Санкт-Петербургский государственный университет

ФАТТАХОВ Марат Русланович

Отчет по производственной практике

Решение дифференциальных уравнений с сильным вырождением

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Основная образовательная программа СВ.5001.2021 «Математика и компьютерные науки»

Научный руководитель:
профессор кафедры вычислительной математики,
д.ф.-м.н. Бурова И. Г.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Обзор литературы

Исследования, посвящённые вырождающимся дифференциальным уравнениям второго порядка, охватывают широкий круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и асимптотическим поведением решений, а также с особенностями задач Коши и краевых задач.

В работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко и Д. И. Чудовой [1] изучены обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентом при старшей производной, обращающимся в нуль. Доказываются теоремы о существовании и единственности решений краевых задач. Важное внимание уделено так называемым бисингулярным задачам, возникающим при вырожденных уравнениях, коэффициенты которых обращаются в нуль на некотором множестве. Отмечается, что такие задачи требуют дополнительных исследований, поскольку в ряде случаев решения могут отсутствовать в заданном классе функций или требуют применения специальных методов для доказательства существования.

Методы построения асимптотических представлений решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка подробно рассмотрены в работах В. П. Архипова и А. В. Глушака. В их статье «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [2] предложены формулы для нахождения собственных значений, а также оценки резольвенты задачи Дирихле. Эти методы позволяют исследовать решения в комплексной плоскости, а также в зависимости от параметра, что делает их универсальными при анализе широкого класса задач.

Дополнительное внимание к асимптотическому поведению решений уделено в статье «Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка» [3]. Здесь предложен подход, позволяющий строить точные степенные асимптотики решений в окрестности точки вырождения. Такой метод важен для анализа особенностей поведения решений и их сходимости.

Отдельно рассматривается задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка [4]. В. Архипов и А. Глушак изучили разрешимость задач Коши с начальными условиями, заданными в точке вырождения, и предложили методы для определения первых асимптотик решений. В статье приводятся примеры, иллюстрирующие теоретические положения. Авторами установлено, что вид начальных условий существенно зависит от знака коэффициента при первой производной, что обуславливает специфику построения решений в данных задачах.

2 Цель работы

Разработать и исследовать методы аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, основное внимание уделяется:

1. Формализации аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0, 1)$, с использованием вариационно-сеточных методов.
2. Разработке и анализу координатных систем для одномерных задач, обеспечивающих сходимость аппроксимации в энергетической норме.
3. Оценке порядка аппроксимации, полученной с использованием линейной интерполяции, а также практическому применению методов к конкретным задачам.
4. Построению численных методов и их верификации на тестовых примерах с известными аналитическими решениями.

Целью является не только теоретический анализ разработанных методов, но и их практическое применение, что позволит подтвердить эффективность предложенных подходов.

3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

3.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$
\begin{gathered}
-\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=f(x),\quad 0<x<1,\quad f\in L_2(0,1),\\
q \text{ измерима, ограничена, неотрицательна на } [0,1]\\
\alpha=\mathrm{const}>0,\ p\in C^1[0,1],\ p(x)\geq p_0=\mathrm{const}>0\\
u\in\mathbb{W}_2^1(0,1)
\end{gathered}\tag{1}
$$

3.2 Аппроксимация в пространстве $\mathbb{W}_2^1$

3.2.1 Основа вариацонно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$
Au=f,\quad f\in H \tag{2}
$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$
\begin{aligned}
[u,v]_A &:= (Au,v),\\
\|u\|_A^2 &:= [u,u]_A=(Au,u),\\
\mathcal{F}(u) &:= \frac{1}{2}[u,u]_A-(f,u)
\end{aligned}\tag{3}
$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{F}'(u)h=[u,h]_A-(f,h)\\
\mathcal{F}'(u_0)=0\Leftrightarrow\forall h\in H\quad [u_0,h]_A=(f,h)\Leftrightarrow Au_0=f
\end{gathered}\tag{4}
$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot,\cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n\in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$
\begin{gathered}
u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,\ \text{где Lin}\ \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} = H_n, \\
\left(\mathcal{F}\ |_{H_n}\right)'(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = 0,\ k = 1, ..., n \\
\frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^{n} a_i (f, \varphi_i)\right] = \\
= \sum_{i=1}^{n} a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0,\ k = 1, ..., n
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Приведенная схема называется методом Ритца.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i, которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{\left\{\varphi_{n,i}\right\}_{i=1}^{k_n}\right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$
\forall u \in H\ \lim_{n \to \infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0,
\tag{6}
$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [5] показано, что если координатная система $\left\{\varphi_{n,i}\right\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (5) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [6] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n, которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

