

Санкт-Петербургский государственный университет

Фаттахов Марат Русланович

Выпускная квалификационная работа

Решение дифференциальных уравнений с сильным вырождением

Уровень образования: бакалавриат

Направление *02.03.01 «Математика и компьютерные науки»*

Основная образовательная программа *СВ.5001.2021 «Математика и компьютерные науки»*

Научный руководитель:
профессор кафедры вычислительной математики, д.ф.-м.н. Бурова И. Г.

Рецензент:
профессор Санкт-Петербургского Государственного
Морского Технического Университета, д.ф.-м.н. Хазанов В. Б.

Содержание

1 Введение	3
2 Цель работы	5
3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка	5
3.1 Вид уравнения	5
3.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1	5
3.2.1 Основа вариационно-сеточного метода	5
3.3 Одномерный случай	6
3.4 Вид системы при различных высотах s	7
3.5 Порядок аппроксимации	8
3.6 Погрешность приближения	8
3.6.1 Случай слабого вырождения	9
3.6.2 Случай сильного вырождения	9
3.7 Применение к конкретным задачам	9
3.7.1 Аппроксимация сплайнами нулевой высоты	9
3.7.2 Аппроксимация сплайнами первой высоты	12
3.8 Сравнение с другим методом	14
3.8.1 Линейная интерполяция	14
3.8.2 Эрмитовы C^1 сплайны	14
3.8.3 Кубические C^2 сплайны	15
3.8.4 Сравнение результатов	15
3.8.5 Выводы из сравнения	16
4 Заключение	16
5 Список литературы	18
6 Приложения	21
6.1 Репозиторий с кодом пакета	21

Аннотация: Данная работа посвящена разработке и исследованию методов аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. Основное внимание уделяется применению вариационно-сеточных методов и построению эффективных координатных систем, включая локальные сплайны нулевой и первой высоты, для аппроксимации решений в функциональных пространствах, таких как $W_2^1(0, 1)$. Теоретические результаты подкрепляются численными экспериментами на тестовых задачах с известными аналитическими решениями, что демонстрирует эффективность и практическую применимость предложенных подходов. Обсуждаются перспективы использования разработанных методов для моделирования физических процессов и решения прикладных задач.

Ключевые слова: вырожденные дифференциальные уравнения, краевые задачи, вариационно-сеточный метод, аппроксимация, локальные сплайны, энергетическая норма, численные методы, сильное вырождение.

1 Введение

Вырожденные дифференциальные уравнения второго порядка представляют собой важный объект исследований как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Они возникают в различных областях науки и техники, таких как газовая динамика [1], моделирование распространения вязких жидкостей [2], [3], квантовая космология [4] и теория вероятностей [5]. Особенность этих уравнений заключается в обращении в ноль коэффициента при старшей производной в некоторых точках области определения, что влечёт за собой серьёзные трудности при их аналитическом и численном решении [6].

Исследования, посвящённые этим уравнениям, охватывают широкий круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и асимптотическим поведением решений, а также с особенностями задач Коши и краевых задач. В частности, в работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко и Д. И. Чудовой [7] рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентом при старшей производной, обращающимся в нуль. В ней доказываются теоремы о существовании и единственности решений краевых задач, уделяется внимание бисингулярным задачам, при которых коэффициенты обращаются в нуль на множестве положительной меры. Такие задачи требуют применения специальных методов, поскольку стандартные подходы могут оказаться неприменимыми.

Дополнительный вклад в изучение асимптотического поведения решений внесли В. П. Архипов и А. В. Глушак. В статье «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [8] предложены методы нахождения собственных значений и оценки резольвенты задачи Дирихле. Эти методы позволяют исследовать решения в комплексной плоскости и по параметру, что делает их универсальными для анализа широкого класса задач. Подход к построению степенных асимптотик в окрестности точки вырождения разработан в работе «Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка» [9], где строятся точные представления решений с использованием специальных аппроксимаций.

Особое внимание уделено задаче Коши [10], в которой начальные условия задаются в точке вырождения. В. Архипов и А. Глушак предложили методы построения первых асимптотических решений и показали, что форма начальных условий существенно зависит от знака коэффициента при первой производной, что оказывает влияние на вид решений и методику их построения.

Современные исследования также сосредоточены на численных методах решения вырожденных задач. Актуальными являются подходы, основанные на вариационных принципах, разностных схемах и сплайн-аппроксимациях [11], [12], [13]. Локальные сплайны, в частности, обеспечивают высокую точность аппроксимации как самого решения, так и его производных, особенно вблизи точки вырождения [14]. Среди них выделяются полиномиальные сплайны второго порядка и сплайны Эрмита первой высоты, позволяющие получать гладкие приближения, сохраняющие дифференциальные свойства точного решения [15].

Вариационная постановка задачи в подходящем весовом пространстве Соболева [16] обеспечивает корректную формулировку краевой задачи с сильным вырождением. При этом показатель степени α в коэффициенте $k(x) = x^\alpha p(x)$ лежит в интервале $[1, 2)$, что требует особого подхода к построению граничных условий и численных схем. Разработанный численный алгоритм сочетает сплайн-аппроксимацию с проекционными методами, что обеспечивает сходимость в энергетической норме и устойчивость решения. Эффективность предложенного метода подтверждена теоретическим анализом и численными экспериментами [17].

