

Théorie de matroïdes

Université Montpellier II
I3M

Jorge Ramirez Alfonsin¹

14 décembre 2010

1. Merci de me les faire parvenir , toute remarque constructive ou notification d'erreur.

Chapitre 1

Introduction : exemples fondamentaux

1.1 Introduction

Le mot *matroïde* apparaît pour la première fois dans un article fondateur publié par H. Whitney en 1935. Dans cet article la structure de matroïde est introduite comme abstraction ensembliste des relations de dépendance entre les vecteurs colonnes d'une matrice, d'où le suffixe 'oïde' indiquant qu'il s'agit d'une structure proche d'une matrice. A la même époque, partant d'un point de vue différent - la notion de fermeture géométrique - S. MacLane parlait de ϕ -espace. Le mot 'matroïde', à l'euphonie quelquefois contestée, fait référence à l'aspect algébrique de la structure. La première monographie sur les matroïdes, 'Combinatorial geometries', publié H. Crapo et G-C. Rota en 1970, met l'accent sur l'aspect géométrique des matroïdes, envisagés comme généralisation des géométries projectives finies. Citons également le terme *espace d'indépendance*, utilisé dans le livre 'Transversal Theory' de L. Mirsky publié en 1971. Les tentatives pour modifier la terminologie de Whitney n'ont eu qu'un succès relatif et aujourd'hui le terme 'matroïde' paraît définitivement établi.

La diversité de ces termes reflète la diversité des objets pouvant être utilisés pour définir un matroïde. Ainsi les *indépendants*, les *bases*, les *circuits*, la *fonction rang*, la *fonction fermeture*, les *fermés*, les *hyperplans*, etc... d'un matroïde permettent chacun de le caractériser. Chacun de ces objets donnant lieu à plusieurs axiomatiques, le chapitre des fondements de la théorie des matroïdes est bien fourni. La structure de matroïde peut être obtenue en retenant les principales propriétés ensemblistes, i.e. combinatoires, de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Cependant les propriétés définissant les matroïdes ne caractérisent pas les espaces vectoriels : les matroïdes constituent une classe d'objets beaucoup plus vaste. Ainsi d'autres exemples naturels de matroïdes peuvent être construits à partir des graphes, des groupes, des corps, des ensembles ordonnés, etc. donnant lieu à une grande variété d'applications. La structure de matroïde a permis d'établir de très nombreux résultats dans ces divers domaines, et de plus, souvent, elle a unifié les preuves en les rendant à la fois plus simples et plus générales. La théorie des matroïdes est aujourd'hui un des outils fondamentaux de la combinatoire structurelle.

Du point de vue algébrique, les matroïdes ne distinguent dans les relations de dépendances linéaires que deux types de coefficients 0 et $\neq 0$. Du point de vue géométrique les matroïdes axiomatisent les relations d'incidence dans les configurations de points : colinéarité, coplanarité, etc.

A titre d'exemple on vérifiera que les incidences des trois configurations de la Figure 1.1 sont les mêmes : les matroïdes des ces trois configurations sont identiques.

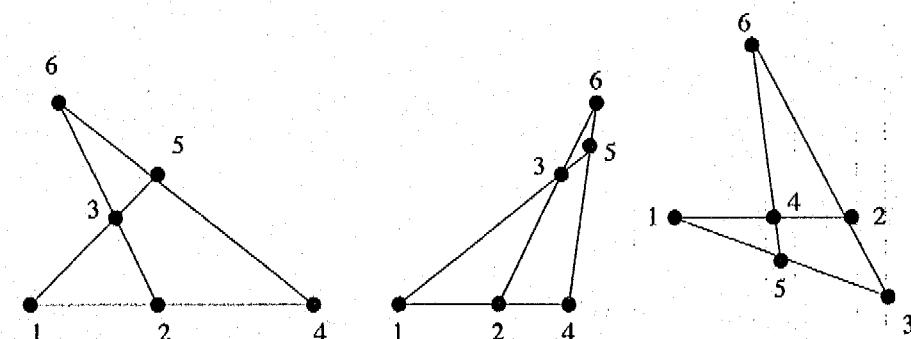


FIGURE 1.1 – Exemple

Remarquons par contre que les positions relatives sont les mêmes dans les configurations (a) et (b) mais sont différentes dans (c). Signalons qu'une théorie plus fine que celle des matroïdes, la théorie des *matroïdes orientés*, introduite au début des années 1970 permet de rendre compte de ces différences. La théorie des matroïdes orientés a des applications à la convexité, aux polyèdres, en programmation linéaire. Dans les années 1980 diverses structures généralisant les matroïdes et matroïdes orientés ont été définies. Citons entre autres les *greedoïdes*, les Δ -*matroïdes*, les *matroïdes de Coxeter*.

1.2 Exemples fondamentaux

Il existe de nombreux exemples naturels de matroïdes. On peut ainsi construire des matroïdes à partir de graphes, d'espaces vectoriels, de dépendance algébrique, de groupes, d'ensembles ordonnés, etc. Les exemples fondamentaux étudiés par Whitney sont les *matroïdes de cycles* et de *cocycles* de graphes, et de *dépendances linéaires* dans les espaces vectoriels. La terminologie des matroïdes provient de ces deux exemples. *Indépendants*, *bases*, *rang* (= dimension), *fermeture*, *fermés* (= sous-espaces), *hyperplans* sont des termes d'algèbre linéaire, *circuits*, *cocircuits* des termes de théorie des graphes.

Dans cette première approche nous définirons les matroïdes par leurs circuits. Les circuits d'un matroïde $M = (E, C)$ sur un ensemble d'éléments E sont des parties de E . Nous verrons au Chapitre 2 les propriétés caractérisant l'ensemble C des circuits des matroïdes. Dans la présente introduction nous décrirons quelques exemples classiques.

1.2.1 Matroïdes des cycles d'un graphe

Soit $G = (S, E)$ un graphe (orienté ou non). Les éléments du *matroïde $C(G)$ des cycles* de G sont les arêtes de G .

Exemple 1.2.1 Les circuits de $C(G)$ sont les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires¹ de G . Un matroïde de cycles de graphe est dit *graphique*.

Les circuits du matroïde des cycles du graphe complet K_4 (illustré dans la Figure 1.2) est

$$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

1. Un *cycle élémentaire* de G est un parcours fermé $(x_0, e_1, x_1, e_1, \dots, x_{t-1}, e_t, x_t = x_0)$ $x_i \in S$ $e_i \in E$ dont les sommets (et donc les arêtes) sont tous distincts.

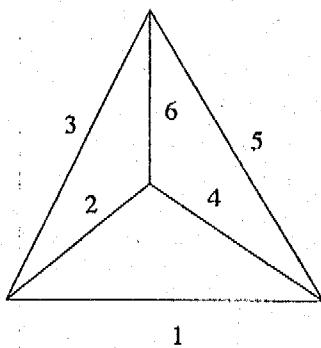


FIGURE 1.2 -- Graphe complet à 4 sommets.

Les circuits sont écrit dans l'ordre lexicographique des éléments. Nous désignerons ce matroïde par $\mathcal{M}(K_4)$.

1.2.2 Matroïde des cocycles d'un graphe

Soit $G = (E, S)$ un graphe (orienté ou non). Les éléments du matroïde $B(G)$ des cocycles de G sont les arêtes de G . Les circuits de $B(G)$ sont les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires² de G . Un matroïde de cocycles de graphe est dit *cographique*.

Exemple 1.2.2 Nous noterons $\mathcal{M}(K_4)^*$ le matroïde des cocycles du graphe K_4 . Les circuits de $\mathcal{M}(K_4)^*$ (voir Exemple 1.2.1) sont les suivants :

$$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

Nous montrerons au Chapitre 2 que les circuits de $\mathcal{M}(K_4)^*$ peuvent s'obtenir combinatoirement à partir des circuits de $\mathcal{M}(K_4)$: premier exemple d'une dualité faisant passer d'un matroïde \mathcal{M} à son dual \mathcal{M}^* . Les circuits de \mathcal{M}^* sont également appelés *cocircuits* de \mathcal{M} .

On peut remarquer que la bijection $i \rightarrow 7 - i$ fait passer des cocircuits de $\mathcal{M}(K_4)$ à ses circuits. Cette particularité provient de ce que le graphe K_4 planaire est isomorphe à son dual planaire. En effet nous verrons au Chapitre 4 que le matroïde des cocycles d'un graphe planaire G est isomorphe au matroïde des cycles de son dual planaire G^* .

1.2.3 Matroïde vectoriels

Soient \mathbb{F} un corps, V un espace vectoriel sur \mathbb{F} , E un ensemble et $(v_e)_{e \in E}$ une famille de vecteurs de V . Le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{F} de la famille de vecteurs est le matroïde sur E dont les circuits sont les parties $C \subset E$ minimales pour l'inclusion telles que les vecteurs $v_e, e \in C$ soient linéairement dépendants sur \mathbb{F} .

Exemple 1.2.3 Considérons les vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés par les colonnes de la matrice

2. Dans un graphe connexe $G = (S, E)$ un *cocycle élémentaire* est l'ensemble des arêtes joignant A et B pour une partition $S = A + B$ de l'ensemble des sommets telle que les deux sous-graphes de G sur A et B soient connexes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{R} des vecteurs colonnes est le matroïde $M(K_4)$ (voir Figure 1.3).

