به نام خدا

۱. همه مدیرها

⟨ گراف، دوگانه شماری ⟩

پاسخ نهایی: $k = n \times \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + (n \ mod \ ۲)$

اثبات : دو حالت زوج و فرد بودن n را به صورت جداگانه بررسی میکنیم ، در هر ۲ حالت فرض کنید n گروه معادل n راس گراف هستند و به ازای هر جفت عدد x، y که $|x-y| = ۱$، یک یال بین راس متناظر گروه شامل x و راس متناظر گروه شامل y در گراف میگذاریم. در این صورت یك گروه بندی یکدست معادل گرافی (نه لزومن ساده) n راسی است که یك گراف کامل n راسی را بعنوان زیرگراف دارد. در کل راه حل، گروه متناظر با راس v را گروه v مینامیم و بجای "دانش آموز" از لفظ "عدد" استفاده میکنیم!

اگر n فرد باشد:

فرض کنید $n = ۲x + ۱$.

لم ۱) کوچکترین k حداقل $(۲x + ۱) \times x + ۱$ است .

برهان:

ثابت میکنیم هر گروه باید حداقل x عضو داشته باشد و حداقل یک گروه هست که دست کم $x + ۱$ عضو دارد. (وقتی میگوییم عدد x در گروه $g۱$ گروه $g۲$ را میپوشاند، یعنی x در $g۱$ وجود دارد و $x + ۱$ یا $x - ۱$ در $g۲$ وجود دارد.) چون هر عضو دلخواه مثل a میتواند حد اکثر ۲ گروه دیگر را پوشش دهد (یعنی حد اکثر ۲ عدد $a - ۱$ و $a + ۱$ هستند که قدر مطلق اختلافشان با a برابر ۱ است) و $۲x$ گروه برای پوشش وجود دارد، در نتیجه هر گروه دست کم x عضو دارد. از طرف دیگر عدد ۱ اگر در یك گروه باشد میتواند تنها ۱ گروه دیگر را پوشش دهد پس آن گروه باید دست کم $x + ۱$ عضو داشته باشد. پس تعداد کل اعضا ی گروه ها بیشتر مساوی $(۲x + ۱) \times x + ۱$ است. $\star$

لم ۲) کوچکترین k حداکثر $(۲x + ۱) \times x + ۱$ است .

برهان:

گروه بندی یك دستی ارایه میدهیم که $k = (۲x + ۱) \times x + ۱$ باشد. در گراف کامل $۲x + ۱$ راسی چون درجه ی هر راس زوج است تور اویلری وجود دارد. از راس دلخواه v شروع میکنیم و به ترتیب تور اویلری پیدا شده، یال ها را از ۱ تا تعدادشان شماره گذاری میکنیم. اگر یال i ام از راس a_i به راس b_i بود، عدد i را داخل گروه a_i میگذاریم. و در آخر عدد $(۲x + ۱) \times x + ۱$ را در داخل گروه v میگذاریم. به این شکل به ازای هر یال بین ۲ راس دلخواه uو w اگر در تور اویلری از u به w بیاییم در u عضو p و در w عضو $p + ۱$ وجود دارد، در نتیجه این گروه بندی یکدست است. از طرف دیگر در هر گروه u(به جز خود v) به تعداد وارد شدن به راس u در تور اویلری ، عضو وجود دارد در نتیجه در هر گروه x عضو وجود دارد. در گروه v نیز هر بار که وارد v میشویم یك عضو اضافه میشود و در انتها نیز ۱ عضو اضافه میکنیم پس v دارای $x + ۱$ عضو است. پس در این گروه بندی ارائه شده با $(۲x + ۱) \times x + ۱$ عضو یك گروه بندی یکدست داریم.

در نتیجه ی لم ۱ و لم ۲، کوچکترین k دقیقن برابر $(۲x + ۱) \times x + ۱$ است! $\star$

اگر n زوج باشد:
فرض کنید $n = 2x$.

