Санкт-Петербургский государственный университет

ФАТТАХОВ Марат Русланович

Выпускная квалификационная работа

Решение дифференциальных уравнений с сильным вырождением

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Основная образовательная программа
СВ.5001.2021 «Математика и компьютерные науки»

Научный руководитель:
профессор кафедры вычислительной математики,
д.ф.-м.н. Бурова И. Г.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Введение

Вырожденные дифференциальные уравнения второго порядка представляют собой важный объект исследований как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Они возникают в различных областях науки и техники, таких как газовая динамика [1], моделирование распространения вязких жидкостей [2], [3], квантовая космология [4] и теория вероятностей [5]. Особенность этих уравнений заключается в обращении в ноль коэффициента при старшей производной в некоторых точках области определения, что влечёт за собой серьёзные трудности при их аналитическом и численном решении [6].

Исследования, посвящённые этим уравнениям, охватывают широкий круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и асимптотическим поведением решений, а также с особенностями задач Коши и краевых задач. В частности, в работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко и Д. И. Чудовой [7] рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентом при старшей производной, обращающимся в нуль. В ней доказываются теоремы о существовании и единственности решений краевых задач, уделяется внимание бисингулярным задачам, при которых коэффициенты обращаются в нуль на множестве положительной меры. Такие задачи требуют применения специальных методов, поскольку стандартные подходы могут оказаться неприменимыми.

Дополнительный вклад в изучение асимптотического поведения решений внесли В. П. Архипов и А. В. Глушак. В статье «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [8] предложены методы нахождения собственных значений и оценки резольвенты задачи Дирихле. Эти методы позволяют исследовать решения в комплексной плоскости и по параметру, что делает их универсальными для анализа широкого класса задач. Подход к построению степенных асимптотик в окрестности точки вырождения разработан в работе «Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка» [9], где строятся точные представления решений с использованием специальных аппроксимаций.

Особое внимание уделено задаче Коши [10], в которой начальные условия задаются в точке вырождения. В. Архипов и А. Глушак предложили методы построения первых асимптотик решений и показали, что форма начальных условий существенно зависит от знака коэффициента при первой производной, что оказывает влияние на вид решений и методику их построения.

Современные исследования также сосредоточены на численных методах решения вырожденных задач. Актуальными являются подходы, основанные на вариационных принципах, разностных схемах и сплайн-аппроксимациях [11], [12], [13]. Локальные сплайны, в частности, обеспечивают высокую точность аппроксимации как самого решения, так и его производных, особенно вблизи точки вырождения [14]. Среди них выделяются полиномиальные сплайны второго порядка и сплайны Эрмита первого уровня, позволяющие получать гладкие приближения, сохраняющие дифференциальные свойства точного решения [15].

Вариационная постановка задачи в подходящем весовом пространстве Соболева [16] обеспечивает корректную формулировку краевой задачи с сильным вырождением. При этом показатель степени α в коэффициенте $k(x) = x^{\alpha} p(x)$ лежит в интервале $[1, 2)$, что требует особого подхода к построению граничных условий и численных схем. Разработанный численный алгоритм сочетает сплайн-аппроксимацию с проекционными методами, что обеспечивает сходимость в энергетической норме и устойчивость решения. Эффективность предложенного метода подтверждена теоретическим анализом и численными экспериментами [17].

Множество результатов в области разработано в последнее время. В [18], [19] исследуются условия существования и единственности решений, а в [11] рассматривается введение весовых функций для постановки задач в пространствах Соболева. В работе [12] обсуждаются собственные значения для линеаризованных задач, а в [20] уточняется спектральная структура решений.

Методы, основанные на B-сплайнах и кусочно-линейных функциях, продемонстрировали свою эффективность [21], [13]. Эрмитовы сплайны [22] обеспечивают высокий порядок аппроксимации и позволяют приближать как само решение, так и его производные [23]. В [24] изучается нестационарное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным оператором, а в [25] предлагается метод локального улучшения аппроксимаций, полученных методом конечных элементов.

Особый интерес представляют случаи с периодическими коэффициентами или решениями, для которых применяются тригонометрические сплайны [26]. Вариационные методы оказываются особенно полезны в задачах с неоднородной структурой или переменными коэффициентами. В [13] описан алгоритм адаптивной сетки, позволяющий улучшить точность на участках с резкими изменениями решений [27].

Заключительно, предложенный в настоящей работе подход объединяет достоинства вариационного формулирования и сплайн-аппроксимации, обеспечивает высокую точность и устойчивость при решении краевых задач с сильным вырождением, а также демонстрирует широкую применимость в прикладных задачах, связанных с моделированием сложных физических процессов [28].

2 Цель работы

Разработать и исследовать методы аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, основное внимание уделяется:

1. Формализации аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0, 1)$, с использованием вариационно-сеточных методов.
2. Разработке и анализу координатных систем для одномерных задач, обеспечивающих сходимость аппроксимации в энергетической норме.

