Théorie des matroïdes

Nouvelles tendances et interactions

M. Las Vergnas

C.N.R.S.
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
Combinatoire et Optimisation
4 Place Jussieu, 75005 Paris

&

J.L. Ramírez Alfonsín

Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier
Université Montpellier 2
Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier

11 octobre 2012

Chapitre 1

Mineurs. Dual

1.1 Mineurs

Proposition 1.1.1 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors*

$$\{X \subset E \backslash A \mid X \textit{ est un indépendant de } M\}$$

est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$.

Le matroïde défini dans la Proposition 1.1.1 est dit obtenu à partir de M en *supprimant* les éléments de A. On le désigne par $M \backslash A = M|_{E \backslash A}$. Pour expliciter l'ensemble des éléments de $M \backslash A$ on utilise également la notation $M(E \backslash A)$ et on parle alors du *sous-matroïde de M sur A*.

Proposition 1.1.2 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$.*
(i) Les circuits de $M \backslash A$ sont les circuits de M contenus dans $E \backslash A$
(ii) pour $X \subset E \backslash A$ on a $r_{M \backslash A}(X) = r_M(X)$.

Proposition 1.1.3 *Soient M un matroïde sur un ensemble E, $A \subset E$ et $X \subset E \backslash A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) il existe une base B de $M|_A$ telle que $X \cup B$ soit indépendant

(ii) pour toute base B de $M|_A$ l'ensemble $X \cup B$ est indépendant.

(iii) L'ensemble

$$\{X \subset E \backslash A \mid \textit{il existe une base } B \textit{ de } M|_A \textit{ telle que } X \cup B \textit{ soit indépendant dans } M\}$$

est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$.

Démonstration. Soient B et B' deux bases de A. Supposons que $X \cup B$ soit indépendant. Remarquons que $X \cup B'$ est un générateur de $X \cup B$. Donc $r_M(X \cup B') \geq r_M(X \cup B) = |X| + |B| = |X| + |B'|$, et par suite $r_M(X \cup B') = |X \cup B'|$ i.e. $X \cup B'$ est indépendant.
Compte tenu de l'équivalence de (i) et (ii) la vérification des axiomes $(I1), (I2), (I3)$ des indépendants est immédiate.

□

Le matroïde défini dans la Proposition 1.1.3 est dit obtenu à partir de M en *contractant* les éléments de A. On le désigne par M/A.

Proposition 1.1.4 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$.*
(i) Les circuits de M/A sont les ensembles non vides minimaux pour l'inclusion de la forme $C\backslash A$ pour C circuit de M
(ii) pour $X \subset E\backslash A$ on a $r_{M/A}(X) = r_M(X \cup A) - r_M(A)$.

Lorsque l'ensemble A est réduit à un seul élément $A = \{e\}$ pour $e \in E$ on simplifie les notations en $M\backslash e$ et M/e. Les matroïdes $M\backslash e$ et M/e sont quelquefois appelés les deux *mineurs principaux* de M définis par e.
D'une façon générale un *mineur* d'un matroïde M est tout matroïde obtenu à partir de M par une suite quelconque de suppressions et de contractions.
Les opérations de suppression et de contraction sont associatives et commutatives.

Proposition 1.1.5 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $A, A' \subset E$ disjoints. On a*
(i) $(M\backslash A)\backslash A' = M\backslash(A \cup A')$.
(ii) $(M/A)/A' = M/(A \cup A')$.
(iii) $(M\backslash A)/A' = (M/A')\backslash A$.

Démonstration. La démonstration de (i) et (ii) sont immédiates en utilisant la fonction rang. Pour (iii), on va démontrer que $r_{(M/A)\backslash A'} = r_{(M\backslash A')/A}$. Soit $X \subset E \setminus (A \cup A')$. Alors,

$$r_{(M/A)\backslash A'}(X) = r_{(M/A)}(X) = r_M(X \cup A) - r_M(A) = r_{M\backslash A'}(X \cup A) - r_M(A) = r_{(M\backslash A')/A}.$$

□

Compte tenu de la Proposition 1.1.5 tout mineur de M est de la forme $M\backslash A/B = M/B\backslash A$ pour $A, B \subset E$ disjoints. Cette écriture n'est pas unique en général.

Proposition 1.1.6 $M \setminus T = M/T$ *si et seulement si* $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$.

Démonstration. On suppose que $M \setminus T = M/T$ et soit B une base de $M \setminus T$, alors B est une base de M/T et donc $B \cup B'$ est une base de M où B' est une base de $M|_T$. Alors, $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$.