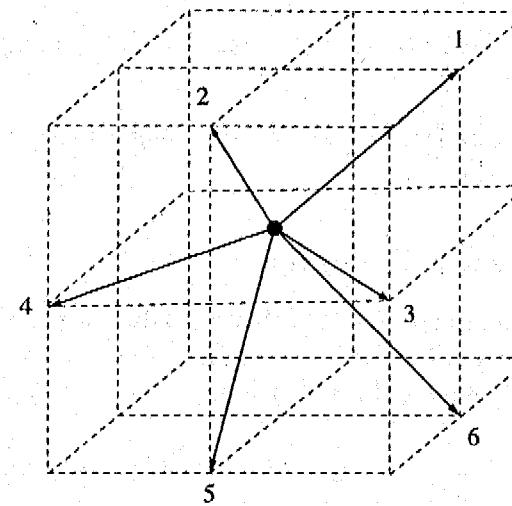


FIGURE 1.3 – Représentation géométrique de $M(K_4)$.

Un matroïde de dépendance linéaire est dit *vectoriel*. Un matroïde est *binaire* s'il est vectoriel sur le corps fini à 2 éléments $CG(2)$, *ternaire* s'il est vectoriel sur $CG(3)$. Un matroïde vectoriel sur tout corps est dit *régulier*. Les matroïdes graphiques et cographiques sont réguliers.

1.2.4 Note sur la dépendance affine

Soient \mathbb{F} un corps, E un ensemble et $(p_e)_{e \in E}$ une configuration de points dans un espace \mathbb{F}^d . (rappel) Des points p_i $i = 1, 2, \dots, k$ sont dit *affinement dépendants* s'il existe des coefficients λ_i non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$.

Le *matroïde des dépendances affines* sur \mathbb{F} de la configuration de points est le matroïde sur E dont les circuits sont les parties $C \subset E$ minimales pour l'inclusion telles que les points p_e $e \in C$ soient *affinement dépendants* sur \mathbb{F} .

Les matroïdes de dépendances affines sont identiques aux matroïdes de dépendances linéaires (voir Chapitre ??). Ils présentent cependant l'intérêt de ramener les petits exemples de matroïdes vectoriels en dimension 3 resp. 4 à des configurations de points en dimension 2 resp. 3 plus faciles à lire. Ainsi dans le cas de K_4 la Figure 1.4 fournit une interprétation géométrique très simple des cocircuits. On vérifiera que les cocircuits de K_4 sont exactement les complémentaires des droites définies par les points de la configuration de la Figure 4. Cette observation illustre un résultat général : les cocircuits d'un matroïde sont les complémentaires de ses hyperplans (voir Chapitre 2).

Exemple 1.2.4 Considérons les points de \mathbb{R}^2 donnés par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On vérifie que le matroïde des dépendances affines sur \mathbb{R}^2 des points de la configuration est le matroïde $\mathcal{M}(K_4)$.

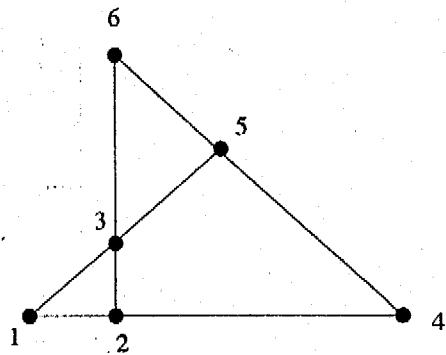


FIGURE 1.4 – Réprésentation affine de $\mathcal{M}(K_4)$.

Chapitre 2

Axiomatiques des matroïdes

2.1 Indépendants

Un *matroïde* \mathcal{M} est une paire ordonnée (E, \mathcal{I}) où E est un ensemble fini ($E = \{1, \dots, n\}$) et \mathcal{I} est une famille de sous-ensembles de E qui vérifie les conditions suivantes :

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- (I2) Si $I_1 \in \mathcal{I}$ et $I_2 \subset I_1$ alors $I_2 \in \mathcal{I}$,
- (I3) (propriété d'augmentation) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ et $|I_1| < |I_2|$ alors $\exists e \in I_2 \setminus I_1$ tel que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Les membres de \mathcal{I} sont appelés les *indépendants* de \mathcal{M} . Un sous-ensemble de E qui n'est pas dans \mathcal{I} est appelé *dépendant*.

La démonstration du résultat suivant est immédiate.

Proposition 2.1.1 (I1) + (I2) + (I3) est équivalent à (I1) + (I2) + (I3') où

(I3') pour tout $A \subset E$ les ensembles de \mathcal{I} contenus dans A et maximaux pour l'inclusion avec cette propriété ont tous même cardinal.

La Proposition 2.1.1 s'exprime très simplement dans le langage de la Topologie Algébrique : l'ensemble des indépendants d'un matroïde est un complexe simplicial dont toutes les restrictions sont pures.

Théorème 2.1.2 [Whitney 1935] Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps \mathbb{F} . Soit \mathcal{I} la famille des sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{F} . Alors, (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Démonstration. Les propriétés (I1) et (I2) sont trivialement vérifiés. On montre la propriété (I3). Soient $I'_1, I'_2 \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2 , sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$. On procède par contradiction, on suppose que $I_1 \cup e$ est linéairement dépendant pour tout $e \in I_2 \setminus I_1$. Soit W l'espace engendré par I_1 et I_2 . D'une part, $\dim(W) \geq |I_2|$ et d'autre part W est contenu dans l'espace engendré par I_1 .

$$|I_2| \leq \dim(W) \leq |I_1| < |I_2|$$

ce qui est une contradiction.

□

On dit que deux matroïdes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont *isomorphes* (noté par $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$) si et seulement s'il existe une bijection $\varphi : E(\mathcal{M}_1) \rightarrow E(\mathcal{M}_2)$ telle que pour tout $X \subseteq E(\mathcal{M}_1)$, X est indépendant dans $\mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \varphi(X)$ est indépendant dans \mathcal{M}_2 . Un matroïde qui est isomorphe à un matroïde obtenu à partir d'une matrice sur un corps \mathbb{F} est appelé *représentable* ou *vectoriel* sur \mathbb{F} .

2.2 Circuits

Un sous-ensemble $X \subseteq E$ est dit *dépendant minimal* si tout sous-ensemble propre de X est indépendant. Un sous-ensemble dépendant minimal d'un matroïde \mathcal{M} est appelé *circuit* de \mathcal{M} . On dénote par \mathcal{C} l'ensemble des circuits d'un matroïde. On remarque que \mathcal{I} peut être déterminé par \mathcal{C} (les membres de \mathcal{I} sont les sous ensembles de E qui ne contiennent pas un membre de \mathcal{C}).

Proposition 2.2.1 *L'ensemble de circuits \mathcal{C} d'un matroïde vérifie les conditions suivantes :*

- (C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,
- (C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $C_1 \subseteq C_2$ alors $C_1 = C_2$,
- (C3) (propriété d'élimination) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ et $e \in C_1 \cap C_2$ alors il existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$.

Démonstration. Les propriétés (C1) et (C2) trivialement vérifiées. On montre la propriété (C3), par contradiction. On suppose que $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ ne contient pas de circuit. On a que $C_2 - C_1 \neq \emptyset$ et donc il existe $f \in C_2 - C_1$. Comme C_2 est un ensemble dépendant minimal, $C_2 \setminus h \in \mathcal{I}$. Soit $I \subseteq C_1 \cup C_2$ tel que I est indépendant et maximal et $C_2 \setminus f \subset I$. On remarque que $f \notin I$ (sinon, on aurait $C_2 \subset I$) et en plus il existe $g \in C_1$ tel que $g \notin I$ (sinon, on aurait $C_1 \subset I$) avec $g \neq f$.

Alors,

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|$$

avec $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ est un indépendant (car $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ ne contient pas de circuit). Soit $I_1 = I$, $I_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus e$, avec $|I_1| < |I_2|$. Alors, d'après la propriété (I3) il existe $h \in I_2 \setminus I_1 = (C_1 \cup C_2) \setminus e \setminus I$ tel que $I_1 \cup h = I \cup h \in \mathcal{I}$ ce qui est une contradiction avec le fait que I est maximal.

□

Théorème 2.2.2 *Soit \mathcal{C} une famille des sous-ensembles de E . Alors, \mathcal{C} est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E si et seulement si \mathcal{C} vérifie les propriétés (C1), (C2) et (C3).*

Démonstration. La nécessité découle de la Proposition 2.2.1. (Suffisance) on va montrer la propriété (I3) (les propriétés (I1), (I2) sont évidents). Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$. On montre la propriété (I2) par récurrence sur $|X \cup Y|$. Si $X \cup Y \in \mathcal{I}$ alors la propriété est évidente. Sinon, il existe un circuit $C \subset X \cup Y$. Supposons que C est choisi tel que $|C \setminus Y|$ est minimal. Comme $X \in \mathcal{I}$ (resp. $Y \in \mathcal{I}$) alors $C \setminus X \neq \emptyset$ (resp. $C \setminus Y \neq \emptyset$) et donc soit $e \in C \setminus X$ (resp. $f \in C \setminus Y$). Soit $Y' = Y \setminus e \setminus f$. On affirme que Y' est indépendant. En effet, sinon, il existerait un circuit $Z \subset Y'$ avec $f \in Z$ car $Y' \setminus f = Y' \setminus e$ est indépendant et donc comme $f \in Z \cap C$, d'après (C3) il existe un circuit $C' \subset (Z \cup C) \setminus f$. On a que $(C' \setminus Y) \subset (C \setminus Y) \setminus f$ car $C \setminus Y$ est minimal. Ce qui est une contradiction, et donc Y' est bien un indépendant. La propriété (I3) découle par récurrence car $|Y'| = |Y|$ et $|X \cup Y'| = |X \cup Y| - 1$.

□

Proposition 2.2.3 $(C1) + (C2)$ est équivalent à $(C1) + (C2')$ où

$(C2')$ (propriété d'élimination pointée) pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, $e \in X \cap Y$ et $f \in X \setminus Y$ il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $f \in Z \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$.

