

Санкт-Петербургский государственный университет

ФАТТАХОВ Марат Русланович

Выпускная квалификационная работа

**Решение дифференциальных уравнений с сильным
вырождением**

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Основная образовательная программа СВ.5001.2021 «Математика и
компьютерные науки»

Научный руководитель:
профессор кафедры вычислительной математики,
д.ф.-м.н. Бурова И. Г.

Содержание

1 Введение	3
2 Цель работы	4
3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка	5
3.1 Вид уравнения	5
3.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1	5
3.2.1 Основа вариационно-сеточного метода	5
3.3 Одномерный случай	6
3.4 Полиномиальные координатные системы	7
3.5 Порядок аппроксимации	8
3.6 Погрешность приближения	9
3.6.1 Случай слабого вырождения	9
3.6.2 Случай сильного вырождения	9
3.7 Применение к конкретной задаче	9
4 Заключение	13
5 Список литературы	14
6 Приложения	17
6.1 Код программы на языке Wolfram	17

1 Введение

Вырожденные дифференциальные уравнения второго порядка представляют собой важный объект исследований как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Они возникают в различных областях науки и техники, таких как газовая динамика [1], моделирование распространения вязких жидкостей [2], [3], квантовая космология [4] и теория вероятностей [5]. Особенность этих уравнений заключается в обращении в ноль коэффициента при старшей производной в некоторых точках области определения, что влечёт за собой серьёзные трудности при их аналитическом и численном решении [6].

Исследования, посвящённые этим уравнениям, охватывают широкий круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и асимптотическим поведением решений, а также с особенностями задач Коши и краевых задач. В частности, в работе Н. Х. Розова, В. Г. Сушко и Д. И. Чудовой [7] рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентом при старшей производной, обращающимся в нуль. В ней доказываются теоремы о существовании и единственности решений краевых задач, уделяется внимание бисингулярным задачам, при которых коэффициенты обращаются в нуль на множестве положительной меры. Такие задачи требуют применения специальных методов, поскольку стандартные подходы могут оказаться неприменимыми.

Дополнительный вклад в изучение асимптотического поведения решений внесли В. П. Архипов и А. В. Глушак. В статье «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [8] предложены методы нахождения собственных значений и оценки резольвенты задачи Дирихле. Эти методы позволяют исследовать решения в комплексной плоскости и по параметру, что делает их универсальными для анализа широкого класса задач. Подход к построению степенных асимптотик в окрестности точки вырождения разработан в работе «Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка» [9], где строятся точные представления решений с использованием специальных аппроксимаций.

Особое внимание уделено задаче Коши [10], в которой начальные условия задаются в точке вырождения. В. Архипов и А. Глушак предложили методы построения первых асимптотик решений и показали, что форма начальных условий существенно зависит от знака коэффициента при первой производной, что оказывает влияние на вид решений и методику их построения.

Современные исследования также сосредоточены на численных методах решения вырожденных задач. Актуальными являются подходы, основанные на вариационных принципах, разностных схемах и сплайн-аппроксимациях [11], [12], [13]. Локальные сплайны, в частности, обеспечивают высокую точность аппроксимации как самого решения, так и его производных, особенно вблизи точки вырождения [14]. Среди них выделяются полиномиальные сплайны второго порядка и сплайны Эрмита первого уровня, позволяющие получать гладкие приближения, сохраняющие дифференциальные свойства точного решения [15].

Вариационная постановка задачи в подходящем весовом пространстве Соболева [16] обеспечивает корректную формулировку краевой задачи с сильным вырождением. При этом показатель степени α в коэффициенте $k(x) = x^\alpha p(x)$ лежит в интервале $[1, 2)$, что требует особого подхода к построению граничных условий и численных схем. Разработанный численный алгоритм сочетает сплайн-аппроксимацию с проекционными методами, что обеспечивает сходимость в энергетической норме и устойчивость решения. Эффективность предложенного метода подтверждена теоретическим анализом и численными экспериментами [17].

Дополнительные результаты приведены в обзоре литературы, где в [18], [19] исследуются условия существования и единственности решений, а в [11] рассматривается введение весовых функций для постановки задач в пространствах Соболева. В работе [12] обсуждаются собственные значения для линейаризованных задач, а в [20] уточняется спектральная структура решений.