Inversement, on suppose que $r(T)+r(E\setminus T) = r(M)$. Comme $\mathcal{I}(M/T) \subseteq \mathcal{I}(M\setminus T)$ alors pour montrer que $M \setminus T = M/T$ il suffit de montrer que $\mathcal{I}(M \setminus T) \subseteq \mathcal{I}(M/T)$. Soit $I \in \mathcal{I}(M \setminus T)$ alors I est un sous-ensemble d'une base B de $M \setminus T$ et B est contenu dans une base $B \cup B'$ de M. Comme, $r(M) = |B \cup B'| = |B| + |B'| = r(E \setminus T) + |B'|$ et $r(M) = r(E \setminus T) + r(T)$ alors $|B'| = r(T)$, c'est-à-dire, B' est une base de $M|_T$. Alors, B est une base de M/T et donc $I \in \mathcal{I}(M/T)$.

□

Proposition 1.1.7 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $T \subseteq E$. Alors,*
(i) $\mathcal{M}(G) \setminus T = \mathcal{M}(G \setminus T)$ et
(ii) $\mathcal{M}(G)/T = \mathcal{M}(G/T)$

Démonstration. La condition (i) est immédiat. Pour la condition (ii), on va montrer que $\mathcal{M}(G)/e = \mathcal{M}(G/e)$ et le résultat découle par récurrence sur $|T|$. Si e est une boucle alors $G/e = G \setminus e$ et $M(G)/e = M(G) \setminus e \stackrel{(i)}{=} M(G \setminus e)$. Supposons donc que e n'est pas une boucle de G. On pourra vérifier que si $I \subset E(G) - e$ alors $I \cup e$ ne contient pas de cycle de G si et seulement si I ne contient pas de cycle de G/e. Alors, $\mathcal{I}((M(G)/e) = \mathcal{I}(M(G/e))$.

□

Corollaire 1.1.8 *Tout mineur d'un matroïde graphique est graphique.*

Dans le chapitre **??** on verra que tout mineur d'un matroïde vectoriel est vectoriel. Toutefois, l'opération de contraction sur une classe de matroïdes n'est pas forcement fermé. Par exemple, le matroïde $M(G)$ où G est le graphe illustré en la figure **??** est transversal (avec $A_1 = \{1, 2, 7\}, A_2 = \{3, 4, 7\}, A_3 = \{5, 6, 7\}$). On pourra vérifier que $M(G/7)$ n'est plus transversal.

1.1.1 Exercices

Exercice 1.1 (a) Trouver un graphe G tel que $\mathcal{M}^*(G)$ est isomorphe à $\mathcal{M}(K_5 \setminus e)$ où $K_5 \setminus e$ dénote le graphe complet à 5 sommets moins une arête e quelconque.

(b) Soit $\mathcal{M}$ un matroïde sur E de rang r. Un ensemble F est dit *fermé* de $\mathcal{M}$ si $r(F \cup \{e\}) > r(F)$ pour tout $e \in E \setminus F$. Décrire les ensembles fermés d'un matroïde graphique en termes de graphes.

Exercice 1.2 Soit $\mathcal{M}$ le matroïde donné par la représentation Euclidienne suivante :

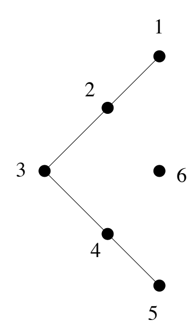

FIGURE 1.1 – Matroïde $\mathcal{M}$

(a) $\mathcal{M}$ est-il graphique ? transversal ?

(b) $\mathcal{M}^*$ est-il graphique ?

Exercice 1.3 Montrer que tout mineur d'un matroïde M peut s'écrire sous la forme $M\backslash A/B = M/B\backslash A$ pour $A, B \subset E(M)$ disjoints et B indépendant. Donner un exemple montrant qu'une telle écriture n'est pas unique en général.

Exercice 1.4 Soient M un matroïde et $e \in M$. Montrer que $M\backslash e = M/e$ si et seulement si e est un isthme ou une boucle de M.

Exercice 1.5 Soient M un matroïde et $e \in M$. Montrer que si e n'est ni un isthme ni une boucle de M les deux mineurs principaux $M\backslash e$ et M/e caractérisent M.

Exercice 1.6 Est-il vrai que $\mathbf{F}_7$, $M(K_5)^*$ et $M(K_{3,3})^*$ ne sont pas transversaux ?
Exercice 1.7 Est-il vrai que si $\mathcal{N}$ est un mineur d'un matroïde M alors $\mathcal{N}^*$ est également un mineur de M^* ?

