پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۶

پاسخ کلیدی:

۱. ۶۰

۲. $\frac{۲۰۰۹}{۲}$

۳. ۱۰۰۸۰۰

۴. ۱۰۲۰۱

۵. ۱۲۸

۶. $\frac{۲}{۲۱}$

۷. ۳۲۳

۸. ۲۰۲۵

۹. $\frac{۳۹۰۷}{۱۵۶۲۵}$

۱۰. ۱۵۴۰

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۶

پاسخ تشریحی:

۱. انتخاب بلوکی که بتواند شرایط ما را داشته باشد، ۶ حالت دارد و از هر بلوک، ۱۰ دوتایی با خاصیت مورد نظر وجود دارد. پس پاسخ برابر $۶ \times ۱۰ = ۶۰$ است.

۲. به ازای هر زیرمجموعه‌ی A، زیر مجموعه‌ی $A' = \{i|۲۰۰۹ - i \in A\}$ را تعریف می‌کنیم. اگر $m(X)$ را میانه‌ی مجموعه‌ی X در نظر بگیریم، داریم:

$$m(A') = ۲۰۰۹ - m(A)$$

پس با جفت‌جفت کردن زیرمجموعه‌ها، پاسخ $\frac{۲۰۰۹}{۲}$ به دست می‌آید.

۳. در کل ۸ جفت باید تشکیل شود. باید ۷ تا از آن‌ها شامل اسب باشند و دیگری شامل یک خوک و یک گاو باشد. ۴×۵ حالت برای انتخاب جفت خوک‌ـگاو و $۷!$ حالت برای انتخاب دیگر جفت‌ها داریم. پس پاسخ برابر $۴ \times ۵ \times ۷! = ۱۰۰۸۰۰$ است.

۴. اگر در انتها در نقطه‌ی (x, y) باشیم، $x+y$ باید زوج باشد. هم‌چنین $-۱۰۰ \leq y \leq ۱۰۰$ و $|x| \leq ۱۰۰-|y|$. پس x می‌تواند مقادیر $|y| - ۱۰۰, |y| - ۹۸, \ldots, ۱۰۰ - |y|$ را بگیرد. پس x، $۱۰۱ - |y|$ حالت مختلف دارد. با در نظر گرفتن yـ های مختلف، پاسخ برابر است با:

$$\sum_{y=-۱۰۰}^{۱۰۰} ۱۰۱ - |y| = ۱۰۲۰۱$$

۵. S شامل اعدادی است که نمایش آن‌ها در مبنای ۳، تنها ارقام ۰ و ۱ دارد (چرا؟). از طرفی $۲ \times ۳^۶ < ۲۰۰۸ < ۳^۷$. پس $۲^۷$ عدد این چنین وجود دارد. پس پاسخ برابر ۱۲۸ است.

۶. سطر سوم باید عدد ۱ را داشته باشد. این عدد ۱ باید در یکی از ستون‌های ۴ تا ۹ باشد (چرا؟). احتمال قرار گرفتن ۱ در هر یک از این خانه نیز برابر است. پس در خانه‌ی علامت‌دار، به احتمال $\frac{۱}{۶}$، عدد ۱ قرار می‌گیرد. به همین ترتیب به احتمال $\frac{۱}{۶}$ در خانه‌ی علامت‌دار، عدد ۲ قرار می‌گیرد. از آن‌جایی که دیگر اعداد، تفاوتی با هم ندارند، پاسخ برابر

$$\frac{۱ - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶}}{۷} = \frac{۲}{۲۱}$$

است.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۶

۷. فرض کنید $f(n)$، تعداد روش‌های خواسته شده برای n نقطه باشد. یک نقطه‌ی خاص p را در نظر می‌گیریم. یا در پاره‌خط‌ها نمی‌آید که $f(n-1)$ حالت داریم و یا با یک پاره‌خط به نقطه‌ی iـ‌ام بعدی (در جهت ساعت‌گرد) متصل می‌شود که $f(i-1)\times f(n-i-1)$ حالت دارد. پس:

$$f(n)=f(n-1)+f(0)f(n-2)+f(1)f(n-3)+\ldots+f(n-2)f(0)$$

داریم $f(0)=f(1)=1$. پس می‌توان با به دست آوردن $f(2), f(3), \ldots, f(7)$ با رابطه‌ی بالا، مقدار $f(8)=323$ را به دست آورد.