3. Оценке порядка аппроксимации, полученной с использованием линейной интерполяции, а также практическому применению методов к конкретным задачам.
4. Построению численных методов и их верификации на тестовых примерах с известными аналитическими решениями.

Целью является не только теоретический анализ разработанных методов, но и их практическое применение, что позволит подтвердить эффективность предложенных подходов.

3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

3.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered}
-\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=f(x),\quad 0<x<1,\quad f\in L_2(0,1),\\
q \text{ измерима, ограничена, неотрицательна на } [0,1]\\
\alpha=\mathrm{const}>0,\ p\in C^1[0,1],\ p(x)\geq p_0=\mathrm{const}>0\\
u\in \mathbb{W}_2^1(0,1)
\end{gathered}\tag{1}$$

3.2 Аппроксимация в пространстве $\mathbb{W}_2^1$

3.2.1 Основа вариацонно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$Au=f,\quad f\in H\tag{2}$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$\begin{gathered}
[u,v]_A:=(Au,v),\\
\|u\|_A^2:=[u,u]_A=(Au,u),\\
\mathcal{F}(u):=\frac{1}{2}[u,u]_A-(f,u)
\end{gathered}\tag{3}$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}'(u)h=[u,h]_A-(f,h)\\
\mathcal{F}'(u_0)=0\Leftrightarrow\forall h\in H\quad [u_0,h]_A=(f,h)\Leftrightarrow Au_0=f
\end{gathered}\tag{4}$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot,\cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n \in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$\begin{gathered}
u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \text{ где } \mathrm{Lin}\,\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} = H_n, \\
\left(\mathcal{F}\mid_{H_n}\right)'(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = 0,\ k = 1, ..., n \\
\frac{\partial}{\partial a_k}\mathcal{F}(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^{n} a_i (f, \varphi_i)\right] = \\
= \sum_{i=1}^{n} a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0,\ k = 1, ..., n
\end{gathered} \tag{5}$$

Приведенная схема называется методом Ритца.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i, которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{\left\{\varphi_{n,i}\right\}_{i=1}^{k_n}\right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$\forall u \in H\ \lim_{n\to\infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0, \tag{6}$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [29] показано, что если координатная система $\left\{\varphi_{n,i}\right\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (5) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [30] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n, которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

3.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [31] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{\varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right)\right\}_{j\in J_h, |q|=0,...,s-1}, \tag{7}$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s\left(\overline{\Omega}\right)$ в метрике $\mathring{\mathbb{W}}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта

$K \subset \Omega$ при $h \to 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m, такой что $\bigcup_{j \in J_h} \operatorname{supp} \varphi_{q,j,h} \supset \Omega \ \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j \in J_h} h^q u^{(q)}((j + \mathbb{1})h)\omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{8}$$

Рассмотрим одномерный случай, то есть $m = 1$ и частный пример $\Omega = (0, 1)$. Для данного случая в [31] подробно описаны рекурсивные формулы для построения функций ω_q. Но эти же функции можно получить рассмотрев более простую задачу – построение полиномиальной координатной системы.

3.4 Полиномиальные координатные системы

Будем использовать общепринятый сеточный метод аппроксимации. Начнем с отрезка $[0, 2]$ и кусочных функций на нем. Пусть

$$\omega_q = \begin{cases} \varphi_q(x) & , \ x \in [0,1] \\ \psi_q(x-1) & , \ x \in [1,2], \quad \psi_q, \varphi_q : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ полиномы}, \ q = 0, ..., s-1 \\ 0 & , \ x \notin [0,2] \end{cases}$$
$$\varphi_q(0) = 0, \ \psi_q(1) = 0, \ \varphi_q(1) = \psi_q(0), \quad q = 0, ..., s-1 \tag{9}$$

Теперь рассмотрим сдвиги функций ω_q:

$$\left\{\omega_{j,q} := \omega_q(x - j)\right\}_{j \in \mathbb{Z}, q = 0, \dots, s-1} \tag{10}$$

Носители этих функций – отрезки $[j, j + 2]$. Теперь построим приближение функции $u \in C^{s-1}([0, 2])$ в виде

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z} \cap [0,2]} \sum_{q=0}^{s-1} u^{(q)}(j)\omega_{j,q}(x), \quad x \in [0, 2] \tag{11}$$

Рассмотрим отрезок $[0, 1]$, тогда в формуле выше записан некий полином степени $s - 1$ с коэффициентами $u^{(q)}(j)$. Чтобы найти функции φ_q, ψ_q необходимо предположить, что для $u = 1, x, ..., x^r$ выполняется равенство $\tilde{u} = u$. Это условие дает систему линейных уравнений для коэффициентов φ_q, ψ_q. Понятно, что стоит рассматривать $r \geq s - 1$, так как иначе последние производные будут равны нулю и функцию ω_{s-1} мы не найдем. Начиная с некоторого r эта система будет иметь единственное решение, которое и будет определять функции ω_q.

