

Taller de Matemática Computacional

Apunte de Cátedra

Lógica

0.1. Proposiciones

Las proposiciones se denotarán con letras minúsculas p, q, r . Estas pueden ser *verdaderas* o *falsas* pero no ambas cosas a la vez. La verdad o falsedad de una proposición se denomina *valor de verdad*. Algunas proposiciones son *compuestas* (es decir, están formadas por *proposiciones simples*) y se vinculan de diferentes maneras.

Ejemplo 0.1. “*Las rosas son amarillas y las margaritas son blancas*” es una proposición compuesta de dos proposiciones simples “*Las rosas son amarillas*” y “*Las margaritas son blancas*”.

Ejemplo 0.2. “¿Donde estás?” no es una proposición dado que no es ni verdadera ni falsa.

0.2. Estudio del valor de verdad de una proposición

En las proposiciones simples, el valor de verdad de la misma estará dado, justamente, por evaluar si la proposición es verdadera.

En las proposiciones compuestas su valor de verdad estará determinado por el valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que las componen, y por la forma en la que las mismas se vinculan para formar la proposición. Este vínculo está dado por una serie de *operaciones lógicas*, que se describirán más adelante.

Una manera sencilla para determinar el valor de verdad de una proposición lógica es utilizando una *tabla de verdad*. Las tablas de verdad permiten estudiar cómo varía el valor de verdad de una proposición en función de cómo evalúan las proposiciones lógicas que las componen.

Algunas reglas a tener en cuenta a la hora de construir la tabla de verdad:

- La cantidad de filas de una tabla de verdad estará dada por 2^n , donde n es el número de variables proposicionales o proposiciones simples que componen la proposición compuesta.
- La cantidad de columnas de la tabla estará dada inicialmente por el número de variables proposicionales. Posteriormente, es necesario descomponer la proposición compuesta según cada una de las operaciones que la determinan.

Variables proposicionales (o proposiciones simples)				
...	p_3	p_2	p_1	...
	0	0	0	
	0	0	1	
	0	1	0	
	0	1	1	
...	1	0	0	...
	1	0	1	
	1	1	0	
	1	1	1	

Figura 1: Ejemplo de cómo completar los valores de verdad de las variables proposicionales.

- Para completar correctamente todas las posibles combinaciones de valores de verdad que tendrán las variables proposicionales de entrada, puede seguirse el criterio ilustrado en la Figura 1. Esto es, si comenzamos escribiendo las variables de derecha a izquierda, completamos la variable p_i de la columna i -ésima alternando 0s y 1s cada 2^i filas.

Veremos algunos ejemplos de tablas de verdad cuando veamos las operaciones lógicas básicas.

0.3. Operadores lógicos

Los operadores lógicos nos permiten vincular proposiciones entre sí para construir proposiciones más complejas.

0.3.1. Conjunción, $p \wedge q$

Dos proposiciones cualesquiera p y q pueden ser combinadas por medio de la palabra “y” para formar una proposición compuesta. Esta operación se conoce como *conjunción*, y se la denota como $p \wedge q$.

Ejemplo 0.3. Sea p “Está lloviendo” y sea q “El sol brilla”. Entonces $p \wedge q$ denota la proposición “Está lloviendo y el sol brilla”.

Ejemplo 0.4. El símbolo \wedge se puede emplear para definir la intersección de dos conjuntos A y B como sigue:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

El valor de verdad de la proposición $p \wedge q$ satisface: si p y q son verdaderos, entonces $p \wedge q$ es verdadero; en otro caso $p \wedge q$ es falso. Esto es, la conjunción de dos proposiciones es verdadera si cada una es verdadera.

Construyamos la tabla de verdad para nuestra proposición lógica $p \wedge q$, compuesta por las variables proposicionales p y q .

p	q	$p \wedge q$

La cantidad de filas que tendrá la tabla va a estar determinada por la cantidad de proposiciones simples que conforman nuestra proposición por medio de la siguiente relación: supongamos que n es la cantidad de proposiciones involucradas, luego la tabla tendrá 2^n filas, en nuestro caso serían 4 filas:

p	q	$p \wedge q$
—	—	—
—	—	—
—	—	—
—	—	—

Luego, por columnas se comienza de derecha a izquierda a colocar V (verdadero) y F (falso) de manera alternada de la siguiente forma:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Por último, se realiza la evaluación de la proposición:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

0.4. Disjunción, $p \vee q$

Dos proposiciones cualesquiera p y q pueden ser combinadas por medio de la palabra “o” (en el sentido de “y/o”) para formar una proposición compuesta que se denomina *disjunción* de las proposiciones a la cual se la denota como $p \vee q$.