۸. یک عضو دل‌خواه $x\in 1, 2$ در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

- اگر $x\notin A_1$، آن‌گاه x در هیچ زیرمجموعه‌ای نخواهد بود. پس ۱ حالت داریم.
- اگر $x\in A_1$ اما $x\notin A_2$، آن‌گاه x در A_2, A_4, A_6 نمی‌تواند باشد؛ ولی می‌تواند مستقلن در هر یک از زیرمجموعه‌های A_3, A_5, A_7 باشد یا نباشد. پس ۸ حالت داریم.
- اگر $x\in A_1$ و $x\in A_2$، آن‌گاه بودن و نبودن x در هر یک از A_5, A_7، ۲ حالت دارد. هم‌چنین بودن یا نبودن آن در A_4 و A_8 سه حالت و بودن یا نبودن آن در A_3 و A_6 سه حالت دارد. پس $2\times2\times3\times3=36$ حالت داریم.

پس برای هر x، ۴۵ حالت داریم. پس پاسخ برابر $45^2=2025$ است.

۹. می‌توان با نوشتن رابطه‌ی بازگشتی و استفاده از دنباله‌های بازگشتی کمکی، مسئله را به راحتی حل کرد؛ اما در زیر، راه حلی کلی ارائه می‌دهیم که پاسخ را به ازای هر n پیدا می‌کند (در این مسئله $n=6$ است).

از آن‌جایی که تنها زوجیت مختصات نقاط مهم است، می‌توانیم فرض کنیم در هر مرحله به احتمال ۰/۲ به بالا، به احتمال ۰/۲ به راست و به احتمال ۰/۲ به بالا راست حرکت می‌کنیم و نیز به احتمال ۰/۴ حرکت نمی‌کنیم. این امر می‌تواند با تابع مولد زیر، بررسی شود:

$$f(x,y)=(0/4+2\times 0/1x+2\times 0/1y+4\times 0/05xy)^6=\frac{(2+x+y+xy)^6}{5^6}$$

باید مجموع ضرایب x^ay^bهایی را پیدا کنیم که a, b زوج باشند (چرا؟). می‌توان بررسی کرد که این مقدار، برابر با $\frac{1}{4}\Big(f(1,1)+f(1,-1)+f(-1,1)+f(-1,-1)\Big)$ است. از طرفی داریم $f(1,1)=1$ و $f(1,-1)=f(-1,1)=f(-1,-1)=\frac{1}{5^6}$. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{1}{4}\Big(1+\frac{3}{5^6}\Big)=\frac{3907}{15625}$$

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۶

۱۰. **راه ۱:** به ازای هر $k = 1, 2, 3, 4$ می‌توان یک تناظر یک به یک بین زوج مرتب‌های (a_k, b_k) از اعداد صحیح نامنفی با خاصیت $0 \leq a_k \leq k$ به اعداد صحیح نامنفی برقرار کرد؛ به گونه‌ای که (a_k, b_k) به $a_k + (k+1)b_k$ متناظر شود (بررسی کنید که تناظر، یک به یک است). پس اگر $x_k = a_k + (k+1)b_k$ باشد، پاسخ مسئله برابر با تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ در بین اعداد صحیح نامنفی است که برابر $\binom{22}{3} = 1540$ می‌باشد.

راه ۲: می‌توانید بررسی کنید که پاسخ مسئله، برابر با ضریب x^{19} در تابع مولد زیر است:

$$\prod_{n=1}^{4}(1 + x + \ldots + x^n) \times \prod_{n=1}^{4}(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots)$$

$$= \Big(\prod_{n=1}^{4} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\Big) \times \Big(\prod_{n=1}^{4} \frac{1}{1 - x^{n+1}}\Big)$$

$$= \prod_{n=1}^{4} \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)(1 - x^{n+1})} = (\frac{1}{1 - x})^4$$

که ضریب x^{19} در آن برابر $1540 = \binom{22}{19} = \binom{-4}{19}(-1)^{19}$ است.