Приведу решения для $s = 1, 2, 3$:

1. $s = 1$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} x & , \ x \in [0,1] \\ 2 - x & , \ x \in [1,2] \\ 0 & , \ x \notin [0,2] \end{cases} \tag{12}$$

2. $s = 2$

$$
\begin{aligned}
\omega_0(x) &= \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 & , \quad x \in [0,1] \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases} \\
\omega_1(x) &= \begin{cases} x^3 - x^2 & , \quad x \in [0,1] \\ x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

3. $s = 3$

$$
\begin{aligned}
\omega_0(x) &= \begin{cases} 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 & , \quad x \in [0,1] \\ -6x^5 + 45x^4 - 130x^3 + 180^2 - 120x + 32 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases} \\
\omega_1(x) &= \begin{cases} -3x^5 + 7x^4 - 4x^3 & , \quad x \in [0,1] \\ -3x^5 + 23x^4 - 68x^3 + 96x^2 - 64x + 16 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases} \\
\omega_2(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^3 & , \quad x \in [0,1] \\ -\frac{1}{2}x^5 + 4x^4 - \frac{25}{2}x^3 + 19x^2 - 14x + 4 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Далее, следуя теории из [31], добавляем шаг сетки, строим систему $\left\{\varphi_{q,j,h}\right\}_{j\in\mathbb{Z},q=0,\ldots,s-1}$ и аппроксимируем функцию $u \in C^{s-1}(0,1)$.

3.5 Вид системы при различных уровнях s

В (5) для нахождения коэффициентов a_i приводится явный вид системы линейных уравнений. В случае $s > 0$ систему можно привести к простому виду матричного уравнения. Рассмотрим например $s = 1$.

$$
\begin{gathered}
u_n = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j,0}\omega_{j,0} + a_{j,1}\omega_{j,1}\right) \\
\frac{\partial}{\partial a_{j,0}} \mathcal{F}(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_{j,1}} \mathcal{F}(u_n) = 0, \ \ j = 1, \ldots, n
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Можно выделить 4 вида взаимодействия между базисными функциями $\omega_{j,q}$:

$$
\begin{aligned}
M_{0,0} &= \left(\left[\omega_{j,0}, \omega_{i,0}\right]_A\right)_{i,j} \qquad & M_{0,1} &= \left(\left[\omega_{j,0}, \omega_{i,1}\right]_A\right)_{i,j} \\
M_{1,0} &= \left(\left[\omega_{j,1}, \omega_{i,0}\right]_A\right)_{i,j} \qquad & M_{1,1} &= \left(\left[\omega_{j,1}, \omega_{i,1}\right]_A\right)_{i,j}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

А значит представить всю систему в виде матричного уравнения

$$
\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \omega_0) \\ (f, \omega_1) \end{pmatrix}
\tag{17}
$$

Так как носители функций $\omega_{j,q}$ – отрезки $[j, j+2]$, то матрицы $M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}$ будут иметь трехдиагональный вид, что упрощает решение.

Аналогично для остальных случаев $s > 1$ систему можно свести к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,s-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{s-1,0} & M_{s-1,1} & \dots & M_{s-1,s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \omega_0) \\ (f, \omega_1) \\ \dots \\ (f, \omega_{s-1}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

3.6 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 1, \Omega = (0, 1)$. Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{\varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right)\right\}_{j \in J_h} \tag{19}$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h)\omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \tag{20}$$

Для удобства введем обозначение $x_j := jh$. Тогда на промежутке $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x), \tag{21}$$

но на каждом промежутке $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j.

Для интерполяционного многочлена есть оценка оценка остатка:

$$\begin{gathered} x \in \left[x_j, x_{j+1}\right] \Rightarrow \\ |u(x) - u_h(x)| \leq \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} |u''(x)| \cdot \frac{1}{2!} \left|(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| \end{gathered} \tag{22}$$

Несложно проверить, что $\left|(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| \leq \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C(0,1)} \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{x \in (0,1)} |u''(x)| \tag{23}$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

3.7 Погрешность приближения

В предыдущем пункте была получена оценка погрешности приближения u линейной интерполяцией. В [32] получена важная для нас оценка:

$$\left\|u - u^h\right\|_A \le \|u - u_h\|_A, \tag{24}$$

где u^h – приближенное решение, получаемое при помощи метода Ритца, а u_h – вписанная в график u ломаная, с узлами в точках x_j. Таким образом, при наличии оценки на $\|u - u_h\|_A$, можно оценить погрешность приближения u^h к u.

