

Санкт-Петербургский государственный университет

ФАТТАХОВ Марат Русланович

Выпускная квалификационная работа

**Численные методы решения
дифференциальных уравнений с сильным
вырождением**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Основная образовательная программа СВ.5001.2021 «Математика и
компьютерные науки»

Научный руководитель:
профессор кафедры вычислительной математики,
д.ф.-м.н. Б. И. Герасимовна

Содержание

1 Дифференциальные уравнения с сильным вырождением	3
2 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка	3
2.1 Вид уравнения	3
2.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1	4
2.2.1 Основа вариационно-сеточного метода	4
2.3 Одномерный случай	5
2.4 Порядок аппроксимации	6
2.5 Применение к конкретной задаче	7
3 Список литературы	10

1 Дифференциальные уравнения с сильным вырождением

ДУ с сильным вырождением называют уравнения, в которых старшая производная умножается на функцию, которая может обращаться в ноль в области определения. Например, для второго порядка общий вид будет:

$$\begin{aligned} a(x, t)u_t &= b(x, t)u_{xx} + c(x, t)u_x + d(x)u + f(x, t), \quad x, t \in \Omega \times T, \\ \exists x_0, t_0 \in \Omega \times T : b(x_0, t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Или в стационарном случае

$$\begin{aligned} a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ \exists x_0 \in \Omega : a(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Такие уравнения требуют особых численных методов решения, также возникают естественные граничные условия.

Они могут возникать в задачах теплопроводности, гидродинамики.

Для приложений требуется задавать некоторые граничные условия, которые задают начальные параметры системы. Случай, когда условие состоит в задании начальных значений искомой функции на границе, называется **первой краевой задачей**, или **задачей Дирихле**.

2 Аппроксимация решения первой краевой задачи для вырождающихся одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

2.1 Вид уравнения

В данной главе работы будет рассмотрено уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left[x^\alpha p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u &= f(x), \quad 0 < x < 1, \quad f \in L_2(0, 1), \\ q \text{ измерима, ограничена, неотрицательна на } [0, 1] \\ \alpha = \text{const} > 0, \quad p \in C^1[0, 1], \quad p(x) &\geq p_0 = \text{const} > 0 \\ u &\in \mathbb{W}_2^1(0, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 Аппроксимация в пространстве \mathbb{W}_2^1

2.2.1 Основа вариационно-сеточного метода

Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный положительно-определенный оператор A и требуется найти решение уравнения

$$Au = f, \quad f \in H \quad (4)$$

Принято вводить функционал энергии и энергетическую норму с энергетическим произведением:

$$\begin{aligned} [u, v]_A &:= (Au, v), \\ \|u\|_A^2 &:= [u, u]_A = (Au, u), \\ \mathcal{F}(u) &:= \frac{1}{2}[u, u]_A - (f, u) \end{aligned} \quad (5)$$

При положительной определенности оператора A функционал энергии является выпуклым, из чего следует, что ноль его производной является точкой минимума.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(u)h &= [u, h]_A - (f, h) \\ \mathcal{F}'(u_0) = 0 &\Leftrightarrow \forall h \in H \quad [u_0, h]_A = (f, h) \Leftrightarrow Au_0 = f \end{aligned} \quad (6)$$

Если решение u_0 аппроксимируется в конечномерном пространстве H_n с энергетическим произведением $[\cdot, \cdot]_A$, то критерием минимальности функционала энергии в точке $u_n \in H_n$ будет следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad \text{где } \text{Lin } \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = H_n, \\ (\mathcal{F} |_{H_n})'(u_n) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial}{\partial a_k} \mathcal{F}(u_n) &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k [\varphi_i, \varphi_k]_A - \sum_{i=1}^n a_i (f, \varphi_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i [\varphi_i, \varphi_k]_A - (f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

Приведенная схема называется методом Рунта.