Démonstration. Trivialement $(C2')$ implique $(C2)$. Montrons qu'inversement $(C1)$ et $(C2)$ impliquent $(C2')$.

Soient $X, Y \in \mathcal{C}$, $e \in X \cap Y$ et $f \in X \setminus Y$. Supposons contrairement à $(C2')$ qu'il n'existe aucun $Z \in \mathcal{C}$ tel que $f \in Z \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que X, Y, e, f ont été choisis avec ces propriétés de façon que $|X \cup Y|$ soit minimal.

D'après $(C2)$ il existe $X' \in \mathcal{C}$ tel que $X' \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$. D'après $(C1)$ on a $X' \setminus X \neq \emptyset$. Soit $x \in X' \setminus X$. On a $x \in X' \setminus Y$ et $e \in Y \setminus X'$. Par le choix de X et Y on a $f \notin X'$, d'où $|X' \cup Y| < |X \cup Y|$. La minimalité de $|X \cup Y|$ implique que X' et Y vérifient $(C2')$, donc il existe $Y' \in \mathcal{C}$ tel que $e \in Y' \subset (X' \cup Y) \setminus \{x\}$. On a $e \in X \cap Y'$, $f \in X \setminus Y'$ et $|X \cup Y'| < |X \cup Y|$ puisque $x \notin X \cup Y'$. La minimalité de $|X \cup Y|$ implique que X et Y' vérifient $(C2')$, donc il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $f \in Z \subset (X \cup Y') \setminus \{e\} \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$.

□

Proposition 2.2.4 Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit \mathcal{C} l'ensemble des cycles (ou circuits) élémentaires de G . Alors, \mathcal{C} est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E .

Démonstration. Les propriétés $(C1), (C2)$ sont évidentes. On montre la propriété $(C3)$. Soient C_1, C_2 deux cycles de G tels que $e = (u, v) \in C_1 \cap C_2$. On va montrer qu'il existe un cycle C_3 dans G tel que $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus e$.

Soit P_i une chaîne élémentaire qui relie $u \rightarrow v$, $i \in \{1, 2\}$ avec $E(P_i) \subset c_i \setminus e$.

On parcours P_1 à partir de u vers v et soit w le premier sommet tel que l'arête suivante ne soit pas dans P_2 , et soit x le premier sommet qui est sur P_1 et P_2 qui apparaît après w un tel sommet existe car P_1 et P_2 finissent en v). Soit

$$C_3 := P_1(w, x) + P_2(x, w)$$

Il est clair que $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus e$.

□

Un matroïde formé par les cycles d'un graphe G est dit *graphique*, noté par $\mathcal{M}(G)$. Dans un matroïde graphique $\mathcal{M}(G)$, les dépendants sont les cycles et les indépendants sont donc les sous-graphes sans cycle, i.e., les *forêts* de G .

Proposition 2.2.5 Soit un matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, $I \in \mathcal{I}$ et $e \in E$, tel que $I \cup e$ est dépendant. Alors, il existe un circuit unique contenu dans $I \cup e$ et ce circuit contient e .

Démonstration. (Existence) $I \cup e$ contient bien un circuit C car $I \cup e$ est dépendant et de plus $e \in C$ (sinon $C \subseteq I$, ce qui est impossible).

(Unicité) Supposons qu'il existe un autre circuit $C' \subset I \cup e$, $C' \neq C$ et $e \in C'$. D'après $(C3)$, il existe un circuit $\overline{C} \subseteq C' \cup C \setminus e$. Comme $C' \cup C \setminus e \subset I \in \mathcal{I} \Rightarrow \overline{C} \subset I$, ce qui est impossible.

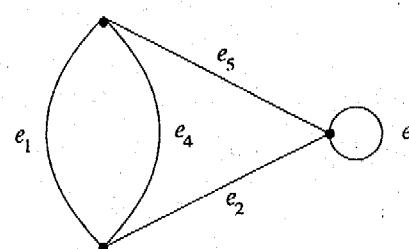


FIGURE 2.1 – Exemple

□

Exemple 2.2.6 Soit le matroïde $\mathcal{M}(G)$ graphique obtenu du graphe G dans la figure 2.1. Soit A la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc que $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(A)$ (sous la bijection $e_i \rightarrow i$).

2.3 Base

Une *base* d'un matroïde est un indépendant maximal (par l'inclusion).

Lemme 2.3.1 Les bases d'un matroïde sont équicardinales (elles ont le même nombre d'éléments).

Démonstration. Par l'absurde. Soient B_1, B_2 deux bases telles que $|B_1| < |B_2|$, d'après (I3) il existe $x \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 \cup x \in \mathcal{I}$ ce qui est une contradiction avec le fait que B_1 est un indépendant maximal.

□

Lemme 2.3.2 Soit \mathcal{B} l'ensemble des bases d'un matroïde \mathcal{M} . Alors, \mathcal{B} vérifie les conditions suivantes :

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B2) propriété d'échange $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \setminus B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Démonstration. On a $B_2, B_1 \setminus x \in \mathcal{I}, |B_1 \setminus x| < |B_2|$, d'après (I3) il existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus x)$ tel que $B_1 \setminus x \cup y \in \mathcal{I}$. On a $y \in B_2 \setminus B_1$ et en plus $B_1 \setminus x \cup y$ est contenu dans un ensemble indépendant maximal B' . Comme, $|B'| = |B_1|$ et $|B_1| = |(B_1 \setminus x) \cup y|$ alors $B_1 \setminus x \cup y = B'$ et donc $(B_1 \setminus x) \cup y$ est une base.

□

Remarque 2.3.3 Si $\mathcal{M}(G)$ est graphique, alors une base de \mathcal{M} correspond à un arbre couvrant de G .

Théorème 2.3.4 Soit E un ensemble et soit \mathcal{B} la famille des sous-ensembles de E qui vérifient (B1) et (B2). Soit \mathcal{I} la famille des sous-ensembles qui sont contenus dans l'un de ensembles de \mathcal{B} . Alors, (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Démonstration. Les propriétés (I1), (I2) sont trivialement vérifiées. On démontre (I3). Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Il existe $B, B' \in \mathcal{B}$ tel que $X \subset B$ et $Y \subset B'$. Sans perdre de généralité, on peut supposer B, B' choisis avec ce prorpiétés tels que $|B \cap B'|$ soit maximal.

On a $B \setminus B' \subset X$. On effet sinon soit $x \in B \setminus B' \setminus X$. D'après (B2) il existe $y \in B'$ tel que $B_1 = B - x + y \in \mathcal{B}$. On a $X \subset B_1$ et $|B_1 \cap B'| > |B \cap B'|$ en contradiction avec le choix de B et B' . de même, $B' \setminus B \subset Y$. Comme, $|B| = |B'|$ on a $|B \setminus B'| = |B' \setminus B|$, donc $|X| < |Y|$ implique $|B \cap B' \cap X| = |B' \cap B \cap Y|$. Par suite $B \cap B' \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$, d'où (I3) avec $e \in B \cap (Y \setminus X)$.

□

Soient $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(H)$ deux matroïdes graphiques isomorphes, est-il vrai que $G \sim H$? Non, par exemple, tous les matroïdes représentant les arbres de taille n fixée sont isomorphes. On discutera en Chapite ?? quand un matroïdes graphique $\mathcal{M}(G)$ définie G .

Un ensemble des éléments dans un matroïde contenant une base est appelé *générateur*. La proposition suivante est immédiate

Proposition 2.3.5 (*théorème de la base incomplète*)

Soient M un matroïde, X un indépendant de M et Y un générateur de M tels que $X \subset Y$. Alors il existe une base B de M telle que $X \subset B \subset Y$.

2.3.1 Rang

Soit $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ et $X \subseteq E$. On définit l'ensemble $\mathcal{I} \setminus X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$. On a que $(X, \mathcal{I} \setminus X)$ est un matroïde, noté $\mathcal{M}|_X$. Le rang d'un matroïde \mathcal{M} d'un ensemble $X \subseteq E$ est le cardinal d'une base de $\mathcal{M}|_X$ dans \mathcal{M} , noté $r_{\mathcal{M}}(X)$, i.e., $r_{\mathcal{M}}(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$.

Théorème 2.3.6 Soit E un ensemble fini et $r : 2^{|E|} \rightarrow \mathbb{N}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) r est la fonction rang d'un matroïde (E, \mathcal{I}) (et $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\}$).
- (b)
 - (R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$, pour tout $X \subseteq E$,
 - (R2) $r(X) \leq r(Y)$, $X \subseteq Y$,
 - (R3) (inégalité sous-modulaire) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.
- (c)
 - (R1') $r(\emptyset) = 0$,
 - (R2') $r(X) \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 1$, pour tout $X \subseteq E, y \in E$,
 - (R3') Si $r(X \cup x) = r(X \cup y) = r(X)$ alors $r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$ pour tout $X \subseteq E, x, y \in E$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b)] Soit $r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$. Les propriétés (R1), (R2) sont évidents. (R3) : Soit $B_{X \cap Y}$ une base de $X \cap Y$. Alors, $B_{X \cap Y}$ est indépendant maximal de $\mathcal{M}|_{(X \cap Y)}$ et donc $B_{X \cap Y}$ est contenue dans une base $B_{X \cup Y}$ de $\mathcal{M}|_{(X \cup Y)}$.

On remarque que $\begin{cases} B_{X \cup Y} \cap X \text{ est un ensemble indépendant dans } \mathcal{M}|_X \\ B_{X \cup Y} \cap Y \text{ est un ensemble indépendant dans } \mathcal{M}|_Y \end{cases}$

On a $|B_{X \cup Y} \cap X| \leq r(X)$ et $|B_{X \cup Y} \cap Y| \leq r(Y)$. En utilisant le fait que $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$ on obtient

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| = |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\ &= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)| = |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned}$$

• (b) \Rightarrow (c)] Il est évident que (R1) implique (R1').

