

باسمه تعالی

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۳۰	۲۱۰

طراحی شده توسط:

علی بهجتی، محمدمهدی شکری، امیرمحمد دهقان، آرش محمودیان، امین بهجتی، علی اسدی، کیوان خادمی، سیدپارسا میرطاهری، روح ... عزیزاده و گلرخ خدامباشی

با تشکر از:

توضیحات

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- لطفا تمام مشخصات خواسته شده در پاسخ برگ را وارد نمایید.
- ۲- دفترچه‌ی سوالات (به جز این صفحه) شامل نه صفحه است. بلافاصله پس از شروع آزمون، دفترچه‌ی خود را بررسی نمایید و در صورت وجود هرگونه نقص، مسئول جلسه را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ۴- استفاده از هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت، هرگونه منابع الکترونیکی (مانند اینترنت و موبایل) و وسایلی از این قبیل ممنوع است.

تمامی حقوق این آزمون برای وبسایت شاززز محفوظ است

آدرس اینترنتی: <http://shaazzz.ir>

امین درختی ریشه دار و n راسی دارد. او ابتدا در راس ریشه n گردو قرار می‌دهد. در هر مرحله هر راس اگر x گردو داشته باشد ($x > 0$)، یکی از آن خورده و به طرز عجیبی به هر یک از بچه‌هایش $1 - x$ گردو می‌دهد (و دیگر گردویی برایش باقی نمی‌ماند). اگر برگ هم باشد یکی می‌خورد و بقیه را به امین می‌دهد.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید

- (۱) برای درخت ریشه‌دار ۹۵ راسی بیشترین و کمترین تعداد گردویی که امین بدست می‌آورد به ترتیب کدام است؟
 الف) ۸۷۴۲ و ۰ ب) ۸۷۴۲ و ۱ ج) ۸۸۳۶ و ۰ د) ۸۸۳۶ و ۱ ه) ۸۶۴۹ و ۰
- (۲) به ازای همه ی درخت های ریشه دار متفاوت ۵ راسی از نظر یکرختی امین تعداد گردو هایی که در نهایت به‌دست می‌آورد را یادداشت کرده. مجموع این اعداد چقدر است؟
 الف) ۴۲ ب) ۴۴ ج) ۴۶ د) ۴۷ ه) ۴۹
- (۳) امین یک درخت دودویی کامل به ارتفاع ۸ (با ۲۵۶ برگ) دارد. او میخواهد این درخت را از یک راس آویزان کند، طوری که تعداد گردوهایی که در نهایت به‌دست می‌آورد کمینه شود. این تعداد چند است؟
 الف) ۱۲۶۴۶۴ ب) ۱۲۸۲۵۷ ج) ۱۲۶۴۲۲ د) ۱۲۸۵۱۲ ه) ۱۲۶۷۱۹

n نفر با شماره های ۰ تا $n - 1$ (ساعتگرد) دور یک میز دایره‌ای شکل نشسته اند و در حال انجام یک بازی اند. در ابتدا دست یک نفر توپ است. در هر مرحله اگر توپ دست نفر i ام باشد، آن را به نفر i تا بعد از خود میدهد (ساعتگرد). بازی (!) زمانی تمام میشود که توپ به نفر ۰ برسد.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید

- (۴) به ازای چه n هایی از ۲ تا ۱۰۰۰ اگر ابتدای بازی توپ دست نفر ۱ باشد بازی تمام می‌شود؟
 الف) ۹۹۹ ب) ۱۰ ج) ۵۰۰ د) ۳۳۳ ه) ۹
- (۵) تپلی یک n را تعداد کسانی (به جز نفر ۰) میگوییم که اگر با n نفر دور میز، ابتدا توپ دست آن ها باشد بازی تمام می‌شود. جمع تپلی n های ۲ تا ۵۰۰ چقدر است؟
 الف) ۴۰۸۴ ب) ۱۷۸۰ ج) ۱۵۲۴ د) ۱۸۰۴ ه) ۱۷۸۴
- (۶) حال اگر قانون بازی عوض بشود و در مرحله i ام نفر x توپ را به نفر $x + i$ بدهد. به ازای n برابر با ۵۳ و اگر توپ دست نفر اول باشد، بعد از چند مرحله بازی تمام می‌شود؟
 الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۵۲ ه) هیچ کدام