1.2 Dualité

Lemme 1.2.1 *(*Lemme de pivotement*) Soient M un matroïde sur un ensemble E, B une base de M et $e \in E\backslash B$. Alors il existe un circuit unique $C \subset B \cup \{e\}$. On a $e \in C$. Pour tout $f \in B$ l'ensemble $B \cup \{e\}\backslash\{f\}$ est une base de M si et seulement si $f \in C$.*

Démonstration. Par définition d'une base $B \cup \{e\}$ n'est pas indépendant, donc il existe un circuit $C \subset B \cup \{e\}$. Nécessairement $e \in C$. Supposons qu'il existe un second circuit $C' \neq C$ contenu dans $B \cup \{e\}$. On a $e \in C \cap C'$, donc par élimination il existe un circuit contenu dans $(C \cup C')\backslash\{e\} \subset B$, contradiction.
Pour tout $f \in C$ l'ensemble $B \cup \{e\}\backslash\{f\}$ est indépendant. Sinon il existerait un circuit $C' \subset B \cup \{e\}\backslash\{f\}$, et on aurait $C' \neq C$, puisque $f \notin C'$, contredisant l'unicité de $C \subset B \cup \{e\}$. L'indépendant $B \cup \{e\}\backslash\{f\}$ ayant même cardinal que B est une base de M.

□
Le circuit C est appelé *circuit fondamental* de e relativement à B. L'ensemble $C\backslash\{e\}$ est le *support* de e dans B. La base $B \cup \{e\}\backslash\{f\}$ est dite obtenue à partir de B *par pivotement relativement à* e.

Proposition 1.2.2 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de M. Alors $\mathcal{B}^* = \{E\backslash B \mid B \in \mathcal{B}\}$ est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E.*

Démonstration. Soient B_1, B_2 deux bases de M et $B_1^* = E \setminus B_1$, $B_2^* = E \setminus B_2$. On va montrer $(B2)$, c'est-à-dire, si $e \in B_1^* \setminus B_2^* = (E\backslash B_1)\backslash(E\backslash B_2) = B_2\backslash B_1$ alors il existe $y \in B_2^* \setminus B_1^*$ tel que $B_1^* \setminus x \cup y$ est une base de M^*.

Soit C le circuit fondamental de e relativement à B_1. Comme $C \backslash B_2 \neq \emptyset$ alors soit $f \in C \backslash B_2$. D'après le lemme de pivotement $B_1 \cup \{e\} \backslash \{f\}$ est une base de M. Mais,

$$E \backslash (B_1 \cup \{e\} \backslash \{f\}) = (E \backslash B_1) \backslash \{e\} \cup \{f\}$$

, et en plus,

$$f \in C \setminus B_2 = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus C) = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus B_1) = B_2^* \setminus B_1^*$$

prouvant $(B2)$ pour les complémentaires des bases de M.

□

Le matroïde sur E ayant $\mathcal{B}^*$ pour ensemble de bases, noté M^*, est appelé le *dual* (ou *orthogonal*) de M. Une base de M^* est également appelée une *cobase* de M. Notons en corollaire immédiat de la Proposition 1.2.2

Corollaire 1.2.3 $r(M^*) = |E| - r(M)$ *et* $M^{**} = M$.

Proposition 1.2.4 *L'ensemble* $\mathcal{I}^*$ *des indépendants de* M^* *est donné par*

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subset E \textit{ tel qu'il existe } B \in \mathcal{B} \textit{ avec } X \cap B = \emptyset\}.$$

Proposition 1.2.5 *La fonction rang de* M^* *est donnée par*

$$r_M * (X) = |X| + r_M(E \backslash X) - r(M),$$

pour $X \subset E$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.2.4, $A \subset X$ est une base de X dans M^* si et seulement si il existe une base B de M telle que $X \backslash B = A$ et $B \backslash X$ est une base de $E \backslash X$ dans M. Par suite

$$\begin{aligned} r_M * (X) &= |A| = |X \backslash B| = |X| - |B \cap X| \\ &= |X| + |B \backslash X| - |B| \\ &= |X| + r_M(E \backslash X) - r(M). \end{aligned}$$

□

Les opérations de suppression et de contraction sont duales.

Proposition 1.2.6 *Soient* M *un matroïde sur un ensemble* E *et* $A \subset E$*. On a*
(i) $(M \backslash A)^* = (M^*)/A$.
(ii) $(M/A)^* = (M^*) \backslash A$.
(iii) $M/A = (M^* \setminus A)^*$.

