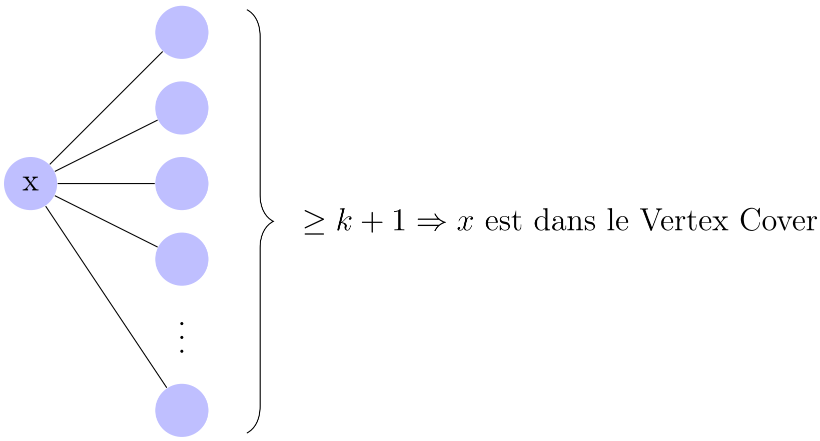
Chloé DESDOUITS 20 décembre 2012

Complexité paramétrée et règles de réduction

1 Règles en étoile

Exemple : Vertex Cover

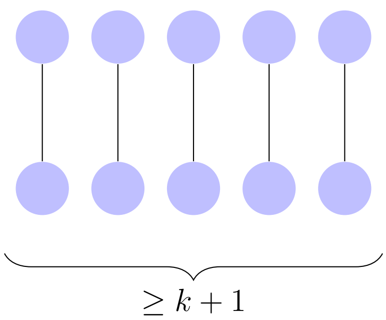


Ceci est une règle en étoile.

Définition :

Un tournesol dans un hypergraphe d-uniforme $\mathscr{H} = (V, \xi)$ est un ensemble $\mathscr{S} = \{S_1, \ldots, S_l\} \subseteq \xi \ |\forall (i,j) \in \{1, \ldots, l\}^2, i \neq j, \exists C = S_i \cap S_j$. Les S_i sont les pétales du tournesol et C est le cœur du tournesol.

Exemple : tournesol de cœur $\emptyset$ dans un graphe 2-uniforme



C'est un tournesol de cœur vide et de taille supérieure à $k+1$ donc il n'y a pas de Vertex Cover de taille k.

Lemme 1.1 (du tournesol) *Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{H} = (V, \xi)$ un hypergraphe d-uniforme. Si $|\xi| > (k-1)^d.d!$ alors $\mathscr{H}$ contient un tournesol T de taille k. De plus, T est calculable en temps polynomial.*

Exemple : dans un hypergraphe 2-uniforme, $|\xi| > 2k^2 \Rightarrow \exists$ un tournesol de taille $k+1$. Si ce tournesol a un cœur vide, il n'existe pas de Vertex Cover de taille k. Sinon on prend le sommet du cœur du tournesol dans le Vertex Cover, on supprime ce sommet du graphe et on recherche un Vertex Cover de taille $k-1$.

Exemple d'application du lemme du tournesol pour un problème type "suppression de k sommets pour obtenir un graphe sans sous-graphe H induit". Prenons pour exemple H un chemin de longueur 3. En vertu du lemme du tournesol, s'il y a plus de $2k^2$ arêtes dans le graphe, il existe un tournesol de taille $k+1$. Comme nous sommes dans un graphe, le cœur est soit vide, soit de taille 1. Si le cœur est de taille 1, les pétales du tournesol forment 2 à 2 des chemins de taille 3. On supprime donc le sommet du cœur et on se ramène au problème de la suppression de $k-1$ sommets. Si le cœur est vide, il faut trouver un autre tournesol.