3.7.1 Случай слабого вырождения

Случай $0 < \alpha < 1$ называется случаем слабого вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \le C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}. \tag{25}$$

И данная оценка точна в том смысле, что существует функция u, для которой $\|u - u_h\|_A = C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}$.

3.7.2 Случай сильного вырождения

Случай $1 \le \alpha < 2$ называется случаем сильного вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \le C\|f\|_{L_2} h^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{26}$$

И данная оценка почти точна в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция u, для которой $\|u - u_h\|_A \ge C h^{1-\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}$.

3.7.2.1 Улучшение оценки

На самом деле (см. [31]), при $f \in L_r(0,1),\ 2 < r \le \infty$, можно получить лучшую оценку в случае $1 \le \alpha < 2$:

$$\|u - u_h\|_A \le C\|f\|_{L_r} h^{\frac{3-\alpha}{2}-\frac{1}{r}}, \tag{27}$$

где при $r = \infty$ следует считать $\frac{1}{r} = 0$.

3.8 Применение к конкретным задачам

3.8.1 Аппроксимация сплайнами нулевого уровня

В качестве первого примера рассмотрим задачу

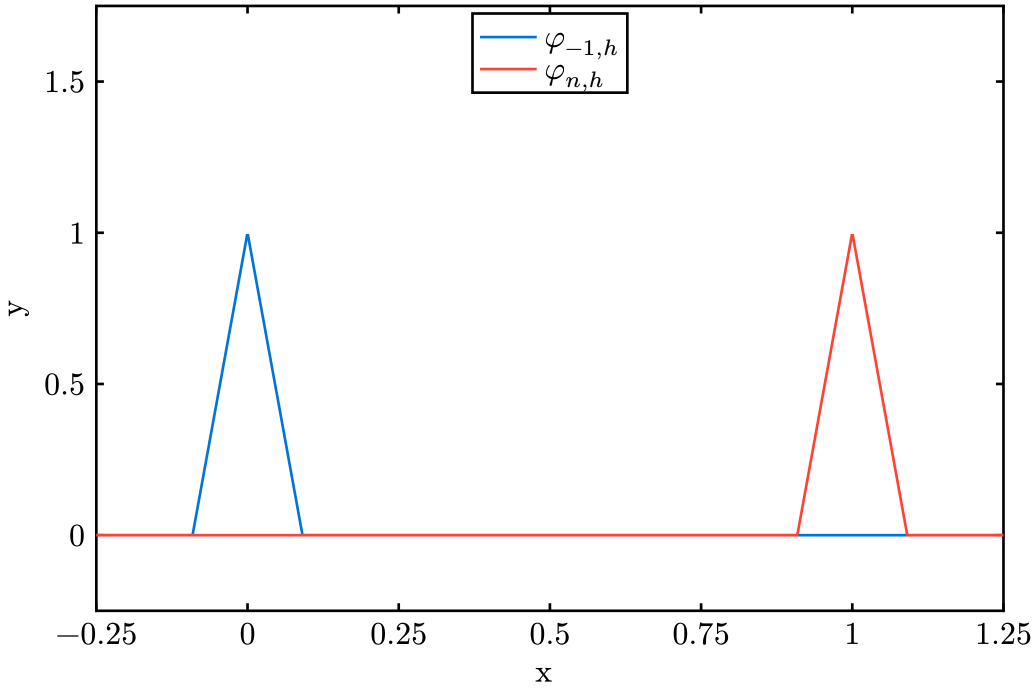
$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u = \frac{3^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha}, \\ 0 < x < 1 \quad 1 \le \alpha \le 2 \end{gathered} \tag{28}$$

Известно, что в данном случае нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha}, \tag{29}$$

то есть это точное решение задачи.

Возьмем натуральное n и по нему построим $h = 1/(n+1)$, тогда в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$ первая и последняя функции выглядят следующим образом:



Будем строить аппроксимирующую функцию вида $u_h = \sum_{k=-1}^{n} a_k \varphi_{k,h}$, заметим, что так как $u(1) = 0$, то коэффициент при последнем члене $a_n = 0$.

По предложенному в пункте 3.2 методу строим аппроксимирующую путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_k \left[\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right]_A = \left(f, \varphi_{j,h}\right), \quad j = -1, ..., n \tag{30}$$

Тут

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u,$$

$$\begin{gathered}\left[\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right]_A = \left(A\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}\right) = \\ = \int_0^1 \left\{\left(-\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right) + \varphi_{k,h}\right) \cdot \varphi_{j,h}\right\} dx = \\ = \int_0^1 \left\{x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\left(\frac{d}{dx}\varphi_{j,h}\right) + \varphi_{k,h}\varphi_{j,h}\right\} dx - x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\varphi_{j,h}\Big|_0^1\end{gathered} \tag{31}$$