لم ۳) کوچکترین k حداقل $2x^2$ است.
برهان:
مشابه لم ۱ میتوان گفت که هر گروه دست کم x عضو دارد. (چون $2x - 1$ گروه دیگرهستند که هر عضو گروه ماکسیمم ۲ تا از ان ها را پوشش میدهد.) پس k بیشتر مساوی $2x^2$ است. $\star$

لم ۴) کوچکترین k حداکثر $2x^2$ است.
برهان: گروه بندی یك دستی ارایه میدهیم که $k = 2x^2$ باشد. درگراف کامل $2x$ راسی راس ها را در x گروه ۲ تایی در نظر میگیریم و به جز یك گروه (که فرض کنید در ان گروه راس های u و v قرار دارند) بین ۲ راس هر گروه یك یال اضافه میکنیم.
درگراف جدید درجه ی راس u و v برابر $2x - 1$ و درجه ی بقیه ی راس ها $2x$ است پس یك مسیر اویلری از u به v وجود دارد. مانند روش قرار دادن عضو ها در لم ۲ بر روی مسیر اویلری حرکت میکنیم و عضو ها را درگروه ها قرار میدهیم و $2x^2$ را در راس v قرار میدهیم.
چون بین هر ۲ راس دلخوا دست کم ۱ یال وجود دارد اگر در هر یال در مسیر اویلری از a به b برویم در a عضو p و در b عضو $p + 1$ وجود دارد، پس گروه بندی یك دست است.
از طرفی در هر گروه به جز گروه u به تعداد دفعات خارج شدن از آن گروه (در مسیر اویلری) عضو وجود دارد. برای راس های با درجه ی زوج x بار وارد و x بار خارج میشویم. در راس v چون در نهایت مسیر اویلر از u شروع میشود، $x - 1$ بار وارد و x بار خارج میشویم؛ پس همه x عضو دارند. در راس v چون انتهای مسیر است، $x - 1$ بار خارج و x بار وارد میشویم که با هر بار وارد شدن ۱ عضو اضافه میشود در انتها نیز ۱ را در u قرار دادیم پس u نیز x عضو دارد درنتیجه در این گروه بندی $2x^2$ دانش اموز هستند که تشکیل یك گروه بندی یکدست داده اند. $\star$
در نتیجه ی لم ۳ و لم ۴، کوچکترین k دقیقن برابر $2x^2$ است! $\star$

۲. آی باکلاه

⟨ تناظر چند به چند، استقرا، درخت ها ⟩

بخش الف:

جواب : $۲n$ تعریف : $g(n)$ برابر حد اکثر تعداد اعضای یك مجموعه ی آـ پسند است که اعضای آن زیر مجموعه ی $\{۱, ۲, .., n\}$ باشند. (تعداد اعضای مجموعه ی s را $|s|$ نشان میدهیم!)

لم ۱) اگر s مجموعه ای آـ پسند از زیرمجموعه های $\{۱, ..., n\}$ باشد و $|s| = g(n)$، همه ی مجموعه های تك عضوی و مجموعه ی تهی و مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ حتما عضو آن هستند.

برهان:

فرض کنید یکی از این ها عضو s نباشد. با اضافه شدن آن تعداد اعضای s یکی افزایش می یابد و s همچنان آپسند باقی میماند! در صورتی که تعداد اعضای s حد اکثر بوده است ! ⋆

حال ثابت میکنیم $g(n) = ۲n$ روی n استقرا(قوی) میزنیم : پایه : برای $n = ۱$ مجموعه ی همه ی زیر مجموعه ها آپسند است پس $g(n) = ۲$

برای $n = ۲$ نیز مجموعه ی همه ی زیر مجموعه ها آپسند است پس $g(n) = ۴$

فرض است : برای هر $m > n$ داریم :

$$g(n) = ۲n$$

حکم : برای $n = m$

فرض کنید s مجموعه ای آپسند از زیرمجموعه ها ی $\{۱, ۲, .., m\}$ با تعداد اعضای بیشینه است. (یعنی $|s| = g(m)$) اگر در s هیچ مجموعه ای با تعداد اعضای بیشتر از ۱ و کمتر از m وجود نداشته باشد یعنی در s همه ی مجموعه ها ۰ عضوی (مجموعه ی تهی) ۱ عضوی (m تا مجموعه) و m عضوی اند (۱ مجموعه) یعنی $|s|$ کمتر مساوی $m + ۲$ است. اگر مجموعه ی k عضوی a وجود داشته باشد که $k > ۱$ و $k < n$ در این صورت بقیه ی مجموعه ها یا تهی هستند (که هم زیر مجموعه ی a است و هم اشتراکش با a تهی است) یا زیر مجموعه ی a هستند یا اشتراکشان با a تهی است و یا a زیر مجموعه ی ان هاست ! تعداد مجموعه هایی که زیر مجموعه ی a هستند و در s قرار دارند کمتر مساوی $g(k)$ مي باشد. (چون باید آـ پسند باشند)