Preuve par récurrence sur d

$d = 1$ trivial

$d \geq 2$ et supposons que $\mathscr{H} = (V, \xi)$ est $(d+1)$-uniforme avec $|\xi| > (k-1)^{d+1}(d+1)!$

Soit $\mathscr{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ une famille d'hyperarêtes 2 à 2 disjointes. Si $l \geq k$, c'est terminé. *Hypothèse* : $l < k$. Posons $S = \bigcup_{S_i \in \mathscr{S}} S_i$. Par construction de $\mathscr{S}$, toute hyperarête de ξ intersecte S. Par conséquent, il existe un sommet v contenu dans au moins $\frac{|\xi|}{|S|}$ hyperarêtes. Or $\frac{|\xi|}{|S|} > \frac{(k-1)^{d+1}(d+1)!}{(k-1)(d+1)} = (k-1)^d.d!$

Soit $\mathscr{H}' = (V \setminus v, \xi')$, $\xi' = \{e \setminus \{v\} | e \in \xi\}$. $\mathscr{H}'$ est d-uniforme et par l'hypothèse de récurrence, contient au moins $(k-1)^d.d!$ hyperarêtes. Par hypothèse de récurrence, il existe un tournesol T' de taille k dans $\mathscr{H}'$. En ajoutant v à chaque pétale de T', on obtient un tournesol T de taille k dans $\mathscr{H}$.

Définition : *Rappel sur le problème HITTING SET*

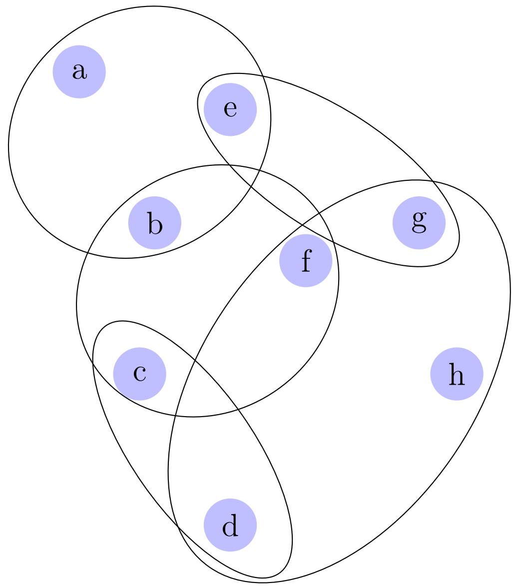
étant donnés un ensemble $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, une liste $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de sous-ensembles de A, et un nombre k. Il existe un Hitting Set H de taille k ssi $H \subseteq A, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, H \cap B_i \neq \emptyset$.

Définition : *d-HITTING SET*

Un d-HITTING SET est un HITTING SET portant sur des sous-ensembles B_i de A de taille au plus d : $\mathscr{H} = (V, \xi) | \forall e \in \xi, |e| \leq d$.

Remarque VERTEX COVER ≡ 2-HITTING-SET

Exemple



La figure ci-contre représente un hypergraphe dans lequel $\{b, c, g\}$ est un 4-HITTING SET de taille 3.

Lemme 1.2 *Si $\mathscr{H}$ possède un tournesol de taille $k + 1$, alors tout HITTING SET de taille k sur $\mathscr{H}$ intersecte le cœur $C(T)$ de ce tournesol.*

Preuve Supposons qu'il existe un HITTING SET H de taille k qui n'intersecte pas le cœur du tournesol T de taille $k + 1$. H doit toucher tous les pétales du tournesol par définition du HITTING SET. Or, par définition du tournesol, les pétales ont pour seule intersection le cœur du tournesol. Donc H doit contenir au moins un élément par pétale. Or il y a $k + 1$ pétales. Donc H ne peut pas être de taille k. □

Théoreme 1.3 *le problème d-HITTING SET paramétré par la taille de la solution k admet un noyau de taille $\mathcal{O}(k^d.d'.d^2)$.*

Preuve Si $\mathscr{H}$ possède un tournesol de taille $k+1$, alors toute solution intersecte le cœur $C(T)$ de T. Alors :