Видно, что подстановка $x^\alpha\left(\frac{d}{dx}\varphi_{k,h}\right)\varphi_{j,h}\big|_0^1$ равна нулю в случае, если хотя бы один из k или j не равен n. Так как $k = -1, ..., n-1$, то подстановка всегда равна 0.
Произведение в правой части – классическое скалярное произведение функций

$$\left(f, \varphi_{j,h}\right) = \int_0^1 f(x)\varphi_{j,h}(x) \tag{32}$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$	$\boldsymbol{h = 0.0001}$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	5.09e-3
0.1	1.57e-5	1.57e-7	5.33e-3
0.2	1.11e-5	1.11e-7	4.92e-3
0.3	8.53e-6	8.53e-8	4.36e-3
0.4	6.72e-6	6.72e-8	3.74e-3
0.5	5.29e-6	5.29e-8	3.09e-3
0.6	4.06e-6	4.06e-8	2.43e-3
0.7	2.96e-6	2.96e-8	1.78e-3
0.8	1.94e-6	1.94e-8	1.15e-3
0.9	9.55e-7	9.55e-9	5.55e-4

Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

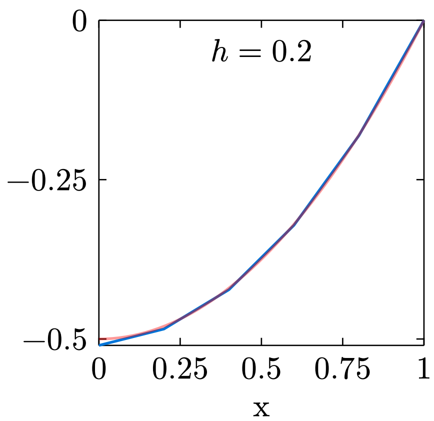
	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$
0.0	2.34e-4	8.26e-6
0.1	1.79e-5	1.76e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7
0.3	7.18e-6	7.12e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8
0.8	1.26e-6	1.25e-8
0.9	5.98e-7	5.94e-9

Таблица 2. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$

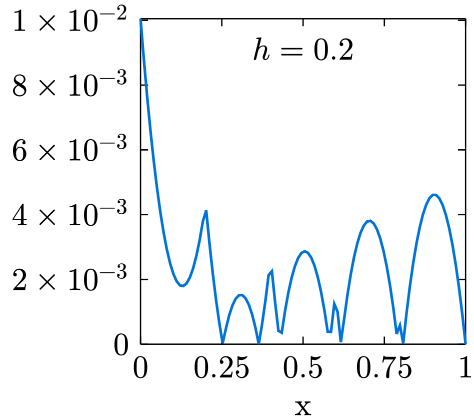
	$\boldsymbol{h = 0.01}$	$\boldsymbol{h = 0.001}$
0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	2.65e-7	2.62e-9

Таблица 3. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.8$

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей для $\alpha = 1$:

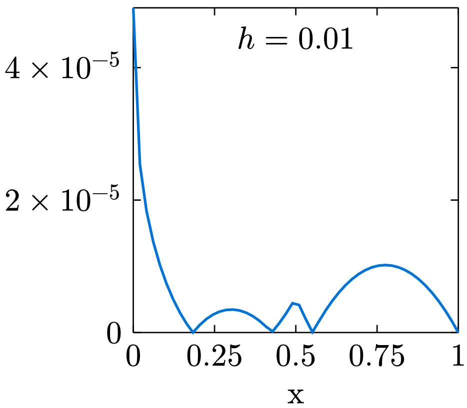


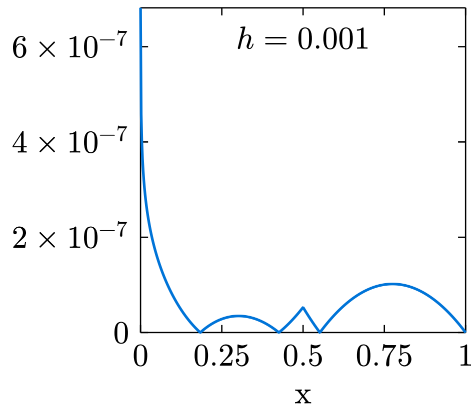
Гр. 1. Приближенное решение



Гр. 2. Абсолютная погрешность

И абсолютные погрешности при разных h:





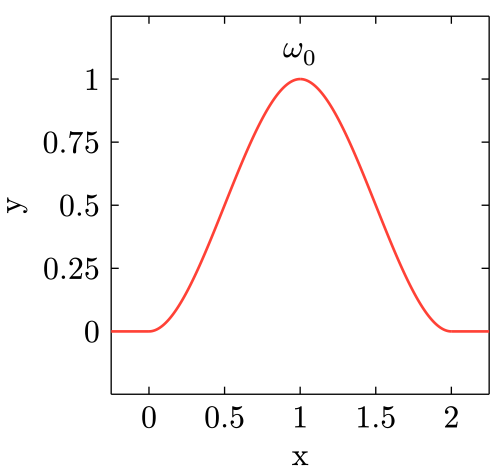
3.8.2 Аппроксимация сплайнами первого уровня