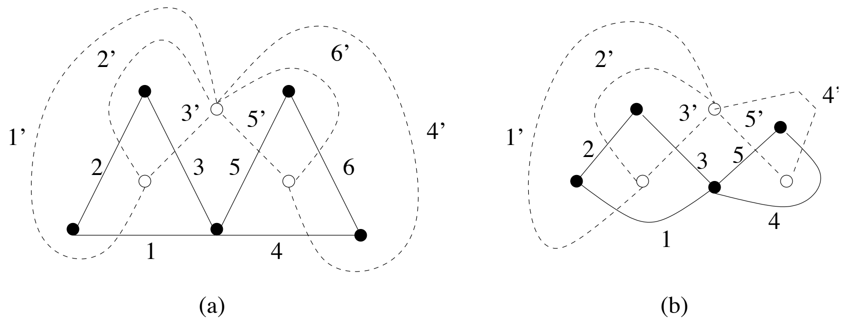

FIGURE 1.2 – (a) G et son dual G^* (b) $G^* \setminus 6'$ et $(G^* \setminus 6)^* = G/6$.

Exemple 1.2.7 *Soit $U_{n,r}$ un matroïde uniforme avec $n = |E|$ et soit $T \subseteq E$ avec $|T| = t$. Alors,*

$$U_{n,r} \backslash T = \begin{cases} U_{n-t,n-t} \text{ si } & n \geq t \geq n-r \\ U_{n-t,r} \text{ si } & t < n-r \end{cases}$$

On trouve $U_{n,r}/T$ en appliquant la Proposition 1.2.6.

$$U^*_{n,r} \backslash T = U_{n,n-r} \backslash T = \begin{cases} U_{n-t,n-t} \text{ si } & n \geq t \geq r \\ U_{n-r,n-t} \text{ si } & t < r \end{cases}$$

et donc

$$U_{n,r}/T = (U_{n,n-r} \backslash T)^* = \begin{cases} (U_{n-t,n-t})^* = U_{0,n-t} \text{ si } & n \geq t \geq r \\ (U_{n-r,n-t})^* = U_{r-t,n-t} \text{ si } & t < r \end{cases}$$

Exemple 1.2.8 *Soit G le graphe planaire de la Figure 1.2. On trouve $G/6$.*

Proposition 1.2.9 *L'ensemble $\mathcal{C}^*$ des circuits de M^* est donné par $\mathcal{C}^* = \{D \subset E \mid$ tel que $D \cap B \neq \emptyset$ pour toute base $B \in \mathcal{B}$ et D est minimal pour l'inclusion avec cette propriété$\}$*

Un circuit de M^* est également appelé un *cocircuit* de M. Soient B une base de M et $e \in B$. Dans M le *cocircuit fondamental* de e relativement à B est le circuit fondamental de e relativement à $E \backslash B$. D'après le lemme de pivotement $B \backslash \{e\} \cup \{f\}$ est une base de M pour tout f dans le cocircuit fondamental de e relativement à B.

Corollaire 1.2.10 *Les cocircuits d'un matroïde sont les complémentaires des hyperplans dans l'ensemble des éléments, i.e.*

$$\mathcal{C}^* = \{E \backslash H \mid H \in \mathcal{H}\}.$$

Démonstration. Un hyperplan d'un matroïde M sur E est un sous-ensemble de E ne contenant aucune base et maximal pour l'inclusion avec cette propriété. Donc, H est un hyperplan de M si et seulement si H est non-générateur de M tel que $H \cup y$ est un générateur de M pour tout $y \notin H$, de manière équivalente, si et seulement si $E \setminus H$ est dépendant en M^* et tel que $(E \setminus H) \setminus y$ est indépendants en M^*, c'est-à-dire, $E \setminus H$ est un circuit de M^*.

□

Proposition 1.2.11 *$X \subset E$ est une base de M si et seulement si X n'a pas l'intersection nulle avec chaque cocircuit de M, et X est minimal avec cette propriété.*

Démonstration. Soit B une base de M et supposons qu'il existe un cocircuit C^* de M tel que $B \cap C^* = \emptyset$. Alors, $E \setminus B$ contient C^* et donc $E \setminus B$ est indépendent en M, ce qui est une contradiction. Soit $X \subset B$ tel que $X \cap C^* \neq \emptyset$ pour tout circuit C^* de M. Alors, $E \setminus X$ ne contient pas de circuit de M^* et donc $E \setminus X$ est indépendant en M^*. Mais, comme $E \setminus X$ contient proprement la base $E \setminus B$ de M^* ce qui n'est pas possible.
Conversement, si X n'a pas intersection nulle avec tous circuit de M^* alors $E \setminus X$ ne contient pas de circuit et donc $E \setminus X$ est indépendant en M^*. Si X est minimal avec cette propriété alors $E \setminus X$ doit être un ensemble indépendant maximal de M^*. Alors, $E \setminus X$ est une base de M^*.

□
Le théorème suivant découle de la proposition précedente.