از طرف دیگر مجموعه هایی که با a اشتراك ندارند یا a زیر مجموعه ی ان هاست را در نظر بگیرید. یا همه ی اعضا ی a در ان ها قرار دارند یا هیچ یك از اعضای a در ان ها قرار ندارند! پس می توانیم فرض کنیم همه ی اعضای a معادل ۱ عضو جدید x هستند و اگر a زیر مجموعه ی یك مجموعه باشد، اعضای a را از آن حذف میکنیم و x را در ان قرار میدهیم. در این صورت تعداد مجموعه هایی که با a اشتراك ندارند یا a زیر مجموعه ی ان هاست کمتر مساوی $f(n - k + ۱)$ است .(زیرا اعضا ی a را حذف کردیم و یه جای ان x را قرار دادیم پس تعداد اعضای مجموعه ی مرجع جدید (که همه ی اعضای مورد بحث s زیر مجموعه ی آن هستند) برابر $n - k + ۱$ است ! پس تعداد این مجموعه ها ی عضو s کمتر مساوی $f(n - k + ۱)$ است.)

از طرفی همان طورکه در لم ۱ گفتیم ۲ مجموعه ی تهی و a در $f(k)$ و $f(n - k + ۱)$ شمرده میشوند (تهی که در هر دو شمرده میشود و a در $f(k)$ به عنوان مجموعه ی k عضوی و در $f(n - k + ۱)$ به عنوان مجموعهی تك عضوی $\{x\}$ شمرده میشود! پس تعداد اعضای s کمتر مساوی $f(k) + f(n-k+۱) - ۲$ است که طبق فرض استقرا کمتر مساوی $۲(n-k+۱) + ۲k - ۲ = ۲n$ است.

از طرف دیگر یك مجموعه ی $۲n$ عضوی ارایه میدهیم که آپسند باشد:

$$s = \{\{\}, \{۱\}, \{۲\}, ..., \{n\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳, ۴\}, ..., \{۱, ۲, ۳, ۴, ..., n - ۱\}, \{۱, ۲, ..., n\}\} \quad \star$$

بخش ب:
برای این که ثابت کنیم $f(n) \geq ۴t(n)$ هر درخت n راسی را با ۴ مجموعه ی آ پسند متمایز متناظر میکنیم.
فرض کنید درخت ها ی n راسی که راس های آن ها از ۱ تا n شماره گذاری شده اند را بررسی میکنیم. فرض میکنیم درخت ها از راس n ریشه دار شده اند. به ازای هر راس به جز n مجموعه ای قرار میدهیم که اعضایش برابر راس های زیر درخت ان راس در درخت ریشه دار شده از راس n است!
اگر مجموعه های ساخته شده از ۲ درخت متمایز با یکدیگر برابر باشند در این صورت ۲ درخت با هم برابرند؛ چون برگ ها ی درخت برابر اعضا ی درون مجموعه ها ی تك عضوی هستند و به طور یکتا مشخص میشوند از طرفی به ازای هر مجموعه ی a کوچك ترین مجموعه ای (از نظر تعداد اعضا) که تعداد اعضایش از a بیشتر باشد و a زیر مجموعه ی آن باشد (درصورت وجود) پدر راس مجموعه ی a است. اگر وجود نداشته باشد فرض کنیم راس n پدر راس مجموعه ی a است. پس میتوان به طور بازگشتی برگ ها را حذف کرد (و عدد روی برگ را نیز از مجموعه های شامل ان حذف کرد) و به طور بازگشتی درخت را ساخت (به طور یکتا) .) همچنین برای هر درخت میتوان در مجموعه ای که می سازد مجموعه ی تهی را قرار داد یا قرار نداد(۲ حالت) و میتوان برای راس n نیز مجموعه ی رئوس زیر درختش (که مجموعه ی ۱ تا n است) را قرار داد یا نه (۲ حالت) ، پس در کل از هر درخت میتوان ٤ مجموعه ی آپسند متفاوت ساخت.
پس تعداد مجموعه ها ی اپسند $\geq ۴t(n)$

