29. Dezember 2012

GKI - Hausaufgaben 5

Tao Xu, 343390 - Mitja Richter, 324680 - Björn Kapelle, 320438 - Marcus Weber, 320402

Aufgabe 1

Unser Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ enthalte die beiden Ereignisse B („Das Taxi ist blau") und E („Das Taxi erscheint blau"). Laut Aufgabenstellung ist die Unterscheidung zwischen blau und grün zu 80% korrekt, d.h. es gilt $\mathbb{P}(E|B) = 0.8$ und $\mathbb{P}(E|\neg B) = 0.2$.

1.a)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B|E)$, nämlich, dass das als blau wahrgenommene Taxi auch wirklich blau war. Nach dem Satz von Bayes gilt

$$\mathbb{P}(E|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|E) \cdot \mathbb{P}(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}(B|E) = \frac{\mathbb{P}(E|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(E)}$$

Weiterhin sagt uns der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|\neg B) \cdot \mathbb{P}(\neg B)$$

Und damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(B|E) = \frac{\mathbb{P}(E|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(E|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|\neg B) \cdot \mathbb{P}(\neg B)} = \frac{0.8 \cdot \mathbb{P}(B)}{0.8 \cdot \mathbb{P}(B) + 0.2 \cdot \mathbb{P}(\neg B)}$$

An dieser Stelle kommen wir ohne das Wissen über $\mathbb{P}(B)$ nicht weiter, d.h. es ist nicht möglich $\mathbb{P}(B|E)$ zu berechnen.

1.b)

Es gelte nun $\mathbb{P}(\neg B) = 0.9$ und entsprechend $\mathbb{P}(B) = 0.1$. Dann folgt

$$\mathbb{P}(B|E) = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.9} \approx 0.3077 = 30.77\%.$$

Das Taxi war also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 30.77% blau und mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 69.23% grün. Das Taxi war also trotz unserer Wahrnehmung am wahrscheinlichsten grün.

Aufgabe 2

2.a)

Eine Faktorisierung ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots) \\
=&p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot \\
&p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots
\end{aligned}$$

2.b)

Wir zeigen $\mathbb{P}(X|mb(X), Z_1, Z_2, \ldots) = \mathbb{P}(X|mb(X))$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X|mb(X), Z_1, Z_2, \ldots) \\
=&\mathbb{P}(X|E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots) \\
=&\frac{\mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots)}{\mathbb{P}(E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots)} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots)}{\sum_X \mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots)} \\
=&\frac{p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot}{\sum_X p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot} \\
&\frac{p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots}{p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots} \\
=&\frac{p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots \cdot p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot}{p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots \cdot \sum_X p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot} \\
&\frac{p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots}{p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots} \\
\overset{(*)}{=}&\frac{p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot}{\sum_X p(X|E_1, E_2, \ldots) \cdot p(E_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(E_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(K_1|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot} \\
&\frac{p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots}{p(K_2|X, C_1, C_2, \ldots) \cdot \ldots \cdot p(C_1|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot p(C_2|Z_1, Z_2, \ldots) \cdot \ldots} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots)}{\sum_X \mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots)} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X, E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots)}{\mathbb{P}(E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots)} \\
=&\mathbb{P}(X|E_1, E_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots) \\
=&\mathbb{P}(X|mb(X))
\end{aligned}
$$

Der entscheidende Schritt findet in $(*)$ statt: Dort wird $p(Z_1) \cdot p(Z_2) \cdot \ldots$ gekürzt.

Aufgabe 3

Wir wählen den Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots 6\}\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ und $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36}$. Dabei ist ω_1 die Augenzahl des ersten Würfels und ω_2 die Augenzahl des zweiten Würfels.