3.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [7] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{\varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right)\right\}_{j\in J_h, |q|=0,\dots,s-1}, \tag{7}$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s\left(\overline{\Omega}\right)$ в метрике $\mathring{\mathbb{W}}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$ при $h \to 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m, такой что $\bigcup_{j\in J_h} \operatorname{supp} \varphi_{q,j,h} \supset \Omega\ \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j\in J_h} h^q u^{(q)}((j+\mathbb{1})h)\omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{8}$$

В случае $\mathbb{W}_2^1(0,1)$ получается, что $q \equiv 0$, то есть необходимо найти одну базисную функцию $\omega(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая должна удовлетворять следующим условиям, описанным в [7]:

$$\begin{gathered}\operatorname{supp} \omega = [0,2],\ \ \omega \in C(\mathbb{R}) \\ \omega(x+1) + \omega(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1], \\ \omega(x) = \begin{cases}\varphi(x) & ,\ x \in [0,1] \\ \psi(x-1), & x \in [1,2] \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{R}\setminus[0,2]\end{cases}, \\ \varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ - полиномы степени не выше } 1\end{gathered} \tag{9}$$

Что приводит к системе с четырьмя неизвестными:

$$\begin{gathered}\varphi(x) = ax + b,\ \ \psi(x) = cx + d, \\ \begin{cases}0 = \omega(0) = \varphi(0) \\ 1 = \omega(1) = \varphi(1) = \psi(0) \\ 0 = \omega(2) = \psi(1) \\ 1 = \omega(x) + \omega(x+1) = \varphi(x) + \psi(x)\end{cases}\end{gathered} \tag{10}$$

Единственным решением системы является

$$\begin{gathered}\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 1 - x, \\ \omega(x) = \begin{cases}x & ,\ x \in [0,1] \\ 2 - x, & x \in [1,2] \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{R}\setminus[0,2]\end{cases}\end{gathered} \tag{11}$$

3.4 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 1, \Omega = (0, 1)$. Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{\varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right)\right\}_{j \in J_h} \tag{12}$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h)\omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{13}$$

Для удобства введем обозначение $x_j \coloneqq jh$. Тогда на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x), \tag{14}$$

но на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j.

Для интерполяционного многочлена есть оценка оценка остатка:

$$\begin{gathered} x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow \\ |u(x) - u_h(x)| \leq \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} |u''(x)| \cdot \frac{1}{2!} \left|(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| \end{gathered} \tag{15}$$

Несложно проверить, что $\left|(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| \leq \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C(0,1)} \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{x \in (0,1)} |u''(x)| \tag{16}$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

3.5 Погрешность приближения

В предыдущем пункте была получена оценка погрешности приближения u линейной интерполяцией. В [8] получена важная для нас оценка:

$$\|u - u^h\|_A \leq \|u - u_h\|_A, \tag{17}$$

где u^h – приближенное решение, получаемое при помощи метода Ритца, а u_h – вписанная в график u ломаная, с узлами в точках x_j. Таким образом, при наличии оценки на $\|u - u_h\|_A$, можно оценить погрешность приближения u^h к u.

3.5.1 Случай слабого вырождения

Случай $0 < \alpha < 1$ называется случаем слабого вырождения. В данном случае в [7] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}. \tag{18}$$

И данная оценка точна в том смысле, что существует функция u, для которой $\|u - u_h\|_A = C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}$.

3.5.2 Случай сильного вырождения

Случай $1 \leq \alpha < 2$ называется случаем сильного вырождения. В данном случае в [7] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{19}$$

И данная оценка почти точна в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция u, для которой $\|u - u_h\|_A \geq Ch^{1-\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}$.