- (۷) به یک رشته پاپ-پسند می‌گوییم اگر متشکل از رقم‌های ۰ و ۱ باشد و هیچ پیشوند و پسوندی از آن با هم برابر نباشند به جز پیشوند و پسوندی که همه رشته را شامل می‌شوند. چند رشته شازرز پسند ۱۰ حرفی وجود دارد؟
- الف) ۲۴۳ (ب) ۲۵۲ (ج) ۲۵۶ (د) ۲۸۴ (ه) ۵۱۲

عمو یک آرایه ۱۰ خانه ای دارد که خانه هایش را با اعداد ۱ تا ۱۰ شماره گذاری کرده. در هر خانه عددی نگه داشته میشود و در ابتدا عدد همه خانه ها ۰ است. یک عمل دویدن روی آرایه عبارت است از انتخاب یک عدد k بین ۱ تا ۱۰ و یک واحد اضافه کردن عدد خانه هایی که شماره (اندیس) شان بر k بخش پذیر است.

- (۸) با استفاده از عملیات گفته شده به تعداد دلخواه، عمو به چه تعداد از آرایه های زیر می تواند برسد؟ (خانه های آرایه ها به ترتیب از چپ به راست اند.)

(۱) ۵, ۵, ۱۱, ۴, ۴, ۴, ۸, ۳, ۴, ۳

(۲) ۷, ۸, ۶, ۲, ۱۰, ۲, ۶, ۶, ۳, ۱

(۳) ۵, ۴, ۶, ۲, ۳, ۴, ۴, ۳, ۳, ۲

(۴) ۴, ۳, ۵, ۲, ۵, ۲, ۳, ۲, ۲, ۱

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

- (۹) آرایه ای داریم که عمو در اوقات فراغتش روی آن می‌دویده است. متاسفانه اعداد روی خانه‌های ۱ تا ۵ آن پاک شده‌اند و تنها اعداد خانه‌های ۶ تا ۱۰ را باقی مانده‌اند. با توجه به این اعداد، مقادیر خانه‌های ۱ تا ۵ چند حالت متفاوت می‌توانند داشته باشند؟

مقادیر خانه‌های ۶ تا ۱۰ به ترتیب برابرند با ۴ و ۲ و ۳ و ۳ و ۲.

الف) ۹۶ (ب) ۱۰۲ (ج) ۱۰۶ (د) ۱۱۸ (ه) ۱۲۶

- (۱۰) زاش پس از شکست بزرگ در مقابل گاوس به فروش وسایل الکتریکی روی آورده. او تعدادی لامپ کنار هم دارد که در ابتدا برخی روشن اند و بقیه خاموش. زاش میخواهد همه ی لامپ ها را روشن کند. او در هر دقیقه میتواند لامپی خاموش را که کنار لامپی روشن است روشن کند. زاش میخواهد بداند به چند طریق مختلف (ترتیب مختلف از روشن کردن لامپ ها) میتواند همه را روشن کند. دنباله ی لامپ ها به شکل زیر است (۰ نشان دهنده ی لامپ خاموش و ۱ روشن است):

۰۰۱۰۰۰۱۰۰۱۱۰۱۰۰۰۱۰

الف) (ب) (ج) ۳۲ (د) ۳۳۲۶۴۰۰ (ه) ۱۰۶۴۴۴۸۰۰

۲۱۲۸۸۹۶۰۰ ۱۷۰۳۱۱۶۸۰۰

(۱۱) نیما یک جدول از سه طرف بینهایت روی زمین کشید! جدولی که فقط ضلع سمت چپش معلوم است و از طرف های بالا، راست و پایین نامتناهی است. سپس برادرش، یلع، آمد و روی اولین ستون این جدول از سمت چپ در سه سطر متوالی، سه عدد ۱ نوشت. پس از این اقدام بیفکرانه ی یلع، این برادران راهی نداشتند جز اینکه کل بقیه ی جدول را پر از عدد کنند؛ به این شکل که روی همه ی خانه های دیگر در ستون اول (به جز آن سه خانه ی ۱) عدد ۰ را نوشتند و سپس عدد ستون i ام و سطر j م (که آن را با $A_{i,j}$ نشان می دهیم) را برابر $A_{i-1,j-1} + A_{i-1,j+1}$ گذاشتند. اکبر بزرگ با دیدن این جدول روی زمین، به سرعت مجموع اعداد نوشته شده روی ۱۱ ستون اول و بزرگترین عدد روی این ۱۱ ستون را طلب میکند. چه اعدادی را باید به اکبر بزرگ بدهیم؟