Методы, основанные на В-сплайнах и кусочно-линейных функциях, продемонстрировали свою эффективность [21], [13]. Эрмитовы сплайны [22] обеспечивают высокий порядок аппроксимации и позволяют приближать как само решение, так и его производные [23]. В [24] изучается нестационарное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным оператором, а в [25] предлагается метод локального улучшения аппроксимаций, полученных методом конечных элементов.

Особый интерес представляют случаи с периодическими коэффициентами или решениями, для которых применяются тригонометрические сплайны [26]. Вариационные методы оказываются особенно полезны в задачах с неоднородной структурой или переменными коэффициентами. В [13] описан алгоритм адаптивной сетки, позволяющий улучшить точность на участках с резкими изменениями решений [27].

Заключительно, предложенный в настоящей работе подход объединяет достоинства вариационного формулирования и сплайн-аппроксимации, обеспечивает высокую точность и устойчивость при решении краевых задач с сильным вырождением, а также демонстрирует широкую применимость в прикладных задачах, связанных с моделированием сложных физических процессов [28].

2 Цель работы

Разработать и исследовать методы аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, основное внимание уделяется:

1. Формализации аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $W_2^1(0, 1)$, с использованием вариационно-сеточных методов.
2. Разработке и анализу координатных систем для одномерных задач, обеспечивающих сходимость аппроксимации в энергетической норме.

3. Оценке порядка аппроксимации, полученной с использованием линейной интерполяции, а также практическому применению методов к конкретным задачам.
4. Построению численных методов и их верификации на тестовых примерах с известными аналитическими решениями.

Целью является не только теоретический анализ разработанных методов, но и их практическое применение, что позволит подтвердить эффективность предложенных подходов.

3 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

3.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left[x^\alpha p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u &= f(x), \quad 0 < x < 1, \quad f \in L_2(0, 1), \\
 q &\text{ измерима, ограничена, неотрицательна на } [0, 1] \\
 \alpha &= \text{const} > 0, \quad p \in C^1[0, 1], \quad p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0 \\
 u &\in \mathbb{W}_2^1(0, 1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

3.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1

3.2.1 Основа вариационно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$Au = f, \quad f \in H \tag{2}$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$\begin{aligned}
 [u, v]_A &:= (Au, v), \\
 \|u\|_A^2 &:= [u, u]_A = (Au, u), \\
 \mathcal{F}(u) &:= \frac{1}{2}[u, u]_A - (f, u)
 \end{aligned} \tag{3}$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(u)h &= [u, h]_A - (f, h) \\
 \mathcal{F}'(u_0) &= 0 \Leftrightarrow \forall h \in H \quad [u_0, h]_A = (f, h) \Leftrightarrow Au_0 = f
 \end{aligned} \tag{4}$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot, \cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n \in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \text{ где } \text{Lin } \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = H_n, \\ (\mathcal{F}|_{H_n})'(u_n) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^n a_i (f, \varphi_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

Приведенная схема называется методом Ритца.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i , которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{ \left\{ \varphi_{n,i} \right\}_{i=1}^{k_n} \right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$\forall u \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0, \quad (6)$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [29] показано, что если координатная система $\{\varphi_{n,i}\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (5) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [30] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n , которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

3.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [31] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{ \varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q \left(\frac{x}{h} - j \right) \right\}_{j \in J_h, |q|=0, \dots, s-1}, \quad (7)$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s(\overline{\Omega})$ в метрике $\mathring{\mathbb{W}}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта

$K \subset \Omega$ при $h \rightarrow 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m , такой что $\bigcup_{j \in J_h} \text{supp } \varphi_{q,j,h} \supset \Omega \ \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j \in J_h} h^q u^{(q)}((j+1)h) \omega_q\left(\frac{x}{h} - j\right) \quad (8)$$

Рассмотрим одномерный случай, то есть $m = 1$ и частный пример $\Omega = (0, 1)$. Для данного случая в [31] подробно описаны рекурсивные формулы для построения функций ω_q . Но эти же функции можно получить рассмотрев более простую задачу – построение полиномиальной координатной системы.