Основой сеточного метода аппроксимации является выбор функций φ_i , которые связаны с координатной сеткой в области аппроксимации и задаются простыми формулами. Эти базисные функции φ_i мы будем называть координатными функциями. Выбор функций ограничен лишь условием полноты системы $\left\{ \left\{ \varphi_{n,i} \right\}_{i=1}^{k_n} \right\}_n$, где для каждого n задается подпространство H_n размерности k_n и функции $\varphi_{n,i}$ образуют базис в этом подпространстве, а полнота системы – это условие

$$\forall u \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_A = 0, \quad (8)$$

то есть любая функция u может быть аппроксимирована с любой точностью в энергетической норме.

В книге [1] показано, что если координатная система $\{\varphi_{n,i}\}$ полна в смысле описанном выше, то построенная при помощи системы (7) аппроксимация сходится в энергетической норме к решению исходного уравнения.

Р. Курантом в [2] было показано, что необязательно выбирать последовательность подпространств H_n , которые строго вложены друг в друга, как изначально предполагалось в методе Ритца, главное, чтобы система базисов этих пространств была полна.

2.3 Одномерный случай

Вернемся к поставленной задаче, в [3] описаны необходимые и достаточные условия для минимальной координатной системы в $\mathbb{W}_p^s(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ вида

$$\left\{ \varphi_{q,j,h}(x) = \omega_q \left(\frac{x}{h} - j \right) \right\}_{j \in J_h, |q|=0, \dots, s-1}, \quad (9)$$

которая при помощи функции u_h аппроксимирует любую функцию $u \in C_0^s(\overline{\Omega})$ в метрике $\mathring{\mathbb{W}}_p^s(\Omega)$, а также эту же функцию u в метрике $C^{s-1}(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$ при $h \rightarrow 0$. Здесь h – шаг сетки, J_h – конечный набор целых мультииндексов размера m , такой что $\bigcup_{j \in J_h} \text{supp } \varphi_{q,j,h} \supset \Omega \quad \forall q$, а аппроксимирующая функция u_h определяется как

$$\sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j \in J_h} h^{q \cdot u^{(q)}} ((j + \mathbb{1})h) \omega_q \left(\frac{x}{h} - j \right) \quad (10)$$

В случае $\mathbb{W}_2^1(0, 1)$ получается, что $q \equiv 0$, то есть необходимо найти одну базисную функцию $\omega(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая должна удовлетворять следующим условиям, описанным в [3]:

$$\begin{aligned} \text{supp } \omega &= [0, 2], \quad \omega \in C(\mathbb{R}) \\ \omega(x+1) + \omega(x) &= 1 \quad \forall x \in [0, 1], \\ \omega(x) &= \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x \in [0, 1] \\ \psi(x-1) & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2] \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ - полиномы степени не выше 1

Что приводит к системе с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax + b, \quad \psi(x) = cx + d, \\ \begin{cases} 0 = \omega(0) = \varphi(0) \\ 1 = \omega(1) = \varphi(1) = \psi(0) \\ 0 = \omega(2) = \psi(1) \\ 1 = \omega(x) + \omega(x+1) = \varphi(x) + \psi(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Единственным решением системы является

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x, \quad \psi(x) = 1 - x, \\ \omega(x) &= \begin{cases} x & , \quad x \in [0, 1] \\ 2 - x & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2] \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 Порядок аппроксимации

Вернемся к нашей задаче, одномерный случай, $s = 1$, $\Omega = (0, 1)$.

Координатная система в этом случае имеет вид

$$\left\{ \varphi_{j,h}(x) = \omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \right\}_{j \in J_h} \quad (14)$$

А аппроксимирующая функция имеет вид

$$u_{h(x)} = \sum_{j \in J_h} u((j+1)h) \omega\left(\frac{x}{h} - j\right) \quad (15)$$

Для удобства введем обозначение $x_j := jh$. Тогда на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ ненулевыми $\varphi_{\cdot,h}$ будут только $\varphi_{j,h}$ и $\varphi_{j-1,h}$.