(R2') :

$$r(X) \stackrel{R2}{\leq} r(X \cup y) \stackrel{R3}{\leq} r(X) + r(y) - r(X \cap y) \leq r(X) + r(y) \leq r(X) + 1.$$

Pour (R3'), si $x = y$ alors (R3') est trivial. Supposons que $x \neq y$. On considère

$$2r(X) = r(X) + r(X) \stackrel{R2}{\leq} r(X) + r(X \cup \{x, y\}) \stackrel{R3}{\leq} r(X \cup \{x\}) + r(X \cup \{y\}) = r(X) + r(X).$$

Alors, $r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$.

• (c) \Rightarrow (a)] Soient $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid r(I) = |I|\}$. On va montrer que (E, \mathcal{I}) est un matroïde. D'après (R1') $r(\emptyset) = 0$ alors $\emptyset \in \mathcal{I}$ et donc (I1) est vérifiée.

(I2) : Soit $X \in \mathcal{I}$, $x \in X$ et $Y = X \setminus x$ (et donc $Y \subset X$). Alors,

$$|Y| + 1 = |X| \stackrel{\text{def}}{=} r(X) = r(Y \cup x) \stackrel{R2}{\leq} r(Y) + 1 \leq |Y| + 1.$$

Alors, $r(Y) = |Y|$ et donc $Y \in \mathcal{I}$.

(I3) : Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$ et soit $X \setminus Y = \{x_1, \dots, x_k\}$. On procède par contradiction, on suppose que (I3) n'est pas vérifiée, alors $Y \cup x_i \notin \mathcal{I}$ pour tout i , c'est-à-dire, $r(Y \cup x_i) = |Y|$. Alors, d'après (R3') $r(Y \cup \{x_1, x_i\}) = r(Y)$. On applique l'argument précédent récursivement on obtient $r(Y) = r(Y \cup \{x_1, \dots, x_k\}) = r(Y \cup X) \geq r(X)$ ce qui est une contradiction par (R2').

□

Soit $\mathcal{M}(G)$ un matroïde graphique. Alors, $r(\mathcal{M}(G)) = |V(G)| - \omega(G)$, où $\omega(G)$ est le nombre de composantes connexes, en particuliers si G connexe alors $r(\mathcal{M}(G)) = |V(G)| - 1$. Plus généralement, si $X \subseteq E$ alors $r(X) = V(G[X]) - \omega(G[X])$ où $G[X]$ dénote le graphe induit par l'ensembles d'arêtes correspondants aux éléments X .

Exemple 2.3.7 Soit G' le graphe illustré en figure 2.2. Alors, $r(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 3$, $r(\{6, 7, 5\}) = 2$, $r(\{6, 7, 4\}) = 2$ et $r(\{6, 8\}) = 0$.

2.3.2 Fermeture

La fermeture d'un ensemble A dans \mathcal{M} est définie par $cl(A) = \{x \in E \mid r(A \cup x) = r(A)\}$.

Exemple 2.3.8 On reprend l'exemple de la figure 2.2. On a $cl(\{567\}) = \{5678\}$, $cl(\{135\}) = \{1352468\}$ et $cl(\{\emptyset\}) = \{68\}$.

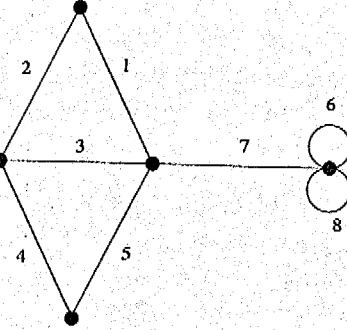


FIGURE 2.2 – G'

Proposition 2.3.9 La fonction $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ d'un matroïde \mathcal{M} vérifie :

- (CL1) (extensivité) Si $X \subseteq E$ alors $X \subseteq cl(X)$
- (CL2) (croissance) Si $X \subseteq Y \subseteq E$ alors $cl(X) \subseteq cl(Y)$
- (CL3) (indempotence) Si $X \subseteq E$ alors $cl(cl(X)) = cl(X)$
- (CL4) (propriété d'échange) Si $X \subseteq E$, $x \in E$ et $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ alors $x \in cl(X \cup y)$

Démonstration. (CL1) : Évident.

(CL2) : Soit $X \subseteq Y$, $x \in cl(X)$

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &= r(X \cup \{x\}) + r(Y) \geq^{(R3)} r((X \cup \{x\}) \cap Y) + r((X \cup \{x\}) \cup Y) \\ &\geq^{(R2)} r(X) + r(Y \cup \{x\}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow r(Y) \geq r(Y \cup \{x\})$, mais on sait que $r(Y \cup \{x\}) \geq r(Y)$ (par (R2))

$\Rightarrow r(Y) = r(Y \cup \{x\})$

$\Rightarrow x \in cl(Y)$.

(CL3) : On utilisant $(R3')$ plusieurs fois on obtient $r(cl(X)) = r(X)$ et donc obtenant que $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(CL4) : Par contradiction. On suppose $x \notin cl(X \cup \{y\})$ et donc $r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{y\}) + 1$. On sait que $(X \cup \{y\}) = r(X) + 1$ (car $y \notin cl(X)$).

Comme $y \in cl(X \cup \{x\}) \Rightarrow r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{x\})$. On déduit $r(X \cup \{y\}) + 1 = r(X \cup \{x\})$ et donc $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$, ce qui est une contradiction, d'après $(R2')$.

□

Théorème 2.3.10 Soit E un ensemble, la fonction $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est la fonction fermé d'un matroïde si et seulement si cl vérifie (CL1), (CL2), (CL3) et (CL4).

Soit $X \subset E$, $cl(X)$ est aussi appelé le *fermé* (ou le *flat*) de X et X est dit *fermé* si $X = cl(X)$.

Théorème 2.3.11 L'ensemble \mathcal{F} des fermés d'un matroïde est caractérisé par les propriétés suivantes :

- (F1) Toute intersection de fermés est un fermé
- (F2) la fermeture définie par $cl(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subseteq F} F$ vérifie la propriété d'échange.

L'ensemble E est fermé de rang $r(\mathcal{M})$. Le fermé de rang 0 est constitué par l'ensemble des boucles de \mathcal{M} . Un fermé de rang 1, ou *point* est une classe d'éléments *parallèle*. Un matroïde tel que \emptyset soit fermé, et tous ses points comportent un seul élément, est dit *simple*. Un *hyperplan* est un fermé de rang $r(\mathcal{M}) - 1$.

Exemple 2.3.12 Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K_5)$. Calculons les fermés de \mathcal{M} .

- Fermé de rang 1 \rightarrow les 10 arêtes de K_5 .
- Fermé de rang 2 \rightarrow les $\begin{cases} 10 \text{ triangles} \\ 15 \text{ paires d'arêtes disjointes} \end{cases}$
- Fermé de rang 3 \rightarrow les $\begin{cases} 5 K_4 \\ 10 K_2 \text{ et } K_3 \text{ disjointes} \end{cases} \leftrightarrow$ hyperplan de \mathcal{M}
- Fermé de rang 4 $\rightarrow K_5$.

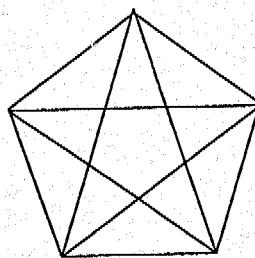


FIGURE 2.3 – Graphe K_5

2.4 Algorithme glouton

Soit \mathcal{I} un ensemble de sous-ensembles de E et on suppose que \mathcal{I} vérifie (I1) et (I2). Soit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, et on dénote par $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$, $X \subseteq E$, $w(\emptyset) = 0$.

Un *problème d'optimisation* consiste alors à trouver un ensemble minimal B de \mathcal{I} avec un poids maximal.

Algorithm 1: Algorithme glouton pour (\mathcal{I}, w) .

début

```

 $X_0 = \emptyset$ 
 $j = 0$ 
tant que 'il existe  $e \in E \setminus X_j | X_j \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ ' faire
    Choisir un élément  $e_{j+1}$  de poids maximum
     $X_{j+1} \leftarrow X_j \cup \{e_{j+1}\}$ 
     $j \leftarrow j + 1$ 
 $B_G \leftarrow X_j$ 
retourner  $B_G$ 

```

fin

$(\mathfrak{E}, \mathfrak{X})$

Théorème 2.4.1 Soit \mathcal{I} une famille de sous-ensembles de E . Alors, (\mathcal{I}, E) est un matroïde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$

(G) Pour toute fonction $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, l'algorithme glouton donne un ensemble maximal de \mathcal{I} de poids maximal.

(G)

Démonstration. Nécessité On va montrer que g est vérifiée. On affirme que $B_G = \{e_1, \dots, e_r\}$ est une base de \mathcal{M} de poids maximal. Soit B une autre base $B = \{f_1, \dots, f_r\}$, on montrer que $w(e_j) \geq w(f_j), j = 1, \dots, r$. Par contradiction, supposons que $w(f_1) \geq w(f_2) \geq \dots \geq w(f_r)$ et qu'il existe un entier k tel que $w(e_k) < w(f_k)$. Soit $I_1 = \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ et $I_2 = \{f_1, \dots, f_k\}$, $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ avec $|I_1| < |I_2|$. D'après (I3), on a $I_1 \cup f_t \in \mathcal{I}$ où $f_t \in I_2 \setminus I_1$ avec $t \leq k$. Mais $w(f_t) \geq w(f_k) > w(e_k)$, alors l'algorithme glouton aurait choisi f_t à la place de e_k . Ce qui est une contradiction.

