1 Дифференциальные уравнения с сильным вырождением

ДУ с сильным вырождением называют уравнения, в которых старшая производная умножается на функцию, которая может обращаться в ноль в области определения. Например, для второго порядка общий вид будет:

$$\begin{gathered} a(x,t)u_t = b(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_x + d(x)u + f(x,t), \quad x,t \in \Omega \times T, \\ \exists x_0, t_0 \in \Omega \times T : a(x_0, t_0) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

Или в стационарном случае

$$\begin{gathered} a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \\ \exists x_0 \in \Omega : a(x_0) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Такие уравнения требуют особых численных методов решения, также возникают естественные граничные условия.

Они могут возникать в задачах теплопроводности, гидродинамики.

Для приложений требуется задавать некоторые граничные условия, которые задают начальные параметры системы. Случай, когда условие состоит в задании начальных значений искомой функции на границе, называется **первой краевой задачей**, или **задачей Дирихле**.

2 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

2.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left[x^\alpha p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad f \in L_2(0,1), \\ q \text{ измерима, ограничена, неотрицательна на } [0,1] \\ \alpha = \text{const} > 0,\ p \in C^1[0,1],\ p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0 \\ u \in \mathbb{W}_2^1(0,1) \end{gathered} \tag{3}$$

2.2 Аппроксимация в пространстве $\mathbb{W}_2^1$

2.2.1 Основа вариацонно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$Au = f, \quad f \in H \tag{4}$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$\begin{aligned} [u, v]_A &:= (Au, v), \\ \|u\|_A^2 &:= [u, u]_A = (Au, u), \\ \mathcal{F}(u) &:= \frac{1}{2}[u, u]_A - (f, u) \end{aligned} \tag{5}$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$\begin{gathered} \mathcal{F}'(u)h = [u, h]_A - (f, h) \\ \mathcal{F}'(u_0) = 0 \Leftrightarrow \forall h \in H \quad [u_0, h]_A = (f, h) \Leftrightarrow Au_0 = f \end{gathered} \tag{6}$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot, \cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n \in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$\begin{gathered} u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \text{ где } \mathrm{Lin}\,\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} = H_n, \\ \left(\mathcal{F}\mid_{H_n}\right)'(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = 0, \ k = 1, ..., n \\ \frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^{n} a_i (f, \varphi_i)\right] = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0, \ k = 1, ..., n \end{gathered} \tag{7}$$

Приведенная схема называется методом Ритца.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i, которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{\left\{\varphi_{n,i}\right\}_{i=1}^{k_n}\right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$\forall u \in H \ \lim_{n\to\infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0, \tag{8}$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [1] показано, что если координатная система $\left\{\varphi_{n,i}\right\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (7) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [2] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n, которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

2.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [3] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{\varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right)\right\}_{j\in J_h, |q|=0,\dots,s-1}, \tag{9}$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s\left(\overline{\Omega}\right)$ в метрике $\mathring{\mathbb{W}}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$ при $h \to 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m, такой что $\bigcup_{j\in J_h} \operatorname{supp} \varphi_{q,j,h} \supset \Omega \ \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j\in J_h} h^q u^{(q)}((j+\mathbb{1})h)\omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{10}$$

В случае $\mathbb{W}_2^1(0,1)$ получается, что $q \equiv 0$, то есть необходимо найти одну базисную функцию $\omega(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая должна удовлетворять следующим условиям, описанным в [3]:

$$\operatorname{supp}\,\omega = [0,2],\ \ \omega \in C(\mathbb{R})$$

$$\omega(x+1) + \omega(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1],$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) & ,\ x \in [0,1] \\ \psi(x-1), & x \in [1,2] \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{R} \setminus [0,2] \end{cases}, \tag{11}$$

$$\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ - полиномы степени не выше } 1$$

Что приводит к системе с четырьмя неизвестными:

$$\varphi(x) = ax + b,\ \ \psi(x) = cx + d,$$

$$\begin{cases} 0 = \omega(0) = \varphi(0) \\ 1 = \omega(1) = \varphi(1) = \psi(0) \\ 0 = \omega(2) = \psi(1) \\ 1 = \omega(x) + \omega(x+1) = \varphi(x) + \psi(x) \end{cases} \tag{12}$$

Единственным решением системы является

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 1 - x,$$

$$\omega(x) = \begin{cases} x & ,\ x \in [0,1] \\ 2 - x, & x \in [1,2] \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{R} \setminus [0,2] \end{cases} \tag{13}$$

2.4 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 2$, $\Omega = (0,1)$. Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{ \varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \right\}_{j \in J_h, |q| = 0, \ldots, s-1} \tag{14}$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_{h(x)} = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h)\omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{15}$$

Для удобства введем обозначение $x_j \coloneqq jh$. Тогда на промежутке $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x), \tag{16}$$

но на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j.

Для интерполяционного многочлена есть оценка оценка остатка:

$$\begin{gathered} x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow \\ |u(x) - u_h(x)| \le \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} u''(x) \cdot \frac{1}{2!} |(x - x_j)(x - x_{j+1})| \end{gathered} \tag{17}$$

Несложно проверить, что $|(x - x_j)(x - x_{j+1})| \le \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C(0,1)} \le \frac{1}{8} h^2 \sup_{x \in (0,1)} |u''(x)| \tag{18}$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

2.5 Применение к конкретной задаче

В качестве примера рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u = \frac{3^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha}, \\ 0 < x < 1 \quad 1 \le \alpha \le 2 \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда $u(0) = 0$ и нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha}, \tag{20}$$

то есть это точное решение задачи.

Для удобства обозначим $n = \lceil \frac{1}{h} - 1 \rceil$, тогда $J_h = \{-1, ..., n\}$.

По предложенному в начале методу строим аппроксимирующую функцию путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n} a_k [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}] = (f, \varphi_{j,h}), \quad j = -1, ..., n \tag{21}$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$	$\boldsymbol{h = 0.0001}$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	5.09e-3
0.1	1.57e-5	1.57e-7	5.33e-3
0.2	1.11e-5	1.11e-7	4.92e-3
0.3	8.53e-6	8.53e-8	4.36e-3
0.4	6.72e-6	6.72e-8	3.74e-3
0.5	5.29e-6	5.29e-8	3.09e-3
0.6	4.06e-6	4.06e-8	2.43e-3
0.7	2.96e-6	2.96e-8	1.78e-3
0.8	1.94e-6	1.94e-8	1.15e-3
0.9	9.55e-7	9.55e-9	5.55e-4

Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$
0.0	2.34e-4	8.26e-6
0.1	1.79e-5	1.76e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7
0.3	7.18e-6	7.12e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8
0.8	1.26e-6	1.25e-8
0.9	5.98e-7	5.94e-9

Таблица 2. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$

	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$
0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	2.65e-7	2.62e-9

Таблица 3. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.8$

3 Список литературы

[1] М. С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, 2-е изд. "Наука", 1970.

[2] К. Р., «Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations.», *Bulletin of the American Mathematical Society*, т. 49, вып. 1, 1942.

[3] «Численные методы и автоматическое программирование», *Записки научных семинаров ПОМИ*, т. 48, сс. 32–188, 1974.