Множество результатов в области разработано в последнее время. В [18], [19] исследуются условия существования и единственности решений, а в [11] рассматривается введение весовых функций для постановки задач в пространствах Соболева. В работе [12] обсуждаются собственные значения для линеаризованных задач, а в [20] уточняется спектральная структура решений.

Методы, основанные на В-сплайнах и кусочно-линейных функциях, продемонстрировали свою эффективность [21], [13]. Эрмитовы сплайны [22] обеспечивают высокий порядок аппроксимации и позволяют приближать как само решение, так и его производные [23]. В [24] изучается нестационарное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным оператором, а в [25] предлагается метод локального улучшения аппроксимаций, полученных методом конечных элементов.

Особый интерес представляют случаи с периодическими коэффициентами или решениями, для которых применяются тригонометрические сплайны [26]. Вариационные методы оказываются особенно полезны в задачах с неоднородной структурой или переменными коэффициентами. В [13] описан алгоритм адаптивной сетки, позволяющий улучшить точность на участках с резкими изменениями решений [27].

Заключительно, предложенный в настоящей работе подход объединяет достоинства вариационного формулирования и сплайн-аппроксимации, обеспечивает высокую точность и устойчивость при решении краевых задач с сильным вырождением, а также демонстрирует широкую применимость в прикладных задачах, связанных с моделированием сложных физических процессов [28].

2 Цель работы

Разработать численные методы приближенного решения краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, основное внимание уделяется:

1. Формализации аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0, 1)$, с использованием вариационно-сеточных методов.
2. Разработке и анализу координатных систем для одномерных задач, обеспечивающих сходимость аппроксимации в энергетической норме.
3. Оценке порядка аппроксимации, полученной с использованием линейной интерполяции, а также практическому применению методов к конкретным задачам.
4. Построению численных методов и их верификации на тестовых примерах с известными аналитическими решениями.

Целью является не только теоретический анализ разработанных методов, но и их практическое применение, что позволит подтвердить эффективность предложенных подходов.

3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

3.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$-\frac{d}{dx} \left[x^\alpha p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad f \in L_2(0, 1),$$

q измерима, ограничена, неотрицательна на $[0, 1]$

$\alpha = \text{const} > 0$, $p \in C^1[0, 1]$, $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$

$$u \in \mathbb{W}_2^1(0, 1)$$

3.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1

3.2.1 Основа вариационно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$Au = f, \quad f \in H$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$\begin{aligned} [u, v]_A &:= (Au, v), \\ \|u\|_A^2 &:= [u, u]_A = (Au, u), \\ \mathcal{F}(u) &:= \frac{1}{2}[u, u]_A - (f, u) \end{aligned}$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(u)h &= [u, h]_A - (f, h) \\ \mathcal{F}'(u_0) &= 0 \Leftrightarrow \forall h \in H \quad [u_0, h]_A = (f, h) \Leftrightarrow Au_0 = f\end{aligned}$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot, \cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n \in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \text{ где } \text{Lin } \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = H_n, \\ (\mathcal{F}|_{H_n})'(u_n) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^n a_i (f, \varphi_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n\end{aligned} \tag{1}$$

Приведенная схема называется методом Ритца.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i , которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{ \{\varphi_{n,i}\}_{i=1}^{k_n} \right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$\forall u \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0,$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [29] показано, что если координатная система $\{\varphi_{n,i}\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (1) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [30] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n , которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

3.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [31] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{ \varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q \left(\frac{x}{h} - j \right) \right\}_{j \in J_h, |q|=0, \dots, s-1},$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s(\overline{\Omega})$ в метрике $\mathring{W}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$ при $h \rightarrow 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m , такой что $\bigcup_{j \in J_h} \text{supp } \varphi_{q,j,h} \supset \Omega \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j \in J_h} h^q u^{(q)}((j+1)h) \omega_q \left(\frac{x}{h} - j \right)$$

Рассмотрим одномерный случай, то есть $m = 1$ и частный пример $\Omega = (0, 1)$. Для данного случая в [31] подробно описаны рекурсивные формулы для построения функций ω_q . Но эти же функции можно получить рассмотрев более простую задачу – построение полиномиальной координатной системы.

3.4 Вид системы при различных высотах s

В (1) для нахождения коэффициентов a_i приводится явный вид системы линейных уравнений. В случае $s > 0$ систему можно привести к простому виду матричного уравнения. Рассмотрим например $s = 1$.

$$u_n = \sum_{j=1}^n (a_{j,0} \omega_{j,0} + a_{j,1} \omega_{j,1})$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{j,0}} \mathcal{F}(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_{j,1}} \mathcal{F}(u_n) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Можно выделить 4 вида взаимодействия между базисными функциями $\omega_{j,q}$:

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= \left([\omega_{j,0}, \omega_{i,0}]_A \right)_{i,j} & M_{0,1} &= \left([\omega_{j,0}, \omega_{i,1}]_A \right)_{i,j} \\ M_{1,0} &= \left([\omega_{j,1}, \omega_{i,0}]_A \right)_{i,j} & M_{1,1} &= \left([\omega_{j,1}, \omega_{i,1}]_A \right)_{i,j} \end{aligned}$$

А значит представить всю систему в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \omega_0) \\ (f, \omega_1) \end{pmatrix}$$

Так как носители функций $\omega_{j,q}$ – отрезки $[j, j+2]$, то матрицы $M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}$ будут иметь трехдиагональный вид, что упрощает решение.