Suffisance On suppose (I1), (I2) et (G) et va montrer que $\mathcal{M} = (\mathcal{I}, E)$ vérifie (I3). On procède par contradiction, supposons que $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $|I_1| < |I_2|$ tels que $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ pour tout $e \in I_2 \setminus I_1$, on a $|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(1 + \epsilon)|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$. On définit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{comme suit } w(e) = \begin{cases} 2 \text{ si } e \in I_1 \cap I_2 \\ 1/|I_1 - I_2| \text{ si } e \in I_1 \setminus I_2 \\ (1 + \epsilon)/|I_2 - I_1| \text{ si } e \in I_2 \setminus I_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'algorithme glouton choisit d'abord les éléments de $I_1 \cap I_2$ et puis tous les éléments de $I_1 \setminus I_2$ (car $(1 + \epsilon)|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$). Par hypothèse, l'algorithme ne choisit pas les éléments dans $I_2 \setminus I_1$. Il reste $E \setminus (I_1 \cup I_2)$ (avec $w(e) = 0$).

$$\begin{aligned} w(B_G) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2| \left(\frac{1}{|I_1 - I_2|} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 \end{aligned}$$

On sait que I_2 est contenu dans un ensemble maximal $I'_2 \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} w(I'_2) &\geq w(I_2) = 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 - I_1| \left(\frac{1 + \epsilon}{|I_2 - I_1|} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon \\ &> 2|I_1 \cap I_2| + 1 = w(B_G) \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction avec (G).

□

2.4.1 Matroïde transversal

Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$, $n \geq k$. Un *transversal* de \mathcal{A} est un sous-ensemble $\{e_1, \dots, e_k\}$ de S tel que $e_i \in A_i$ (autrement dit, il existe une bijection entre $\{e_1, \dots, e_k\}$ et $\{A_1, \dots, A_k\}$). Un ensemble $X \subseteq S$ est dit un *transversal partiel* de \mathcal{A} s'il existe $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tel que X est un transversal de $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_l}\}$.

Soit $G(U, V; E)$ le graphe biparti formé à partir de $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$ où $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ et deux sommets $u_i \in U$ et $v_j \in V$ sont reliés si et seulement

si $s_i \in A_j$. On a donc qu'un X est un transversal partiel de \mathcal{A} si et seulement s'il existe un couplage dans $G(U, V; E)$ où chaque arête du couplage admet un sommet de U correspondant à l'un de éléments de X , voir figure 6.4.5.

Exemple 2.4.2 Soit $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_\in, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_\Delta\}$ avec $\mathcal{A}_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $\mathcal{A}_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathcal{A}_3 = \{e_2, e_3\}$ et $\mathcal{A}_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$. Alors, $\{e_1, e_3, e_2, e_6\}$ est un transversal de \mathcal{A} et $X = \{e_6, e_4, e_2\}$ est un transversal partiel de \mathcal{A} car X est transversal de A_1, A_2, A_3 , voir figure 6.4.5.

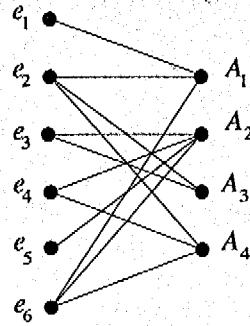


FIGURE 2.4 – Exemple de transversal

Théorème 2.4.3 Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$. L'ensemble de transversals partiels de \mathcal{A} est l'ensemble d'independents d'un matroïde.

Démonstration. (I1) et (I2) sont évidents. On montre (I3). Soit G le graphe bipartie associé à E et \mathcal{A} . Soit I_1, I_2 de transversaux partiels $|I_1| < |I_2| = |w_2|$ et soient w_1, w_2 deux couplages de G (disons, couplage bleu et rouge) tels que les sommets correspondants à I_j sont d'extrémités d'arêtes w_j . Soit G' le sous-graphe de G induit par les arêtes de $w_1 \setminus w_2$ (disons, arêtes rouges) et $w_2 \setminus w_1$ (disons, arêtes bleues) mais pas d'arêtes dans $w_1 \cap w_2$ (bicoloriés).

On a qu'il y a plus d'arêtes rouges que bleues car $|w_1| = |I_1| < |I_2| = |w_2|$. Comme w_1 et w_2 sont de couplages alors $d(v) = 1$ ou 2 pour tous sommet $v \in V(G')$ est donc chaque composantes connexes de G' est soit une chaîne soit un cycle. Si $d(v) = 2$ alors les deux arêtes incidentes à v ont couleurs différents (car w_1 et w_2 sont des couplages) et donc tous cycle de G' et tous chaîne de longueur pair ont exactement le même nombre d'arêtes rouges et bleues. Comme G' admet plus d'arêtes bleues que rouges alors il existe un chaîne de longueur impair telle que la première et dernière arêtes sont rouges. En plus, l'une de ces deux arêtes est incidente à un sommet correspondant à un élément e de E , $e \in I_2 \setminus I_1$. En échangeant les arêtes rouges et bleues de cette chaîne on trouve une chaîne avec une arête bleue incidente à e et donc un nouveau couplage contenant tous les sommets correspondants à I_1 qui sont d'extrémités des arêtes dans le couplage w_1 avec la nouvelle chaîne, c'est-à-dire, $I_1 \cup e$ est un transversal partiel.

□

Un matroïde ainsi obtenu est appelé *matroïde transversal*.

Problème d'assignation

Soit $\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonées par rapport à leur importance (priorités) et soit $\{E_i\}$ un ensemble de employés capable de réaliser un ou plusieurs de ces tâches. On suppose que les tâches

seront faites au même temps (et donc chaque employé peut faire qu'une seule tâche à la fois). Le problème est d'assigner les tâches aux employés de façon optimal (en maximisant les priorités).

On peut résoudre ce problème en appliquant l'algorithme glouton au matroïde transversal \mathcal{M} où $S = \{T_i\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ avec A_i est l'ensemble de tâches pour lequelle l'employé i est qualifié de réaliser. On remarque que le nombre maximum des tâches qui peut-être réalisés au même temps est égal au plus grand transversal partiel de \mathcal{A} avec $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction correspondant à l'importance de tâches.

2.4.2 Exercices

Exercice 2.1 Soient r et n deux entiers $0 \leq r \leq n$, et E un ensemble à n éléments. Montrer que $\mathcal{I} = \binom{E}{r}$ l'ensemble des r -parties de E est l'ensemble des indépendants du matroïde $U_{n,r}$. Calculer le rang de $U_{n,r}$.

Exercice 2.2 Soient r et n deux entiers $1 \leq r \leq n$ et $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ une r -partition de n . Considérons un ensemble E à n éléments et une r -partition $E = E_1 + E_2 + \dots + E_r$ de E telle que $|E_i| = n_i$ pour $i = 1, 2, \dots, r$. Soit $\mathcal{I} = \{X \subset E \mid |X \cap E_i| \leq 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r\}$. Alors \mathcal{I} est l'ensemble des indépendants d'un matroïde dit *de partition* désigné par \mathcal{P}_λ .

Exercice 2.3

Chapitre 3

Dual-Mineur

3.1 Dualité

Lemme 3.1.1 (lemme de pivotement) Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , B une base de \mathcal{M} et $e \in E \setminus B$. Alors il existe un circuit unique $C \subset B \cup \{e\}$. On a $e \in C$. Pour tout $f \in B$ l'ensemble $B \cup \{e\} \setminus \{f\}$ est une base de \mathcal{M} si et seulement si $f \in C$.

Démonstration. Par définition d'une base $B \cup \{e\}$ n'est pas indépendant, donc il existe un circuit $C \subset B \cup \{e\}$. Nécessairement $e \in C$. Supposons qu'il existe un second circuit $C' \neq C$ contenu dans $B \cup \{e\}$. On a $e \in C \cap C'$, donc par élimination il existe un circuit contenu dans $(C \cup C') \setminus \{e\} \subset B$, contradiction. \blacksquare

Pour tout $f \in C$ l'ensemble $B \cup \{e\} \setminus \{f\}$ est indépendant. Sinon il existerait un circuit $C' \subset B \cup \{e\} \setminus \{f\}$, et on aurait $C' \neq C$, puisque $f \notin C'$, contredisant l'unicité de $C \subset B \cup \{e\}$. L'indépendant $B \cup \{e\} \setminus \{f\}$ ayant même cardinal que B est une base de \mathcal{M} .

\square

Le circuit C est appelé *circuit fondamental de e relativement à B* . L'ensemble $C \setminus \{e\}$ est le *support de e dans B* . La base $B \cup \{e\} \setminus \{f\}$ est dite obtenue à partir de B par *pivotement relativement à e* .

Proposition 3.1.2 Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et \mathcal{B} l'ensemble des bases de \mathcal{M} . Alors $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E .

Démonstration. Soient B_1, B_2 deux bases de \mathcal{M} et $B_1^* = E \setminus B_1, B_2^* = E \setminus B_2$. On va montrer (B2), c'est-à-dire, si $e \in B_1^* \setminus B_2^* = (E \setminus B_1) \setminus (E \setminus B_2) = B_2 \setminus B_1$ alors il existe $y \in B_2^* \setminus B_1^*$ tel que $B_1^* \setminus x \cup y$ est une base de \mathcal{M}^* .

Soit C le circuit fondamental de e relativement à B_1 . Comme $C \setminus B_2 \neq \emptyset$ alors soit $f \in C \setminus B_2$. D'après le lemme de pivotement $B_1 \cup \{e\} \setminus \{f\}$ est une base de \mathcal{M} . Mais, $E \setminus (B_1 \cup \{e\} \setminus \{f\}) = (E \setminus B_1) \setminus \{e\} \cup \{f\}$, avec $f \in (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus B_1)$. En plus, $f \in C \setminus B_2 = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus C) = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus B_1) = B_2^* \setminus B_1^*$ prouvant (B2) pour les complémentaires des bases de \mathcal{M} .