3.4 Полиномиальные координатные системы

Будем использовать общепринятый сеточный метод аппроксимации. Начнем с отрезка $[0, 2]$ и кусочных функций на нем. Пусть

$$\omega_q = \begin{cases} \varphi_q(x) & , \ x \in [0, 1] \\ \psi_q(x-1) & , \ x \in [1, 2], \\ 0 & , \ x \notin [0, 2] \end{cases} \quad \psi_q, \varphi_q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ полиномы, } q = 0, \dots, s-1 \quad (9)$$

$$\varphi_q(0) = 0, \ \psi_q(1) = 0, \ \varphi_q(1) = \psi_q(0), \quad q = 0, \dots, s-1$$

Теперь рассмотрим сдвиги функций ω_q :

$$\{\omega_{j,q} := \omega_q(x-j)\}_{j \in \mathbb{Z}, q=0, \dots, s-1} \quad (10)$$

Носители этих функций – отрезки $[j, j+2]$. Теперь построим приближение функции $u \in C^{s-1}([0, 2])$ в виде

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z} \cap [0, 2]} \sum_{q=0}^{s-1} u^{(q)}(j) \omega_{j,q}(x), \quad x \in [0, 2] \quad (11)$$

Рассмотрим отрезок $[0, 1]$, тогда в формуле выше записан некий полином степени $s-1$ с коэффициентами $u^{(q)}(j)$. Чтобы найти функции φ_q, ψ_q необходимо предположить, что для $u = 1, x, \dots, x^r$ выполняется равенство $\tilde{u} = u$. Это условие дает систему линейных уравнений для коэффициентов φ_q, ψ_q . Понятно, что стоит рассматривать $r \geq s-1$, так как иначе последние производные будут равны нулю и функцию ω_{s-1} мы не найдем. Начиная с некоторого r эта система будет иметь единственное решение, которое и будет определять функции ω_q .

Приведу решения для $s = 1, 2, 3$:

1. $s = 1$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} x & , \ x \in [0, 1] \\ 2-x & , \ x \in [1, 2] \\ 0 & , \ x \notin [0, 2] \end{cases} \quad (12)$$

2. $s = 2$

$$\begin{aligned}\omega_0(x) &= \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 & , \quad x \in [0, 1] \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 2] \end{cases} \\ \omega_1(x) &= \begin{cases} x^3 - x^2 & , \quad x \in [0, 1] \\ x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 2] \end{cases}\end{aligned}\tag{13}$$

3. $s = 3$

$$\begin{aligned}\omega_0(x) &= \begin{cases} 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 & , \quad x \in [0, 1] \\ -6x^5 + 45x^4 - 130x^3 + 180x^2 - 120x + 32 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 2] \end{cases} \\ \omega_1(x) &= \begin{cases} -3x^5 + 7x^4 - 4x^3 & , \quad x \in [0, 1] \\ -3x^5 + 23x^4 - 68x^3 + 96x^2 - 64x + 16 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 2] \end{cases} \\ \omega_2(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^3 & , \quad x \in [0, 1] \\ -\frac{1}{2}x^5 + 4x^4 - \frac{25}{2}x^3 + 19x^2 - 14x + 4 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [0, 2] \end{cases}\end{aligned}\tag{14}$$

Далее, следуя теории из [31], добавляем шаг сетки, строим систему $\{\varphi_{q,j,h}\}_{j \in \mathbb{Z}, q=0, \dots, s-1}$ и аппроксимируем функцию $u \in C^{s-1}(0, 1)$.

3.5 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 1$, $\Omega = (0, 1)$. Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{ \varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \right\}_{j \in J_h}\tag{15}$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h) \omega\left(\frac{x}{h} - j\right)\tag{16}$$

Для удобства введем обозначение $x_j := jh$. Тогда на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x),\tag{17}$$

но на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j .

Для интерполяционного многочлена есть оценка остатка:

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow$$

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} |u''(x)| \cdot \frac{1}{2!} |(x - x_j)(x - x_{j+1})| \quad (18)$$

Несложно проверить, что $|(x - x_j)(x - x_{j+1})| \leq \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C(0,1)} \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{x \in (0,1)} |u''(x)| \quad (19)$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

3.6 Погрешность приближения

В предыдущем пункте была получена оценка погрешности приближения u линейной интерполяцией. В [32] получена важная для нас оценка:

$$\|u - u^h\|_A \leq \|u - u_h\|_A, \quad (20)$$

где u^h – приближенное решение, получаемое при помощи метода Рунге, а u_h – вписанная в график u ломаная, с узлами в точках x_j . Таким образом, при наличии оценки на $\|u - u_h\|_A$, можно оценить погрешность приближения u^h к u .