Аналогично для остальных случаев $s > 1$ систему можно свести к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,s-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{s-1,0} & M_{s-1,1} & \dots & M_{s-1,s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \omega_0) \\ (f, \omega_1) \\ \dots \\ (f, \omega_{s-1}) \end{pmatrix}$$

3.5 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 0$, $\Omega = (0, 1)$. Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{ \varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \right\}_{j \in J_h}$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h) \omega\left(\frac{x}{h} - j\right)$$

Для удобства введем обозначение $x_j := jh$. Тогда на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x),$$

но на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j .

Для интерполяционного многочлена есть оценка остатка:

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow |u(x) - u_h(x)| \leq \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} |u''(x)| \cdot \frac{1}{2!} |(x - x_j)(x - x_{j+1})|$$

Несложно проверить, что $|(x - x_j)(x - x_{j+1})| \leq \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C[x_j, x_{j+1}]} \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |u''(x)|$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

3.6 Погрешность приближения

В предыдущем пункте была получена оценка погрешности приближения u линейной интерполяцией. В [32] получена важная для нас оценка:

$$\|u - u^h\|_A \leq \|u - u_h\|_A,$$

где u^h – приближенное решение, получаемое при помощи метода Рунге, а u_h – вписанная в график u ломаная, с узлами в точках x_j . Таким образом, при наличии оценки на $\|u - u_h\|_A$, можно оценить погрешность приближения u^h к u .

3.6.1 Случай слабого вырождения

Случай $0 < \alpha < 1$ называется случаем слабого вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}.$$

И данная оценка точна в том смысле, что существует функция u , для которой $\|u - u_h\|_A = C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}$.

3.6.2 Случай сильного вырождения

Случай $1 \leq \alpha < 2$ называется случаем сильного вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

И данная оценка почти точна в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция u , для которой $\|u - u_h\|_A \geq Ch^{1-\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}$.

3.6.2.1 Улучшение оценки

На самом деле (см. [31]), при $f \in L_r(0, 1)$, $2 < r \leq \infty$, можно получить лучшую оценку в случае $1 \leq \alpha < 2$:

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_r} h^{\frac{3-\alpha}{2}-\frac{1}{r}},$$

где при $r = \infty$ следует считать $\frac{1}{r} = 0$.

3.7 Применение к конкретным задачам

3.7.1 Аппроксимация сплайнами нулевой высоты

В качестве первого примера рассмотрим задачу

$$-\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u = \frac{x^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha},$$

$$0 < x < 1 \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

Известно, что в данном случае нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha},$$

то есть это точное решение задачи.

Возьмем натуральное n и по нему построим $h = 1/(n+1)$, тогда в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$ первая и последняя функции выглядят как на Рис. 1.

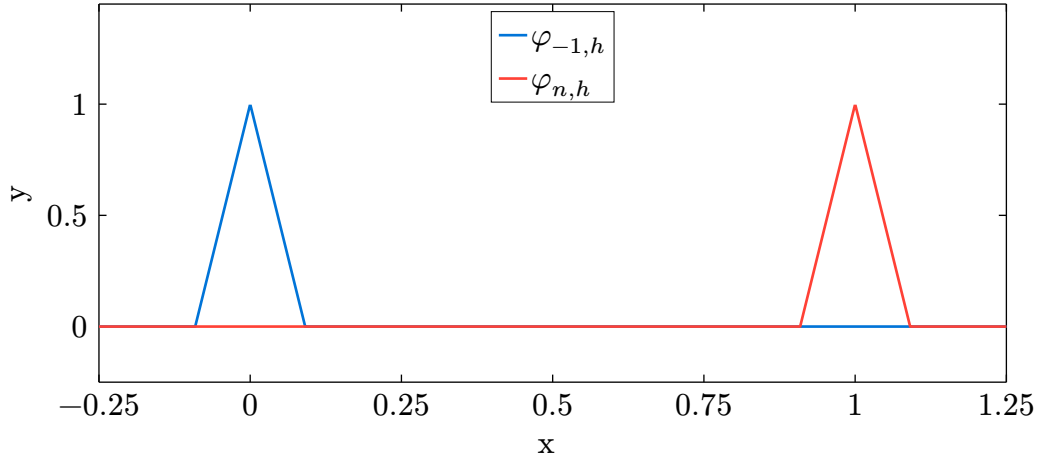


Рис. 1. Первая и последняя функции в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$

Будем строить аппроксимирующую функцию вида $u_h = \sum_{k=-1}^n a_k \varphi_{k,h}$, заметим, что так как $u(1) = 0$, то коэффициент при последнем члене $a_n = 0$.