الف) ۶۱۴۱ و ۴۶۲ (ب) ۶۱۴۱ و ۷۷ (ج) ۶۱۴۱ و ۲۵۲ (د) ۱۲۲۸۵ و ۴۶۲ (ه) ۱۲۲۸۵ و ۲۵۲

(۱۲) آقای آ که پس از آن که به درجات بالایی از عرفان رسید، از استادش (که خواهش شده است اسمش برده نشود) شمشیری سحرآمیز هدیه گرفت و عهد کرد که از این شمشیر تنها برای بریدن جدول ها آن هم روی خطوط افقی یا عمودی داخل جدول استفاده کند. آقای آ در سفرش به سوی اهداف والایش، جدول های مختلفی را دید و هر یک از آن ها را با استفاده از شمشیرش به جدول های کوچک تری تقسیم کرد، و هریک از این جدول های کوچک تر به وجود آمده به یکی از اشکال زیر بودند:



گفته شده در مسیر آقای آ، جدولی با ۹۹ سطر و ۹۹ ستون وجود داشته. مجموع طول برش هایی که آقای آ برای تقسیم جدول به اشکال گفته شده زده را A میگیریم. کمترین مقدار ممکن برای A چقدر است؟

الف) ۹۶۰۶ (ب) ۱۰۶۹۶ (ج) ۹۶۰۰ (د) ۹۶۰۴ (ه) ۱۰۶۹۲

(۱۳) تعداد دور های همیلتونی (دوری که همه ی راس ها را در بر بگیرد) یک گراف ۶ راسی ۳۶ تا است. این گراف چند مثلث دارد؟

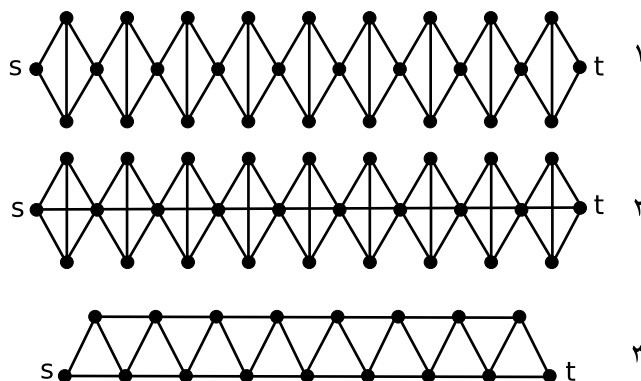
الف) ۶ (ب) ۱۴ (ج) ۸ (د) ۲۰ (ه) ۱۶

(۱۴)

کیوان و پیمان مشغول بازی روی یک گراف هستند. دو راس s و t مشخص شده‌اند و هدف بازی پیمودن مسیری از s به t است. در ابتدا راس s انتخاب شده‌است، سپس در هر مرحله بازیکنی که نوبتش است یکی از راس‌های مجاور با آخرین راس انتخاب شده را که تا به حال انتخاب نشده‌است را انتخاب می‌کند و به انتهای مسیر اضافه می‌کند، به طوری که مسیر جدید زیر مجموعه حداقل یک مسیر s به t باقی بماند. بازیکنی که راس t را به مسیر اضافه کند و مسیر s به t را کامل کند برنده است.