Théorème 1.2.12 *Un ensemble $Y \subset E$ est un cocircuit de M si et seulement si Y n'a pas intersection nulle avec chaque base de M, et Y est minimal avec cette propriété.*

Soient B une base de M et $e \in B$. Le corollaire précedent montre que le cocircuit fondamental D de e relativement à B est donné par $D = E \backslash cl_M(B \backslash \{e\})$.

Proposition 1.2.13 *Soit M un matroïde et $\mathcal{C}$ ses circuits. Soient,*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &= \{D \subset E : D \neq \emptyset, |C \cap D| \neq 1 \textit{ pour tout } C \in \mathcal{C} \textit{ et} \\ &\quad D \textit{ est minimal pour l'inclusion avec ces propriétés}\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'' &= \{D \subset E : D \neq \emptyset, |C \cap D| \neq 1 \textit{ pour tout } C \in \mathcal{C} \textit{ et pour tous } x, y \in D, \\ &\quad x \neq y \textit{ il existe } C \in \mathcal{C} \textit{ tel que } C \cap D = \{x, y\}\}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}' = \mathcal{C}''$.

Démonstration. On montre que $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}'$. Soit $D \in \mathcal{C}^*$ et supposons qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $|C \cap D| = 1$, soit $C \cap D = \{e\}$. Puisque $E \setminus D$ est un hyperplan, l'ensemble $(E \setminus D) \cup \{e\}$ contient une base. Par la propriété de la base incomplète il existe une base B telle que $C \setminus \{e\} \subseteq B \subseteq (E \setminus D) \cup \{e\}$. Comme $C \not\subseteq B$ on a $B \subseteq E \setminus D$, contredisant la Proposition 1.6.
Montrons que D est minimal avec la propriété $|C \cap D| \neq 1$ pour tout circuit $C \in \mathcal{C}$. Considérons D' tel que $\emptyset \neq D' \subset D$ et $D \neq D'$. Par la Proposition 1.6 il existe une base B de M telle que $B \cap D' = \emptyset$. Alors pour $e \in D'$ on a $C \cap D' = \{e\}$ où C est le circuit fondamental de e relativement à B.

Inversement on montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^*$. Soit $D \in \mathcal{C}'$. Soit B une base de M. Si $B \cap D = \emptyset$ on a $C \cap D = \{x\}$ pour C circuit fondamental de $x \in D$ relativement à B. Donc $D \cap B \neq \emptyset$ pour toute base B de M. Si $D \notin \mathcal{C}^*$ il existe $D' \subset D$ $D' \neq D$ tel que $D' \in \mathcal{C}^*$. Soit $x \in D'$ et $y \in D \backslash D'$. Par définition de $\mathcal{C}'$ il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $C \cap D = \{x, y\}$, d'où $C \cap D' = \{x\}$, contredisant $D' \in \mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}'$.

On a clairement $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}' = \mathcal{C}^*$. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $D \in \mathcal{C}'$. On vérifie facilement en utilisant la propriété d'élimination que la relation définie sur D par $x = y$ *ou bien* $x \neq y$ *et il existe* $C \in \mathcal{C}$ *tel que* $C \cap D = \{x, y\}$ est une relation d'équivalence. Soient $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_k$ les classes d'équivalence. Si $k = 1$ on a $D \in \mathcal{C}''$. Supposons $k \geq 2$. Par la minimalité de D il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $|C \cap (D_2 + \ldots + D_k)| = 1$. Supposons C choisi avec cette propriété de façon que $|C \cap D|$ soit minimal. On a $|C \cap D_1| \neq 0$ par définition de $\mathcal{C}'$, et $|C \cap D_1| \neq 1$ par définition de $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Soient $x, y \in C \cap D_1 x \neq y$ et $z \in C \cap (D_2 + \ldots + D_k)$. Par définition de D_1 il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $X \cap D = \{x, y\}$. Par élimination de x entre C et X il existe $C' \in \mathcal{C}$ tel que $z \in C' \subset (C \cup X) \backslash \{x\}$. D'où une contradiction car $|C' \cap (D_2 + \ldots + D_k)| = 1$ et $|C' \cap D_1| < |C \cap D_1|$.

□

Corollaire 1.2.14 *(double-échange des bases)*
$(B2')$ *Pour tous* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *et* $x \in B_1 \backslash B_2$ *il existe* $y \in B_2 \backslash B_1$ *tel que* $B_1 \backslash \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ *et* $B_2 \backslash \{y\} \cup \{x\} \in \mathcal{B}$.

