

## آزمون کوتاه پاسخ شماره ۷

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره منفی ندارد اما در بین افراد با نمره برابر، در رتبه بندی کسی برتر است که تعداد غلط کمتری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل  $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$  باشد.

۱. به چند طریق می توان اعداد صحیح  $7, 6, \dots, -6, -7$  را در یک ردیف چید؛ طوری که به ازای هر دو عدد متوالی  $a_i, a_{i+1}$  داشته باشیم  $|a_i| \geq |a_{i+1}|$ ؟

۲. ۵۴ کارت داریم که روی یک از آن ها عکس ابوالفضل و روی یکی از آن ها عکس روزبه قرار دارد. کارت ها را در یک دسته به طور تصادفی بر می زنیم. امید ریاضی تعداد کارت های بین عکس های روزبه و ابوالفضل چیست (خود این دو کارت را کارت میانی محاسبه نکنید)؟

۳. چند جایگشت از حروف کلمه  $HMMTHMMT$  زیرجایگشت  $HMMT$  را ندارد؟  
توجه: یک زیرجایگشت از یک جایگشت، تعدادی از حروف متوالی آن است.

۴. چند تابع  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  :  $f$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  داشته باشیم  $f(f(x)) = f(x)$ ؟

۵. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $s(n)$  را برابر تعداد ارقام ۱ در نمایش دودویی  $n$  در نظر می گیریم. مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{1}{255} \sum_{0 \leq n < 16} 2^n (-1)^{s(n)}$$

۶. چند دنباله ی  $a, b, c, d, e$  از اعداد طبیعی با شرط  $abcde \leq a + b + c + d + e \leq 10$  وجود دارد؟

## آزمون کوتاه پاسخ ۷

۷. ابوالفضل، اعداد ۱ تا ۴۹ را در خانه‌های یک جدول  $7 \times 7$  قرار می‌دهد. سپس روزبه همین کار را با یک جدول  $7 \times 7$  دیگر می‌کند. به دو عدد در یک جدول، دوستانه گوییم، اگر هم‌سطری یا هم‌ستونی باشند. به یک جفت  $x, y$  از اعداد ۱ تا ۴۹ عاشقانه گوییم، اگر هم در جدول روزبه و هم در جدول ابوالفضل، دوستانه باشند. امید ریاضی تعداد جفت‌های عاشقانه را بیابید.

۸. چند گراف دوبخشی با بخش‌های  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$  و  $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_5\}$  داریم که در آن درجه‌ی هر رأس، دقیقاً ۲ باشد؟

۹. به چند طریق می‌توان ۷ خانه‌ی باقی‌مانده از جدول زیر را با اعداد طبیعی پر کرد؛ طوری که هر عدد بر اعداد بالا و چپش (در صورت وجود) بخش‌پذیر باشد؟

۱		
		۲۰۰۹

۱۰. در یک جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, n$ ، یک عدد را قوی می‌گوییم، اگر از عدد سمت چپش کوچک‌تر باشد. برای مثال، جایگشت ۱، ۳، ۲ فقط یک عدد قوی دارد و آن ۱ است. چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ داریم که دقیقاً ۲ عدد قوی داشته باشد؟

موفق باشید

—اسدی