GKI - Hausaufgaben 3

Tao Xu, 343390 - Mitja Richter, 324680 - Björn Kapelle, 320438 - Marcus Weber, 320402

Aufgabe 1

1.a)

Jeder Mensch ist entweder männlich oder weiblich.
$\forall x(H(x) \Rightarrow ((M(x) \land \neg W(x)) \lor (\neg M(x) \land W(x))))$

1.b)

Anton liebt nur Berta und seine Kinder.
$\forall x(x = Berta \lor K(x, Anton)) \Leftrightarrow L(Anton, x)$

1.c)

Niemand ist sein eigenes Kind, und niemand ist das Kind seines Kindes.
$(\neg \exists x K(x, x)) \land (\neg \exists y, z K(z, y) \land K(y, z))$

1.d)

Jeder Mensch hat einen Vater und eine Mutter.
$\forall x H(x) \Rightarrow (\exists y W(y) \land K(x, y)) \land (\exists z M(z) \land K(x, z))$

1.e)

Alle Kinder werden von ihren Eltern geliebt.
$\forall x, y K(x, y) \Rightarrow L(y, x)$

1.f)

Es gibt genau einen Menschen, der Christian liebt.
$(\exists x H(x) \land L(x, Christian)) \land (\forall y, z \neg L(y, Christian) \lor \neg L(z, Christian))$

1.g)

Der alte §146 StGB lautet: „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter 2 Jahren bestraft.“
Formulieren Sie mindestens zwei gültige Varianten in Prädikatenlogik und erklären Sie, warum der Paragraph inzwischen umformuliert wurde.

1.h)

Definition von Primzahlen: „Eine ganze Zahl ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur durch eins und sich selbst teilbar ist.“
Wir definieren uns folgende Prädikate:
$Prime(x)$ - x ist eine Primzahl
$Divide(x, y)$ - x ist durch y teilbar

$\forall x Prime(x) \Leftrightarrow \forall y(Divide(x, y) \Leftrightarrow (y = 1 \lor y = x))$

1.i)

Die Goldbach-Vermutung: „Jede gerade natürliche Zahl ist Summe zweier Primzahlen “.
Wir definieren uns folgende Prädikate und Funktionen:
$Evennumber(x)$ - x ist eine gerade natürliche Zahl
$Prime(x)$ - x ist eine Primzahl
$Sum(x, y)$ - $x + y$
$Equal(x, y)$ - $x = y$

$\forall x Evennumber(x) \Rightarrow \exists y, z Prime(y) \wedge Prime(z) \wedge Equal(x, Sum(y, z))$

1.j)

Das Epsilon-Delta-Kriterium der Stetigkeit einer Funktions f: „Für alle positive ε gibt es ein positives δ, so dass für alle x im Definitionsbereich von f gilt: $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.“
Wir definieren uns folgende Prädikate und Funktionen:
$Continuous(f, x, D)$ - $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$
$Diff(x, y)$ - $x - y$
$Abs(x)$ - $|x|$
$Smaller(x, y)$ - $x < y$
$In(x, D)$ - $x \in D$

$$(\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \forall x_0 Smaller(0, \varepsilon) \wedge Smaller(0, \delta) \wedge In(x, D) \wedge In(x_0, D) \wedge Smaller(Abs(Diff(x, x_0)), \delta)$$
$$\Rightarrow Smaller(Abs(Diff(f(x), f(x_0))), \varepsilon)) \Leftrightarrow Continuous(f, x, D)$$

Aufgabe 2:

$\exists x\ \forall y \quad (\neg P(x, y) \lor \forall z\ Q(z)) \rightarrow (Q(z) \rightarrow \forall x\ R(x))$

$\exists x\ \forall y \quad \neg(\neg P(x, y) \lor \forall z\ Q(z)) \lor (\neg \forall z\ Q(z) \lor \forall x\ R(x))$

$\exists x\ \forall y \quad P(x, y) \land \neg \forall z\ Q(z) \lor (\neg \forall z\ Q(z) \lor \forall x\ R(x))$

$\exists x\ \forall y \quad P(x, y) \land \exists z\ \neg Q(z) \lor \exists z\ \neg Q(z) \lor \forall x\ R(x)$ $\qquad$: $\underline{((X \land Y) \lor X = X)}$

