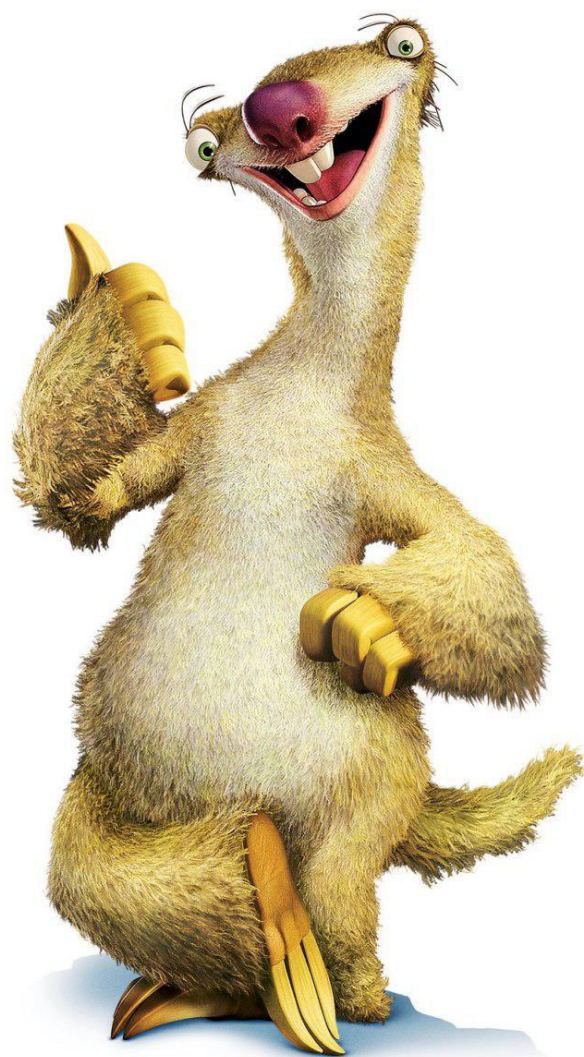


# آزمون تشریحی شازرز (فروردین 98)



## توضیحات:

آزمون شامل 4 سؤال می باشد

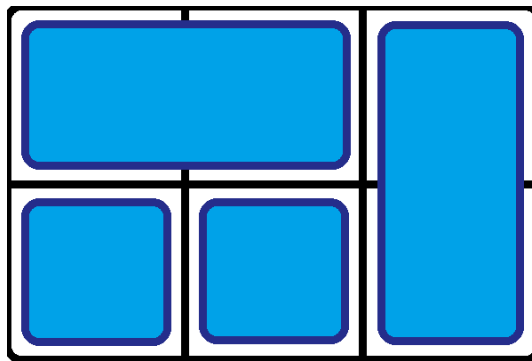
زمان آزمون 4:30 ساعت معادل 270 دقیقه است

نمرات همه ی سؤالات برابر 20 میباشد

سؤالات برای آمادگی مرحله ی دوم المپیاد کامپیوتر تهیه شده اند

## سؤال 1: برای صفر نشدن ☹️

یک جدول  $2 \times n$  داریم.  $f(n)$  را تعداد راه های پوشاندن این جدول با کاشی های  $1 \times 1$  و  $2 \times 1$  در نظر بگیرید به طوری که هر خانه از این جدول دقیقاً توسط یکی از کاشی ها پوشانده شده باشد و هیچ قسمتی از کاشی ها از جدول بیرون نزده باشد. به طور مثال برای  $n = 3$  شکل زیر یکی از راه های پوشاندن جدول است:



الف: به ازای  $n > 1$  ثابت کنید  $f(n) > 2 \times f(n - 1)$  (4 نمره)

ب: ثابت کنید  $f(n) \leq 4^n$  (6 نمره)

ج: به ازای هر  $c$  ثابت کنید حداقل یک  $n$  وجود دارد به طوری که

$$f(n) \geq c \times 3^n \quad (10 \text{ نمره})$$

## سؤال 2: چنگیز و چونه ☹️

یک جدول  $100 \times 100$  به شما داده شده است. در ابتدای کار، در هر خانه از این جدول عدد 0 نوشته شده است. چنگیز و چونه با هم بازی میکنند. چنگیز بازی را شروع میکند. بازی پس از 200 مرحله (هر نفر 100 مرحله) تمام میشود.

در هر مرحله، فردی که نوبتش هست، یک سطر یا یک ستون انتخاب و یک واحد به همه ی خانه‌های آن سطر یا ستون به پیمانه 3 اضافه میکند (یعنی اگر خانه‌ای مقدار 2 داشته باشد مقدار جدید آن صفر خواهد شد)

چنگیز در صورتی برنده ی بازی می‌شود که در انتها در بیش از نیمی از خانه‌ها (5000 خانه) عدد یک نوشته شده باشد.

چونه در صورتی برنده ی بازی می‌شود که در انتها در بیش از نیمی از خانه‌ها (5000 خانه) عدد صفر نوشته شده باشد.

اگر هیچ کدام از دو حالت بالا رخ ندهد، بازی مساوی میشود.

با فرض اینکه چنگیز و چونه از شعور بالایی برخوردارند و بهترین حرکات ممکن را انجام میدهند، نتیجه ی بازی را مشخص کنید.

### سؤال 3: زوج زشت ☺

یک زوج مرتب  $(n, k)$  از اعداد طبیعی را زشت میگوییم اگر بتوان یال های گراف کامل  $n$  راسی را به طوری با سیاه و سفید رنگ کرد که مینیمم قطر زیر گراف القایی فراگیر بر روی رنگ های سیاه و سفید  $k$  باشد. تمام زوج مرتب هایی مثل  $(n, k)$  که زشت هستند را بیابید.

تعریف فاصله: به طول کوتاه ترین مسیر بین دو راس فاصله ی آن دو راس میگوییم.  
تعریف قطر: به بیشترین فاصله بین جفت راس های گراف قطر گراف میگوییم.  
(قطر گراف ناهمبند بینهایت هست)

## سؤال 4: اردر لاگ لاگه کمرش ☺

بازی دو نفره  $X$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $n > 6$  نفر وجود دارند که هر کس با برخی از افراد دیگر این بازی را انجام داده است. در هر بازی  $X$  دقیقاً یک نفر میبرد و نفر دیگر میبازد. میدانیم برای هر دو نفر از این بازی، نفر سومی وجود دارد که هر دوی آن هارا برده است. ثابت کنید برای هر  $k$  ای که  $n \geq 2(2^{2^k} - 1)$ ، عددی مثل  $3 \leq l \leq 2k$  وجود دارد که  $l$  نفر مثل  $A_1, A_2, \dots, A_l$  وجود دارند به طوری که نفر  $A_1$  نفر  $A_l$  را برده باشد و به ازای هر  $i < l$  نفر  $A_{i+1}$  نفر  $A_i$  را برده باشد.