– si $C(T) = \emptyset$ alors $\nexists HITTING\_SET$ de taille k,

– sinon on réduit : on remplace les hyperarêtes de T par une nouvelle hyperarête $C(T)$. $\forall d' \leq d, \mathscr{H} = (V, \xi_{d'})$ avec $\xi_{d'} = \{E \in \xi, |E| = d'\}$. On considère d' par ordre décroissant. Pour chaque valeur de d', on applique le lemme du tournesol. Après réduction, on a $\forall d', |\xi_{d'}| \leq k^{d'}.d'! \leq k^d.d! \Rightarrow |\xi| \leq k^d.d!d \Rightarrow |V| \leq k^d.d'.d^2$. Il reste à supprimer les sommets isolés.

Remarque VERTEX COVER équivaut à supprimer au plus k sommets d'un graphe G pour obtenir un graphe H sans K_2 induit : $VC \equiv \{K_2\}$-vertex deletion

Question : le noyau sur d-HITTING SET implique-t-il un noyau polynomial sur le problème $\mathscr{F}$-vertex deletion si $\mathscr{F}$ est fini ?

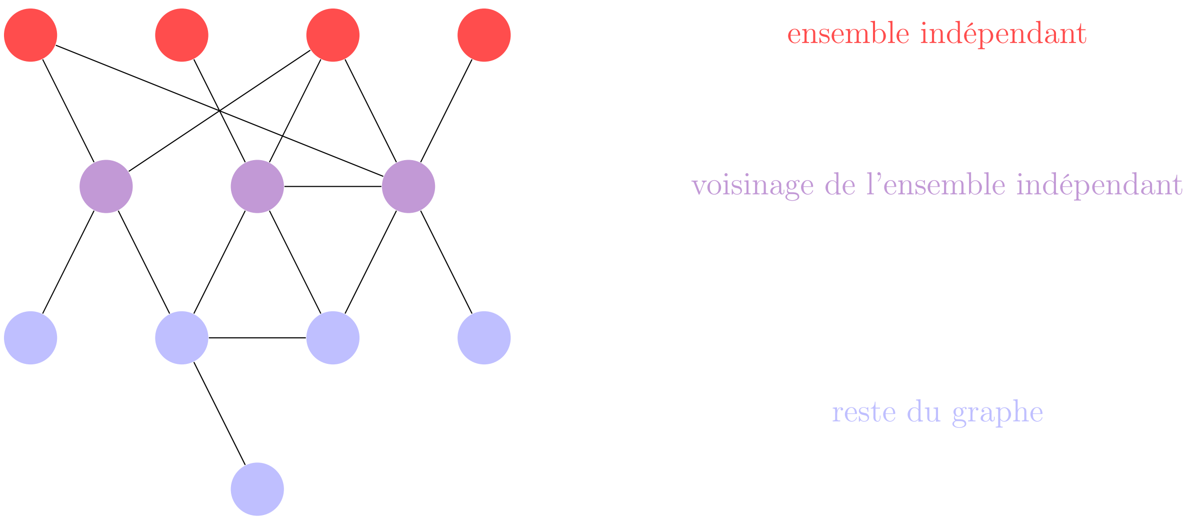
On peut utiliser le lemme du tournesol : au lieu de remplacer le tournesol par son cœur, dès que j'ai un très gros tournesol ($\geq k+1$), je peux me soucier uniquement d'une partie de ce tournesol.

Lemme 1.4 *Soit* $\mathscr{H} = (V, \xi) | \forall E \in \xi, |E| \leq d$. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$.
Si $|\xi| > (k+1)^d d!$
Alors $\exists \xi' \subset \xi | X$ *est une couverture (HS) de taille* k *de* $\mathscr{H}$ *sis* α *est une couverture (HS) de taille* k *de* $\mathscr{H}' = (V, \xi')$.

2 Règles de réduction globales

Réduction en couronne pour VERTEX COVER

Définition : *couronne*



Lemme 2.1 *Soit* $B = (I, N, E')$ *une couronne dans un graphe* $G = (V, E)$, *alors :*
$|VERTEX\_COVER(G)| = |VERTEX\_COVER(G \setminus B)| + |N|$.