

آزمون کوتاه پاسخ شماره ۸

- مدت آزمون ۲ ساعت است.
- امتیاز هر پرسش، برابر ۱۰ است.
- آزمون نمره منفی ندارد اما در بین افراد با نمره برابر، در رتبه بندی کسی برتر است که تعداد غلط کمتری داشته باشد.
- پاسخ شما برای هر سوال، باید یک عدد صحیح یا یک کسر ساده شده به شکل $\frac{\text{یک عدد صحیح}}{\text{یک عدد صحیح}}$ باشد.

۱. فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ باشد. چند زیرمجموعه مانند T از S داریم که به ازای هر $x \in T$ ، اگر $2x \in S$ باشد، آن گاه $2x \in T$ نیز باشد؟

۲. یک عدد طبیعی را خوب گوئیم، اگر بتواند به صورت جمع چند فاکتوریل متفاوت نوشته شود. برای مثال ۸ عددی خوب است؛ زیرا $8 = 3! + 2! + 1!$. در این تعریف، $1!$ ، $0!$ را متفاوت در نظر بگیرید؛ یعنی عدد $10 = 3! + 2! + 1! + 0!$ نیز عددی خوب است. چند عدد طبیعی خوب وجود دارد که از ۲۴۰ بزرگتر نباشد؟

۳. به چند طریق می توان ۸ تابع f_1, f_2, \dots, f_8 را انتخاب کرد؛ طوری که هر کدام تابعی از $\{0, 1\}$ به $\{0, 1\}$ باشند و تابع

$$f_8(f_7(\dots f_1(x)))$$

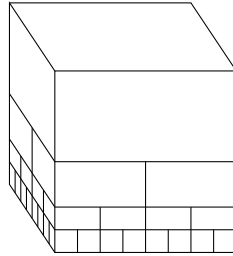
تابعی ثابت باشد؟

۴. روزبه تعداد زیادی اسکناس ۲ تومانی، ۵ تومانی و ۱۰ تومانی دارد. او یک خانه به قیمت ۲۰۱۰ تومان از ابوالفضل خریده است. روزبه به چند طریق با اسکناس هایش می تواند پول خانه را پرداخت کند؟

۵. فرض کنید ابتدا در نقطه $(0, 0)$ مختصات هستیم و در هر مرحله از نقطه (x, y) بتوانیم به یکی چهار نقطه $(x+1, y+1)$ ، $(x+1, y-1)$ ، $(x-1, y+1)$ ، $(x-1, y-1)$ برویم. به چند طریق می توان با ۱۲ مرحله به نقطه $(6, 6)$ رسید؟

آزمون کوتاه پاسخ ۸

۶. ابوالفضل یک ساختمان متشکل از $۸۵ = ۱ + ۴ + ۱۶ + ۶۴$ آجر به شکل زیر دارد. ابوالفضل می‌خواهد تعدادی آجر را از ساختمان جدا کند. او در هر مرحله می‌تواند یک آجر از ساختمان بردارد؛ طوری که بالای آن آجر، هیچ آجری نباشد. ابوالفضل به چند طریق می‌تواند ۵ مرحله آجربرداری کند؟!



۷. به ازای هر عدد طبیعی $۱ \leq x \leq ۱۰$ ، یکی از دو نقطه‌ی $(x, ۱)$ ، $(x, -۱)$ به طور تصادفی انتخاب شده است. پوش کوژ^۱ این ۱۰ نقطه را در نظر بگیرید. امید ریاضی مساحت آن چقدر است؟

۸. چند تابع

$$f : \{-۳, -۲, \dots, ۳\} \rightarrow \{-۶, -۵, \dots, ۶\}$$

وجود دارد که دو شرط زیر را داشته باشد:

• به ازای هر $a < b$ ، $f(a) < f(b)$ باشد.

• به ازای هیچ n ، $|f(n)| = |n|$ نباشد.

۹. ابوالفضل و روزبه با هم بازی می‌کنند. آن‌ها یک سکه را آن‌قدر می‌اندازند تا یکی از دو حالت زیر پیش بیاید:

• ۱۰ پرتاب متوالی وجود داشته باشد که پرتاب اول آن شیر و بقیه خط بیایند.

• ۱۰ پرتاب متوالی وجود داشته باشد که همگی شیر باشند.

در صورتی که حالت اول رخ دهد، روزبه و در حالت دوم ابوالفضل می‌برد. احتمال بردن روزبه چقدر است؟

۱۰. خانه‌های یک جدول ۱۶×۱۶ با اعداد صحیح پر شده‌اند؛ طوری که هر سطر یا ستونی در نظر بگیریم، حداکثر ۴ عدد مختلف داشته باشد. حداکثر چند عدد مختلف در جدول وجود دارد؟

^۱محدب

آزمون کوتاه پاسخ ۸

موفق باشید

—اسدی