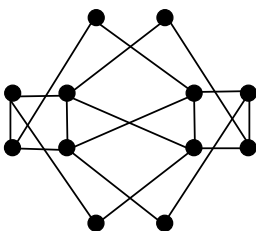
با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

(۱۵) به ازای کدام یک از گراف‌های زیر نفر اول استراتژی برد دارد؟



الف) ۱ و ۲ (ب) ۱ و ۳ (ج) ۲ و ۳ (د) هیچ کدام از (ه) هر سه گراف

(۱۶) در گراف زیر به ازای چند حالت از انتخاب‌های مختلف s و t ، نفر اول استراتژی برد دارد؟



الف) ۱۳۲ (ب) ۷۲ (ج) ۳۲ (د) ۳۶ (ه) ۶۰

(۱۷) یک دستگاه شازنگی داریم که از یک نمایشگر عدد و دو دکمه سیاه و یک دکمه سفید تشکیل شده‌است. نمایشگر ابتدا عدد ۰ را نشان می‌دهد. دکمه سیاه اول عدد نمایشگر را یکی زیاد می‌کند، دکمه سیاه دوم عدد نمایشگر را دو تا زیاد می‌کند و دکمه سفید عدد نمایشگر را در ۷ ضرب می‌کند. می‌دانیم نباید در دو مرحله پشت سر هم از دکمه‌های هم‌رنگ استفاده کنیم. با توجه به این محدودیت، بین تمامی اعداد طبیعی که می‌توان با استفاده از این دکمه‌ها روی نمایشگر نشان داد، ۵۱ امین کوچک‌ترینشان کدام است؟

الف) ۴۵۰ (ب) ۴۵۵ (ج) ۴۵۶ (د) ۲۸۰۹ (ه) ۲۸۴۹

۱۸) شازگل یک دستگاه گراف ساز پیدا کرده است. این دستگاه برای ساخت گراف‌های برچسب‌دار به کار می‌رود. استفاده‌ی آن به طریق زیر است

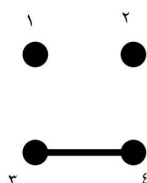
در ابتدا داخل دستگاه، یک گراف تک‌راسی وجود دارد. در هر مرحله می‌تواند یکی از کارهای زیر را انجام دهد:

- راس‌های کنونی راه به دلخواه عددگذاری کند و گراف را روی کاغذ بکشد. (اعداد روی رئوس گراف روی دستگاه نوشته نمی‌شوند بلکه فقط روی کاغذ نوشته می‌شوند، یعنی یک راس ممکن است اعداد متفاوتی در عملیات‌های متفاوت بگیرد)

- به همسایه‌های یک راس از گراف کنونی، یک راس جدید اضافه کند (بین این دو راس یال خواهد بود)

- بین دو راس در گراف فعلی که همسایه نیستند، یک یال اضافه کند.

با استفاده از این دستگاه می‌توانیم شکل گراف مورد نظر را روی کاغذ بکشیم. برای مثال گراف زیر را می‌توانیم در ۴ مرحله با دستورات زیر بسازیم.



۱. گراف کنونی را روی کاغذ بکش و عدد تنها راس را ۱ بگذار.

۲. گراف کنونی را روی کاغذ بکش و عدد تنها راس را ۲ بگذار.

۳. به همسایه‌ی تنها راس گراف کنونی یک راس اضافه کن.

۴. گراف کنونی را روی کاغذ بکش و عدد رئوس را ۳ و ۴ بگذار.

شازگل پس از کمی کار کردن با دستگاه متوجه شد که نمی‌تواند همه‌ی گراف‌ها را به وسیله این دستگاه روی کاغذ بکشد. بنابراین از شما خواسته تا به او بگویید که چند گراف ۷ راسی را نمی‌توان به وسیله این دستگاه ساخت. (گرافی معتبر است که اعداد رئوس آن متمایز باشند و این اعداد بین ۱ تا ۷ باشند، همچنین دو گراف متمایز هستند، اگر دو عدد مانند u و v وجود داشته باشد که در گراف اول راس با شماره u به راس با شماره v یال دارد و در گراف دوم یال ندارد)

الف) ۵۶۰

ب) ۰

ج) ۶۶۵

د) ۷۷۰

ه) ۸۰۵

یک گراف داریم که راس‌های آن متناظر با رشته‌های به طول حداکثر ۱۰۰ تشکیل شده از حروف ۱ و ۲ هستند. (این گراف ۱ - ۲۱۰۱ راس دارد). اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد، بین دو راس با رشته‌های متناظر s و p در گراف یال بی‌جهت داریم.

۱. s حداقل یک رقم برابر ۱ داشته باشد و با حذف چپ‌ترین رقم ۱ در s به رشته‌ی p برسیم.