برای این که ثابت کنیم $f(n) \leq ۲^{n+۲} \times t(۲n)$ از هر مجموعه ی آ پسند که همه ی n زیر مجموعه ی تك عضوی و زیر مجموعه ی تهی و زیر مجموعه ی $\{۱,...,n\}$ را دارد، یك درخت $۲n$ راسی یکتا میسازیم و ثابت میکنیم که $t(۲n)$ بیشتر مساوی تعداد مجموعه های آپسندی است که همه ی مجموعه های تك عضوی و مجموعه ی n عضوی و ۰ عضوی را دارند. و چون تعداد این زیر مجموعه ها $n+۲$ تا است و وجود یا عدم وجود هر کدام روی آپسند بودن تاثیری ندارد (لم ۱ قسمت الف) پس برای هر مجموعه ی ۰ عضوی ۱ عضوی یا n عضوی ۲ حالت وجود دارد که در مجموعه ی آپسند وجود داشته باشد یا نه و در کل $۲^{n+۲}$ حالت وجود دارد که کدام یك از این $n+۲$ مجموعه در آن باشند، پس میتوانیم نتیجه بگیریم که $f(n) \leq ۲^{n+۲} \times t(n)$
پس کافی است ثابت کنیم تعداد مجموعه ها ی آ پسندی که همه ی زیر مجموعه های تك عضوی و تهی و n عضوی را دارند کمتر مساوی $t(۲n)$ است!
برای این کار از روی هر مجموعه ی آ پسند با این ویژگی یك درخت $۲n$ راسی میسازیم، به این شکل:
فرض میکنیم زیر مجموعه ی تهی وجود ندارد و آن را حذف میکنیم و با بقیه مجموعه های عضو مجموعه ی آپسند درخت را میسازیم: ابتدا اعضای مجموعه ی آپسند را بر اساس اندازه بصورت نانزولی مرتب میکنیم (بین ۲ مجموعه که تعداد اعضایشان برابر است مجموعه ای را قبل از دیگری در ترتیب میگذاریم که کوچك ترین عضوش کوچکتر باشد! اگر اندازه ی ۲ مجموعه برابر باشد چون هیچ کدام زیر مجموعه ی دیگری نیست پس حتما ۲ مجموعه مجزا هستند و کوچکترین عضوشان متفاوت است.) سپس مجموعه ها را شماره گذاری میکنیم از ۱ تا تعداد مجموعه ها (همان طور که در الف ثابت کردیم تعداد مجموعه ها کمتر مساوی $۲n$ است، اگر تعداد کمتر از $۲n$ بود در اخر دنباله تعدادی مجموعه ی n عضوی اضافه میکنیم تا دقیقن $۲n$ مجموعه داشته باشیم که به جز مجموعه ی n عضوی که ممکن است تکرار شود بقیه ی مجموعه ها ۲ به ۲ متمایزند!)
چون همه ی مجموعه ها ی تك عضوی عضو مجموعه ی آ پسند هستند پس مجموعه ها ی ۱ تا n در دنباله ی مرتب شده مجموعه های تك عضوی $\{۱\},...,\{n\}$ هستند! به ازای این n مجموعه n برگ میگذاریم و برای هرمجموعه ی a در دنباله ی مرتب شده یك راس قرار میدهیم و پدرش را اولین مجموعه ی بعد از مجموعه a در دنباله ی مرتب شده قرار میدهیم که a زیر مجموعه اش باشد. چون راس $۲n$ ام در دنباله مجموعه ی $\{۱,..,n\}$ است پس همه ی $۲n-۱$ مجموعه ی قبلی زیر مجموعه اش هستند و حتما راس معادل آن مجموعه ها یك پدر دارند و فقط راس $۲n$ است که پدری ندارد. به این صورت یك درخت برچسب دار $۲n$ راسی ساخته ایم که از راس $۲n$ ریشه دار شده است.

اگر ۲ مجموعه ی آپسند ۲ درخت یکسان بسازند ثابت میکنیم ان ۲ مجموعه برابرند:

لم ۱) در روش ساختن درخت هر راس معادل مجموعه ای از اعداد برگ ها ی زیر درختش است.
برهان:
اعداد روی برگ ها ی زیر درخت حتما عضو مجموعه ی n راس هستند چون بچه های هر راس زیر مجموعه ای از مجموعه ی n راس است ، از طرفی اگر راس v وجود داشته باشد که i عضو مجموعه اش باشد و برگ i (که معادل مجموعه ی $\{i\}$ است) در زیر درختش نباشد در این صورت اولین جد مشترک v ، i را بگیرید ۲ تا از بچه هایش را بگیریدu_1, u_2 که u_1 جد v و u_2 جد i باشد مجموعه ی معادل راس u_1 و u_2 هر ۲ عضو i را دارند؛ پس اشتراکشان نا تهی است، پس باید یکی از آن ها زیر مجموعه ی دیگری باشد فرض کنید u_1 زیر مجموعه ی u_2 باشد چون در دنباله مجموعه ها بر اساس اندازه مرتب میشوند پس u_2 بین u_1 و u قرار میگیرد پس پدر u_1 باید u_2 باشد (طبق روش ساخت درخت) در صورتی که این طور نیست!! پس به تناقض میرسیم و درنتیجه اعضا ی هر مجموعه ی معادل ۱ راس برابر بر گ ها ی زیر درخت ان راس است. $\star$

درخت ها را از راس $2n$ ریشه دار میکنیم در این صورت به ازای هر راس برگ هایی که در زیر درختش قرار دارن (به جز خود ریشه ی زیر درخت) با هم برابرند (چون دو درخت برابرند) و طبق لم ۱، این برگ ها اعضای درون مجموعه ی آن راس را مشخص میکنند.

پس اگر درخت ساخته شده از ۲ مجموعه ی آپسند با هم برابر باشد اعضای آن ۲ مجموعه نیز یکی هستند و آن ۲ مجموعه برابر میشوند.
درخت ساخته شده از هر مجموعه یکتا است و در نتیجه تعداد اعضای مجموعه های آ پسندی که همه ی مجموعه های تهی و تك عضوی و n عضوی عضو آن باشند کمتر مساوی $t(2n)$ است ! $\star$

۳. بودن پنیر یا نبودن پنیر

⟨ ناوردایی، اکسترمال، تناظر، الگوریتم ⟩

اگر $n = ۱$، پاسخ برابر ۰ است وگرنه برابر $n - ۲$.

برهان:

اگر $n = ۱$، دنباله ی x خود یک دنباله ی حسابی است؛ پس تنها دنباله ی y که $\sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|$ کمینه است برابر خود دنباله ی x است و فیل چاره ای ندارد جز اینکه چیزبرگر بدون پنیر نخورد! پس از این به بعد فرض میکنیم $n > ۱$.

لم ۱) باب میتواند دنباله ی x را طوری انتخاب کند که فیل هرکاری کند حداقل $n - ۲$ چیزبرگر بدون پنیر بخورد.

برهان:

روشی برای این کار به باب ارائه میدهیم! فرض کنیم باب دنباله ی $\langle ۱, ۲, ۴, ۸, , ۲^n \rangle$ را بعنوان x انتخاب کرده باشد. $(x_i = ۲^i)$ در این صورت هیچ دنباله ی حسابی y ای وجود ندارد که فیل بتواند ارائه کند و کمتر از $n - ۲$ چیزبرگر بدون پنیر بخورد. برهان خلف: فرض میکنیم وجود دارد. یعنی دنباله ی y ارائه شده که در آن i, j, k متفاوت وجود دارند که $x_i = y_i$ و $x_j = y_j$ و $x_k = y_k$. فرض کنیم $i < j < k$. چون دنباله حسابی است، داریم:

$$\frac{۲^j - ۲^i}{j - i} = \frac{۲^k - ۲^j}{k - j} = q$$

که $q =$ مقدار قدر نسبت دنباله ی حسابی.

لم ۱/۱) اگر $j < k$، داریم:

$$۲^j \leq \frac{۲^k - ۲^j}{k - j}$$

برهان:

$$\frac{۲^k - ۲^j}{k - j} = \frac{(۲^k - ۲^{k-۱}) + (۲^{k-۱} - ۲^{k-۲}) + \ldots + (۲^{j+۱} - ۲^j)}{k - j} = \frac{۲^{k-۱} + ۲^{k-۲} + \ldots + ۲^j}{k - j}$$

میدانیم میانگین $k - j$ تا عدد حداقل برابر کوچکترین آن هاست؛ پس:

$$\frac{۲^{k-۱} + ۲^{k-۲} + \ldots + ۲^j}{k - j} \geq ۲^j \rightarrow ۲^j \leq \frac{۲^k - ۲^j}{k - j} \quad \star$$

لم ۱/۲) اگر $i < j$، داریم:

$$\frac{۲^j - ۲^i}{j - i} < ۲^j$$

برهان:

مشابه لم ۱/۱، به این میرسیم که:

$$\frac{۲^j - ۲^i}{j - i} = \frac{۲^{j-۱} + ۲^{j-۲} + \ldots + ۲^i}{j - i}$$

و میدانیم میانگین $j - i$ عدد حداکثر برابر بزرگترین آن هاست؛ پس:

$$\frac{۲^{j-۱} + ۲^{j-۲} + \ldots + ۲^i}{j - i} \leq ۲^{j-۱} \rightarrow \frac{۲^j - ۲^i}{j - i} \leq ۲^{j-۱} < ۲^j \quad \star$$

با کنار هم گذاشتن لم ۱/۱ و ۱/۲، به این میرسیم که

$$\frac{۲^j - ۲^i}{j-i} < \frac{۲^k - ۲^j}{k-j}$$

پس فرض خلفمان غلط بوده و لم۱ درست است! $\star$

ثابت میکنیم که فیل میتواند از روی هر دنباله ی x که باب تحویل دهد، یک دنباله ی y بسازد که در شرایط گری صدق کند و حداکثر $n-۲$ تا حلزون حرکت بکنند.

لم ۲) به ازای هر دنباله ی حسابی y، دنباله ی حسابی y' وجود دارد که:

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i| \geq \sum_{i=۱}^{n}|x_i - y'_i|$$

و حداقل یک i وجود دارد که $y'_i = x_i$.

برهان:

دنباله ی حسابی دلخواه y را در نظر میگیریم. اگر حداقل یک i وجود دارد که $y_i = x_i$، میتوانیم y' را برابر y ارائه کنیم. پس فرض میکنیم چنین i ای وجود ندارد.

تعداد i هایی که $x_i < y_i$ را a مینامیم و تعداد i هایی که $x_i > y_i$ را b مینامیم. (داریم $a+b=n$) اگر $a \leq b$ بود، دنباله ی y' را برابر $\langle y_۱+d, y_۲+d, y_۳+d, ..., y_n+d\rangle$ قرار میدهیم و d را طوری انتخاب میکنیم که a تغییر نکند و برای حداقل یکی از i هایی که $x_i > y_i$، داشته باشیم $y'_i = x_i$. پس d را برابر کمترین مقدار $x_i - y_i$ برای i هایی که $x_i > y_i$ قرار میدهیم؛ به این شکل حداقل یکی از حلزون ها حرکت نمیکند. y' هم یک دنباله ی حسابی است، زیرا همه ی اعداد یک دنباله ی حسابی را با d جمع کردیم پس اختلاف هاشان یکی میماند.

چرا داریم $\sum\limits_{i=۱}^{n}|x_i - y_i| \leq \sum\limits_{i=۱}^{n}|x_i - y'_i|$ ؟

زیرا داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i - y'_i| = \sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i| + da - db$$

و چون $a \leq b$:

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i| \geq \sum_{i=۱}^{n}|x_i - y'_i|$$

حال اگر $a > b$، مشابه بالا عمل میکنیم و در حداقل یکی از i هایی که $x_i < y_i$ ، x_i را برابر y'_i قرار میدهیم. $\star$

لم ۳) به ازای هر دنباله ی حسابی y، دنباله ی حسابی y' وجود دارد که:

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i| \geq \sum_{i=۱}^{n}|x_i - y'_i|$$

و حداقل دو i وجود دارد که $y'_i = x_i$!

برهان:

دنباله ی حسابی دلخواه y را در نظر میگیریم. حداقل یک i وجود دارد که $y_i = x_i$. اگر حداقل ۲ تا از این i ها وجود داشت،

میتوانیم y' را برابر y ارائه کنیم. پس فرض میکنیم دقیقن یکی از این i ها وجود دارد. آن را k مینامیم، یعنی داریم $x_k = y_k$. به i میگوییم خوب اگر یکی از این دو شرط برقرار باشد:

۱. $i > k$ و $y_i > x_i$

۲. $i < k$ و $y_i < x_i$

مجموع $|i-k|$ برای i های خوب را a و برای i های غیر خوب را b مینامیم. اگر $a \leq b$ بود دنباله ی y' را اینطور میسازیم:

- اگر $i < k$، آنگاه $y'_i = y_i - d(k-i)$
- اگر $i = k$، آنگاه $y'_i = y_i$
- اگر $i > k$، آنگاه $y'_i = y_i + d(i-k)$