3.5.2.1 Улучшение оценки

На самом деле (см. [7]), при $f \in L_r(0,1),\ \ 2 < r \leq \infty$, можно получить лучшую оценку в случае $1 \leq \alpha < 2$:

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_r} h^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{r}}, \tag{20}$$

где при $r = \infty$ следует считать $\frac{1}{r} = 0$.

3.6 Применение к конкретной задаче

В качестве примера рассмотрим задачу

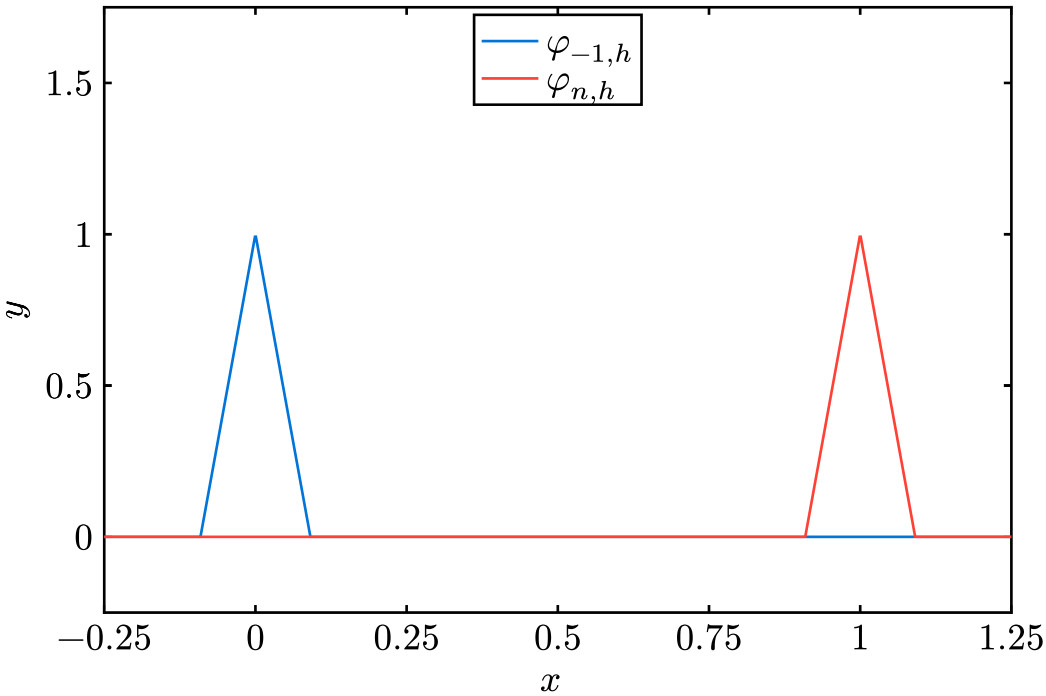
$$-\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u = \frac{3^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha}, \qquad 0 < x < 1 \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \tag{21}$$

Тогда $u(0) = 0$ и нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3 - \alpha}, \tag{22}$$

то есть это точное решение задачи.

Возьмем натуральное n и по нему построим $h = 1/(n+1)$, тогда в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$ первая и последняя функции выглядят следующим образом:



Будем строить аппроксимирующую функцию вида $u_h = \sum_{k=-1}^{n} a_k \varphi_{k,h}$, заметим, что так как $u(1) = 0$, то коэффициент при последнем члене $a_n = 0$.

По предложенному в пункте 3.2 методу строим аппроксимирующую путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_k \left[\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right]_A = \left(f, \varphi_{j,h}\right), \quad j = -1, ..., n \tag{23}$$

Тут

$$
\begin{gathered}
Au = -\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u, \\
\left[\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right]_A = \left(A\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right) = \\
= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right) + \varphi_{k,h} \right) \cdot \varphi_{j,h} \right\} dx = \\
= \int_0^1 \left\{ x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\left(\frac{d}{dx}\varphi_{j,h}\right) + \varphi_{k,h}\varphi_{j,h} \right\} dx - x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\varphi_{j,h}\Big|_0^1
\end{gathered} \tag{24}
$$

