پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۹

پاسخ کلیدی:

۱. ۱۰۳۶۸۰۰

۲. ۱۶۳۸۴

۳. $\frac{۵}{۱۱}$

۴. ۲۷۹۱

۵. ۱۶

۶. ۲۴۲۵۵۶

۷. ۴

۸. ۲۰۳۶

۹. $\frac{۴۰۹۵}{۲۲۵۲۸}$

۱۰. ۱

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۹

پاسخ تشریحی:

۱. پسرها و دخترها باید به صورت یک در میان نشسته باشند. در واقع اگر صندلی‌ها را به صورت شترنجی رنگ کنیم، پسرها در صندلی‌های یک رنگ و دخترها در صندلی‌های رنگ دیگر قرار می‌گیرند. پس پاسخ برابر $۲ \times ۶! \times ۶! = ۱۰۳۶۸۰۰$ است.

۲. مهره باید از خانه‌ی وسط هر سطر بگذرد. رسیدن از خانه‌ی وسط سطر k به خانه‌ی وسط سطر $k+۱$ شامل ۲ حالت است. پس تعداد کل حالات برابر $۲^{۱۴}$ است.

۳. به جز گام نخست، هرگاه فردی تاسی می‌اندازد، به احتمال $\frac{۱}{۶}$ می‌برد و به احتمال $\frac{۵}{۶}$ بازی ادامه پیدا می‌کند. پس اگر احتمال برد نفر ابوالفضل را p بگیریم، داریم:

$$p = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۶} + (\frac{۵}{۶})^{۳} \times \frac{۱}{۶} + \dots$$

که مقدار p از رابطه‌ی بالا $\frac{۵}{۱۱}$ به دست می‌آید.

۴. ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای هر n فرد جز ۱، روزبه بازی را می‌برد. اگر n فرد باشد، مرحله‌ی آخر را روزبه انجام می‌دهد. دو عدد مرحله‌ی آخر هر چه باشند، روزبه می‌تواند کاری کند که حاصل زوج شود و بازی را می‌برد. حال ثابت می‌کنیم به ازای هر n زوج، ابوالفضل بازی را می‌برد. ابتدا باقی‌مانده‌ی اعداد بر ۲ را می‌نویسیم:

$$۱, ۰, ۱, ۰, \dots, ۱, ۰$$

ابتدا ابوالفضل دو عدد آخر را انتخاب کرده و آن‌ها را جمع می‌کند. اعداد به صورت

$$۱, ۰, ۱, ۰, \dots, ۱$$

خواهند شد. به چنین شکلی، شکل خوب می‌گوییم. حال در هر مرحله روزبه هر کاری انجام دهد، ابوالفضل می‌تواند کاری کند که دوباره شکل اعداد خوب شود. به این ترتیب در انتها یک عدد فرد باقی خواهد ماند و ابوالفضل برنده می‌شود. پس ۱۳۹۵ـامین عدد n که روزبه بازی را می‌برد، برابر ۲۷۹۱ است.

۵. پس از نوشتن حروف توسط ابوالفضل، به یک خانه *افقی‌ـحسّاس* گوییم، اگر پس از نوشتن R توسط روزبه در آن، عبارت «AAR» یا «RAA» افقی به وجود آید. به همین ترتیب خانه‌ی *عمودی‌ـحسّاس* تعریف می‌کنیم. یک سطر دل‌خواه در نظر بگیرید. تنها دو طرف بلوک‌های به طول حداقل ۲ از حرف A می‌توانند افقی حساس

باشند. پس تعداد خانه‌های افقی حساس حداکثر k و هم‌چنین تعداد خانه‌های عمودی حساس حداکثر k است. پس اگر

$$k+۱ \leq ۶۴-k-۲k$$

(یا به عبارتی $k \leq ۱۵$) باشد، روزبه روش تضمینی برای برد دارد. برای $k=۱۶$ نیز روش زیر مثالی برای بردن ابوالفضل است:

	A	A			A	A	
	A	A			A	A	
	A	A			A	A	
	A	A			A	A	

۶. عمل جای‌گزینی را با $\star$ نشان می‌دهیم. به عبارتی:

$$(x_۱,y_۱)\star(x_۲,y_۲)=\left(\frac{x_۱y_۱x_۲}{y_۲},\frac{x_۱y_۱y_۲}{x_۲}\right)$$