По предложенному в пункте 3.2 методу строим аппроксимирующую путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_k [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A = (f, \varphi_{j,h}), \quad j = -1, \dots, n$$

Тут

$$\begin{aligned} Au &= -\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u, \\ [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A &= (A\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}) = \\ &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) + \varphi_{k,h} \right) \cdot \varphi_{j,h} \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \left(\frac{d}{dx} \varphi_{j,h} \right) + \varphi_{k,h} \varphi_{j,h} \right\} dx - x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Видно, что подстановка $x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1$ равна нулю в случае, если хотя бы один из k или j не равен n . Так как $k = -1, \dots, n-1$, то подстановка всегда равна 0. Произведение в правой части – классическое скалярное произведение функций

$$(f, \varphi_{j,h}) = \int_0^1 f(x) \varphi_{j,h}(x) dx$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей, на Таблице 1 приведены подробные результаты вычислений для $\alpha = 1$. На Таблице 2 и Таблице 3 приведены результаты вычислений для $\alpha = 1.5$ и $\alpha = 1.8$ соответственно.

Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	8.42e-09
0.1	1.57e-5	1.57e-7	1.21e-09
0.2	1.11e-5	1.11e-7	6.73e-10
0.3	8.53e-6	8.53e-8	3.40e-10
0.4	6.72e-6	6.72e-8	1.15e-10
0.5	5.29e-6	5.29e-8	2.43e-11
0.6	4.06e-6	4.06e-8	7.90e-11
0.7	2.96e-6	2.96e-8	8.42e-11
0.8	1.94e-6	1.94e-8	6.29e-11
0.9	9.55e-7	9.55e-9	3.08e-11

Таблица 2. Абсолютные погрешности,
 $\alpha = 1.5$

	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.0	2.34e-4	8.26e-6
0.1	1.79e-5	1.76e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7
0.3	7.18e-6	7.12e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8
0.8	1.26e-6	1.25e-8
0.9	5.98e-7	5.94e-9

Таблица 3. Абсолютные погрешности,
 $\alpha = 1.8$

	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	2.65e-7	2.62e-9

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей для $\alpha = 1$. На Рис. 2 приведены графики приближенного решения и самого решения, а на Рис. 3 – график абсолютной погрешности.

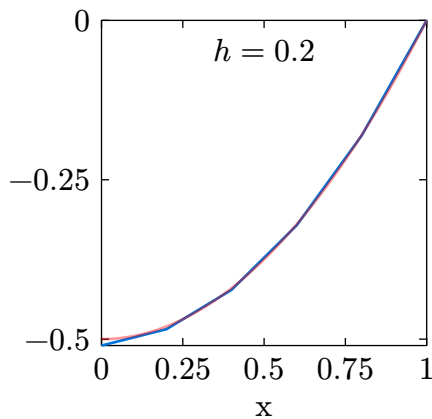


Рис. 2. Приближенное решение

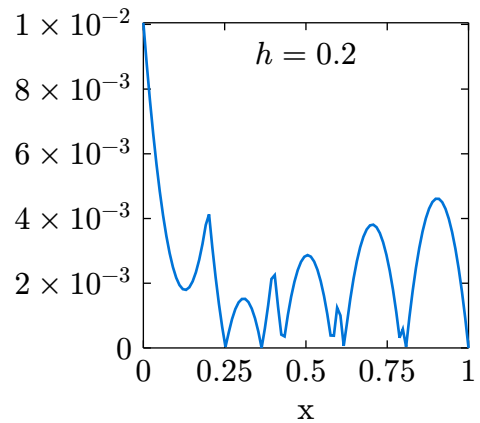


Рис. 3. Абсолютная погрешность

Также приведены графики абсолютных погрешности при разных h . На Рис. 4 приведены графики абсолютной погрешности при $h = 0.01$, а на Рис. 5 – при $h = 0.001$.

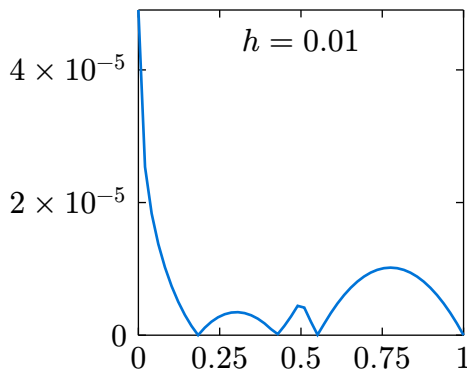


Рис. 4. Абсолютная погрешность

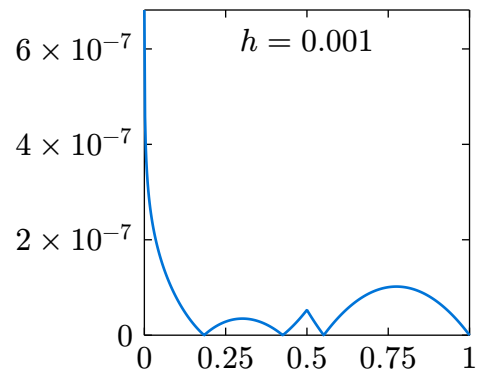


Рис. 5. Абсолютная погрешность

3.7.2 Аппроксимация сплайнами первой высоты

В качестве второго примера рассмотрим задачу с более сложным для аппроксимации решением:

$$f(x) = \frac{1}{x}(1+x)^{1-\alpha} \left(x(-1+x^2)^2 + x^\alpha(4x(1+(2-5x)x) + (-1+x)^2(-1+4x)\alpha + (-1+x)^2\alpha^2) \right),$$

$$-\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad 1 \leq \alpha < 2, \quad u(1) = u'(1) = 0$$

с аналитическим решением $u(x) = (x+1)^{3-\alpha}(1-x)^2$.

