Cálculo do Volume de um Toroide Parcial utilizando o Método de Monte Carlo

Murillo Freitas Bouzon

***Resumo*—Em problemas que exigem o cálculo da integral de uma função, pode-se utilizar método iterativos para convergir para uma solução. Todavia, dependendo do comportamento da função, a convergência até a solução acaba levando muito tempo ou acaba não ocorrendo, inviabilizando o uso destes métodos. Neste caso, pode-se utilizar o método de Monte Carlo como alternativa para realizar o cálculo da integral. Este método encontra uma solução numérica através de sucessivas simulações em uma grande amostragem aleatória, sendo utilizado para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento. Neste trabalho foi implementado o método de Monte Carlo para resolver a integral da função de um toroide parcial e assim encontrar o seu volume. Os resultados obtidos mostraram que é possível encontrar o volume com esse método, obtendo o valor de 22.08, utilizando 10^6 iterações e levando 417 mili segundos.**

***Index Terms*—Integração numérica, Toroide Parcial, Método de Monte Carlo**

I. INTRODUÇÃO

O uso de métodos iterativos para a resolução de uma integral defina tem sido utilizado para resolver diversos problemas computacionais que envolve integração. No entanto, para problemas que possuem funções mais complexas, esses métodos podem acabar convergindo de forma muito lenta ou não convergir para a solução em alguns casos.

Uma alternativa para isso é utilizar o Método de Monte Carlo (MMC), um método numérico para encontrar soluções para problemas em áreas como matemática, física e biologia. O método encontra soluções a partir de simulações estocásticas, repetindo-as sucessivamente um número n de vezes, tendo como vantagem o aumento de sua eficiência de acordo com o aumento da dimensionalidade do problema.

A integração pelo MMC pode ser estimada selecionando N pontos aleatórios distribuídos uniformemente dentro de um espaço multi-dimensional Ω, que possui o volume conhecido, e calculando a média entre eles. Desta forma, o MMC estima a integral de uma função f sobre o volume multi-dimensional Ω pela Equação (1):

$$\int_{\Omega} f(x)dx \approx V * \langle f \rangle, \tag{1}$$

sendo $\langle f \rangle$ definido pela Equação (2).

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \tag{2}$$

O MMC foi proposto em [1] com a motivação de resolver problemas da física matemática, existindo há um bom tempo na literatura. Graças a baixa complexidade do método e a sua versatilidade, podendo ser aplicado em diversas áreas de pesquisa, o MMC acabou ficando bastante popular, sendo utilizado até nos dias atuais, podendo citar o trabalho de [2] que utilizou o MMC de forma adaptativa para aproximar o cálculo de integrais e somatórios, utilizando amostras que se ajustam automaticamente dependendo do problema que está sendo considerado.

Outro trabalho recente que estuda MMC é o trabalho de [3], onde foi feita uma análise do espectro da variância da integração por Monte Carlo. Foi utilizada transformada de *Fourier* no espaço Euclidiano e padrões de amostra homogêneos que permitem uma manifestação de erro em relação à variância da integral por Monte Carlo. Foi mostrado que a variância está diretamente relacionado com a amostra e com o espectro da função integrada.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo realizar a integração numérica, utilizando MMC, para encontrar o volume de um objeto e analisar o resultado de acordo com o número de pontos utilizados.

II. METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho se baseia em resolver o problema proposto em [4], que trata-se da integração de um toroide parcial para encontrar o seu volume. A Figura 1 ilustra a parte do toroide no espaço Euclidiano.

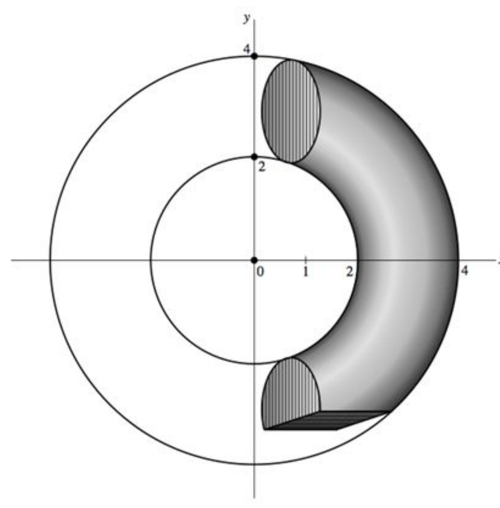


Figura 1: Ilustração de um toroide parcial.

A interseção do toroide parcial com um cubo é dada pelas restrições da Equação (3);

$$H(x,y,z) = \begin{cases} 1, \text{ if } (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 \leq 1, \\ x \geq 1 \; ey \geq -3 \\ 0, \text{ otherwise}, \end{cases} \tag{3}$$

sendo o limite de integração $\Omega = [-1, 4] \times [-3, 4] \times [-1, 1]$ e o volume $V = 42$.