3.6.1 Случай слабого вырождения

Случай $0 < \alpha < 1$ называется случаем слабого вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}. \quad (21)$$

И данная оценка точна в том смысле, что существует функция u , для которой $\|u - u_h\|_A = C\|f\|_{L_2} h^{(1-\alpha)/2}$.

3.6.2 Случай сильного вырождения

Случай $1 \leq \alpha < 2$ называется случаем сильного вырождения. В данном случае в [31] было показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_2} h^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (22)$$

И данная оценка почти точна в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция u , для которой $\|u - u_h\|_A \geq Ch^{1-\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}$.

3.6.2.1 Улучшение оценки

На самом деле (см. [31]), при $f \in L_r(0, 1)$, $2 < r \leq \infty$, можно получить лучшую оценку в случае $1 \leq \alpha < 2$:

$$\|u - u_h\|_A \leq C\|f\|_{L_r} h^{\frac{3-\alpha}{2}-\frac{1}{r}}, \quad (23)$$

где при $r = \infty$ следует считать $\frac{1}{r} = 0$.

3.7 Применение к конкретной задаче

В качестве примера рассмотрим задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{du}{dx}\right) + u = \frac{3^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha}, \quad (24)$$

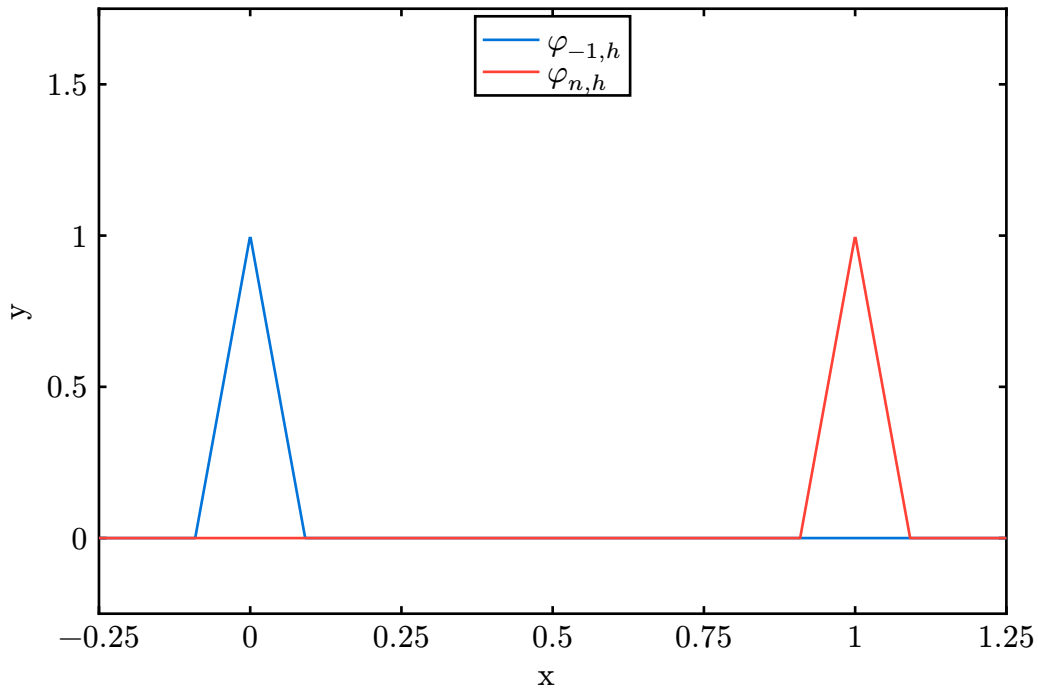
$$0 < x < 1 \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

Тогда $u(0) = 0$ и нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha}, \quad (25)$$

то есть это точное решение задачи.

Возьмем натуральное n и по нему построим $h = 1/(n+1)$, тогда в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$ первая и последняя функции выглядят следующим образом:



Будем строить аппроксимирующую функцию вида $u_h = \sum_{k=-1}^n a_k \varphi_{k,h}$, заметим, что так как $u(1) = 0$, то коэффициент при последнем члене $a_n = 0$.