Построим базисные функции ω_0, ω_1 , их вид приведен на Рис. 6 и Рис. 7.

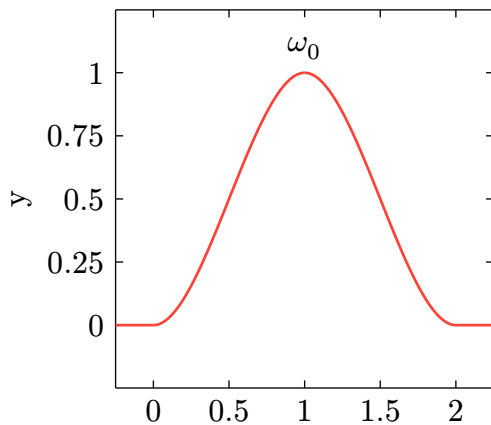


Рис. 6. Базисная функция ω_0

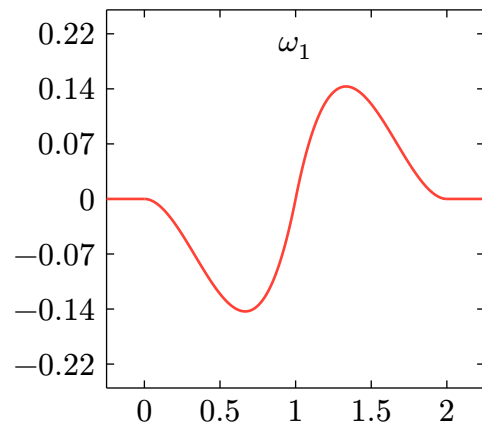


Рис. 7. Базисная функция ω_1

В данном случае построение аппроксимирующего решения является совмещением двух этапов:

1. аппроксимируем значения функции-решения и значения ее производной в точках сетки $\{x_j\}_{j=0}^{n-1}$
2. вписываем базисные функции в полученный каркас приближенного решения

$$u_h = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{u}(x_j) \omega_{j,0} + h \cdot \tilde{u}'(x_j) \omega_{j,1}$$

Формулы подсчета энергетического произведения остаются теми же, что и в случае нулевой высоты.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей. На Таблице 4 приведены результаты вычислений для $\alpha = 1$. На Таблице 5 приведены результаты вычислений для $\alpha = 1.5$.

Таблица 4. Абсолютные погрешности,
 $\alpha = 1$

	$h = 0.01$	$h = 0.002$
0.0	1.18e-4	5.99e-6
0.1	3.57e-5	1.43e-6
0.2	2.30e-5	9.21e-7
0.3	1.54e-5	6.17e-7
0.4	9.98e-6	3.99e-7
0.5	5.88e-6	2.35e-7
0.6	2.82e-6	1.13e-7
0.7	7.03e-7	2.81e-8
0.8	4.97e-7	1.99e-8
0.9	7.50e-7	3.00e-8

Таблица 5. Абсолютные погрешности,
 $\alpha = 1.5$

	$h = 0.01$	$h = 0.002$
0.0	1.35e-4	4.65e-5
0.1	2.27e-5	9.63e-7
0.2	1.09e-5	4.62e-7
0.3	4.05e-6	1.78e-7
0.4	3.01e-7	1.78e-9
0.5	2.98e-6	1.12e-7
0.6	4.38e-6	1.70e-7
0.7	4.67e-6	1.84e-7
0.8	4.00e-6	1.58e-7
0.9	2.42e-6	9.60e-8

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей. На левом графике Рис. 8 приведены графики приближенного решения и самого решения, на правом графике Рис. 8 – график абсолютной погрешности относительно решения.

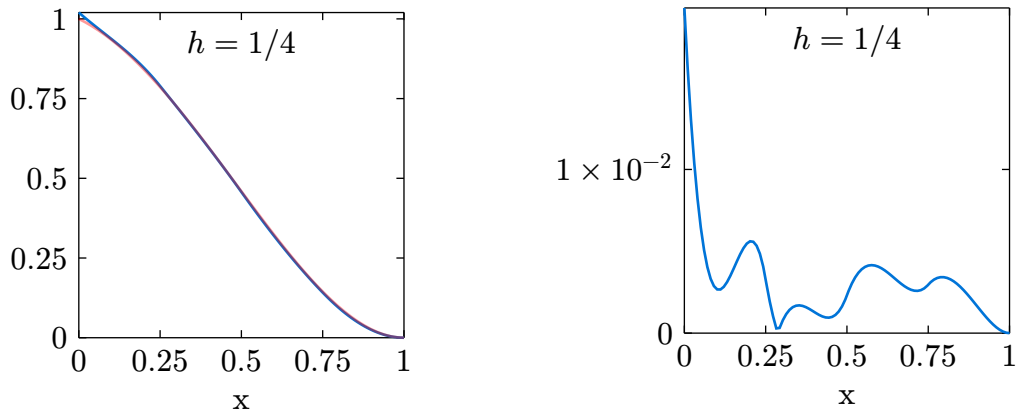


Рис. 8. Приближенное решение и абсолютная погрешность, $\alpha = 1.5$

На Рис. 9 приведены графики приближенной производной решения и абсолютной погрешности. На левом графике Рис. 9 приведены графики производной приближенного решения и самой производной решения, на правом графике Рис. 9 – график абсолютной погрешности относительно производной решения.

