}$ است و مساحت پوش کوژ، صفر می‌شود.
- در هر حالت جز حالت بالا، پوش کوژ، یک ذوزنقه یا یک مثلث با ارتفاع ۲ می‌شود. $x_{r,۱}$ را برابر با x سمت راست‌ترین نقطه‌ی انتخاب شده با $y = ۱$ است. به همین ترتیب $x_{r,-۱}, x_{l,۱}, x_{l,-۱}$ را تعریف می‌کنیم. واضح است که مساحت مثلث یا ذوزنقه‌ی به وجود آمده برابر

$$۲ \times \frac{(x_{r,۱} - x_{l,۱}) + (x_{r,-۱} - x_{l,-۱})}{۲}$$

است. پس اگر $E(X)$، امید ریاضی خواسته شده باشد، داریم:

$$E(X) = E\big(x_{r,۱} - x_{l,۱} + x_{r,-۱} - x_{l,-۱}\big) = E(x_{r,۱}) - E(x_{l,۱}) + E(x_{r,-۱}) - E(x_{l,-۱})$$

ابتدا $E(x_{r,۱})$ را محاسبه می‌کنیم. احتمال این که $x_{r,۱} = k$ شود، برابر $\frac{۲^{k-۱}}{۲^n-۲}$ است؛ مگر در حالتی که $k = n$ باشد که احتمال آن $\frac{۲^{n-۱}-۱}{۲^n-۲}$. است (۱ حالت کم شده در صورت به خاطر حالتی است که تمام نقاط، $y = ۱$ داشته باشند). پس:

$$\begin{aligned}
E(x_{r,۱}) &= \frac{۱}{۲^n - ۲}\Big(\big(\sum_{k=۱}^{n} k \times ۲^{k-۱}\big) - n\Big) \\
&= \frac{۱}{۲^n - ۲}\Big((۱ + ۲ + \ldots + ۲^{n-۱}) + (۲ + ۴ + \ldots + ۲^{n-۱}) + \ldots + ۲^{n-۱} - n\Big) \\
&= \frac{۱}{۲^n - ۲}\Big((۲^n - ۱) + (۲^n - ۲) + \ldots + (۲^n - ۲^{n-۱}) - n\Big) \\
&= \frac{۱}{۲^n - ۲}\big(n \times ۲^n - (۲^n - ۱) - n\big) \\
&= (n - ۱)\frac{۲^n - ۱}{۲^n - ۲}
\end{aligned}$$

به طریق مشابه به دست می‌آید که:

$$E(x_{r,-۱}) = (n - ۱)\frac{۲^n - ۱}{۲^n - ۲}$$

و

$$E(x_{l,-۱}) = E(x_{l,۱}) = (n + ۱) - (n - ۱)\frac{۲^n - ۱}{۲^n - ۲}$$

پس:

$$\begin{aligned} E(X) &= (x_{r,۱} - x_{l,۱}) + (x_{r,-۱} - x_{l,-۱}) \\ &= ۲ \times \left((n-۱)\frac{۲^n - ۱}{۲^{n-۱} - ۱} - (n+۱)\right) \\ &= ۲n - ۶ + \frac{۱}{۲^{n-۳}} \end{aligned}$$

پس پاسخ برابر $۱۴ + \frac{۱}{۱۲۸} = \frac{۱۷۹۳}{۱۲۸}$ است.

۸. $dp[i][j]$ را برابر تعداد توابع با شروط گفته از $\{-۳, -۲, \dots, i\}$ به $\{-۶, -۵, \dots, j\}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که به ازای هر i، $dp[-۴][i] = ۱$ و به ازای هر $i \neq ۰$، $dp[i][-۷] = ۰$ است. هم‌چنین داریم:

$$\begin{cases} dp[i][i] = dp[i][i-۱] \\ dp[i][j] = dp[i-۱][j-۱] + dp[i][j-۱]; \quad i \neq j \end{cases}$$

پس با پر کردن جدول به صورت پویا[۱]، پاسخ برابر $dp[۳][۶] = ۷۹۲$ به دست می‌آید.

۹. پرتاب‌های شیر را با S و پرتاب‌های خط را با K نشان می‌دهیم. p را احتمال بردن روزبه در نظر می‌گیریم و p_K را احتمال بردن روزبه، پس از دو پرتاب متوالی که اولی S و دومی K بوده است، تعریف می‌کنیم.

اولین پرتاب شیر را در نظر بگیرید. تا قبل از آن شرایط برد برای هیچ یک ایجاد نمی‌شود و احتمال برد، برابر است. به احتمال $\frac{۱}{۲^۹}$، در ۹ پرتاب بعدی، تمام پرتاب‌ها شیر خواهد بود و ابوالفضل می‌برد؛ در غیر این صورت به حالت SK می‌رسیم و روزبه به احتمال p_K خواهد برد. پس:

$$p = \left(۱ - \frac{۱}{۲^۹}\right) \times p_K \qquad (۱)$$

پس از آمدن دو پرتاب متوالی به صورت SK، اگر ۸ پرتاب بعدی تمامن خط بیاید، روزبه می‌برد که احتمال آن $\frac{۱}{۲^۸}$ است. در غیر این صورت یک پرتاب شیر در این حین می‌آید که در ادامه‌ی آن، احتمال برد روزبه، p خواهد بود. پس:

$$p_K = \frac{۱}{۲^۸} + \left(۱ - \frac{۱}{۲^۸}\right) \times p \qquad (۲)$$

با حل دو معادله‌ی (۱) و (۲)، پاسخ برابر $\frac{۵۱۱}{۷۶۷} = \frac{۲^۹-۱}{۳\times۲^۸-۱}$ است.

[۱] دینامیک

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۸

۱۰. ثابت می‌کنیم پاسخ برابر ۴۹ است. مثالی برای ۴۹، در زیر داده شده است (خانه‌های خالی با ۴۹ پر شده است):

۱	۱۷	۳۳													
	۲	۱۸	۳۴												
		۳	۱۹	۳۵											
			۴	۲۰	۳۶										
				۵	۲۱	۳۷									
					۶	۲۲	۳۸								
						۷	۲۳	۳۹							
							۸	۲۴	۴۰						
								۹	۲۵	۴۱					
									۱۰	۲۶	۴۲				
										۱۱	۲۷	۴۳			
											۱۲	۲۸	۴۴		
												۱۳	۲۹	۴۵	
													۱۴	۳۰	۴۶
۴۷														۱۵	۳۱
۳۲	۴۸														۱۶

حال اثبات می‌کنیم بیش از ۴۹ عدد مختلف امکان‌پذیر نیست. فرض کنید امکان‌پذیر باشد. طبق اصل لانه کبوتر، سطری وجود دارد که حداقل ۴ عدد مختلف داشته باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید این سطر، سطر اول باشد؛ پس سطر اول دقیقن ۴ عدد مختلف دارد. باز هم طبق اصل لانه کبوتری، سطری از ۱۵ سطر باقی‌مانده وجود دارد که حداقل ۴ عدد مختلف از ۴۶ نوع عدد باقی‌مانده را داشته باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید این سطر، سطر دوم باشد؛ پس سطر دوم دقیقن ۴ عدد مختلف دارد که هر کدام با اعداد سطر اول، متفاوت‌اند. هر به ازای هر ستون، اگر خانه‌های به جز خانه‌های بالایی را در نظر بگیریم، حداکثر ۲ عدد مختلف می‌توانند داشته باشند. پس حداکثر $۴۰ = ۲ \times ۱۶ + ۴ + ۴$ عدد مختلف در جدول داریم که تناقض است و حکم ثابت می‌شود.