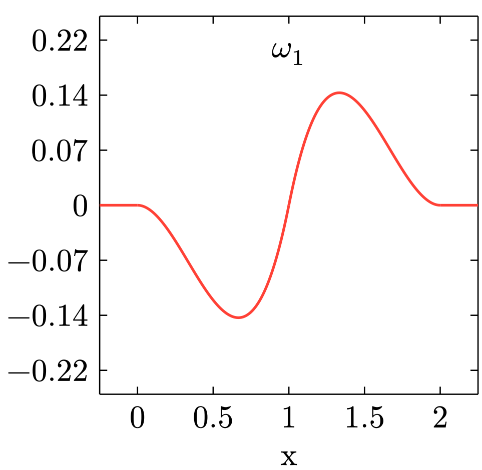
В качестве второго примера рассмотрим задачу

$$
\begin{gathered}
-\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{du}{dx}\right) + u = 3(x-1)x^{\alpha-1}((\alpha+2)x-\alpha) - (x-1)^3, \\
0 < x < 1, \quad 1 \le \alpha < 2, \quad u(1) = u'(1) = 0
\end{gathered}
\tag{33}
$$

с аналитическим решением $u(x) = (1-x)^3$.

Построим базисные функции ω_0, ω_1:





В данном случае построение аппроксимирующего решения является совмещением двух этапов:

1. аппроксимируем значения функции-решения и значения ее производной в точках сетки $\{x_j\}_{j=0}^{n-1}$
2. вписываем базисные функции в полученый каркас приближенного решения

$$u_h = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{u}(x_j)\omega_{j,0} + h \cdot \tilde{u}'(x_j)\omega_{j,1} \tag{34}$$

Формулы подсчета энергетического произведения остаются теми же, что и в случае нулевого уровня.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

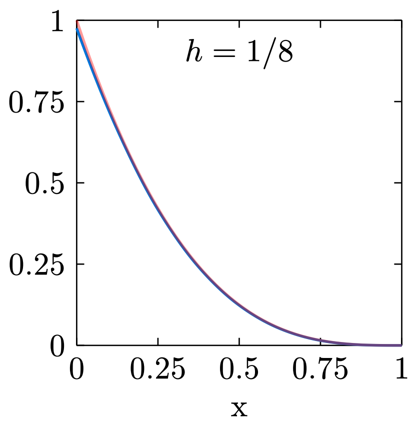
	$h = 0.01$	$h = 0.002$
0.0	1.48e-4	7.53e-6
0.1	4.68e-5	1.87e-6
0.2	3.20e-5	1.28e-6
0.3	2.35e-5	9.41e-7
0.4	1.76e-5	7.03e-7
0.5	1.30e-5	5.20e-7
0.6	9.32e-6	3.73e-7
0.7	6.29e-6	2.52e-7
0.8	3.77e-6	1.51e-7
0.9	1.69e-6	6.78e-8

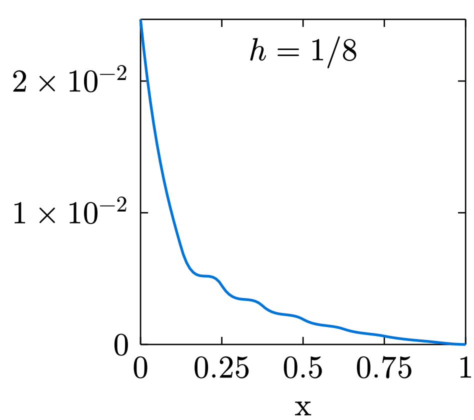
Таблица 4. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

	$h = 0.01$	$h = 0.002$
0.0	1.49e-3	3.15e-4
0.1	4.33e-5	1.40e-6
0.2	2.86e-5	9.85e-7
0.3	2.06e-5	7.29e-7
0.4	1.49e-5	5.34e-7
0.5	1.06e-5	3.81e-7
0.6	7.22e-6	2.59e-7
0.7	4.57e-6	1.64e-7
0.8	2.54e-6	9.00e-8
0.9	1.04e-6	3.61e-8

