28. Januar 2013

GKI - Hausaufgaben 5

Tao Xu, 343390 - Mitja Richter, 324680 - Björn Kapelle, 320438 - Marcus Weber, 320402

Aufgabe 1

1.a)

Iterative Berechnung für Filterverteilung f:
ohne Beobachtung von Y_t:

$f_t = P(X_t = w|Y_1, ..., Y_t) =$
$P(X_t = w|X_{t-1} = w)f_{t-1} + P(X_t = w|X_{t-1} = f)(1 - f_{t-1}) =$
$0,7f_{t-1} + 0,2(1 - f_{t-1}) =$
$0,5f_{t-1} + 0,2$

Mit Beobachtung von Y_t:
$P(X_t = w|Y_1, ..., Y_t) =$
$\frac{P(Y_t=c \cup Y_t=g|X_t=w)f_t}{P(Y_t=c \cup Y_t=g|X_t=f)(P(X_t=f|X_{t-1}=w)f_{t-1}+P(X_t=f|X_{t-1}=f)(1-f_{t-1}))+P(Y_t=c \cup Y_t=g|X_t=w)f_t} =$
$\frac{0,3(0,7f_{t-1}+0,2(1-f_{t-1}))}{0,3(0,7f_{t-1}+0,2(1-f_{t-1}))+0,2(0,3f_{t-1}+0,8(1-f_{t-1}))} =$
$\frac{0,06+0.15f_{t-1}}{0,22+0,05f_{t-1}}$

Bedingung für stationäre Verteilung: $f_t = f_{t-1}$
Und es gilt $f_t = \frac{0,06+0.15f_{t-1}}{0,22+0,05f_{t-1}}$
also muss gelten $x = \frac{0,06+0.15x}{0,22+0,05x}$
$\Leftrightarrow 0 = 0,05x^2 + 0,07x - 0,06$
$x_1 = -2$
$x_2 = 0,6$

Das HMM hat eine stationäre Verteilung. Für $t \to \infty$ gilt
$P(X_t = w|Y_1, ..., Y_t) = 0,6$

1.b)

$f_0 = 0,5$
$f_1 = \frac{0,06+0.15 \cdot 0,5}{0,22+0,05 \cdot 0,5} \approx 0,5510$
$f_2 \approx \frac{0,06+0,15 \cdot 0,5510}{0,22+0,05 \cdot 0,5510} \approx 0,5762$
$f_3 \approx 0,6 \cdot 0,656 + 0,2 \approx 0,4881$
$f_4 \approx 0,6 \cdot 0,594 + 0,2 \approx 0,4441$

1.c)

Eingesetzt in die Bedingung für stationäre Verteilung erhält man:
$x = 0,5x + 0,2$

$x = 0,4$

Es konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0,4. Die anfänglichen Beobachtungen spielen keine Rolle.