\square

Le matroïde sur E ayant \mathcal{B}^* pour ensemble de bases, noté \mathcal{M}^* , est appelé le *dual* (ou *orthogonal*) de \mathcal{M} . Une base de \mathcal{M}^* est également appelée une *cobase* de \mathcal{M} . Notons en corollaire immédiat de la Proposition 9.10

Corollaire 3.1.3 $r(\mathcal{M}^*) = |E| - r(\mathcal{M})$ et $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$.

Proposition 3.1.4 L'ensemble \mathcal{I}^* des indépendants de \mathcal{M}^* est donné par

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subset E \text{ tel qu'il existe } B \in \mathcal{B} \text{ avec } X \cap B = \emptyset\}.$$

Proposition 3.1.5 La fonction rang de \mathcal{M}^* est donnée par

$$r_{\mathcal{M}^*}(X) = |X| + r_{\mathcal{M}}(E \setminus X) - r(\mathcal{M}),$$

pour $X \subset E$.

Démonstration. D'après la Proposition 9.11 $A \subset X$ est une base de X dans \mathcal{M}^* si et seulement si il existe une base B de \mathcal{M} telle que $X \setminus B = A$ et $B \setminus X$ est une base de $E \setminus X$ dans \mathcal{M} . Par suite

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{M}^*}(X) &= |A| = |X \setminus B| = |X| - |B \cap X| \\ &= |X| + |B \setminus X| - |B| \\ &= |X| + r_{\mathcal{M}}(E \setminus X) - r(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.6 L'ensemble \mathcal{C}^* des circuits de \mathcal{M}^* est donné par $\mathcal{C}^* = \{D \subset E \mid \text{tel que } D \cap B \neq \emptyset \text{ pour toute base } B \in \mathcal{B} \text{ et } D \text{ est minimal pour l'inclusion avec cette propriété}\}$

Un circuit de \mathcal{M}^* est également appelé un *cocircuit* de \mathcal{M} . Soient B une base de \mathcal{M} et $e \in B$. Dans \mathcal{M} le *cocircuit fondamental* de e relativement à B est le circuit fondamental de e relativement à $E \setminus B$. D'après le lemme de pivotement $B \setminus \{e\} \cup \{f\}$ est une base de \mathcal{M} pour tout f dans le cocircuit fondamental de e relativement à B .

Corollaire 3.1.7 Les cocircuits d'un matroïde sont les complémentaires des hyperplans dans l'ensemble des éléments, i.e.

$$\mathcal{C}^* = \{E \setminus H \mid H \in \mathcal{H}\}.$$

Démonstration. Un hyperplan d'un matroïde \mathcal{M} sur E est un sous-ensemble de E ne contenant aucune base et maximal pour l'inclusion avec cette propriété. Donc, H est un hyperplan de \mathcal{M} si et seulement si H est non-générateur de \mathcal{M} tel que $H \cup y$ est un générateur de \mathcal{M} pour tout $y \notin H$, équivallement, si et seulement si $E \setminus H$ est dépendant en \mathcal{M}^* et telque $(E \setminus H) \setminus y$ est indépendant en \mathcal{M}^* , c'est-à-dire, $E \setminus H$ est un circuit de \mathcal{M}^* .

□

Proposition 3.1.8 $X \subset E$ est une base de \mathcal{M} si et seulement si X n'a pas intersection nulle avec chaque cocircuit de \mathcal{M} , et X est minimal avec cette propriété.

Démonstration. Soit B une base de \mathcal{M} et supposons qu'il existe un cocircuit C^* de \mathcal{M} tel que $B \cap C^* = \emptyset$. Alors, $E \setminus B$ contient C^* et donc $E \setminus B$ est indépendant en \mathcal{M} , ce qui est une contradiction. Soit $X \subset B$ tel que $X \cap C^* \neq \emptyset$ pour tout circuit C^* de \mathcal{M} . Alors, $E \setminus X$ ne contient pas de circuit de \mathcal{M}^* et donc $E \setminus X$ est indépendant en \mathcal{M}^* . Mais, comme $E \setminus X$ contient proprement la base $E \setminus B$ de \mathcal{M}^* ce qui n'est pas possible.

Conversement, si X n'a pas intersection nulle avec tous circuit de \mathcal{M}^* alors $E \setminus X$ ne contient pas de circuit et donc $E \setminus X$ est indépendant en \mathcal{M}^* . Si X est minimal avec cette propriété alors $E \setminus X$ doit être un ensemble indépendant maximal de \mathcal{M}^* . Alors, $E \setminus X$ est une base de \mathcal{M}^* .

□

Le théorème suivant découle de la proposition précédente.

Théorème 3.1.9 *Un ensemble $X \subset E$ est un cocircuit de \mathcal{M} si et seulement si X n'a pas intersection nulle avec chaque base de \mathcal{M} , et X est minimal avec cette propriété.*

Soient B une base de \mathcal{M} et $e \in B$. Le corollaire précédent montre que le cocircuit fondamental D de e relativement à B est donné par $D = E \setminus cl_{\mathcal{M}}(B \setminus \{e\})$.

Proposition 3.1.10 *Soit \mathcal{M} un matroïde et \mathcal{C} ses circuits. Soient,*

$$\mathcal{C}' = \{D \subset E : D \neq \emptyset, |C \cap D| \neq 1 \text{ pour tout } C \in \mathcal{C} \text{ et } D \text{ est minimal pour l'inclusion avec ces propriétés}\}$$

et

$$\mathcal{C}'' = \{D \subset E : D \neq \emptyset, |C \cap D| \neq 1 \text{ pour tout } C \in \mathcal{C} \text{ et pour tous } x, y \in D, x \neq y \text{ il existe } C \in \mathcal{C} \text{ tel que } C \cap D = \{x, y\}\}.$$

Alors, $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}' = \mathcal{C}''$.

Démonstration. On montre que $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}'$. Soit $D \in \mathcal{C}^*$. Supposons qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $|C \cap D| = 1$, soit $C \cap D = \{e\}$. Puisque $E \setminus D$ est un hyperplan, l'ensemble $(E \setminus D) \cup \{e\}$ contient une base. Par la propriété de la base incomplète il existe une base B telle que $C \setminus \{e\} \subseteq B \subseteq (E \setminus D) \cup \{e\}$. Comme $C \not\subseteq B$ on a $B \subseteq E \setminus D$, contredisant la Proposition 1.6.

Montrons que D est minimal avec la propriété $|C \cap D| \neq 1$ pour tout circuit $C \in \mathcal{C}$. Considérons D' tel que $\emptyset \neq D' \subset D$ et $D \neq D'$. Par la Proposition 1.6 il existe une base B de \mathcal{M} telle que $B \cap D' = \emptyset$. Alors pour $e \in D'$ on a $C \cap D' = \{e\}$ où C est le circuit fondamental de e relativement à B .

Inversement on montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^*$. Soit $D \in \mathcal{C}'$. Soit B une base de \mathcal{M} . Si $B \cap D = \emptyset$ on a $C \cap D = \{x\}$ pour C circuit fondamental de $x \in D$ relativement à B . Donc $D \cap B \neq \emptyset$ pour toute base B de \mathcal{M} . Si $D \notin \mathcal{C}^*$ il existe $D' \subset D$ $D' \neq D$ tel que $D' \in \mathcal{C}^*$. Soit $x \in D'$ et $y \in D \setminus D'$. Par définition de \mathcal{C}' il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $C \cap D = \{x, y\}$, d'où $C \cap D' = \{x\}$, contredisant $D' \in \mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}'$.

On a clairement $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}' = \mathcal{C}^*$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $D \in \mathcal{C}^*$. On vérifie facilement en utilisant la propriété d'élimination que la relation définie sur D par $x = y$ ou bien $x \neq y$ et il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $C \cap D = \{x, y\}$ est une relation d'équivalence. Soient $D = D_1 + D_2 + \dots + D_k$ les classes d'équivalence. Si $k = 1$ on a $D \in \mathcal{C}''$. Supposons $k \geq 2$. Par la minimalité de D il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $|C \cap (D_2 + \dots + D_k)| = 1$. Supposons C choisi avec cette propriété de façon que $|C \cap D|$ soit minimal. On a $|C \cap D_1| \neq 0$ par définition de \mathcal{C}' , et $|C \cap D_1| \neq 1$ par définition de D_1, D_2, \dots, D_k . Soient $x, y \in C \cap D_1$ $x \neq y$ et $z \in C \cap (D_2 + \dots + D_k)$. Par définition de D_1 il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $X \cap D = \{x, y\}$. Par élimination de x entre C et X il existe $C' \in \mathcal{C}$ tel que $z \in C' \subset (C \cup X) \setminus \{x\}$. D'où une contradiction car $|C' \cap (D_2 + \dots + D_k)| = 1$ et $|C' \cap D_1| < |C \cap D_1|$.

□

Corollaire 3.1.11 (*double-échange des bases*)

(B2') Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \setminus B_2$ il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ et $B_2 \setminus \{y\} \cup \{x\} \in \mathcal{B}$.

Démonstration. Soit C le circuit fondamental de x relativement à B_2 et D le cocircuit fondamental de x relativement à B_1 . On a $C \cap D \neq \emptyset$ car $x \in C \cap D$, donc d'après la Proposition 1.8 $|C \cap D| \geq 2$. Alors $y \in (C \cap D) \setminus \{x\}$ vérifie le corollaire d'après le lemme de pivotement.

□

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *cocycle* de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est *élémentaire* si et seulement si il est l'ensemble des arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets d'une composante connexe induisant chacun un sous-graphe connexe.

Théorème 3.1.12 X est un cocycle d'un graphe $G = (EV)$ si et seulement si X est un sous-ensemble minimal de E ayant intersection non nulle avec chaque forêt génératrice de G .