Видно, что подстановка $x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\varphi_{j,h}\Big|_0^1$ равна нулю в случае, если хотя бы один из k или j не равен n. Так как $k = -1, ..., n-1$, то подстановка всегда равна 0. Произведение в правой части – классическое скалярное произведение функций

$$
\left(f, \varphi_{j,h}\right) = \int_0^1 f(x)\varphi_{j,h}(x) \tag{25}
$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$	$\boldsymbol{h = 0.0001}$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	5.09e-3
0.1	1.57e-5	1.57e-7	5.33e-3
0.2	1.11e-5	1.11e-7	4.92e-3
0.3	8.53e-6	8.53e-8	4.36e-3
0.4	6.72e-6	6.72e-8	3.74e-3
0.5	5.29e-6	5.29e-8	3.09e-3
0.6	4.06e-6	4.06e-8	2.43e-3
0.7	2.96e-6	2.96e-8	1.78e-3
0.8	1.94e-6	1.94e-8	1.15e-3
0.9	9.55e-7	9.55e-9	5.55e-4

Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

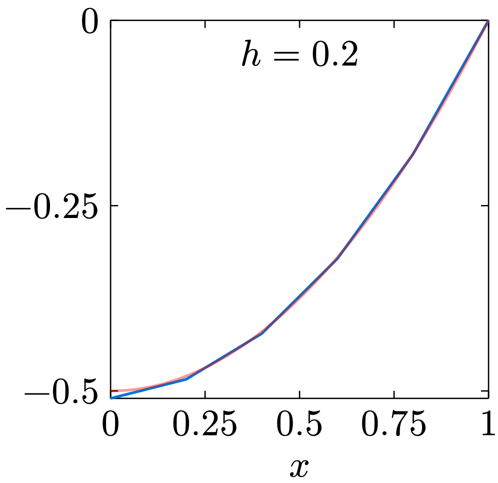
	$h=0.01$	$h=0.001$
0.0	2.34e-4	8.26e-6
0.1	1.79e-5	1.76e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7
0.3	7.18e-6	7.12e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8
0.8	1.26e-6	1.25e-8
0.9	5.98e-7	5.94e-9

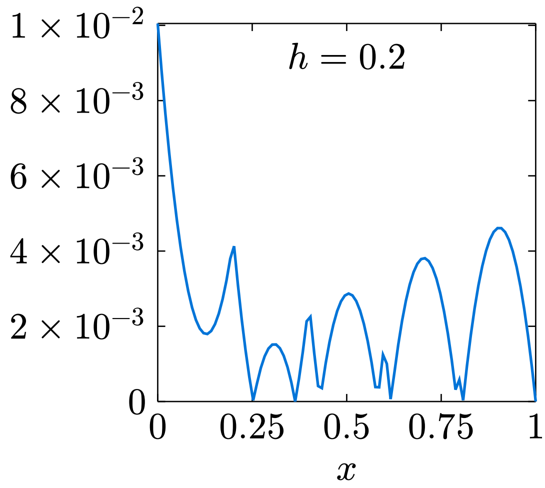
Таблица 2. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$

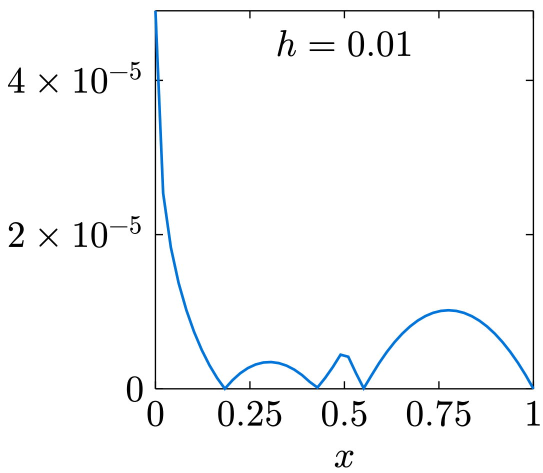
	$h=0.01$	$h=0.001$
0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	2.65e-7	2.62e-9

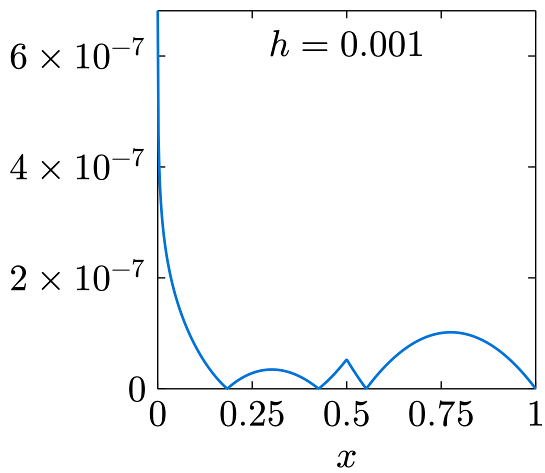
Таблица 3. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.8$

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей для $\alpha = 1$:









4 Заключение

В ходе работы был исследован метод аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, основанный на вариационно-сеточных методах. В процессе реализации выделены основные этапы аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0,1)$, с использованием линейных базисных функций, что позволило обеспечить сходимость решений в энергетической норме.

Показано, что использование предложенной координатной системы позволяет с высокой точностью аппроксимировать решения в рамках заданной задачи. Анализ порядка аппроксимации показал, что для линейной интерполяции ошибки аппроксимации оцениваются квадратично. Верификация полученных численных решений на тестовых примерах с известными аналитическими решениями подтвердила корректность методов и их применимость к реальным задачам.

Практическое применение метода было продемонстрировано на конкретной задаче с аналитическим решением, где была построена аппроксимирующая функция, что позволило провести численный эксперимент и получить точные результаты. Таким образом, результаты работы подтверждают эффективность предложенной аппроксимации для решения краевых задач вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, а также подчеркивают важность выбора правильной координатной системы для достижения необходимой точности.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение предложенных методов для многомерных и более сложных задач, а также на разработку более эффективных сеточных построений и алгоритмов решения.

5 Список литературы

1. Розов Н. Х., Сушко В. Г., Чудова Д. И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т. 4, № 3. сс. 1063–1095

2. Архипов В. П., Глушак А. В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений // Прикладная математика & Физика. 2016. т. 44, № 20(241). сс. 5–22

3. Архипов В. П., Глушак А. В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2023. т. 55, № 3. сс. 197–206

4. Архипов В. П., Глушак А. В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2024. т. 56, № 2. сс. 87–96

5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. "Наука", 1970

6. Курант Р. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1942. т. 49, № 1

7. Михлин С. Г. Численные методы и автоматическое программирование // Записки научных семинаров ПОМИ. 1974. т. 48. сс. 32–188

8. Gusman Y., Oganesyan L. Inequalities for the convergence of finite difference schemes for degenerate elliptic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. т. 5, № 2. сс. 256–267

6 Приложения

6.1 Код программы на языке Wolfram

```
alpha = 1; h = 0.2; n = 1/h - 1;

fc := Compile[{{x, _Real}},
  (x^(3-alpha) - 2(3-alpha)x - 1) / (3-alpha)
]; f[x_?NumericQ] := fc[x];

uexact := Compile[{{x, _Real}}, (x^(3-alpha) - 1) / (3-alpha)];

wc := Compile[{{x, _Real}}, Piecewise[{
  {x,   0<=x<1},
  {2-x, 1<=x<=2}
}, 0]]; w[x_?NumericQ] := wc[x];

phiCompiled = Table[
  With[{j = j},
    Compile[{{x, _Real}}, w[x/h - j]]
  ],
  {j, -1, n - 1}
];
phi = Table[
  With[{i = i},
  phiCompiled[[i]][#] &],
  {i, 1, Length[phiCompiled]}
];

phiD := Table[With[{j = j}, Piecewise[{
    {1/h, h * j <= # < h * (j+1)},
    {-1/h, h * (j+1) <= # <= h * (j+2)}
}, 0]&], {j, -1, n - 1}];

fj = ParallelTable[NIntegrate[
  f[x] * phi[[j+2]][x],
  {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
  WorkingPrecision -> 32, PrecisionGoal -> 8,
  MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8,
  Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0}
], {j, -1, n-1}];
t := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+2]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+2]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, -1, n-1}
];
```

```
tt := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+1]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+1]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, 0, n-1}
];

k := Length[t]; systemcoef = SparseArray[
  {
      Band[{1, 1}] -> t,
      Band[{2, 1}] -> tt,
      Band[{1, 2}] -> tt
  },
  {k, k}
];
a := LinearSolve[systemcoef, fj]; Print[a]
```