По предложенному в пункте 3.2 методу строим аппроксимирующую путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_k [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A = (f, \varphi_{j,h}), \quad j = -1, \dots, n \quad (26)$$

Тут

$$\begin{aligned}
Au &= -\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u, \\
[\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A &= (A\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}) = \\
&= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) + \varphi_{k,h} \right) \cdot \varphi_{j,h} \right\} dx = \\
&= \int_0^1 \left\{ x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \left(\frac{d}{dx} \varphi_{j,h} \right) + \varphi_{k,h} \varphi_{j,h} \right\} dx - x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1
\end{aligned} \tag{27}$$

Видно, что подстановка $x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1$ равна нулю в случае, если хотя бы один из k или j не равен n . Так как $k = -1, \dots, n-1$, то подстановка всегда равна 0.

Произведение в правой части – классическое скалярное произведение функций

$$(f, \varphi_{j,h}) = \int_0^1 f(x) \varphi_{j,h}(x) \tag{28}$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	5.09e-3
0.1	1.57e-5	1.57e-7	5.33e-3
0.2	1.11e-5	1.11e-7	4.92e-3
0.3	8.53e-6	8.53e-8	4.36e-3
0.4	6.72e-6	6.72e-8	3.74e-3
0.5	5.29e-6	5.29e-8	3.09e-3
0.6	4.06e-6	4.06e-8	2.43e-3
0.7	2.96e-6	2.96e-8	1.78e-3
0.8	1.94e-6	1.94e-8	1.15e-3
0.9	9.55e-7	9.55e-9	5.55e-4

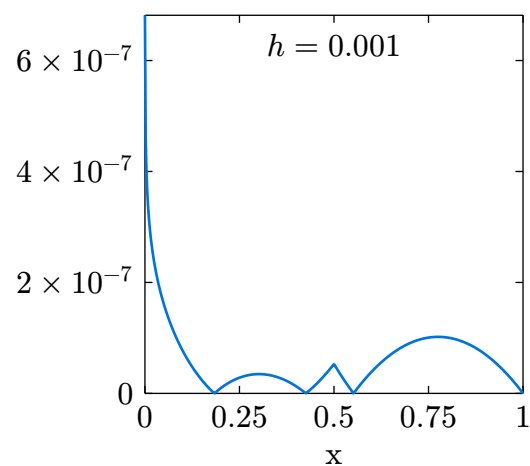
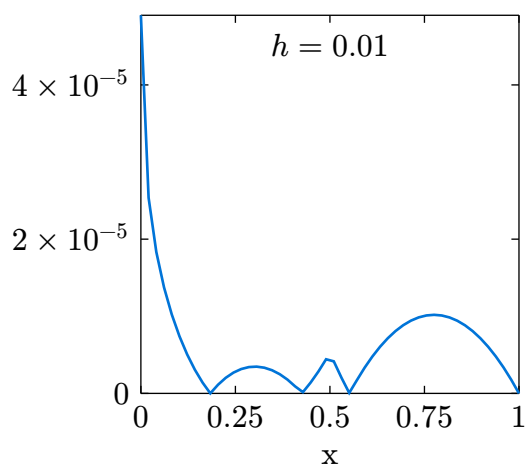
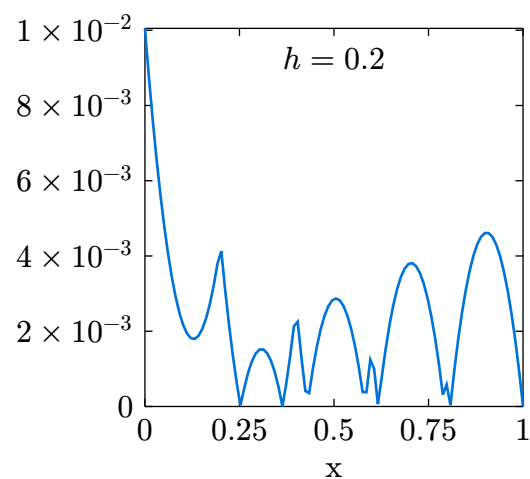
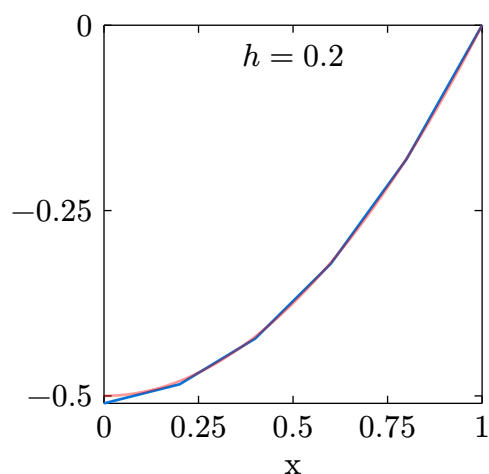
Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.0	2.34e-4	8.26e-6
0.1	1.79e-5	1.76e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7
0.3	7.18e-6	7.12e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8
0.8	1.26e-6	1.25e-8
0.9	5.98e-7	5.94e-9

