

آزمون کوتاه پاسخ شماره ۴

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره‌ی منفی ندارد اما در بین افراد با نمره‌ی برابر، در رتبه‌بندی کسی برتر است که تعداد غلط کم‌تری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. باشگاه دانش‌پژوهان جوان، ۸۵ دانش‌پژوه دارد که هر یک در دست کم یکی از المپیادهای علمی باشگاه (ریاضی، فیزیک و کامپیوتر)، فعالیت می‌کنند. ۷۴ نفر در ریاضی و ۲۶ نفر در فیزیک مشغول به فعالیت هستند. تعداد کسانی که هم در ریاضی و هم در کامپیوتر فعالیت می‌کنند ۱۷ نفر است. هم‌چنین تعداد کسانی که هم در ریاضی و هم در فیزیک فعالیت می‌کنند ۱۸ نفر و تعداد کسانی که هم در فیزیک و هم در کامپیوتر فعالیت می‌کنند، ۱۳ نفر می‌باشد. می‌دانیم تعداد افراد المپیاد کامپیوتر، دو برابر تعداد کسانی است که در هر سه رشته فعالیت می‌کنند. تعداد کسانی که در هر سه رشته فعالیت می‌کنند، چیست؟

۲. حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$\sum_{n_1=0}^2 \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_{29}=0}^{n_{28}} \sum_{n_{30}=0}^{n_{29}} 1$$

۳. یک مورچه روی رأس A از یک مکعب است و می‌خواهد با حداکثر ۵ حرکت، به رأس روبه‌رو (B) برود. در هر حرکت او می‌تواند از یک رأس، در طول یک یال، به یک رأس مجاور برود. اگر مورچه به رأس B برسد، متوقف می‌شود و دیگر حرکت نمی‌کند. به چند طریق این کار ممکن است؟

۴. روی اضلاع یک مثلث، به ترتیب ۲، ۳ و ۷ نقطه را علامت زده‌ایم؛ طوری که هیچ یک روی رأس‌های مثلث نیستند. چند مثلث می‌توان ساخت؛ طوری که رئوس آن‌ها از رئوس مثلث و نقاط علامت زده باشد؟

۵. ۱۵ نفر با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۵ دور یک دایره نشسته‌اند. ۶ پرس غذا داریم که می‌خواهیم به ۶ نفر از این افراد بدهیم (پرس‌های غذا را یک‌سان فرض کنید). می‌خواهیم طوری این کار را انجام دهیم که افراد بدون غذا

آزمون کوتاه پاسخ ۴

نیز بتوانند لاش خوری کنند (!)؛ یعنی مجاور با دست کم یک فرد غذا دار باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

۶. چند سه تایی مرتب (a, b, c) از اعداد صحیح مثبت کم تر از ۱۰ وجود دارد؛ طوری که $a \times b \times c$ بر ۲۰ بخش پذیر باشد؟

۷. 2^7 نفر با شماره های $1, 2, \dots, 2^7$ ، به ترتیب شماره، دور یک دایره نشسته اند. بازی در ۱۰ راند برگزار می شود. در هر راند، یکی از افراد دور دایره به طور تصادفی انتخاب می شود. سپس افراد با شروع از او در جهت ساعت گرد، دوتا دوتا جفت می شوند و با هم می اندازند و هر کس به احتمال $\frac{1}{4}$ می برد. به این ترتیب نیمی از افراد در هر راند می بازند و از دایره خارج می شوند.

روزبه و ابوالفضل نیز دور دایره هستند و شماره های آن ها ۱ و ۶۴ است. احتمال این را بیابید که فینال بین روزبه و ابوالفضل باشد.

۸. به چند طریق می توان در خانه های یک جدول 4×4 ، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را نوشت؛ طوری که هر سه شرط زیر برقرار باشد؟

- هر سطر، تمام اعداد را داشته باشد.
- هر ستون، تمام اعداد را داشته باشد.
- هر یک از ۴ زیر جدول 2×2 گوشه، تمام اعداد را داشته باشد.

۹. چند گراف ساده ی ۸ رأسی ۲-منتظم با رأس های v_1, v_2, \dots, v_8 داریم؟

۱۰. در یک کلاس n -نفره، یک آزمون ۱۰ سواله برگزار شد. به این آزمون، خنده دار گوئیم؛ اگر دو سوال p_1, p_2 و ۵۷ نفر وجود داشته باشند که یکی از دو وضعیت زیر رخ داده باشد:

- تمام ۵۷ نفر به سوال، پاسخ درست داده باشند.
 - هیچ یک از ۵۷ نفر به سوال، پاسخ درست نداده باشند.
- کمینه ی n را بیابید؛ طوری که آزمون به طور تضمینی خنده دار باشد.

موفق باشید

—اسدی