و d را طوری انتخاب میکنیم که a تغییر نکند و برای حداقل یک i غیر خوب داشته باشیم $y'_i = x_i$. پس d را برابر کمترین مقدار از مقادیر زیر تعیین میکنیم:

۱. مقدار $\frac{x_i - y_i}{|i-k|}$ برای i هایی که داریم $i > k$ و $y_i < x_i$

۲. مقدار $\frac{y_i - x_i}{|i-k|}$ برای i هایی که داریم $i < k$ و $y_i > x_i$

به این شکل حداقل یکی از حلزون های دیگر (بجز شماره k) هم حرکت نمیکند و همچنین فاصله ی هر دو عنصر y' دقیقن d تا با فاصله ی همان دو عنصر در y تفاوت دارد، پس y' نیز دنباله ای حسابی است. همچنین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y'_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + da - db$$

و چون $a \leq b$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| >= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y'_i|$$

حالت $a > b$ نیز مشابه حالت گفته شده در بالاست. $\star$

لم ۴) دنباله ی y ای وجود دارد که در شرایط گری صدق کند!

برهان:

فرض میکنیم وجود ندارد؛ یعنی بین همه ی دنباله های حسابی، هیچ دنباله ی y ای $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ کمینه ندارد. یعنی به ازای هر دنباله ی y حسابی، یک دنباله ی y' حسابی وجود دارد که مقدار $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y'_i|$ کوچکتر از $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ باشد. (وگرنه y دنباله ای است که در شرایط گری صدق میکند، فرض کردیم وجود ندارد!)

بنا به لم ۳، هر دنباله ی حسابی y را میتوان به یک دنباله ی حسابی y' متناظر کرد که حداقل دو i در آن هستند که $x_i = y'_i$ و $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y'_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

واضح است که به ازای هر دو عدد متفاوت i و j، دقیقن یک دنباله ی حسابی y وجود دارد که $x_i = y_i$ و $x_j = y_j$. (زیرا از روی این دو میتوان y_1 و $y_2 - y_1$ را بطور یکتا مشخص کرد.) پس تعداد دنباله های y' که با استفاده از لم ۳ متناظر میکنیم، حداکثر برابر تعداد جفت های i، j است که برابر $\binom{n}{2}$ است، پس متناهی است. بین این ها y' با کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y'_i|$ را در نظر

میگیریم. بنابه فرض خلف، یک $y"$ وجود دارد که حسابی است و $\sum_{i=1}^{n}|x_i - y'_i| < \sum_{i=1}^{n}|x_i - y"_i|$ و طبق لم ۳ یک z حسابی وجود دارد که $\sum_{i=1}^{n}|x_i - y"_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|$ و z حداقل دو عضو برابر x_i دارد؛ پس داریم $\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i| < \sum_{i=1}^{n}|x_i - y'_i|$ و این با فرض اینکه y' آن مقدارش کمینه است در تناقض است؛ پس از ابتدا فرض خلفمان (که دنباله ی y وجود ندارد که در شرایط گری صدق کند) غلط بوده و لم ثابت میشود! ⋆

پس در نتیجه ی لم ۴، دنباله ی y وجود دارد که در شرایط گری صدق کند که در نتیجه بر اساس لم ۳، یک دنباله ی y' وجود دارد که در شرایط گری صدق کند و فیل با ارائه ی آن حداکثر $n-2$ چیزبرگر بدون پنیر بخورد. طبق این نتیجه و لم ۱، فیل دقیقن $n-2$ چیزبرگر بدون پنیر میخورد! ⋆

۴. قطحی داستان

⟨ شمارش، اصل شمول و عدم شمول، استقرا، تناظر یک به یک، گراف ⟩

راه حل ۱: شمارش، اصل شمول و عدم شمول
فرض کنید میخواهیم تعداد گروه های معروف در بالا بره را بشماریم :
فرض کنید تعداد اهالی بالا بره برابر n و تعداد اهالی پایین بره برابر m است.
تعریف : به ازای هر گروه s از اهالی پایین بره $d(s)$ برابر تعداد افرادی است که با دست کم یکی از اعضای s دوست هستند و مجموعه ی افراد پایین بره را D مینامیم.
تعریف : $|s|$ برابر است با تعداد آدم های عضو گروه s.
تعداد گروه های معروف در بالا بره برابر است با تعداد کل گروه ها ۲^n منهای تعداد گروه هایی که دست کم یکی از اعضای پایین بره با هیچ کدام از اعضای ان گروه دوست نباشند.درنتیجه طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد گروه های معروف در بالا بره برابر است با :