	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	2.65e-7	2.62e-9

Таблица 2. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$ Таблица 3. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.8$

Также приведены графики приближенного решения и абсолютных погрешностей для $\alpha = 1$:



4 Заключение

В ходе работы был исследован метод аппроксимации решений краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, основанный на вариационно-сеточных методах. В процессе реализации выделены основные этапы аппроксимации в функциональных пространствах, таких как $W_2^1(0, 1)$, с использованием линейных базисных функций, что позволило обеспечить сходимость решений в энергетической норме.

Показано, что использование предложенной координатной системы позволяет с высокой точностью аппроксимировать решения в рамках заданной задачи. Анализ порядка аппроксимации показал, что для линейной интерполяции ошибки аппроксимации оцениваются квадратично. Верификация полученных численных решений на тестовых примерах с известными аналитическими решениями подтвердила корректность методов и их применимость к реальным задачам.

Практическое применение метода было продемонстрировано на конкретной задаче с аналитическим решением, где была построена аппроксимирующая функция, что позволило провести численный эксперимент и получить точные результаты. Таким образом, результаты работы подтверждают эффективность предложенной аппроксимации для решения краевых задач вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, а также подчеркивают важность выбора правильной координатной системы для достижения необходимой точности.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение предложенных методов для многомерных и более сложных задач, а также на разработку более эффективных сеточных построений и алгоритмов решения.

добавить инфу про высоту 1 из присланного текста

1. получаем каркас приближенноого решения в узлах сетки
2. хотим построить гладкое решение, проходящее через узлы сетки (каркас)
3. имея карсас прилиженного решение класса с погрешностью h^4 , как получить приближенное решение класса лучше, но большей гладкостью
4. построить график приближенной производной

5 Список литературы

1. L B. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. 2022. с. 203.
2. F B. Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations // Journal of Differential Equations. 1990. т. 83. сс. 179–206.
3. P G. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface // J. Fluid Mech. 2023. т. 84. сс. 125–143.
4. H B. Existence and Bifurcation of Solutions for an Elliptic Degenerate Problem // Journal of differential equations. 2024. т. 134. сс. 1–25.
5. F B. A class of degenerate elliptic equations and a Dido's problem with respect to a measure // J. Math. Anal. Appl. 2022. т. 348. сс. 356–365.
6. H T. Mixed finite element methods for degenerate parabolic equations // Mathematics of Computation. 2021. т. 90, № 329. с. 1017.
7. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т. 4, № 3. сс. 1063–1095.
8. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений // Прикладная математика & Физика. 2016. т. 44, № 20(241). сс. 5–22.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2023. т. 55, № 3. сс. 197–206.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка // ПМ&Ф. Belgorod State University, 2024. т. 56, № 2. сс. 87–96.
11. H D. Parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients: The Dirichlet problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2021. т. 374. сс. 6611–6647.
12. C S. A critically degenerate elliptic Dirichlet problem, spectral theory and bifurcation // Nonlinear Analysis. 2020. т. 190.
13. N M. On the solution of Integral-Differential Equations via the Rayleigh-Ritz Finite Elements Method: Stationary Transport Equation // WSEAS Transactions on Mathematics. 2021. т. 4, № 2. сс. 41–49.
14. S M. Variational-difference approximation // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 2024. т. 48. сс. 32–188.
15. S M. Some Theorems on the Stability of Numerical Processes // Atti d. Lincei. Classe fis., mat. e nat. 2024. сс. 1–32.
16. P D. A posteriori error estimation for degenerate PDEs // IMA Journal of Numerical Analysis. 2022. т. 42, № 3. с. 1892.