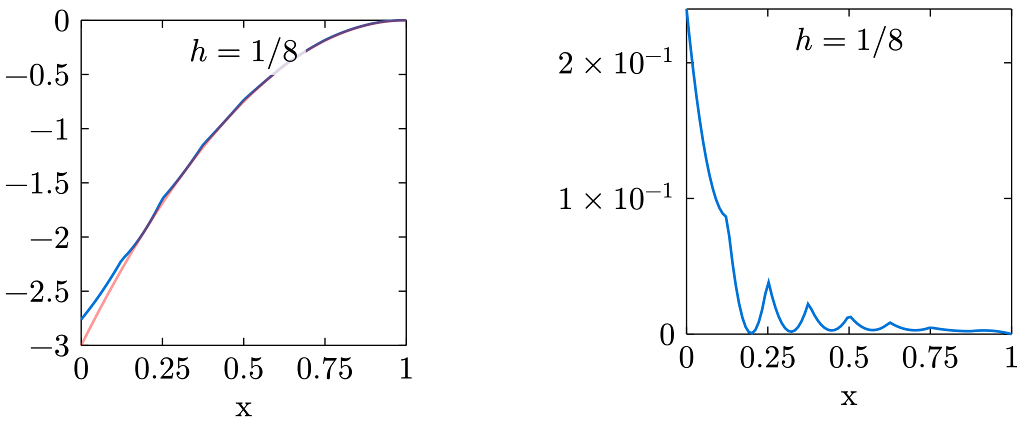
Таблица 5. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей для $\alpha = 1.5$:





Гр. 5. Приближенное решение и абсолютная погрешность



Гр. 6. Приближенная производная решения и абсолютная погрешность

4 Заключение

В ходе работы был исследован метод аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, основанный на вариационно-сеточных методах. В процессе реализации выделены основные этапы аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $\mathbb{W}_2^1(0,1)$, с использованием линейных базисных функций, что позволило обеспечить сходимость решений в энергетической норме.

Показано, что использование предложенной координатной системы позволяет с высокой точностью аппроксимировать решения в рамках заданной задачи. Анализ порядка аппроксимации показал, что для линейной интерполяции ошибки аппроксимации оцениваются квадратично. Верификация полученных численных решений на тестовых примерах с известными аналитическими решениями подтвердила корректность методов и их применимость к реальным задачам.

Практическое применение метода было продемонстрировано на конкретной задаче с аналитическим решением, где была построена аппроксимирующая функция, что позволило провести численный эксперимент и получить точные результаты. Таким образом, результаты работы подтверждают эффективность предложенной аппроксимации для решения краевых задач вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, а также подчеркивают важность выбора правильной координатной системы для достижения необходимой точности.

Выделим особо перспективные приложения данного метода:

1. **Решение задач с вырождением в краевых точках**: предложенный метод эффективно работает при сильном вырождении коэффициента при старшей производной, что позволяет решать задачи, моделирующие, например, поведение жидкостей с нулевой вязкостью на границе или проблемы теплопереноса в средах с резко неоднородной теплопроводностью.

2. **Моделирование физических процессов в ограниченных геометриях**: за счёт локальности и высокой точности аппроксимации производных метод может применяться при численном моделировании задач в цилиндрических или

сферических координатах, где коэффициенты уравнения вырождаются на оси или границе сферы.

3. **Численный анализ спектральных задач**: за счёт малой погрешности в аппроксимации производной возможно более точное приближение собственных значений и собственных функций вырожденных операторов.
4. **Адаптивные схемы на неравномерных сетках**: локальные свойства метода делают его перспективным для использования в адаптивных методах с локальным сгущением сетки в окрестности точки вырождения без ухудшения стабильности аппроксимации.
5. **Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденными ядрами**: конструкция метода допускает его расширение на классы задач, где вырождение затрагивает не только дифференциальную, но и интегральную часть оператора.
6. **Разработка библиотек численного решения**, в частности внедрение метода в широкоиспользуемую библиотеку `scipy`.

5 Список литературы

1. L B. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. 2022. c. 203.
2. F B. Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations // Journal of Differential Equations. 1990. т. 83. cc. 179–206.
3. P G. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface // J. Fluid Mech. 2023. т. 84. cc. 125–143.
4. H B. Existence and Bifurcation of Solutions for an Elliptic Degenerate Problem // Journal of differential equations. 2024. т. 134. cc. 1–25.
5. F B. A class of degenerate elliptic equations and a Dido's problem with respect to a measure // J. Math. Anal. Appl. 2022. т. 348. cc. 356–365.
6. H T. Mixed finite element methods for degenerate parabolic equations // Mathematics of Computation. 2021. т. 90, № 329. c. 1017.
7. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т. 4, № 3. cc. 1063–1095.
8. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений // Прикладная математика & Физика. 2016. т. 44, № 20(241). cc. 5–22.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2023. т. 55, № 3. cc. 197–206.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2024. т. 56, № 2. cc. 87–96.
11. H D. Parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients: The Dirichlet problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2021. т. 374. cc. 6611–6647.
12. C S. A critically degenerate elliptic Dirichlet problem, spectral theory and bifurcation // Nonlinear Analysis. 2020. т. 190.
13. N M. On the solution of Integral-Differential Equations via the Rayleigh-Ritz Finite Elements Method: Stationary Transport Equation // WSEAS Transactions on Mathematics. 2021. т. 4, № 2. cc. 41–49.
14. S M. Variational-difference approximation // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 2024. т. 48. cc. 32–188.
15. S M. Some Theorems on the Stability of Numerical Processes // Atti d. Lincei. Classe fis., mat. e nat. 2024. cc. 1–32.
16. P D. A posteriori error estimation for degenerate PDEs // IMA Journal of Numerical Analysis. 2022. т. 42, № 3. c. 1892.