Тогда на этом промежутке

$$u_h(x) = u(x_{j+1})\varphi_{j,h}(x) + u(x_j)\varphi_{j-1,h}(x), \quad (16)$$

но на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ $\varphi_{\cdot,h}$ являются полиномами степени не выше 1, и верно $\varphi_{i-1,h}(x_i) = 1$, то есть на самом деле мы имеем дело с линейной интерполяцией: вписываем ломаную в график функции u в точках x_j .

Для интерполяционного многочлена есть оценка остатка:

$$\begin{aligned} x \in [x_j, x_{j+1}] &\Rightarrow \\ |u(x) - u_h(x)| &\leq \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})} |u''(x)| \cdot \frac{1}{2!} |(x - x_j)(x - x_{j+1})| \end{aligned} \quad (17)$$

Несложно проверить, что $|(x - x_j)(x - x_{j+1})| \leq \frac{1}{4}h^2$, тогда

$$\|u - u_h\|_{C(0,1)} \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{x \in (0,1)} |u''(x)| \quad (18)$$

То есть мы ожидаем не лучше, чем квадратичную сходимость.

2.5 Применение к конкретной задаче

В качестве примера рассмотрим задачу

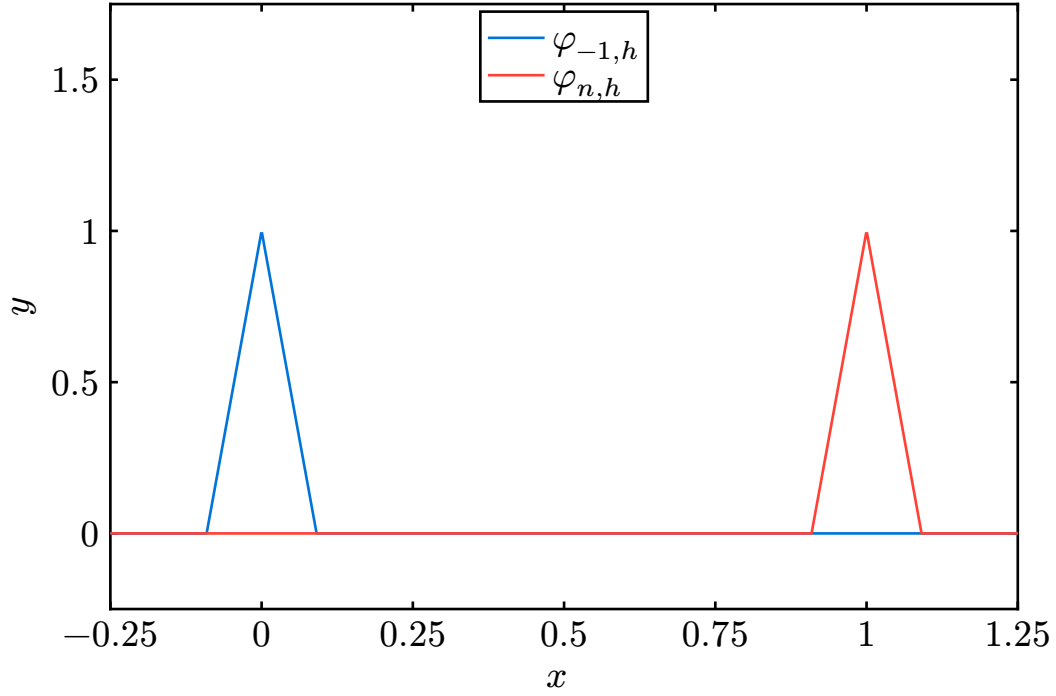
$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u &= \frac{3^{3-\alpha} - 2(3-\alpha)x - 1}{3-\alpha}, \\ 0 < x < 1 \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда $u(0) = 0$ и нужно ставить условие только на конце $u(1)$. Пусть $u(1) = 0$. Правая часть уравнения получалась подстановкой

$$u(x) = \frac{x^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha}, \quad (20)$$

то есть это точное решение задачи.