Le résultat suivant découle du théorème précédent et Théorème 3.1.9.

Théorème 3.1.13 Soit $\mathcal{C}(G)^*$ l'ensemble de cocycles d'un graphe G . Alors, $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de circuit d'un matroïde sur E .

Le matroïde ainsi obtenus sont appelés matroïde de *cocycle* de G , noté $B(G)$ (anglais *bond*).

Théorème 3.1.14 $\mathcal{M}^*(G) = B(G)$ et $\mathcal{M}(G) = (B(G))^*$.

Est-il vrai que si \mathcal{M} est graphique alors \mathcal{M}^* est également graphique ? par exemple, si $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K_4)$ alors \mathcal{M} est graphique car $\mathcal{M}(K_4) = \mathcal{M}^*(K_4)$. Cette propriété n'est pas vrai en générale. Par exemple, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K_5)$ n'est pas graphique. Pour montrer ceci on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.1.15 Si \mathcal{M} est graphique alors il existe un graphe connexe G tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$.

Démonstration. Si \mathcal{M} est graphique alors il existe un graphe G tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$? Supposons que H admet plusieurs composantes connexes H_1, \dots, H_k . On construit un graphe G à partir de H en identifiant les sommets x_1, \dots, x_k dans un seul avec $x_i \in H_i$. On a $|E(G)| = |E(H)|$ avec G connexe. En plus, par construction, $X \subset E$ est un cycle dans H si et seulement si X est un cycle de G et donc $\mathcal{M}(H)$ est isomorphe à $\mathcal{M}(G)$ et donc isomorphe à \mathcal{M} .

□

Proposition 3.1.16 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K_5)$ n'est pas graphique

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}^*(K_5)$ est graphique alors il existe un graphe G connexe tel que $\mathcal{M}(G) \sim \mathcal{M}^*(K_5)$. On sait que $r(\mathcal{M}(K_5)) = 4$ et donc $r(\mathcal{M}^*(K_5)) = 10 - 4 = 6$.

Comme le nombre d'éléments de $\mathcal{M}^*(K_5) = 10$ alors on en déduit que G doit avoir 10 arêtes et 7 sommets. On remarque que la moyenne des degrés de G est $\frac{\sum d(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{20}{7} < 3$ et donc il existe un sommet v de degré ≤ 2 . Finalement, les arêtes incidentes à v forment un cocycle de $\mathcal{M}^*(K_5)$ de taille ≤ 2 et donc il existe un cycle dans $(\mathcal{M}^*(K_5))^* = \mathcal{M}(K_5)$ de longueur d'au moins 2, ce qui n'est pas le cas.

□

Un matroïde \mathcal{M} est dit *co-graphique* s'il existe un graphe G tel que \mathcal{M} est isomorphe à $B(G)$. On peut montrer facilement que $U_{2,4}$ n'est pas cographique. On donnera une caractérisation de matroïdes co-graphiques en chapitre ??

3.1.1 Exercices

Exercice 3.5 Soit B une base d'un matroïde et soit $y \in B$ et $x \in E \setminus B$.

- (i) Montrer que le cocircuit relatif à la base $E \setminus B$, $C_{E \setminus B}^*(y)$ est l'unique cocircuit disjoint de $B \setminus y$.
- (ii) Montrer que $y \in C_B(x)$ si et seulement si $x \in C_{E \setminus B}^*(y)$.

Exercice 3.6 On dit que $A, B \subset E$ sont *comodulaires* si $r(A) + r(B) = r(A \cap B) + r(A \cup B)$. Montrer que deux circuits fondamentaux relativement à une même base sont comodulaires.

Exercice 3.7 Soit \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $X, Y \subset E$. Montrer que X et Y sont comodulaires dans \mathcal{M} si et seulement si $E \setminus X$ et $E \setminus Y$ sont comodulaires dans \mathcal{M}^* .

Exercice 3.8 (axiomes autoduaux des circuits) Soient E un ensemble et $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset 2^E \setminus \{\emptyset\}$ deux antichaînes de parties non vides. Montrer que \mathcal{C} est l'ensemble des circuits et \mathcal{C}' l'ensemble des cocircuits d'un matroïde si et seulement si la propriété (CC) suivante est vérifiée

(CC) pour tout $e \in E$ et toute partition $E \setminus \{e\} = S + T$ ou bien il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $e \in X \subset S \cup \{e\}$ ou bien il existe $Y \in \mathcal{C}'$ tel que $e \in Y \subset T \cup \{e\}$.

3.2 Mineurs

Proposition 3.2.1 Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors $\{X \subset E \setminus A \mid X \text{ est un indépendant de } \mathcal{M}\}$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \setminus A$.

Le matroïde défini dans la Proposition 3.2.1 est dit obtenu à partir de \mathcal{M} en *supprimant* les éléments de A . On le désigne par $\mathcal{M} \setminus A$. Pour expliciter l'ensemble des éléments de $\mathcal{M} \setminus A$ on utilise également la notation $\mathcal{M}(E \setminus A)$ et on parle alors du *sous-matroïde de \mathcal{M} sur A* .

Proposition 3.2.2 Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$.

- (i) les circuits de $\mathcal{M} \setminus A$ sont les circuits de \mathcal{M} contenus dans $E \setminus A$
- (ii) pour $X \subset E \setminus A$ on a $r_{\mathcal{M} \setminus A}(X) = r_{\mathcal{M}}(X)$.

Proposition 3.2.3 Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , $A \subset E$ et $X \subset E \setminus A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une base B de A telle que $X \cup B$ soit indépendant
- (ii) pour toute base B de A l'ensemble $X \cup B$ est indépendant.

Alors,

- (iii) $\{X \subset E \setminus A \mid \text{il existe une base } B \text{ de } A \text{ telle que } X \cup B \text{ soit indépendant dans } \mathcal{M}\}$

est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \setminus A$.

Démonstration. Soient B et B' deux bases de A . Supposons que $X \cup B$ soit indépendant. Remarquons que $X \cup B'$ est un générateur de $X \cup B$. Donc $r_{\mathcal{M}}(X \cup B') \geq r_{\mathcal{M}}(X \cup B) = |X| + |B| = |X| + |B'|$, et par suite $r_{\mathcal{M}}(X \cup B') = |X \cup B'|$ i.e. $X \cup B'$ est indépendant.

Compte tenu de l'équivalence de (i) et (ii) la vérification des axiomes (I1), (I2), (I3) des indépendants est immédiate.

□

Le matroïde défini dans la Proposition 3.2.3 est dit obtenu à partir de \mathcal{M} en *contractant* les éléments de A . On le désigne par \mathcal{M}/A .

Proposition 3.2.4 *Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$.*

(i) *les circuits de \mathcal{M}/A sont les ensembles non vides minimaux pour l'inclusion de la forme $C \setminus A$ pour C circuit de \mathcal{M}*

(ii) *pour $X \subset E \setminus A$ on a $r_{\mathcal{M}/A}(X) = r_{\mathcal{M}}(X \cup A) - r_{\mathcal{M}}(A)$.*

Lorsque l'ensemble A est réduit à un seul élément $A = \{e\}$ pour $e \in E$ on simplifie les notations en $\mathcal{M} \setminus e$ et \mathcal{M}/e . Les matroïdes $\mathcal{M} \setminus e$ et \mathcal{M}/e sont quelquefois appelés les deux *mineurs principaux* de \mathcal{M} définis par e .

D'une façon générale un *mineur* d'un matroïde \mathcal{M} est tout matroïde obtenu à partir de \mathcal{M} par une suite quelconque de suppressions et de contractions.

Les opérations de suppression et de contraction sont associatives et commutatives.

Proposition 3.2.5 *Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $A, A' \subset E$ disjoints. On a*

(i) $(\mathcal{M} \setminus A) \setminus A' = \mathcal{M} \setminus (A \cup A')$.

(ii) $(\mathcal{M}/A)/A' = \mathcal{M}/(A \cup A')$.

(iii) $(\mathcal{M} \setminus A)/A' = (\mathcal{M}/A') \setminus A$.

Démonstration. La démonstration de (i) et (ii) sont immédiates en utilisant la fonction rang. Pour (iii), on va démontrer que $r_{(\mathcal{M}/A) \setminus A'} = r_{(\mathcal{M} \setminus A')/A}$. Soit $X \subset E \setminus (A \cup A')$. Alors,

$$r_{(\mathcal{M}/A) \setminus A'}(X) = r_{(\mathcal{M} \setminus A)}(X) = r_{\mathcal{M}}(X \cup A) - r_{\mathcal{M}}(A) = r_{\mathcal{M} \setminus A'}(X \cup A) - r_{\mathcal{M}}(A) = r_{(\mathcal{M} \setminus A')/A}.$$

□

Compte tenu de la Proposition 3.2.5 tout mineur de \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{M} \setminus A/B = \mathcal{M}/B \setminus A$ pour $A, B \subset E$ disjoints. Cette écriture n'est pas unique en général. Les opérations de suppression et de contraction sont duales.

Proposition 3.2.6 *Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. On a*

(i) $(\mathcal{M} \setminus A)^* = (\mathcal{M}^*)/A$.

(ii) $(\mathcal{M}/A)^* = (\mathcal{M}^*) \setminus A$.

(iii) $\mathcal{M}/A = (\mathcal{M}^* \setminus A)^*$.