Démonstration. Soit C le circuit fondamental de x relativement à B_2 et D le cocircuit fondamental de x relativement à B_1. On a $C \cap D \neq \emptyset$ car $x \in C \cap D$, donc d'après la Proposition 1.2.13 $|C \cap D| \geq 2$. Alors $y \in (C \cap D) \backslash \{x\}$ vérifie le corollaire d'après le lemme de pivotement.

□
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *cocycle* de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est *élémentaire* si et seulement si il est l'ensemble des arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets d'une composante connexe induisant chacun un sous-graphe connexe.

Théorème 1.2.15 *X est un cocycle d'un graphe $G = (E, V)$ si et seulement si c'est un sous-ensemble minimal de E ayant une intersection non nulle avec chaque forêt génératrice de G.*

Le résultat suivant découle du théorème précendant et Théorème 1.2.12.

Théorème 1.2.16 *Soit $\mathcal{C}(G)^*$ l'ensemble de cocycles élémentaires d'un graphe G. Alors, $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de circuit d'un matroïde sur E.*

Le matroïde ainsi obtenu est appelé matroïde de *cocycle* de G, noté $B(G)$ (anglais *bond*).

Théorème 1.2.17 *$M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = (B(G))^*$.*

Est-il vrai que si M est graphique alors M^* est également graphique ? par exemple, si $M = M(K_4)$ alors M^* est graphique car $M(K_4) = M^*(K_4)$. Cette propriété n'est pas vrai en générale. Par exemple, $M^*(K_5)$ n'est pas graphique. Pour montrer ceci on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.2.18 *Si M est graphique alors il existe un graphe connexe G tel que $M = M(G)$.*

Démonstration. Si M est graphiqe alors il existe un graphe H tel que $M = M(H)$. Supposons que H admet plusieurs composantes connexes $H_1, \ldots, H_k$. On construit un graphe G à partir de H en identifiant les sommets $x_1, \ldots, x_k$ dans un seul avec $x_i \in H_i$. On a $|E(G)| = |E(H)|$ avec G connexe. En plus, par construction, $X \subset E$ est un cycle dans H si et seulement si X est un cycle de G et donc $M(H)$ est isomorphe à $M(G)$ et donc isomorphe à M.

□

Proposition 1.2.19 *$M = M^*(K_5)$ n'est pas graphique*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}^*(K_5)$ est graphique alors il existe un graphe G connexe tel que $M(G) \sim M^*(K_5)$. On sait que $r(M(K_5)) = 4$ et donc $r(M^*(K_5)) = 10 - 4 = 6 = |V(G)| - 1$.
Comme le nombre d'éléments de $M^*(K_5) = 10$ alors on en déduit que G doit avoir 10 arêtes et 7 sommets. On remarque que la moyenne des degrés de G est $\frac{\sum d(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{20}{7} < 3$ et donc il existe un sommet v de degré ≤ 2. Finalement, les arêtes incidentes à v forment un cocycle de $M^*(K_5)$ de taille ≤ 2 et donc il existe un cycle dans $(M^*(K_5))^* = M(K_5)$ de longueur au plus 2, ce qui n'est pas le cas.

□

Un matroïde M est dit *co-graphique* s'il existe un graphe G tel que M est isomorphe à $B(G)$. On peut montrer facilement que $U_{2,4}$ n'est pas cographique. On donnera une caractérisation de matroides co-graphiques en chapitre **??**

1.2.1 Exercices

Exercice 1.8 Montrer que le matroïde $M^*(K_{3,3})$ n'est pas graphique (voir Proposition 1.2.19).

Exercice 1.9 Soit $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux matroïdes sur l'ensembles E_1 et E_2, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ respectivement. Montrer que $(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)^* = \mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2^*$.

Exercice 1.10 Soit B une base d'un matroïde et soit $y \in B$ et $x \in E \setminus B$.
(i) Montrer que le cocircuit relatif à la base $E \setminus B$, $C^*_{E\setminus B}(y)$ est l'unique cocircuit disjoint de $B \setminus y$.
(ii) Montrer que $y \in C_B(x)$ si et seulement si $x \in C^*_{E\setminus B}(y)$.

Exercice 1.11 On dit que $A, B \subset E$ sont *comodulaires* si $r(A)+r(B) = r(A\cap B)+r(A\cup B)$. Montrer que deux circuits fondamentaux relativement à une même base sont comodulaires.

Exercice 1.12 Soit M un matroïde sur un ensemble E et $X, Y \subset E$. Montrer que X et Y sont comodulaires dans M si et seulement si $E\backslash X$ et $E\backslash Y$ sont comodulaires dans M^*.