Ejemplo 0.5. Sea p “El estudió inglés en la universidad” y sea q “El vivió en Tandil”. Entonces $p \vee q$ es la proposición “El estudió inglés en la universidad o el vivió en Tandil”.

Ejemplo 0.6. El símbolo \vee se puede emplear para definir la unión de dos conjuntos A y B como sigue:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \vee q$ satisface: si p es verdadera o q es verdadera o ambas lo son, entonces $p \vee q$ es verdadera; en otro caso $p \vee q$ es falso. Tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

0.5. Negación, $\sim p$

Dada la proposición p , se puede crear una nueva proposición, la cual se denomina *negación de p* , diciendo “Es falso que ...” antes de p o, cuando sea posible, insertando en p la palabra “no” y lo denotaremos como $\sim p$.

Ejemplo 0.7. Consideremos las siguientes proposiciones:

1. Tandil está en Argentina.
2. Es falso que Tandil está en Argentina.
3. Tandil no está en Argentina.

Las proposiciones (2) y (3) son cada una negación de la proposición (1).

Ejemplo 0.8. Consideremos las siguientes proposiciones:

1. $1 + 1 = 3$.
2. Es falso que $1 + 1 = 3$.
3. $1 + 1 \neq 3$.

Las proposiciones (2) y (3) son cada una negación de la proposición (1).

El valor de verdad de la negación de una proposición satisface: si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso; si p es falso, entonces $\sim p$ es verdadero. Es decir, el valor de verdad de la negación de una proposición es siempre el opuesto del valor de verdad de la proposición.

0.6. Condicional, $p \rightarrow q$

Muchas proposiciones son de la forma “Si p entonces q ”, éstas son llamadas *condicionales* y las denotaremos como $p \rightarrow q$.

El condicional $p \rightarrow q$ se puede leer también como p implica q . El valor de verdad de la proposición $p \rightarrow q$ es verdadero salvo que p sea verdadero y q sea falso. Es decir, que una proposición verdadera no puede implicar una falsa. Tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 0.9. Consideremos las siguientes proposiciones:

1. Si Tandil está en Argentina, entonces $1 + 1 = 3$.
2. Si Tandil está en Uruguay, entonces $1 + 1 = 2$.
3. Si Tandil está en Argentina, entonces $1 + 1 = 2$.
4. Si Tandil está en Uruguay, entonces $1 + 1 = 3$.

Sólamente la proposición (1) es falsa, el resto son verdaderas.

0.7. Bicondicional, $p \longleftrightarrow q$

Otro tipo de proposición es de la forma “ p si, y solo si, q ”, éstas son llamadas *bicondicionales* y las denotaremos como $p \longleftrightarrow q$. El valor de verdad de las proposiciones bicondicionales $p \longleftrightarrow q$ es verdadero si p y q tienen el mismo valor de verdad, caso contrario $p \longleftrightarrow q$ es falso. Tabla de verdad:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo 0.10. Consideremos las siguientes proposiciones:

1. Tandil está en Argentina si, y solo si, $1 + 1 = 3$.
2. Tandil está en Uruguay si, y solo si, $1 + 1 = 2$.

3. Tandil está en Argentina si, y solo si, $1 + 1 = 2$.

4. Tandil está en Uruguay si, y solo si, $1 + 1 = 3$.

Las proposición (1) y (2) son falsas, mientras que (3) y (4) son verdaderas.

0.8. El famoso teorema de incompletitud de Gödel

El 1931 Kurt Gödel, un matemático, lógico y filósofo austrohúngaro, demostró que en cualquier teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad existen enunciados que no se pueden probar ni refutar. Este resultado tuvo importantes implicaciones tanto para la matemática como para la filosofía. Quienes esten interesados en saber más, les recomendamos el libro de Guillermo Martínez "Gödel para todos".