۲. s حداقل یک رقم برابر ۱ داشته باشد و با تغییر چپ‌ترین رقم ۱ در s به ۲ به رشته‌ی p برسیم.

با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

(۱۹) کوتاه‌ترین مسیر بین راس متناظر با رشته‌ی ۲۱۲ و راس متناظر با رشته‌ی ۱۱۱۱ چند یال دارد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۹

(۲۰) کوتاه‌ترین مسیر بین راس متناظر با رشته‌ی ۲۱ و ۱۲۱۲۲۱۱۲۲ چند یال دارد؟

الف) ۱۳ (ب) ۹ (ج) ۱۲ (د) ۱۱ (ه) نمی‌توان رسید

شازورو، قهرمان کشور شازکیه، پس از شکست تروریستان کشورش، تعدادی سلاح سرد به غنیمت برده‌است. هر سلاح سرد به شکل n -تیر است، به این صورت که خشابی دایره‌ای با n جایگاه برای تیر دارد (مانند ۷ تیر). در شلیک اول، تیر در جایگاه اول شلیک می‌شود (اگر تیری نباشد اتفاقی نمی‌فتد)، در شلیک دوم تیر در جایگاه دوم و ... و پس از n امین شلیک دوباره از اولین جایگاه شروع به شلیک می‌کند.

در دیار شازرز، پس از اتمام جنگ و رسیدن صلح و دوستی، عاشقی نیز رونق بسیاری پیدا کرده‌است و شازورو هم عاشق شده‌است، از بدشانشی، شازورو رقیبی هم دارد... بنابراین آن‌ها طبق رسم اجدادشان، تصمیم به دوئل گرفته‌اند...

با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

(۲۱) آن‌ها یکی از ۷ تیرهای غنیمت گرفته شده را برداشتند و ۲ تیر کشنده و ۱ تیر جان‌فزا به صورت کاملاً تصادفی در خشاب ۷ تیر قرار دادند. و دوئل را مانند اجدادشان به این شکل برگزار کردند که به نوبت با شروع از شازورو، هر کسی ۷ تیر را

روی سرش می‌گذارد و شلیک می‌کند. با فرض این که جان هر دو در شروع دوئل ۰ باشد. احتمال این که شازورو در راه عشق جانش را فدا کند و شازکیه قهرمانش را از دست بدهد چقدر است؟

الف) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{4}{7}$ (ج) $\frac{56}{105}$ (د) $\frac{3}{5}$ (ه) $\frac{24}{35}$

(۲۲) به طرز غم‌انگیزی، شازورو، قهرمان افسانه‌ای شازکیه، در راه عشق جان خودش را فدا می‌کند. رقیب او، پس از این اتفاق،

مورد حمله‌ی رسانه‌ها قرار می‌گیرد و سخت از کار خود پشیمان می‌شود و تصمیم به خودکشی می‌گیرد، او یک ۹ تیر برمی‌دارد و خشاب آن را به صورت کاملاً تصادفی با ۴ تیر جان‌گیر و ۵ تیر جان‌فزا پر می‌کند و ۹ تیر رای روی سرش گذاشته و شروع به شلیک کردن می‌کند (تا خشاب خالی شود). اگر در شروع جان او ۰ باشد، او به چه احتمالی باز هم زنده می‌ماند؟

الف) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{4}{9}$ (ج) $\frac{5}{31}$ (د) $\frac{1}{3}$ (ه) $\frac{5}{9}$

(۲۳) مسیری به طول ۱۰۰ داریم که دو قورباغه در دو سر آن ایستاده‌اند. هر روز قورباغهی سمت چپ، پرشی به طول ۱۷ به راست می‌کند و شب که می‌شود پرشی به طول ۱۳ به سمت چپ می‌کند. قورباغهی سمت راست نیز هر روز پرشی به طول ۳ به سمت چپ می‌کند و هر شب پرشی به طول ۲ به سمت راست می‌کند. دو قورباغه هر زمان به یک‌دیگر برسند می‌زنند قدش! (حتی روی هوا). قورباغه‌ها در کدام روز برای اولین بار می‌زنند قدش!؟

الف) ۲۰

ب) ۱۷

ج) ۲۱

د) ۱۸

ه) ۱۹