Exercice 1.13 (*axiomes autoduaux des circuits*) Soient E un ensemble et $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset 2^E\backslash\{\emptyset\}$ deux antichaînes de parties non vides. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des circuits et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des cocircuits d'un matroïde si et seulement si la propriété (CC) suivante est vérifiée

(CC) pour tout $e \in E$ et toute partition $E\backslash\{e\} = S + T$ ou bien il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $e \in X \subset S \cup \{e\}$ ou bien il existe $Y \in \mathcal{C}'$ tel que $e \in Y \subset T \cup \{e\}$.

1.3 Somme directe et connexité

Proposition 1.3.1 *Soient M un matroïde sur un ensemble E et $E = E_1 + E_2$ une partition de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $r_M(E) = r_M(E_1) + r_M(E_2)$
(ii) *si $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ sont des indépendants de M alors $X \cup Y$ est indépendant*
(iii) *pour tout circuit C de M on a $C \subset E_1$ ou $C \subset E_2$.*
(iv) *pour $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ on a $r_M(X \cup Y) = r_M(X) + r_M(Y)$.*

Démonstration. Les équivalences des propriétés $(ii), (iii), (iv)$ sont immédiates. La propriété (ii) implique trivialement (i). Montrons que (i) implique (ii). Il suffit de considérer le cas où X est une base de $M(E_1)$ et Y une base de $M(E_2)$. Alors $X \cup Y$ est un générateur de M. D'après (i) on a $|X \cup Y| = |X| + |Y| = r_M(E_1) + r_M(E_2) = r_M(E)$. Donc $X \cup Y$ étant un générateur de M de cardinal $r(M)$ est une base.

□

Lorsqu'une partition $E = E_1 + E_2$ satisfait les propriétés équivalentes de la Proposition 1.3.1 on dit que M est *somme directe* des sous-matroïdes $M(E_1)$ et $M(E_2)$ et on écrit

$$M = M(E_1) \oplus M(E_2)$$

Un matroïde est dit *connexe* s'il n'est pas somme directe non triviale (*non-connexe* autrement).
Un matroïde s'écrit de façon unique comme somme directe de matroïdes connexes. En effet d'après la Proposition 1.3.1 on a $M = \bigoplus_{i=1}^{i=k} M(E_i)$ où les ensembles E_i sont les composantes connexes de la famille de parties de $E(M)$ constituée des circuits de M. Ces composantes E_i sont appelées les *composantes connexes* de M.
Notons que d'après la Proposition 1.3.1 une composante connexe d'un matroïde est soit un isthme de M, soit une boucle, soit un ensemble S de cardinal $|S| \geq 2$ tel que pour tous $x, y \in S$ $x \neq y$ il existe un entier k et des circuits $C_0, C_1, \ldots, C_k$ avec $x \in C_0$, $y \in C_k$ et $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. En fait il existe toujours une telle chaîne de circuits de longueur $k = 1$. En effet

Proposition 1.3.2 *Un matroïde est connexe si et seulement si deux éléments distincts quelconques sont contenus dans un circuit.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des circuits du matroïde M. Il suffit de montrer que si $x \in X \in \mathcal{C}$ et $y \in Y \in \mathcal{C}$ avec $X \cap Y \neq \emptyset$ alors il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $x, y \in Z$.
Considérons $x, y \in M$ tels qu'il n'existe pas de $Z \in \mathcal{C}$ avec $x, y \in Z$, et supposons $X, Y \in \mathcal{C}$ choisis avec les propriétés ci-dessus de façon que $|X \cup Y|$ soit minimal. Soit $e \in X \cap Y$. Par élimination il existe $X' \in \mathcal{C}$ tel que $x \in X' \subset (X \cup Y)\backslash\{e\}$. On a $X' \cap (Y\backslash X) \neq \emptyset$ donc par minimalité $X\backslash Y \subset X'$. De même il existe $Y' \in \mathcal{C}$ tel que $y \in Y' \subset (X \cap Y)\backslash\{e\}$ et $Y\backslash X \subset Y'$.
On a $x \in X'$, $y \in Y'$ et $X' \cap Y' \neq \emptyset$. Mais $X' \cup Y' \subset (X \cup Y)\backslash\{e\}$ contredit l'hypothèse de minimalité.

□
Le résultat suivant caractérise un matroïde non connexe en terme d'indépendants.

Proposition 1.3.3 *Un matroïde M est non connexe si et seulement si pour un ensemble quelconque $T \subset E$, on a $\mathcal{I}(M) = \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}(M|T), I_2 \in \mathcal{I}(M|(E \setminus T))\}$*

On a donc que si $M(E) = M(E_1) \oplus M(E_2)$ avec $E = E_1 + E_2$ alors

$$\mathcal{I}(M(E)) = \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}(M(E_1)), I_2 \in \mathcal{I}(M(E_2))\}.$$

La connexité d'un matroïde graphique caractérise la 2-connexité d'un graphe.