$$\sum_{s\subseteq D} ۲^{n-d(s)} \times (-۱)^{|s|}$$

این مقدار در ابتدا زوج است (۰ است!) و زوجیت ان تنها به ازای s هایی در پایین بره تغییر میکند که $۲^{n-d(s)} = ۱$ شود که تنها در صورتی این اتفاق می افتد که $d(s) = n$ باشد یعنی s در پایین بره معروف باشد ، پس زوجیت تعداد گروه های معروف در بالا بره با پایین بره برابر است، در نتیجه تعداد کل گروه های معروف در هر ۲ قسمت زوج است.

راه حل ۲: شمارش، استقرا، تناظر یک به یک
روستای بره متناظر است با گرافی دوبخشی. رئوس یک بخش را U مینامیم و متناظر افراد بالاـبره هستند و رئوس بخش دیگر را D مینامیم که متناظر با افراد پایینـبره هستند. بین دو راس یال میگذاریم اگر و تنها اگر افراد متناظرشان آشنا هستند. زیرمجموعه ای از رئوس D را معروف میگوییم که اجتماع همسایه هاشان بشود همه راس های U. (و زیرمجموعه ای از رئوس U را معروف میگوییم که اجتماع همسایه هاشان بشود D.)
تعریف: برای گراف G متناظر با بره، $f(G)$ را جمع تعداد زیرمجموعه های معروف از U و تعداد مجموعه های معروف از D مینامیم. و مجموعه ی همسایه های راس v را با $N(v)$ نشان میدهیم.
میخواهیم ثابت کنیم که $f(G)$ زوج است. روی تعداد یال های گراف استقرا (قوی!) میزنیم.
پایه: گراف ۰ یالی! سه حالت داریم:

۱. $|D| = |U| = ۰$: در این حالت یک زیر مجموعه ی معروف از U و یک زیر مجموعه ی معروف از D داریم، پس در مجموع ۲ تا داریم که زوج است.

۲. $|D| > ۰$ و $|U| = ۰$: در این حالت ۰ زیرمجموعه ی معروف از U داریم و $۲^{|D|}$ زیر مجموعه ی معروف از D، پس در مجموع زوج تا داریم. (در حالت ۲، جای D و U را میتوانیم عوض کنیم!)

۳. $|U| > ۰$ و $|D| > ۰$: چون یالی نداریم، ۰ زیر مجموعه ی معروف از U و ۰ زیرمجموعه ی معروف از D داریم؛ پس در مجموع هم ۰ تا داریم که زوج است.

گام استقرا:
یک یال uv از گراف را در نظر میگیریم. (یالی بین راس های u از U و v از D) با حذف این یال از G به G' میرسیم. $f(G)$ برابر است با $f(G')$ + تعداد حالت های انتخاب یک مجموعه معروف از U یا D (منظور از U و D، دو بخش گراف G است)

که در G' معروف نیست.
زیر مجموعه های معروف از U را در نظر بگیرید که در G' معروف نیستند. یکی از آن ها را S میناميم. S حتمن شامل راس u میشود (چون اگر نشود حذف یال uv تاثیری در معروف بودن آن ندارد!) و تنها راسی از D که میتواند در G' باعث معروف نبودن S شود، راس v است. پس هیچیک از دیگر راس های داخل $N(v)$ (به جز u) نباید در S بیاید. چون $N(u)$ در S، u را می شناسند، میتوانیم بگوییم که اگر از S رئوس $N(u)$ و $N(v)$ (که $N(u)$ شامل v و $N(v)$ شامل u هم میشود!) را حذف کنیم همچنان مجموعه ای معروف باقی میماند!
با حذف رئوس $N(u)$ و $N(v)$ از G، به گراف $G"$ میرسیم. میتوان زیرمجموعه های معروف از U و یا D در G که در G' معروف نیستند را به شکل گفته شده به زیر مجموعه های معروف از بخش بالا ویا بخش پایین در $G"$ تناظر یک به یک داد؛ پس بنابر این داریم:

$$f(G) = f(G') + f(G")$$

که طبق فرض استقرا $f(G')$ و $f(G")$ اعدادی زوج هستند؛ در نتیجه $f(G)$ نیز عددی زوج خواهد بود! $\star$