O método recebe como entrada um valor N, sendo o número de pontos que são calculados. Desta forma, o método calcula a função $H(x, y, z)$ para N pontos aleatórios e calcula-se a média de pontos dentro do espaço de integração para encontrar o volume do toroide. Essa etapa pode ser descrita pela Equação (4).

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \frac{V}{N} \sum_{i=0}^{N-1} H(x_i, y_i, z_i) \tag{4}$$

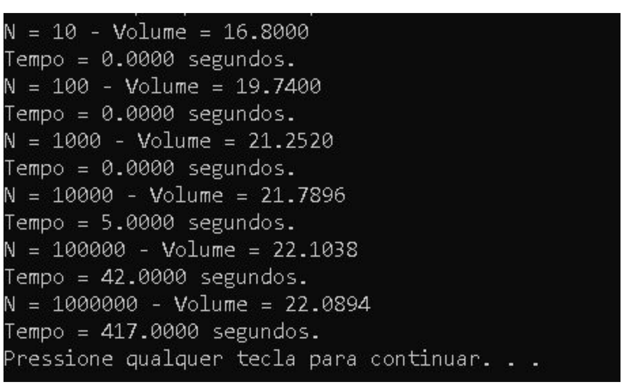
O algoritmo 1 apresenta um pseudo-código do método de Monte Carlo para calcular o volume do toroide parcial, realizando as etapas descritas acima.

Algorithm 1: MonteCarlo(N)

```
V = 42
points = 0
for i de 1 até N do
    x = random()
    y = random()
    z = random()
    if f(x,y,z) ≤ 1 & x ≥ 1 & y ≥ −3 then
        points++
    end
end
volume = V*points / N
return volume
```

III. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Para avaliar o método implementado neste trabalho, foi realizado um experimento para calcular o volume do objeto desejado, variando o número de iterações N entre 10 a 10^6. Foi calculado o tempo para cada valor de N e o volume encontrado pelo método. A Figura 2 mostra os resultados obtidos pelo método para cada valor de N utilizado, exibindo o volume e o tempo obtido em mili segundos.



```
N = 10 - Volume = 16.8000
Tempo = 0.0000 segundos.
N = 100 - Volume = 19.7400
Tempo = 0.0000 segundos.
N = 1000 - Volume = 21.2520
Tempo = 0.0000 segundos.
N = 10000 - Volume = 21.7896
Tempo = 5.0000 segundos.
N = 100000 - Volume = 22.1038
Tempo = 42.0000 segundos.
N = 1000000 - Volume = 22.0894
Tempo = 417.0000 segundos.
Pressione qualquer tecla para continuar. . .
```

Figura 2: Resultados obtidos pelo método.

A Tabela I apresenta os resultados do experimento realizado, onde a coluna N mostra o número de iterações realizadas, a coluna $Volume$ mostra o resultado encontrado pelo método e a coluna $Tempo(ms)$ mostra o tempo levado para o cálculo, em mili segundos. Sabendo que o volume real do objeto é aproximadamente 22.08, pode-se afirmar que quanto maior o número de iterações, o resultado calculado se aproxima mais do resultado real, porém, o tempo de processamento acaba aumentando consequentemente.

N	Volume	Tempo (ms)
10	16.80	0
100	19.74	0
1000	21.25	0
10000	21.78	5
100000	22.10	42
1000000	22.08	417

Tabela I: Tabela de resultados do experimento 1.

IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feita a implementação do método de Monte Carlo para realizar a integração numérica para calcular o volume de um toroide parcial, tendo o seu espaço de integração restringido.

Foram gerados resultados para avaliar o método, variando o número de iterações N. Para cada valor de N foi calculado o volume e o tempo de processamento necessário para realizar o cálculo. Os resultados apontam que quanto maior o valor de N, o cálculo do volume melhor se aproxima do resultado real, tendo encontrado o valor 22.08 para o volume, com 10^6 iterações em $417ms$. Em trabalhos futuros, uma abordagem interessante é o uso de programação distribuída, devido à facilidade de paralelizar o método de Monte Carlo, para melhorar o seu desempenho.

REFERÊNCIAS

[1] Nicholas C. Metropolis and S. Ulam. The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44 247:335–41, 1949.

[2] Mark Huber. Adaptive monte carlo integration adaptive monte carlo integration. 2018.

[3] Adrien Pilleboue, Gurprit Singh, David Coeurjolly, Michael M. Kazhdan, and Victor Ostromoukhov. Variance analysis for monte carlo integration. *ACM Trans. Graph.*, 34:124:1–124:14, 2015.

[4] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. Numerical recipes: the art of scientific computing, 3rd edition. In *SOEN*, 2007.