Proposition 1.3.4 *Soit G un graphe sans boucle et sans sommets isolés. Si $|V(G)| \geq 3$ alors $M(G)$ est connexe si et seulement si G est 2-connexe.*

Démonstration. (*Nécessité*) Supposons que $M(G)$ est connexe et on montrer que G est 2-connexe. Soient $x, y, z \in V(G)$ et soit $G' = G \setminus z$ tel que $x, y \in V(G')$. Soit P une chaîne reliant x et y dans G. Si les arêtes de P ne contienent pas z comme l'une de ses extrémité alors P est une chaîne reliant x et y dans G'. Sinon, il existe deux sommets $z_1, z_2 \in V(G')$, $z_1 \neq z_2$ tels que z_1, z_2 sont adjacents à z. Comme $M(G)$ est connexe il existe un cycle C dans G contenant les arêtes $\{z, z_1\}$ et $\{z, z_2\}$, d'où on peut former une chîne P' de z_1 à z_2 (sans passer par z) dans G'. Alors, $P[x, z_1] \cup P'[z_1, z_2] \cup P[z_2, y]$ est une chaîne reliant x à y dans G'.

(*Suffisance*) Supposons que G est 2-connexe. On procède par contradiction, supposons $M(G)$ admet au moins deux composantes connexes. Soit G_1 le graphe induit par l'une de composantes connexes. Comme G n'a pas de boucles alors $|V(G_1)| \geq 2$ avec $G_1 \neq G$. Alors, G admet exactement une arête $\{x, y\}$ avec l'une de ses extrémités dans G_1 (disons que $x \in V(G_1)$. On a $\{x, y\} \notin E(G_1)$. Comme G est 2-connexe alors $G \setminus x$ admet une chaîne P_{yz} reliant y à un sommet $z \in G_1 \setminus x$ avec $E(P_{yz}) \cap (G_1 \setminus x) = \emptyset$. Comme G_1 est connexe, il admet une chaîne P_{zx} reliant z à x. Alors, la chaîne $P_{yz} \cup P_{zx}$ et l'arête $\{x, y\}$ forment un cycle dans G ce qui est en contradiction avec le fait que $\{x, y\} \notin E(G_1)$.

□

1.3.1 Exercices

Exercice 1.14 Montrer qu'un matroïde et son dual ont les mêmes composantes connexes.

Exercice 1.15 Soit M un matroïde sur E. Pour chaque $e \in E$, soit

$$\gamma(e) = \{e\} \cup \{f \in E \mid \text{il existe un circuit de } M \text{ contenant } e \text{ et } f\}.$$

On définie la relation γ sur E par $e\gamma f$ si et seuelemnt si $e \in \gamma(f)$.
Montrer que γ est une rélation d'équivalence.

Exercice 1.16 Montrer que les classes de matroïdes graphiques, co-graphiques, transversals, réguliers et $\mathbb{F}$-représentables sont fermées sur l'opération de somme directe.

Exercice 1.17 Soient M un matroïde connexe et $e \in M$. Montrer que $M \backslash e$ ou M/e est connexe.

Exercice 1.18 Soient M un matroïde sur E et B une base de M. Pour $e \in E \backslash B$ on désigne par C_e le circuit fondamental de e relativement à B. Montrer que M est connexe si et seulement la famille d'ensembles $(C_e \cap B)_{e \in E \backslash B}$ est connexe de réunion B.

Exercice 1.19 Soient $M_1, M_2, \ldots, M_k$ des matroïdes sur des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tels que $E_i \cap E_j = \{e\}$ pour $1 \leq i < j \leq k$. On pose $E = \bigcup_{1 \leq i \leq k} E_i$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E de la forme suivante : ou bien un circuit de M_i ne contenant pas e pour $1 \leq i \leq k$, ou bien $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ pour C_i circuit de M_i contenant e. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des circuits d'un matroïde M sur E.

Ce matroïde noté $\mathbf{Ser}(M_1, M_2, \ldots, M_k; e)$ est appelé la *connexion en série* des matroïdes $M_i, 1 \leq i \leq k$.

Exercice 1.20 On considère un matroïde connexe M sur E et $e \in E$ tel que $M \backslash e$ ne soit pas connexe. Soient E_i $i = 1, 2, \ldots, k$ les composantes connexes de $M \backslash e$. On pose $M_i = M/(E \backslash (E_i \cup \{e\}))$. Montrer que $M = \mathbf{Ser}(M_1, M_2, \ldots, M_k; e)$.