Weiterhin sei S mit $S(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ die Zufallsvariable, die die Summe der Augenzahlen beschreibt. Die folgende Tabelle zeigt $S(\omega)$ für jedes $\omega = (\omega_1, \omega_2)$:

	1	2	3	4	5	6	ω_1
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	
4	5	6	7	8	9	10	
5	6	7	8	9	10	11	
6	7	8	9	10	11	12	
ω_2							

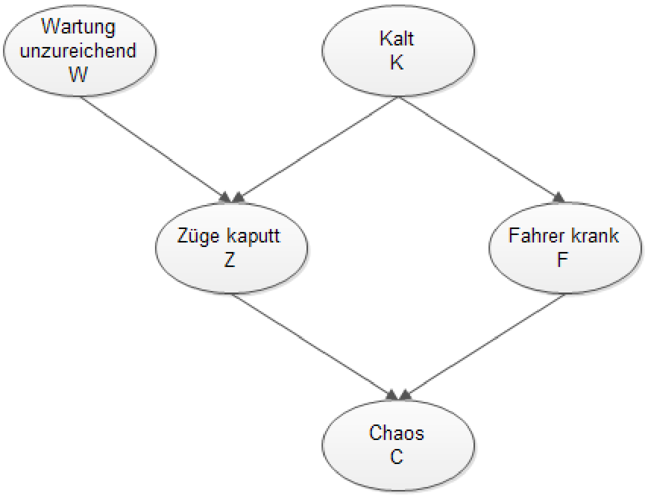
Da jedes der ω die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36}$ hat, ergibt sich der Erwartungswert von S zu

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \sum_{\omega \in \Omega} S(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Somit ist bei einem Spieleinsatz von 7 € der erwartete Gewinn 0 und das Spiel daher fair.

Aufgabe 4

4.a)



4.b)

Gesucht ist $\mathbb{P}(C = w | K = w, Z = f)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C = w|K = w, Z = f) &= 0.9 \cdot \mathbb{P}(F = w|K = w) + 0.25 \cdot \mathbb{P}(F = f|K = w)\\ &= 0.9 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.1\\ &= 0.655\\ &= 65.5\%\end{aligned}$$

4.c)

Gesucht ist $\mathbb{P}(K = w|F = w)$. Der Satz von Bayes gibt uns

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(K = w|F = w) \cdot \mathbb{P}(F = w) = \mathbb{P}(F = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w)\\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(K = w|F = w) = \frac{\mathbb{P}(F = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w)}{\mathbb{P}(F = w)}\end{aligned}$$

Einsetzen der totalen Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}(F = w)$ liefert dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K = w|F = w) &= \frac{\mathbb{P}(F = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w)}{\mathbb{P}(F = w)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(F = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w)}{\mathbb{P}(F = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w) + \mathbb{P}(F = w|K = f) \cdot \mathbb{P}(K = f)}\\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8}\\ &= 0.\overline{63}\\ &= 63.\overline{63}\%\end{aligned}$$

4.d)

Gesucht ist $\mathbb{P}(W = w|Z = w)$. Der Satz von Bayes gibt uns

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W = w|Z = w) \cdot \mathbb{P}(Z = w) = \mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot \mathbb{P}(W = w)\\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(W = w|Z = w) = \frac{\mathbb{P}(W = w|K = w) \cdot \mathbb{P}(W = w)}{\mathbb{P}(Z = w)}\end{aligned}$$

Einsetzen der totalen Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}(F = w)$ liefert dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W = w|Z = w) &= \frac{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot \mathbb{P}(Z = w)}{\mathbb{P}(Z = w)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot \mathbb{P}(Z = w)}{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot \mathbb{P}(W = w) + \mathbb{P}(Z = w|W = f) \cdot \mathbb{P}(W = f)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot 0.7}{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot 0.7 + \mathbb{P}(Z = w|W = f) \cdot 0.3}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = w|W = w) &= \mathbb{P}(Z = w|W = w, K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w) + \mathbb{P}(Z = w|W = w, K = f) \cdot \mathbb{P}(K = f) \\
&= 0.9 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.8 \\
&= 0.66
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = w|W = f) &= \mathbb{P}(Z = w|W = f, K = w) \cdot \mathbb{P}(K = w) + \mathbb{P}(Z = w|W = f, K = f) \cdot \mathbb{P}(K = f) \\
&= 0.6 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W = w|Z = w) &= \frac{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot 0.7}{\mathbb{P}(Z = w|W = w) \cdot 0.7 + \mathbb{P}(Z = w|W = f) \cdot 0.3} \\
&= \frac{0.66 \cdot 0.7}{0.66 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.3} \\
&\approx 0.885 \\
&= 88.5\%
\end{aligned}$$