17. J W. Finite element analysis of degenerate boundary value problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. c. 200.
18. F K. On degeneracy of functional-differential equations // Journal of differential equations. 2021. т. 22. cc. 250–267.
19. K I. Degenerate Parabolic Differential Equations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 2021. т. 9. cc. 493–504.
20. S K. Trigonometric splines for singular perturbation problems // Journal of Scientific Computing. 2023. т. 94, № 2. c. 45.
21. M S. et al. Flow of Newtonian Incompressible Fluids in Square Media: Isogeometric vs. Standard Finite Element Method // Mathematics. 2023. т. 11.
22. L E. Degenerate elliptic equations with variable coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 2023. т. 48, № 5. c. 723.
23. K A. Variational approaches to degenerate differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2022. c. 300.
24. D Č. Wavelet Method for Sensitivity Analysis of European Options under Merton Jump-Diffusion Model // AIP Conference Proceedings. 2022. c. 300.
25. P A. Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Advances in Calculus of Variations. 2024. т. 17, № 3. cc. 805–829.
26. V M. Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. c. 100.
27. L C. Spline-based solutions for boundary value problems with degeneracy // Applied Mathematics and Computation. 2021. c. 300.
28. R T. High-order approximation methods for singular differential equations // Numerische Mathematik. 2023. т. 154, № 3. c. 521.
29. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. "Наука", 1970.
30. Курант Р. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1942. т. 49, № 1.
31. Михлин С.Г. Численные методы и автоматическое программирование // Записки научных семинаров ПОМИ. 1974. т. 48. cc. 32–188.
32. Gusman Y., Oganessian L. Inequalities for the convergence of finite difference schemes for degenerate elliptic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. т. 5, № 2. cc. 256–267.
33. Burova I., Alcybeev G. A Boundary Value Problem with Strong Degeneracy and Local Splines // WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS. 2024. т. 23. cc. 982–991.
34. A C. Existence results for a class of nonlinear degenerate Navier problems // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. т. 18, № 1. cc. 647–667.

35. O N. Numerical simulation of a degenerate parabolic problem occurring in the spatial diffusion of biological population // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. т. 151.
36. S M. Approximation on the Cubic Lattice. 2021. с. 203.
37. F L. A class of fully nonlinear elliptic equations with singularity at the boundary // J. Geom. Anal. 2023. т. 8, № 4. cc. 583–598.
38. Y Z. Numerical methods for strongly degenerate parabolic equations // Journal of Computational Physics. 2022. с. 209.
39. R J. Adaptive mesh refinement for degenerate elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2023. т. 61, № 2. с. 789.

6 Приложения

6.1 Код программы на языке Wolfram

```
alpha = 1; h = 0.2; n = 1/h - 1;

fc := Compile[{{x, _Real}},
  (x^(3-alpha) - 2(3-alpha)x - 1) / (3-alpha)
]; f[x_?NumericQ] := fc[x];

uexact := Compile[{{x, _Real}}, (x^(3-alpha) - 1) / (3-alpha)];

wc := Compile[{{x, _Real}}, Piecewise[{
  {x, 0<=x<1},
  {2-x, 1<=x<=2}
}, 0]]; w[x_?NumericQ] := wc[x];

phiCompiled = Table[
  With[{j = j},
    Compile[{{x, _Real}}, w[x/h - j]]
  ],
  {j, -1, n - 1}
];

phi = Table[
  With[{i = i},
    phiCompiled[[i]][#] &,
    {i, 1, Length[phiCompiled]}
  ],
  {j, -1, n - 1}
];

phiD := Table[With[{j = j}, Piecewise[{
  {1/h, h * j <= # < h * (j+1)},
  {-1/h, h * (j+1) <= # <= h * (j+2)}
}, 0]&], {j, -1, n - 1}];

fj = ParallelTable[NIntegrate[
  f[x] * phi[[j+2]][x],
  {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
  WorkingPrecision -> 32, PrecisionGoal -> 8,
  MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8,
  Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0}
], {j, -1, n-1}];

t := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+2]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+2]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
    MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, -1, n-1}
];
```

```

tt := ParallelTable[
  NIntegrate[
    x^alpha * phiD[[j+1]][x] * phiD[[j+2]][x] + phi[[j+1]][x] * phi[[j+2]][x],
    {x, Max[0,h*j], Min[1,h*(j+2)]},
    WorkingPrecision -> 16, PrecisionGoal -> 8,
    MaxRecursion -> 20, AccuracyGoal -> 8
  ], {j, 0, n-1}
];

k := Length[t]; systemcoef = SparseArray[
  {
    Band[{1, 1}] -> t,
    Band[{2, 1}] -> tt,
    Band[{1, 2}] -> tt
  },
  {k, k}
];
a := LinearSolve[systemcoef, fj]; Print[a]

```