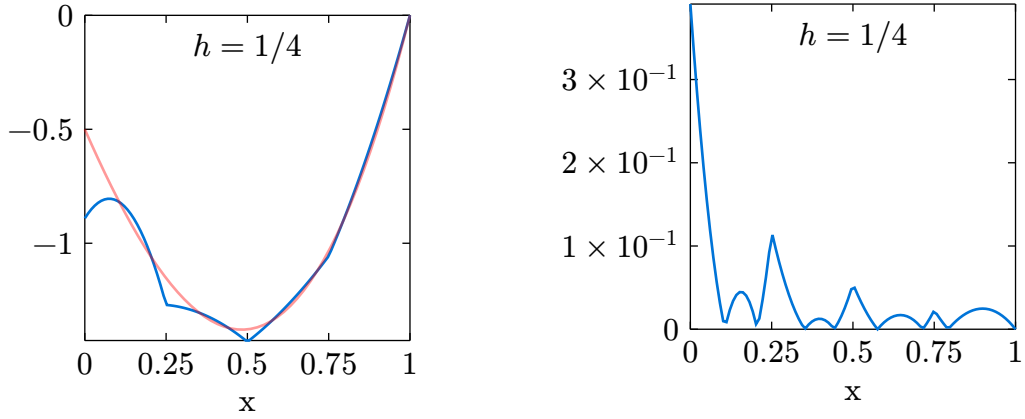


Рис. 9. Приближенная производная решения и абсолютная погрешность, $\alpha = 1.5$

Пример специально подобран так, чтобы наглядно показать ограничения метода. В данном случае производная плохо аппроксимируется многочленами низких степеней.

3.8 Сравнение с другими методами

В этой главе ответим на вопрос, как преимущество метода в виде использования нескольких высот сплайнов сравнивается с другими методами.

Для этого будем считать, что мы имеем каркас приближенного решения в узлах сетки. По этому каркасу проведем интерполяцию самыми используемыми методами:

1. Линейная интерполяция
2. Эрмитовы C^1 сплайны
3. Кубические C^2 сплайны

Далее сравним графики полученных приближений, а также различные метрики для оценки качества приближения.

3.8.1 Линейная интерполяция

Наиболее простой метод аппроксимации, где функция приближается кусочно-линейной функцией, соединяющей соседние узловые точки. Имея значения функции в узлах сетки $(x_j, u(x_j))$, на каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$ строится линейная функция:

$$L(x) = u(x_j) + \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \cdot (x - x_j)$$

Линейная интерполяция обеспечивает непрерывность аппроксимации, но не гарантирует непрерывности производных. Предлагаемый метод строит линейную интерполяцию в случае нулевой высоты сплайнов.

3.8.2 Эрмитовы C^1 сплайны

При наличии только значений функции (без производных), для построения эрмитовых сплайнов необходимо сначала аппроксимировать производные в узлах. Обычно это делается с помощью разделенных разностей:

$$u'(x_j) \approx \frac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1}))}{2h}, \quad u'(x_0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h}, \quad u'(x_n) \approx \frac{u(x_n) - u(x_{n-1}))}{h}$$

После определения приближенных значений производных в узлах, эрмитов сплайн строится аналогично случаю с известными производными:

$$H(x) = u(x_j)H_{j,0}(t) + u(x_{j+1})H_{j,1}(t) + h \cdot u'(x_j)H_{j,2}(t) + h \cdot u'(x_{j+1})H_{j,3}(t),$$

где $t = \frac{x-x_j}{h}$ и $H_{j,i}(t)$ - базисные кубические многочлены:

$$H_{j,0}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_{j,1}(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_{j,2}(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_{j,3}(t) = t^3 - t^2$$

Интерполяция с помощью эрмитовых сплайнов обеспечивает непрерывность аппроксимации и ее первой производной. Предлагаемый метод интерполяции строит с помощью эрмитовых сплайнов в случае первой высоты сплайнов.

3.8.3 Кубические C^2 сплайны

С повышением степени многочленов, естественным становится условие нуля вторых производных в узлах сетки. Построение кубического сплайна сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.

3.8.4 Сравнение результатов

Для исследования возьмем задачу из второго примера с $\alpha = 1.5$. Каркас приближенного решения построим с помощью предложенного метода и нулевой высоты сплайнов на сетке с пятью узлами. Проведем интерполяцию при помощи всех методов и отобразим на графиках абсолютные значения ошибок относительно решения и производной решения.

