پاسخ کوتاه سوالات تئوری اول

سوال ۱: اگه دقت کنین میبینین که مستقل از نحوه ی انتخاب کردن تعداد شکلات توسط افراد. همیشه وقتی نوبت نفر اول هست فرد تا شکلات تو نوبتش باقی مونده, پس مستقل از نحوه ی انتخاب کردن شکلاتا همیشه نفر اول حداقل یه شکلات براش باقی میمونه که بتونه بخورتش. و چون بازی یه زمانی تموم میشه پس نفر اول میبره.

سوال ۲: فرض کنین طول دنباله n باشه و ماکسیمم عدد تو این دنباله X باشه و k بار تو این دنباله اومده باشه. میشه ثابت کرد اگه k!=n بعد $k*(n-1)$ مرحله اعضایی که در ابتدا ماکیسمم بودند(برابر X) بودن k-1 واحد زیاد شدن و بقیه اعضا k واحد زیاد میشن. پس بعد از متناهی مرحله اختلاف بین عدد ماکسیمم و عدد مینیمم تو دنباله یکی کم میشه. پس بعد متناهی حرکت به حالتی میرسیم که این اختلاف صفر هست. و این همون چیزی هست که دنبالش بودیم.

سوال ۳: بیاین ضرب اعداد در هر مرحله رو s نظر بگیرید. خیلی راحت ثابت میشه که این عدد هر مرحله حداقل ۴ برابر میشه! (چون $a^2+b^2>=2ab$) پس ضرب این اعداد بعد از $m*۲^{m-1}$ مرحله, حداقل میشه ۴ به توان این عدد (چون اولش هم ضربشون یک هست) حالا وقتی ضرب و تعداد یه سری عدد ثابت هست میشه ثابت کرد جمعشون وقتی مینیممه که عددا نزدیک به هم باشن.(طبق قضیه ی نابرابری

میانگین حسابی هندسی؟:\) پس جمع این اعداد بعد این تعداد حرکت حداقل 2^m* 2^m هست. (چون تو بد ترین حالت در نهایت هر کدوم از اعداد مساوی 2^m میشن که ضربشون میشه $2^{m*2^m}=4^{m*2^{(m-1)}}$)

....

سوال ۴:

الف: خیلی مثالا هست, گراف پترسن مثلا. رو این هم فک کنین که اگه به جای دوبخشی نباشد میگفتیم سه بخشی نباشد اونموقع چه شکلی میشد

ب: روی زوج مرتب (g,k) استقرا میزنیم.(در واقع رو g استقرا میزنیم و تو هر گام این استقرا روی k های مختلف یه استقرا دیگه میزنیم) (به گرافی که شرایط مسئله رو داره میگیم $G_{g,k}$)

حکم برای موقعی که k=2 هست واضحه (دور به طول g)

حکم برای موقعی که g=3 هست هم واضحه (K_{k+1})

پس پایه ثابت شد. حالا فرض میکنیم k>2 و g>3. حالا میخوایم گراف $G_{g,k}$ رو بسازیم. گراف $G_{g,k-1}$ رو در نظر بگیرید. فرض کنید تعداد راس های این گراف n باشه. حالا گراف $G_{g/2,n}$ (سقف g/2) رو درنظر بگیرید. هر راس توی گراف $G_{g/2,n}$ رو به $G_{g,k-1}$ متناظر میکنیم. ینی هر راس تو این گراف در واقع خودش یه گراف $G_{g,k-1}$ هست. حالا میایم هر سوپر نود(راس $G_{g/2,n}$) رو در نظر میگیریم. این سوپر نود درجش به تعداد راس های کوچک داخلشه(n). پس میشه هر یالشو به صورت دلخواه متناظر کرد به یه راس کوچیک. حالا این گرافو در نظر بگیرین. همه ی شرط های مسئله رو داره. درجه ی هر راس کوچک یدونه زیاد شده(قبلا k-1 بود)

پس درجه ها درستن. دور به طول g هم داریم چون هر سوپر نود دور به طول g داره. دور به طول کوچک تر از g هم نداریم چون این دور نمیتونه تو یه سوپر نود باشه. پس باید حداقل سقف $g/2$ تا سوپر نودو ببینه. و تو هر سوپر نود هم حداقل یه یالو میبینه چون درجه ی خارج سوپر نود هر راس کوچک یک هست دقیقا. و برای جابجا شدن بین سوپر نود ها هم یه یال باید هزینه کنیم. پس طول دورمون حداقل میشه سقف $g/2$ ضرب در دو. که به تناقض میرسیم. پس حکم ثابت شد!

این مسئله فک کنم راه ساده تر هم داشته باشه. تو فصل اول وست این سوال احتمالا وجود داره میتونین بگردین اگه این راهو متوجه نشدین.