به ازای هر زوج مرتب (x,y)، *شکل دوّم* آن را $[xy,\frac{x}{y}]$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید زوج مرتب و شکل دوّم آن به صورت یک‌تا از روی یک‌دیگر ساخته می‌شوند. هم‌چنین داریم:

$$[a_۱,b_۱]\star[a_۲,b_۲]=\left(\sqrt{a_۱b_۱},\sqrt{\frac{a_۱}{b_۱}}\right)\star\left(\sqrt{a_۲b_۲},\sqrt{\frac{a_۲}{b_۲}}\right)=\left(a_۱b_۲,\frac{a_۱}{b_۲}\right)=[a_۱^۲,b_۲^۲]$$

حال ما تمام زوج مرتّب‌های اولیه را با شکل دوّم‌شان جای‌گزین کرده و عمل $\star$ را به شکل بالا انجام می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که $[a_۱,b_۱]\star[a_۲,b_۲]$ تنها به مقادیر $a_۱,b_۲$ بستگی دارد. فرض کنید k تعداد دفعاتی باشد که زوج مرتب نخست و n تعداد دفعاتی باشد که زوج مرتب آخر پاک می‌شود. شکل دوّم زوج مرتب نهایی برابر با

$$\left[۲۷۹۰^{۲^k},\left(\frac{۶۹۹}{۶۹۸}\right)^{۲^n}\right]$$

خواهد بود. به جز مرحله‌ی آخر، ممکن نیست هم زوج مرتب نخست و هم زوج مرتب آخر پاک شود. پس $k+n \leq ۶۹۷$ و $k,n \geq ۱$ و هر جفت از k,n با این دو شرط، یک زوج مرتب منحصر به فرد در انتها می‌سازد. پس پاسخ برابر

$$\sum_{k=۱}^{۶۹۶}\sum_{n=۱}^{۶۹۷-k} ۱ = ۲۴۲۵۵۶$$

است.

۷. ابتدا ثابت می‌کنیم امکان ندارد هر سه چندجمله‌ای داده شده، ریشه‌ی حقیقی داشته باشند. فرض کنید چنین باشد. پس $a^۲ \geq ۴bc$ و $b^۲ \geq ۴ca$ و $c^۲ \geq ۴ab$. با ضرب این سه نابرابری به $(abc)^۲ \geq ۶۴(abc)^۲$ می‌رسیم که امکان ندارد. پس دست کم یکی از سه چندجمله‌ای، ریشه‌ی حقیقی ندارد و پاسخ حداکثر برابر ۴ است. برای ۴ نیز

$$a = ۱, b = ۵, c = ۶$$

را در نظر بگیرید. پس پاسخ برابر ۴ است.

۸. فرض کنید n عددی از A باشد که در برد f نیامده است و هم‌چنین فرض کنید m عددی از A باشد که دو بار در برد f آمده است. واضح است که $f(۱) = ۱$ و با استفاده از استقرا می‌توان دریافت به ازای هر $x \leq m$ داریم $f(x) = x$. به همین ترتیب می‌توان دریافت که به ازای هر $x > n$ داریم $f(x) = x$. پس $n > m$. حال فرض کنید $m < k < n$ باشد. با مشخص شدن مقادیر $f(۱), f(۲), \ldots, f(k-۱)$، $k-۱$ مقدار ممکن از $k+۱$ مقدار ممکن برای $f(k)$ از بین می‌روند ($۱, ۲, \ldots, k$ شامل دو بار m). پس مقدار $f(k)$ دو حالت دارد. با رسیدن به $f(n)$، مقدار آن به طور یک‌تا مشخص می‌شود. پس به ازای هر m,n، تابع به $۲^{n-m-۱}$ حالت مشخص می‌شود. پس پاسخ برابر است با:

$$\sum_{m=۱}^{۱۰}\sum_{n=m+۱}^{۱۱} ۲^{n-m-۱} = \sum_{m=۱}^{۱۰}(۲^{۱۱-m} - ۱) = ۲^{۱۱} - ۱۲ = ۲۰۳۶$$