Возьмем натуральное n и по нему построим $h = 1/(n+1)$, тогда в координатной системе $\{\varphi_{i,h}\}$ первая и последняя функции выглядят следующим образом:



Будем строить аппроксимирующую функцию вида $u_h = \sum_{k=-1}^n a_k \varphi_{k,h}$, заметим, что так как $u(1) = 0$, то коэффициент при последнем члене $a_n = 0$.

По предложенному в пункте 2.2 методу строим аппроксимирующую путем решения системы

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_k [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A = (f, \varphi_{j,h}), \quad j = -1, \dots, n \quad (21)$$

Тут

$$\begin{aligned} Au &= -\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right) + u, \\ [\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}]_A &= (A\varphi_{k,h}, \varphi_{j,h}) = \\ &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) + \varphi_{k,h} \right) \cdot \varphi_{j,h} \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \left(\frac{d}{dx} \varphi_{j,h} \right) + \varphi_{k,h} \varphi_{j,h} \right\} dx - x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (22)$$

Видно, что подстановка $x^\alpha \left(\frac{d}{dx} \varphi_{k,h} \right) \varphi_{j,h} \Big|_0^1$ равна нулю в случае, если хотя бы один из k или j не равен n . Так как $k = -1, \dots, n-1$, то подстановка

всегда равна 0. Произведение в правой части – классическое скалярное произведение функций

$$(f, \varphi_{j,h}) = \int_0^1 f(x) \varphi_{j,h}(x) \quad (23)$$

Расчеты производились в системе математических вычислений с точностью 8 знаков после запятой.

Результаты вычислений приведены в виде таблиц абсолютных погрешностей

	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$
0.0	4.90e-5	6.82e-7	5.09e-3
0.1	1.57e-5	1.57e-7	5.33e-3
0.2	1.11e-5	1.11e-7	4.92e-3
0.3	8.53e-6	8.53e-8	4.36e-3
0.4	6.72e-6	6.72e-8	3.74e-3
0.5	5.29e-6	5.29e-8	3.09e-3
0.6	4.06e-6	4.06e-8	2.43e-3
0.7	2.96e-6	2.96e-8	1.78e-3
0.8	1.94e-6	1.94e-8	1.15e-3
0.9	9.55e-7	9.55e-9	5.55e-4

Таблица 1. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1$

	$h = 0.01$	$h = 0.001$		$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.0	2.34e-4	8.26e-6	0.0	4.07e-4	2.75e-5
0.1	1.79e-5	1.76e-7	0.1	1.13e-5	1.09e-7
0.2	1.04e-5	1.03e-7	0.2	5.85e-6	5.71e-8
0.3	7.18e-6	7.12e-8	0.3	3.80e-6	3.72e-8
0.4	5.26e-6	5.22e-8	0.4	2.66e-6	2.61e-8
0.5	3.91e-6	3.88e-8	0.5	1.91e-6	1.88e-8
0.6	2.86e-6	2.84e-8	0.6	1.36e-6	1.34e-8
0.7	2.00e-6	1.98e-8	0.7	9.25e-7	9.11e-9
0.8	1.26e-6	1.25e-8	0.8	5.68e-7	5.61e-9
0.9	5.98e-7	5.94e-9	0.9	2.65e-7	2.62e-9

Таблица 2. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.5$

Таблица 3. Абсолютные погрешности, $\alpha = 1.8$

3 Список литературы

- [1] М. С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, 2-е изд. "Наука", 1970.
- [2] К. Р., «Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations.», *Bulletin of the American Mathematical Society*, т. 49, вып. 1, 1942.
- [3] «Численные методы и автоматическое программирование», *Записки научных семинаров ПОМИ*, т. 48, сс. 32–188, 1974.