17. J W. Finite element analysis of degenerate boundary value problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. с. 200.

18. F K. On degeneracy of functional-differential equations // Journal of differential equations. 2021. т. 22. сс. 250–267.

19. K I. Degenerate Parabolic Differential Equations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 2021. т. 9. сс. 493–504.

20. S K. Trigonometric splines for singular perturbation problems // Journal of Scientific Computing. 2023. т. 94, № 2. с. 45.

21. M S. et al. Flow of Newtonian Incompressible Fluids in Square Media: Isogeometric vs. Standard Finite Element Method // Mathematics. 2023. т. 11.

22. L E. Degenerate elliptic equations with variable coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 2023. т. 48, № 5. с. 723.

23. K A. Variational approaches to degenerate differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2022. с. 300.

24. D Č. Wavelet Method for Sensitivity Analysis of European Options under Merton Jump-Diffusion Model // AIP Conference Proceedings. 2022. с. 300.

25. P A. Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Advances in Calculus of Variations. 2024. т. 17, № 3. сс. 805–829.

26. V M. Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. с. 100.

27. L C. Spline-based solutions for boundary value problems with degeneracy // Applied Mathematics and Computation. 2021. с. 300.

28. R T. High-order approximation methods for singular differential equations // Numerische Mathematik. 2023. т. 154, № 3. с. 521.

29. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. "Наука", 1970.

30. Курант Р. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1942. т. 49, № 1.

31. Михлин С.Г. Численные методы и автоматическое программирование // Записки научных семинаров ПОМИ. 1974. т. 48. сс. 32–188.

32. Gusman Y., Oganesyan L. Inequalities for the convergence of finite difference schemes for degenerate elliptic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. т. 5, № 2. сс. 256–267.

33. Burova I., Alcybeev G. A Boundary Value Problem with Strong Degeneracy and Local Splines // WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS. 2024. т. 23. сс. 982–991.

34. A C. Existence results for a class of nonlinear degenerate Navier problems // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. т. 18, № 1. сс. 647–667.

35. O N. Numerical simulation of a degenerate parabolic problem occurring in the spatial diffusion of biological population // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. т. 151.
36. S M. Approximation on the Cubic Lattice. 2021. с. 203.
37. F L. A class of fully nonlinear elliptic equations with singularity at the boundary // J. Geom. Anal. 2023. т. 8, № 4. сс. 583–598.
38. Y Z. Numerical methods for strongly degenerate parabolic equations // Journal of Computational Physics. 2022. с. 209.
39. R J. Adaptive mesh refinement for degenerate elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2023. т. 61, № 2. с. 789.

6 Приложения

6.1 Код программы на языке Wolfram

```
alpha = 1; h = 0.2; n = 1/h - 1;

fc := Compile[{{x, _Real}},
  (x^(3-alpha) - 2(3-alpha)x - 1) / (3-alpha)
]; f[x_?NumericQ] := fc[x];

uexact := Compile[{{x, _Real}}, (x^(3-alpha) - 1) / (3-alpha)];

wc := Compile[{{x, _Real}}, Piecewise[{
  {x,   0<=x<1},
  {2-x, 1<=x<=2}
}, 0]]; w[x_?NumericQ] := wc[x];

phiCompiled = Table[
  With[{j = j},
    Compile[{{x, _Real}}, w[x/h - j]]
  ],
  {j, -1, n - 1}
];
phi = Table[
  With[{i = i},
  phiCompiled[[i]][#] &],
  {i, 1, Length[phiCompiled]}
];

phiD := Table[With[{j = j}, Piecewise[{
    {1/h, h * j <= # < h * (j+1)},
    {-1/h, h * (j+1) <= # <= h * (j+2)}
}, 0]&], {j, -1, n - 1}];

fj = ParallelTable[NIntegrate[
  f[x] * phi[[j+2]][x],
  {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
  WorkingPrecision -> 32, PrecisionGoal -> 8,
  MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8,
  Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0}
], {j, -1, n-1}];
t := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+2]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+2]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, -1, n-1}
];
```

```
tt := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+1]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+1]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, 0, n-1}
];

k := Length[t]; systemcoef = SparseArray[
  {
      Band[{1, 1}] -> t,
      Band[{2, 1}] -> tt,
      Band[{1, 2}] -> tt
  },
  {k, k}
];
a := LinearSolve[systemcoef, fj]; Print[a]
```