Санкт-Петербургский государственный университет

ФАТТАХОВ Марат Русланович

Отчет по педагогической практике

Дифференциальные уравнения с сильным вырождением и их значимость

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Основная образовательная программа СВ.5001.2021 «Математика и компьютерные науки»

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Цель работы

1. Провести анализ существующих методов решения вырожденных дифференциальных уравнений второго порядка и их значимость в различных областях науки и техники.
2. Провести анализ актуальности сферы применения вырожденных дифференциальных уравнений второго порядка.

2 Анализ

Вырожденные дифференциальные уравнения второго порядка представляют собой важный объект исследований как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Они возникают в различных областях науки и техники, таких как газовая динамика [1], моделирование распространения вязких жидкостей [2], [3], квантовая космология [4] и теория вероятностей [5]. Особенность этих уравнений заключается в обращении в ноль коэффициента при старшей производной в некоторых точках области определения, что влечёт за собой серьёзные трудности при их аналитическом и численном решении [6].

Исследования, посвящённые этим уравнениям, охватывают широкий круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и асимптотическим поведением решений, а также с особенностями задач Коши и краевых задач. В частности, в работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко и Д. И. Чудовой [7] рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентом при старшей производной, обращающимся в нуль. В ней доказываются теоремы о существовании и единственности решений краевых задач, уделяется внимание бисингулярным задачам, при которых коэффициенты обращаются в нуль на множестве положительной меры. Такие задачи требуют применения специальных методов, поскольку стандартные подходы могут оказаться неприменимыми.

Дополнительный вклад в изучение асимптотического поведения решений внесли В. П. Архипов и А. В. Глушак. В статье «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [8] предложены методы нахождения собственных значений и оценки резольвенты задачи Дирихле. Эти методы позволяют исследовать решения в комплексной плоскости и по параметру, что делает их универсальными для анализа широкого класса задач. Подход к построению степенных асимптотик в окрестности точки вырождения разработан в работе «Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка» [9], где строятся точные представления решений с использованием специальных аппроксимаций.

Особое внимание уделено задаче Коши [10], в которой начальные условия задаются в точке вырождения. В. Архипов и А. Глушак предложили методы построения первых асимптотик решений и показали, что форма начальных условий существенно зависит от знака коэффициента при первой производной, что оказывает влияние на вид решений и методику их построения.

Современные исследования также сосредоточены на численных методах решения вырожденных задач. Актуальными являются подходы, основанные на вариационных принципах, разностных схемах и сплайн-аппроксимациях [11], [12], [13]. Локальные сплайны, в частности, обеспечивают высокую точность аппроксимации как самого решения, так и его производных, особенно вблизи точки вырождения [14]. Среди них выделяются полиномиальные сплайны второго порядка и сплайны Эрмита первого уровня, позволяющие получать гладкие приближения, сохраняющие дифференциальные свойства точного решения [15].

Вариационная постановка задачи в подходящем весовом пространстве Соболева [16] обеспечивает корректную формулировку краевой задачи с сильным вырождением. При этом показатель степени α в коэффициенте $k(x) = x^{\alpha} p(x)$ лежит в интервале $[1, 2)$, что требует особого подхода к построению граничных условий и численных схем. Разработанный численный алгоритм сочетает сплайн-аппроксимацию с проекционными методами, что обеспечивает сходимость в энергетической норме и устойчивость решения. Эффективность предложенного метода подтверждена теоретическим анализом и численными экспериментами [17].

Дополнительные результаты приведены в обзоре литературы, где в [18], [19] исследуются условия существования и единственности решений, а в [11] рассматривается введение весовых функций для постановки задач в пространствах Соболева. В работе [12] обсуждаются собственные значения для линеаризованных задач, а в [20] уточняется спектральная структура решений.

Методы, основанные на B-сплайнах и кусочно-линейных функциях, продемонстрировали свою эффективность [21], [13]. Эрмитовы сплайны [22] обеспечивают высокий порядок аппроксимации и позволяют приближать как само решение, так и его производные [23]. В [24] изучается нестационарное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным оператором, а в [25] предлагается метод локального улучшения аппроксимаций, полученных методом конечных элементов.

Особый интерес представляют случаи с периодическими коэффициентами или решениями, для которых применяются тригонометрические сплайны [26]. Вариационные методы оказываются особенно полезны в задачах с неоднородной структурой или переменными коэффициентами. В [13] описан алгоритм адаптивной сетки, позволяющий улучшить точность на участках с резкими изменениями решений [27].

Заключительно, предложенный в настоящей работе подход объединяет достоинства вариационного формулирования и сплайн-аппроксимации, обеспечивает высокую точность и устойчивость при решении краевых задач с сильным вырождением, а также демонстрирует широкую применимость в прикладных задачах, связанных с моделированием сложных физических процессов [28].

3 Выводы

1. В данной работе были рассмотрены различные подходы к решению краевых задач с сильным вырождением. Были представлены методы, основанные на вариационных принципах, разностных схемах и сплайн-аппроксимациях. Также

была рассмотрены методы, основанные на B-сплайнах и кусочно-линейных функциях, а также методы, использующие тригонометрические сплайны.

2. Сфера вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка является важным и актуальным объектом изучения в математике и приложениях. Приложения находят применение в различных областях, включая физику, инженерию, экономику и другие.