Абсолютные ошибки относительно решения изображены на Рис. 10.

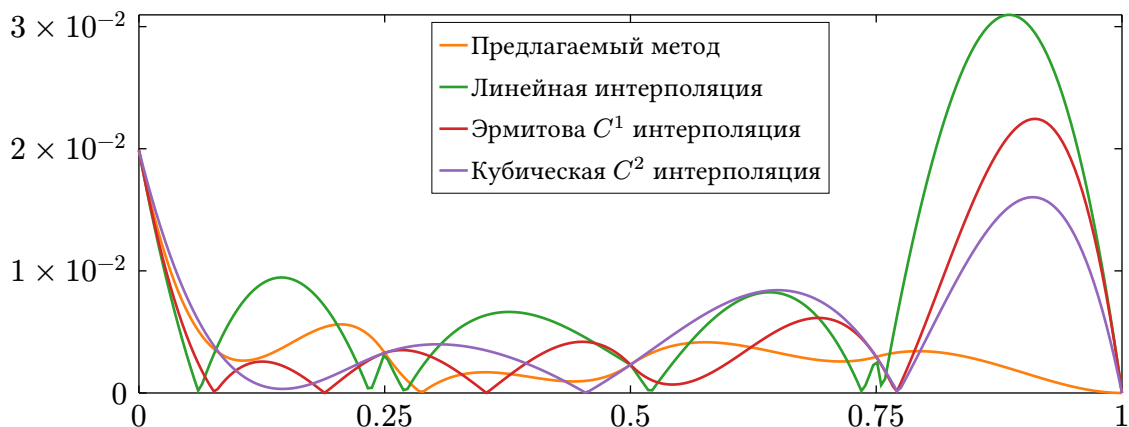


Рис. 10. График абсолютных ошибок относительно решения при разных методах

Основным преимуществом предлагаемого метода является легкое построение приближения производной решения, сравним с другими методами. На Рис. 11 приведен график абсолютных ошибок относительно производной решения.

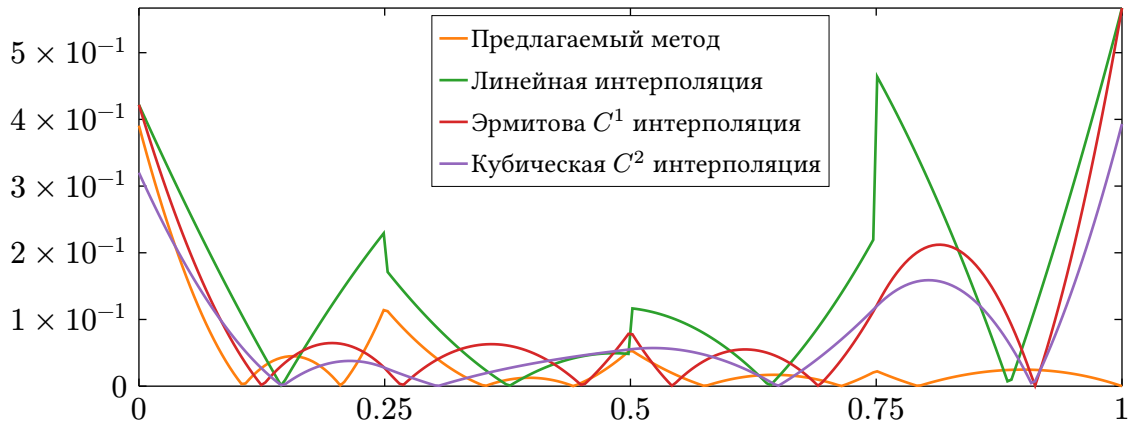


Рис. 11. График абсолютных ошибок относительно производной решения при разных методах

3.8.5 Выводы из сравнения

На основе проведенного сравнения различных методов интерполяции для решения вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка можно сделать следующие выводы:

1. **Графический анализ:** Графики абсолютных ошибок на Рис. 11 и Рис. 10 наглядно демонстрируют, что предлагаемый метод обеспечивает более равномерное распределение погрешности по всей области, в то время как другие методы дают значительные локальные всплески ошибок, особенно при приближении производной решения.
2. **Практическая значимость:** Существенное улучшение в аппроксимации производной решения делает предлагаемый метод особенно ценным для практических задач, где требуется не только знание самой функции, но и ее производных, например, в задачах моделирования физических процессов, где производная часто имеет ясный физический смысл (скорость, поток и т.д.).

4 Заключение

1. В ходе работы был исследован метод аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, основанный на вариационно-сеточных методах. В процессе реализации выделены основные этапы аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0, 1)$, с использованием линейных базисных функций, что позволило обеспечить сходимость решений в энергетической норме.
2. Показано, что использование предложенной координатной системы позволяет с высокой точностью аппроксимировать решения в рамках заданной задачи. Анализ порядка аппроксимации показал, что для линейной интерполяции ошибки аппроксимации оцениваются квадратично. Верификация полученных численных решений на тестовых примерах с известными аналитическими решениями подтвердила корректность методов и их применимость к реальным задачам.
3. Сравнительный анализ с другими методами интерполяции (линейная интерполяция, эрмитовы C^1 сплайны, кубические C^2 сплайны) продемонстрировал суще-

ственное преимущество предлагаемого подхода как по точности аппроксимации самого решения, так и особенно его производной.