$\exists z\ \neg Q(z) \lor \forall x\ R(x)$

$\forall w\ \exists v \quad \neg Q(v) \lor R(w)$

$\forall w \quad \neg Q(f(w)) \lor R(w)$

$\rightarrow \quad \{ \{ \neg Q(f(w)), R(w) \} \}$

Aufgabe 3

a) $L_1 = \{ P(1, f(1), z), P(x, y, 1) \}$

$\theta = \{x/1\}$

$L_1\theta = \{ P(1, f(1), z), P(1, y, 1)\}$

$\theta = \{ x/1, y/f(1)\}$

$L_1\theta = \{ P(1, f(1), z), P(1, f(1), 1)\}$

$\theta = \{ x/1, y/f(1), z/1\}$

$L_1\theta = \{ P(1, f(1), 1), P(1, f(1), 1)\}$

$L_1\theta = \{ P(1, f(1), 1) \}$

MGU $\theta = \{ x/1, y/f(1), z/1\}$

b) $L_2 = \{ P(1, f(1), z), Q(x, y, 1) \}$

nicht unifizierbar

c) $L_3 = \{ P(z, f(1), z), P(x, f(2), 1) \}$

nicht unifizierbar

d) $L_4 = \{ P(x, f(x), z), P(1, f(y), f(z)) \}$

nicht unifizierbar

e) $L_5 = \{ P(x, h(x, y), f(x)), P(1, w, y), P(1, h(y, 3), y) \}$

$\theta = \{x/1\}$

$L_5\theta = \{ P(1, h(1, y), f(x)), P(1, w, y), P(1, h(y, 3), y) \}$

nicht unifizierbar

f) $L_6 = \{ P(1, g(x, y), f(x)), P(u, v, z), P(x, g(1, z), y) \}$

$\theta = \{x/1\}$

$L_6\theta = \{ P(1, g(1, y), f(1)), P(u, v, z), P(1, g(1, z), y) \}$

$\theta = \{x/1, y/f(1)\}$

$L_6\theta = \{ P(1, g(1, f(1)), f(1)), P(u, v, z), P(1, g(1, z), f(1)) \}$

$\theta = \{x/1, y/f(1), z/f(1)\}$

$L_6\theta = \{ P(1, g(1, f(1)), f(1)), P(u, v, f(1)) \}$

$\theta = \{x/1, y/f(1), z/f(1), u/1\}$

$L_6\theta = \{ P(1, g(1, f(1)), f(1)), P(1, v, f(1)) \}$

$\theta = \{x/1, y/f(1), z/f(1), u/1, v/f(1)\}$

$L_6\theta = \{ P(1, g(1, f(1)), f(1)) \}$

MGU $\theta = \{x/1, y/f(1), z/f(1), u/1, v/f(1)\}$

Aufgabe 4

Wir definieren folgende Konstanten:

Arthur - kurz: A,
Betsy - kurz: B,
Clemence - kurz: C

Weiterhin benötigen wir folgende Pradikate:

Unschuldig (x) - kurz: U(x)
vonDiamantenErzählt(x) - kurz: D(x)
hatGeldsorgen(x) - kurz: G(x)
warAufDemLandsitz(x) - kurz: L(x)

Arthurs Aussage lässt sich formulieren als:
$U(A) \Rightarrow \forall x D(x) \wedge G(C)$ bzw. in KNF: $\{\neg U(A), D(x)\}, \{\neg U(A), G(C)\}$

Betsys Aussage lässt sich formulieren als:
$U(B) \Rightarrow \neg L(B) \wedge \neg D(B)$ bzw. in KNF: $\{\neg U(B), \neg L(B)\}, \{\neg U(B), \neg D(B)\}$

Clemences Aussage lässt sich formulieren als:
$U(C) \Rightarrow \forall x L(x)$ bzw. in KNF: $\{\neg U(C), L(x)\}$

Außerdem muss der Dieb auf dem Landsitz gewesen sein:
$\forall x \neg U(x) \Rightarrow L(x)$ bzw. in KNF*: $\{U(x), L(x)\}$

Und der Dieb muss von den Diamanten gewusst haben:
$\forall x \neg U(x) \Rightarrow D(x)$ bzw. in KNF*: $\{U(x), D(x)\}$

Desweiteren wissen wir, dass es genau einen Dieb gibt:
$\neg U(A) \vee \neg U(B) \vee \neg U(C)$ bzw. in KNF: $\{\neg U(A), \neg U(B), \neg U(C)\}$

Damit erhalten wir die Wissensbasis:
$KB = \{\{\neg U(A), D(x)\}, \{\neg U(A), G(C)\}, \{\neg U(B), \neg L(B)\}, \{\neg U(B), \neg D(B)\}, \{\neg U(C), L(x)\},$
$\{U(x), L(x)\}, \{U(x), D(x)\}, \{\neg U(A), \neg U(B), \neg U(C)\}\}$

Bevor wir zum Resolutionsbeweis kommen, machen wir ein *educated guess* wer der Dieb ist:

Es kann nicht Arthur sein. Denn dann müssten Betsy und Clemence die Wahrheit sagen, aber deren Aussagen widersprechen sich bezüglich der Anwesenheit auf dem Landsitz. Der Dieb kann auch nicht Clemence sein. Denn dann müssten Arthur und Betsy die Wahrheit sagen, aber deren Aussagen widersprechen sich bezüglich des Wissens über die Diamanten. Der Dieb muss also Betsy sein, was wir im folgenden beweisen werden.

Wir beweisen also $\{\neg U(B)\}$ per Resolution, d.h. wir führen die Negation $\{U(B)\}$ zum Widerspruch mit der Wissensbasis.

Schritt 1: Wir unifizieren $\{U(B)\}$ mit $\{\neg U(B), \neg L(B)\}$ und erhalten $\{\neg L(B)\}$, welches wir der Stützmenge hinzüfugen.

Schritt 2: Wir unifizieren $\{\neg L(B)\}$ mit $\{U(x), L(x)\}$ und erhalten durch die Substitution x/B dann $\{U(B)\}$, welches wir der Stützmenge hinzüfugen.

Schritt 3: Wir unifizieren $\{U(B)\}$ mit $\{\neg U(B)\}$ und erhalten $\{\}$, womit der Beweis abschließt.

Anmerkung zu *: Eigentlich müsste man in den beiden Aussagen die Existenzquantoren dadurch beseitigen, dass man neu definierte Konstanten einsetzt. Uns ist allerdings nicht klar wie diese Aussagen dann noch im Resolutionsbeweis verwendet werden sollen.