4 Список литературы

1. L B. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. 2022. с. 203.
2. F B. Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations // Journal of Differential Equations. 1990. т. 83. сс. 179–206.
3. P G. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface // J. Fluid Mech. 2023. т. 84. сс. 125–143.
4. H B. Existence and Bifurcation of Solutions for an Elliptic Degenerate Problem // Journal of differential equations. 2024. т. 134. сс. 1–25.
5. F B. A class of degenerate elliptic equations and a Dido's problem with respect to a measure // J. Math. Anal. Appl. 2022. т. 348. сс. 356–365.
6. H T. Mixed finite element methods for degenerate parabolic equations // Mathematics of Computation. 2021. т. 90, № 329. с. 1017.
7. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т. 4, № 3. сс. 1063–1095.
8. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений // Прикладная математика & Физика. 2016. т. 44, № 20(241). сс. 5–22.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2023. т. 55, № 3. сс. 197–206.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2024. т. 56, № 2. сс. 87–96.
11. H D. Parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients: The Dirichlet problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2021. т. 374. сс. 6611–6647.
12. C S. A critically degenerate elliptic Dirichlet problem, spectral theory and bifurcation // Nonlinear Analysis. 2020. т. 190.
13. N M. On the solution of Integral-Differential Equations via the Rayleigh-Ritz Finite Elements Method: Stationary Transport Equation // WSEAS Transactions on Mathematics. 2021. т. 4, № 2. сс. 41–49.
14. S M. Variational-difference approximation // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 2024. т. 48. сс. 32–188.
15. S M. Some Theorems on the Stability of Numerical Processes // Atti d. Lincei. Classe fis., mat. e nat. 2024. сс. 1–32.
16. P D. A posteriori error estimation for degenerate PDEs // IMA Journal of Numerical Analysis. 2022. т. 42, № 3. с. 1892.

17. J W. Finite element analysis of degenerate boundary value problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. с. 200.
18. F K. On degeneracy of functional-differential equations // Journal of differential equations. 2021. т. 22. сс. 250–267.
19. K I. Degenerate Parabolic Differential Equations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 2021. т. 9. сс. 493–504.
20. S K. Trigonometric splines for singular perturbation problems // Journal of Scientific Computing. 2023. т. 94, № 2. с. 45.
21. M S. et al. Flow of Newtonian Incompressible Fluids in Square Media: Isogeometric vs. Standard Finite Element Method // Mathematics. 2023. т. 11.
22. L E. Degenerate elliptic equations with variable coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 2023. т. 48, № 5. с. 723.
23. K A. Variational approaches to degenerate differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2022. с. 300.
24. D Č. Wavelet Method for Sensitivity Analysis of European Options under Merton Jump-Diffusion Model // AIP Conference Proceedings. 2022. с. 300.
25. P A. Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Advances in Calculus of Variations. 2024. т. 17, № 3. сс. 805–829.
26. V M. Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. с. 100.
27. L C. Spline-based solutions for boundary value problems with degeneracy // Applied Mathematics and Computation. 2021. с. 300.
28. R T. High-order approximation methods for singular differential equations // Numerische Mathematik. 2023. т. 154, № 3. с. 521.
29. Михлин С.Г. Численные методы и автоматическое программирование // Записки научных семинаров ПОМИ. 1974. т. 48. сс. 32–188.
30. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. "Наука", 1970.
31. Курант Р. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1942. т. 49, № 1.
32. Gusman Y., Oganesyan L. Inequalities for the convergence of finite difference schemes for degenerate elliptic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. т. 5, № 2. сс. 256–267.
33. Burova I., Alcybeev G. A Boundary Value Problem with Strong Degeneracy and Local Splines // WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS. 2024. т. 23. сс. 982–991.
34. A C. Existence results for a class of nonlinear degenerate Navier problems // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. т. 18, № 1. сс. 647–667.

35. O N. Numerical simulation of a degenerate parabolic problem occurring in the spatial diffusion of biological population // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. т. 151.
36. S M. Approximation on the Cubic Lattice. 2021. с. 203.
37. F L. A class of fully nonlinear elliptic equations with singularity at the boundary // J. Geom. Anal. 2023. т. 8, № 4. сс. 583–598.
38. Y Z. Numerical methods for strongly degenerate parabolic equations // Journal of Computational Physics. 2022. с. 209.
39. R J. Adaptive mesh refinement for degenerate elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2023. т. 61, № 2. с. 789.

5 Приложения

5.1 Код программы на языке Wolfram

```
alpha = 1; h = 0.2; n = 1/h - 1;

fc := Compile[{{x, _Real}},
  (x^(3-alpha) - 2(3-alpha)x - 1) / (3-alpha)
]; f[x_?NumericQ] := fc[x];

uexact := Compile[{{x, _Real}}, (x^(3-alpha) - 1) / (3-alpha)];

wc := Compile[{{x, _Real}}, Piecewise[{
  {x,   0<=x<1},
  {2-x, 1<=x<=2}
}, 0]]; w[x_?NumericQ] := wc[x];

phiCompiled = Table[
  With[{j = j},
    Compile[{{x, _Real}}, w[x/h - j]]
  ],
  {j, -1, n - 1}
];
phi = Table[
  With[{i = i},
  phiCompiled[[i]][#] &],
  {i, 1, Length[phiCompiled]}
];

phiD := Table[With[{j = j}, Piecewise[{
    {1/h, h * j <= # < h * (j+1)},
    {-1/h, h * (j+1) <= # <= h * (j+2)}
}, 0]&], {j, -1, n - 1}];

fj = ParallelTable[NIntegrate[
  f[x] * phi[[j+2]][x],
  {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
  WorkingPrecision -> 32, PrecisionGoal -> 8,
  MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8,
  Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0}
], {j, -1, n-1}];
t := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+2]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+2]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, -1, n-1}
];
```

```
tt := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+1]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+1]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
        MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, 0, n-1}
];

k := Length[t]; systemcoef = SparseArray[
  {
      Band[{1, 1}] -> t,
      Band[{2, 1}] -> tt,
      Band[{1, 2}] -> tt
  },
  {k, k}
];
a := LinearSolve[systemcoef, fj]; Print[a]
```