4. Важной новацией является разработка программного пакета на языке Python, интегрированного с популярными научными библиотеками NumPy, SciPy и SymPy. Это обеспечивает простоту практического применения метода к широкому кругу задач исследуемой формы, а также возможность его использования в образовательных и исследовательских целях. Совместимость с экосистемой научных вычислений Python существенно расширяет аудиторию потенциальных пользователей метода.

5 Список литературы

1. L B. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. 2022. с. 203.
2. F B. Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations // Journal of Differential Equations. 1990. т. 83. cc. 179–206.
3. P G. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface // J. Fluid Mech. 2023. т. 84. cc. 125–143.
4. H B. Existence and Bifurcation of Solutions for an Elliptic Degenerate Problem // Journal of differential equations. 2024. т. 134. cc. 1–25.
5. F B. A class of degenerate elliptic equations and a Dido's problem with respect to a measure // J. Math. Anal. Appl. 2022. т. 348. cc. 356–365.
6. H T. Mixed finite element methods for degenerate parabolic equations // Mathematics of Computation. 2021. т. 90, № 329. с. 1017.
7. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т. 4, № 3. cc. 1063–1095.
8. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений // Прикладная математика & Физика. 2016. т. 44, № 20(241). cc. 5–22.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2023. т. 55, № 3. cc. 197–206.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2024. т. 56, № 2. cc. 87–96.
11. H D. Parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients: The Dirichlet problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2021. т. 374. cc. 6611–6647.
12. C S. A critically degenerate elliptic Dirichlet problem, spectral theory and bifurcation // Nonlinear Analysis. 2020. т. 190.
13. N M. On the solution of Integral-Differential Equations via the Rayleigh-Ritz Finite Elements Method: Stationary Transport Equation // WSEAS Transactions on Mathematics. 2021. т. 4, № 2. cc. 41–49.
14. S M. Variational-difference approximation // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 2024. т. 48. cc. 32–188.
15. S M. Some Theorems on the Stability of Numerical Processes // Atti d. Lincei. Classe fis., mat. e nat. 2024. cc. 1–32.
16. P D. A posteriori error estimation for degenerate PDEs // IMA Journal of Numerical Analysis. 2022. т. 42, № 3. с. 1892.

17. J W. Finite element analysis of degenerate boundary value problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. c. 200.
18. F K. On degeneracy of functional-differential equations // Journal of differential equations. 2021. т. 22. cc. 250–267.
19. K I. Degenerate Parabolic Differential Equations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 2021. т. 9. cc. 493–504.
20. S K. Trigonometric splines for singular perturbation problems // Journal of Scientific Computing. 2023. т. 94, № 2. c. 45.
21. M S. et al. Flow of Newtonian Incompressible Fluids in Square Media: Isogeometric vs. Standard Finite Element Method // Mathematics. 2023. т. 11.
22. L E. Degenerate elliptic equations with variable coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 2023. т. 48, № 5. c. 723.
23. K A. Variational approaches to degenerate differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2022. c. 300.
24. D Č. Wavelet Method for Sensitivity Analysis of European Options under Merton Jump-Diffusion Model // AIP Conference Proceedings. 2022. c. 300.
25. P A. Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Advances in Calculus of Variations. 2024. т. 17, № 3. cc. 805–829.
26. V M. Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. c. 100.
27. L C. Spline-based solutions for boundary value problems with degeneracy // Applied Mathematics and Computation. 2021. c. 300.
28. R T. High-order approximation methods for singular differential equations // Numerische Mathematik. 2023. т. 154, № 3. c. 521.
29. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. "Наука", 1970.
30. Курант П. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1942. т. 49, № 1.
31. Михлин С.Г. Численные методы и автоматическое программирование // Записки научных семинаров ПОМИ. 1974. т. 48. cc. 32–188.
32. Gusman Y., Oganessian L. Inequalities for the convergence of finite difference schemes for degenerate elliptic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. т. 5, № 2. cc. 256–267.
33. Burova I., Alcybeev G. A Boundary Value Problem with Strong Degeneracy and Local Splines // WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS. 2024. т. 23. cc. 982–991.
34. A C. Existence results for a class of nonlinear degenerate Navier problems // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. т. 18, № 1. cc. 647–667.

35. O N. Numerical simulation of a degenerate parabolic problem occurring in the spatial diffusion of biological population // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. т. 151.
36. S M. Approximation on the Cubic Lattice. 2021. c. 203.
37. F L. A class of fully nonlinear elliptic equations with singularity at the boundary // J. Geom. Anal. 2023. т. 8, № 4. cc. 583–598.
38. Y Z. Numerical methods for strongly degenerate parabolic equations // Journal of Computational Physics. 2022. c. 209.
39. R J. Adaptive mesh refinement for degenerate elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2023. т. 61, № 2. c. 789.

6 Приложения

6.1 Репозиторий с кодом пакета

https://github.com/MFattakhov/local_splines_degenerate_equations