۹. فرض کنید x احتمال نماینده شدن روزبه باشد؛ به شرط آن که ابوالفضل به روزبه رأی دهد و فرض کنید y احتمال نماینده شدن روزبه باشد؛ به شرط آن که ابوالفضل به روزبه رأی ندهد. ما به دنبال x هستیم. می‌دانیم احتمال نماینده شدن روزبه در کل برابر $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۲}$ است و از طرفی این مقدار طبق تقارن برابر $\frac{۱}{۱۱}$ می‌باشد. ابتدا y را حساب می‌کنیم. اگر ابوالفضل به روزبه رأی ندهد، روزبه برای نماینده شدن باید یک رأی بیاورد و هر کس نیز دقیقن

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۹

یک رأی آورده باشد و پس از آن به احتمال $\frac{۱}{۱۱}$ انتخاب شود. این امر تنها در یک حالت رخ می‌دهد؛ پس:

$$y = \frac{۱}{۲^{۱۱}} \times \frac{۱}{۱۱}$$

پس مقدار x برابر با

$$x = \frac{۲}{۱۱} - \frac{۱}{۲^{۱۱} \times ۱۱} = \frac{۲^{۱۲} - ۱}{۱۱ \times ۲^{۱۱}} = \frac{۴۰۹۵}{۲۲۵۲۸}$$

۱۰. جدول $A_۰$ را به این شکل بسازید که سطر iـام آن به ترتیب شامل اعداد

$$۱۳۹۵i - ۱۳۹۴, ۱۳۹۵i - ۱۳۹۳, \ldots, ۱۳۹۵i$$

باشد. به ازای هر $۱ \leq k \leq ۱۳۹۵$، جدول A_k را از روی جدول $A_۰$ به این شکل بسازید که عنصر آخر سطر k را با عنصر یکم سطر $k+۱$ جابه‌جا کنید.

ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $B \neq A_۰$ یک جدول معتبر باشد، دو عدد هم‌ستون در B وجود دارند که در $A_۰$ هم‌سطر باشند. فرض کنید چنین نباشد و جدولی مانند B وجود داشته باشد که هیچ دو عدد هم‌سطر در $A_۰$، در آن هم‌ستون نباشند. اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۳۹۵$ را در نظر بگیرید که در سطر یکم $A_۰$ آمده‌اند. این اعداد باید در B دوبه‌دو در ستون‌های مختلف باشند. عدد ۱ که باید در خانه‌ی بالا ـ چپ بیاید. فرض کنید عددی از این ۱۳۹۵ عدد وجود داشته باشد که در سطر یکم B نیامده باشد. کوچک‌ترین چنین عددی را در نظر بگیرید. باید در ستون یکم قرار بگیرد و با ۱ هم‌ستون می‌شود که تناقض است. پس ۱۳۹۵ عدد نخست، به ترتیب در سطر نخست B قرار گرفته‌اند. به همین ترتیب برای سطرهای بعدی می‌توان این نتیجه را گرفت و در انتها $B = A_۰$ می‌شود که تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

هم‌چنین واضح است به ازای هر $۱ \leq k \leq ۱۳۹۵$ دو عدد هم‌سطر در A_k وجود دارند که در $A_۰$ هم‌ستون باشند (اعداد $۱۳۹۵k - ۱۳۹۴$ و $۱۳۹۵k + ۱$). حال به ازای یک $۱ \leq k \leq ۱۳۹۵$ دل‌خواه، جدول A_k را به همراه جدول B که $B \neq A_۰, A_k$ در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم B شامل دو عدد هم‌ستون است که در A_k هم‌سطر باشند. فرض کنید چنین نباشد؛ در این صورت به مانند استدلال قبل، $k - ۱$ سطر نخست و $۱۳۹۵ - k - ۱$ سطر آخر B کاملن مانند A_k خواهد بود و برای سطرهای $k, k+۱$ آن تنها دو حالت وجود خواهد داشت که برابر $A_k, A_۰$ هستند. پس $B = A_۰$ یا $B = A_k$ که تناقض است و حکم ثابت می‌شود.

حال ابوالفضل ابتدا جدول خود را برابر $A_۰$ می‌گذارد و به جداول روزبه نگاه می‌کند. اگر در میان جداول روزبه $A_۰$ وجود نداشت، بدون تغییر $A_۰$ را به عنوان جدول خود ارائه می‌دهد و برنده می‌شود؛ در غیر این صورت یک

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۹

$1395 \geq k \geq 1$ وجود دارد که A_k در میان جداول روزبه نیست. کافی است ابوالفضل با یک تغییر جدول خود را به A_k تبدیل کند و برنده شود. پس پاسخ برابر ۱ است.