Exemple 3.2.7 *Soit $U_{n,r}$ un matroïde uniforme avec $n = |E|$ et soit $T \subseteq E$ avec $|T| = t$. Alors,*

$$U_{n,r} \setminus T = \begin{cases} U_{n-t, n-t} & \text{si } n \geq t \geq n - r \\ U_{r, n-t} & \text{si } t < n - r \end{cases}$$

On trouve $U_{n,r}/T$ en appliquant la Proposition 3.2.6.

$$U_{n,r}^* \setminus T = U_{n,n-r} \setminus T = \begin{cases} U_{n-t, n-t} & \text{si } n \geq t \geq n - r \\ U_{n-r, n-t} & \text{si } t < r \end{cases}$$

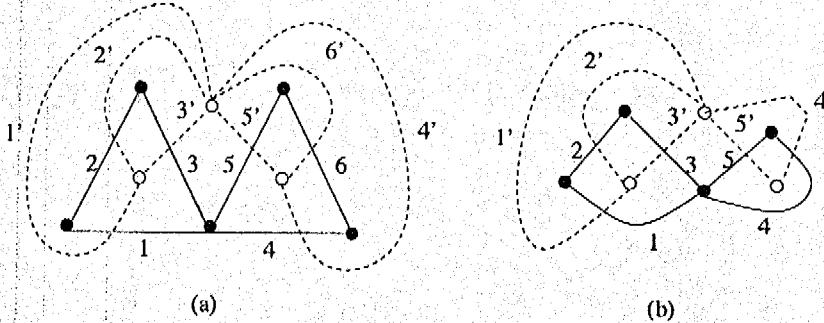


FIGURE 3.1 – (a) G et son dual G^* (b) $G^* \setminus 6$ et $(G^* \setminus 6)^* = G/6$.

et donc

$$U_{n,r}/T = (U_{n,n-r} \setminus T)^* = \begin{cases} (U_{n-t,n-t})^* = U_{0,n-t} \text{ si } n \geq t \geq n-t \\ (U_{n-r,n-t})^* = U_{r-t,n-t} \text{ si } t < r \end{cases}$$

Proposition 3.2.8 $\mathcal{M} \setminus T = \mathcal{M}/T$ si et seulement si $r(T) + r(E \setminus T) = r(\mathcal{M})$.

Démonstration. On suppose que $\mathcal{M} \setminus T = \mathcal{M}/T$ et soit B une base de $\mathcal{M} \setminus T$, alors B est une base de \mathcal{M}/T et donc $B \cup B'$ est une base de \mathcal{M} où B' est une base de $\mathcal{M}|T$. Alors, $r(T) + r(E \setminus T) = r(\mathcal{M})$.

Conversement, on suppose que $r(T) + r(E \setminus T) = r(\mathcal{M})$. Comme $\mathcal{I}(\mathcal{M}/T) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{M} \setminus T)$ alors pour montrer que $\mathcal{M} \setminus T = \mathcal{M}/T$ il suffit de montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{M} \setminus T) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{M}/T)$. Soit $I \in \mathcal{I}(\mathcal{M} \setminus T)$ alors I est un sous-ensemble d'une base B de $\mathcal{M} \setminus T$ et B est contenu dans une base $B \cup B'$ de \mathcal{M} . Comme, $r(\mathcal{M}) = |B \cup B'| = |B| + |B'| = r(E \setminus T) + |B'|$ et $r(\mathcal{M}) = r(E \setminus T) + r(T)$ alors $|B'| = r(T)$, c'est-à-dire, B' est une base de $\mathcal{M}|T$. Alors, B est une base de \mathcal{M}/T et donc $I \in \mathcal{I}(\mathcal{M}/T)$.

■

Proposition 3.2.9 Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $T \subseteq E$. Alors,

- (i) $\mathcal{M}(G) \setminus T = \mathcal{M}(G \setminus T)$ et
- (ii) $\mathcal{M}(G)/T = \mathcal{M}(G/T)$

Démonstration. La condition (i) est immédiat. Pour la condition (ii), on va montrer que $\mathcal{M}(G)/e = \mathcal{M}(G/e)$ et le résultat découle par récurrence sur $|T|$. Si e est une boucle alors $G/e = G \setminus e$ et $\mathcal{M}(G)/e = \mathcal{M}(G) \setminus e \stackrel{(i)}{=} \mathcal{M}(G \setminus e)$. Supposons donc que e n'est pas une boucle de G . On pourra vérifier que si $I \subset E(G) - e$ alors $I \cup e$ ne contient pas de cycle de G si et seulement si I ne contient pas de cycle de G/e . Alors, $\mathcal{I}((\mathcal{M}(G)/e)) = \mathcal{I}(\mathcal{M}(G/e))$.

□

Corollaire 3.2.10 Tout mineur d'un matroïde graphique est graphique.

Exemple 3.2.11 Soit G le graphe planaire de la Figure 3.1. On trouve $G/6$.

Dans le chapitre 4 on verra que tout mineur d'un matroïde vectoriel est vectoriel. Toutefois, l'opération de contraction sur une classe de matroïdes n'est pas forcément fermé. Par exemple, le matroïde $\mathcal{M}(G)$ où G est illustré dans la figure ?? est transversal (avec $A_1 = \{1, 2, 7\}$, $A_2 = \{3, 4, 7\}$, $A_3 = \{5, 6, 7\}$). On pourra vérifier que $\mathcal{M}(G/7)$ n'est plus transversal.

3.2.1 Exercices

Exercice 3.9 Montrer que tout mineur d'un matroïde \mathcal{M} peut s'écrire sous la forme $\mathcal{M} \setminus A / B = \mathcal{M} / B \setminus A$ pour $A, B \subset E(\mathcal{M})$ disjoints et B indépendant. Donner un exemple montrant qu'une telle écriture n'est pas unique en général.

Exercice 3.10 Soient \mathcal{M} un matroïde et $e \in \mathcal{M}$. Montrer que $\mathcal{M} \setminus e = \mathcal{M}/e$ si et seulement si e est un isthme ou une boucle de \mathcal{M} .

Exercice 3.11 Soient \mathcal{M} un matroïde et $e \in \mathcal{M}$. Montrer que si e n'est ni un isthme ni une boucle de \mathcal{M} les deux mineurs principaux $\mathcal{M} \setminus e$ et \mathcal{M}/e caractérisent \mathcal{M} .

3.3 Somme directe et connexité

Proposition 3.3.1 Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E et $E = E_1 + E_2$ une partition de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $r_{\mathcal{M}}(E) = r_{\mathcal{M}}(E_1) + r_{\mathcal{M}}(E_2)$
- (ii) si $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ sont des indépendants de \mathcal{M} alors $X \cup Y$ est indépendant
- (iii) pour tout circuit C de \mathcal{M} on a $C \subset E_1$ ou $C \subset E_2$.
- (iv) pour $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ on a $r_{\mathcal{M}}(X \cup Y) = r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(Y)$.

Démonstration. Les équivalences des propriétés (ii), (iii), (iv) sont immédiates. La propriété (ii) implique trivialement (i). Montrons que (i) implique (ii). Il suffit de considérer le cas où X est une base de $\mathcal{M}(E_1)$ et Y une base de $\mathcal{M}(E_2)$. Alors $X \cup Y$ est un générateur de \mathcal{M} . D'après (i) on a $|X \cup Y| = |X| + |Y| = r_{\mathcal{M}}(E_1) + r_{\mathcal{M}}(E_2) = r_{\mathcal{M}}(E)$. Donc $X \cup Y$ étant un générateur de \mathcal{M} de cardinal $r(\mathcal{M})$ est une base.

□

Lorsqu'une partition $E = E_1 + E_2$ satisfait les propriétés équivalentes de la Proposition 3.1 on dit que \mathcal{M} est *somme directe* des sous-matroïdes $\mathcal{M}(E_1)$ et $\mathcal{M}(E_2)$ et on écrit

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(E_1) \oplus \mathcal{M}(E_2)$$

Un matroïde est dit *connexe* s'il n'est pas somme directe non triviale (*non-connexe* autrement).

Un matroïde s'écrit de façon unique comme somme directe de matroïdes connexes. En effet d'après la Proposition 3.3.1 on a $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{i=k} \mathcal{M}(E_i)$ où les ensembles E_i sont les composantes connexes de la famille de parties de $E(\mathcal{M})$ constituée des circuits de \mathcal{M} . Ces composantes E_i sont appelées les *composantes connexes* de \mathcal{M} .

Notons que d'après la Proposition 3.3.1 une composante connexe d'un matroïde est soit un isthme de \mathcal{M} , soit une boucle, soit un ensemble S de cardinal $|S| \geq 2$ tel que pour tous $x, y \in S$ $x \neq y$ il existe un entier k et des circuits C_0, C_1, \dots, C_k avec $x \in C_0$, $y \in C_k$ et $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. En fait il existe toujours une telle chaîne de circuits de longueur $k = 1$. En effet

Proposition 3.3.2 Un matroïde est connexe si et seulement si deux éléments distincts quelconques sont contenus dans un circuit.

Démonstration. Soit \mathcal{C} l'ensemble des circuits du matroïde \mathcal{M} . Il suffit de montrer que si $x \in X \in \mathcal{C}$ et $y \in Y \in \mathcal{C}$ avec $X \cap Y \neq \emptyset$ alors il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $x, y \in Z$.

Considérons $x, y \in \mathcal{M}$ tels qu'il n'existe pas de $Z \in \mathcal{C}$ avec $x, y \in Z$, et supposons $X, Y \in \mathcal{C}$ choisis avec les propriétés ci-dessus de façon que $|X \cup Y|$ soit minimal. Soit $e \in X \cap Y$. Par élimination il existe $X' \in \mathcal{C}$ tel que $x \in X' \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$. On a $X' \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$ donc par minimalité $X \setminus Y \subset X'$. De même il existe $Y' \in \mathcal{C}$ tel que $y \in Y' \subset (X \cap Y) \setminus \{e\}$ et $Y \setminus X \subset Y'$.

On a $x \in X'$, $y \in Y'$ et $X' \cap Y' \neq \emptyset$. