پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ شماره ۷

پاسخ کلیدی:

۱. ۱۲۸

۲. $\frac{۵۲}{۳}$

۳. ۳۶۱

۴. ۱۹۶

۵. ۴۵

۶. ۱۱۶

۷. $\frac{۱۴۷}{۲}$

۸. ۲۰۴۰

۹. ۲۴۴۸

۱۰. ۴۲۹۳

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۶

پاسخ تشریحی:

۱. هر یک از اعداد $a, -a$، ۲ حالت دارند. پس پاسخ برابر $۲^۷$ است.

۲. برای هر کارت، یک تابع نشان‌گر به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_i = \begin{cases} ۰; & \text{اگر کارت } i \text{ بین عکس‌ها نباشد} \\ ۱; & \text{اگر کارت } i \text{ بین عکس‌ها باشد} \end{cases}$$

امید ریاضی خواسته شده، برابر با جمع امید ریاضی توابع نشان‌گر بالاست و هر یک از آن‌ها، امید ریاضی $\frac{۱}{۳}$ دارند. پس پاسخ برابر $\frac{۵۲}{۳}$ است.

۳. در کل $\frac{۸!}{۴!۲!۲!}$ جایگشت داریم. تعداد جایگشت‌هایی که بلوک $HMMT$ را دارند، برابر $\frac{۵!}{۲!}$ است؛ اما جایگشت $HMMTHMMT$ دو بار حساب می‌شود. پس پاسخ برابر $۳۶۱ = ۱ + ۶۰ - ۴۲۰$ است.

۴. یک عضو a را *ثابت* گوییم، اگر $f(a) = a$ باشد. f باید هر عضو را به یک عضو ثابت ببرد. اگر k عضو ثابت داشته باشیم، $\binom{۵}{k} \times k^{۵-k}$ حالت داریم. پس پاسخ برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{۵} \binom{۵}{k} k^{۵-k} = ۱۹۶$$

۵. توجه کنید اگر $n < ۸$، آن‌گاه $(-۱)^{s(n+۸)} \times (-۱) = (-۱)^{s(n)}$. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۱}{۲۵۵}(۱ - ۲^۸) \sum_{۰ \le n < ۸} ۲^n (-۱)^{s(n)} = ۴۵$$

۶. بر اساس تعداد ۱ـهای دنباله، حالت‌بندی می‌کنیم. یک حالت این است که $a = b = c = d = e = ۱$ باشد. اگر چهار تا از اعداد ۱ باشند و دیگری ۱ نباشد، عدد دیگر می‌تواند $۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ باشد. پس $۵ \times ۵ = ۲۵$ حالت داریم. اگر سه تا از اعداد ۱ باشند، دو عدد دیگر باید یک از حالات $(۲, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۲, ۳), (۲, ۲)$ را داشته باشند که $\binom{۵}{۲} \times (۲ + ۲ \times ۳) = ۸۰$ حالت دارد. اگر دو عدد ۱ باشند، اعداد دیگر باید ۲ باشند تا حاصل‌ضرب از ۱۰ فراتر نرود که $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ حالت دارد. حالتی که یک عدد ۱ داشته باشیم نیز غیر ممکن است. پس پاسخ برابر $۱ + ۲۵ + ۸۰ + ۱۰ = ۱۱۶$ است.

پاسخ‌های آزمون کوتاه‌پاسخ ۶

۷. برای هر زوج از اعداد، یک تابع نشان‌گر تعریف می‌کنیم و به روش توابع نشان‌گر امید ریاضی به دست می‌آید:

$$\binom{۴۹}{۲} \times \left(\frac{۱۴ \times \binom{۷}{۲}}{\binom{۴۹}{۲}}\right)^۲ = \frac{۱۴۷}{۲}$$

۸. گراف مذکور، اجتماع تعدادی دور است. دورهای یک گراف دوبخشی نیز، طول زوج دارند. حالت‌بندی می‌کنیم:

- گراف، یک دور به طول ۱۰ است که $۱۴۴۰ = \frac{۵!۴!}{۲}$ حالت دارد.
- گراف، یک دور به طول ۶ و یک دور به ۴ دارد که $۶۰۰ = ۲ \times \frac{۳!}{۲!} \times \frac{۲!۱!}{۲} \times \binom{۵}{۳}^۲$ حالت داریم.

پس پاسخ برابر $۲۰۴۰ = ۶۰۰ + ۱۴۴۰$ است.

۹. می‌دانیم $۷^۲ \times ۴۱ = ۲۰۰۹$. قرار دادن عوامل ۷ و ۴۱ در جدول، مستقل از یک‌دیگر است. پس هر کدام را جدا می‌شماریم و حاصل را ضرب می‌کنیم. تعداد حالات قرار دادن ۴۱ در جدول، برابر تعداد دنباله‌های ناکاهشی $a_۱, a_۲, a_۳$ از مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ است که $۰, ۰, ۰$ یا $۱, ۱, ۱$ نیستند (چرا؟). تعداد این دنباله‌ها برابر $۱۸ = ۲ - \binom{۷}{۳}$ است. برای شمردن تعداد حالات قرار گرفتن عوامل ۷، حالت‌بندی می‌کنیم. اگر عدد وسط جدول، ۴۹ باشد، اعداد پایین و راست‌ش باید ۴۹ باشند. می‌توان بررسی کرد بقیه‌ی اعداد $۳۶ = ۶^۲$ حالت دارند. اگر عدد وسط جدول ۱ باشد، مانند حالت قبل، $۶^۲$ روش وجود دارد. اما اگر عدد وسط جدول ۷ باشد، برای ۳ خانه‌ی بالا و سمت راست آن، ۸ حالت و برای ۳ خانه‌ی پایین و سمت چپ آن نیز ۸ حالت داریم. پس در کل برای عوامل ۷، $۱۳۶ = ۶۴ + ۳۶ + ۳۶$ حالت داریم. پس پاسخ برابر $۲۴۴۸ = ۱۳۶ \times ۱۸$ است.

۱۰. ثابت می‌کنیم پاسخ خواسته شده برای جایگشت‌های nـ‌عضوی، برابر $۳^n - (n+۱)۲^n + \frac{n(n+۱)}{۲}$ است. باید مجموعه‌ی اعداد $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به ۳ دسته‌ی ناتهی متفاوت تقسیم کنیم و اعداد آن را به ترتیب صعودی بچینیم تا جایگشت، به دست آید. ۳^n حالت برای قرار گرفتن هر عدد در دسته‌ها داریم. برخی از حالاتی که می‌شماریم، نامعتبر است. برای مثال، اگر عدد بیشینه‌ی دسته‌ی اول از عدد کمینه‌ی دسته‌ی دوم، کم‌تر باشد، به یک جایگشت نامعتبر می‌رسیم. می‌توان به دست آورد که تعداد جایگشت‌هایی که دقیقن یک عدد قوی دارند، برابر $۲^n - (n+۱)$ است. هر یک از این حالات را در پاسخ ۳^n، دقیقن $n+۱$ بار شمرده‌ایم (چرا؟). جایگشت $n, n-۱, \ldots, ۱$ را نیز که هیچ عدد قوی ندارد، $\binom{n+۲}{۲}$ بار شمرده‌ایم. پس پاسخ برابر است با:

$$۳^n - (n+۱) \times ۲^n + \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و برای $n = ۸$، پاسخ ۴۲۹۳ به دست می‌آید.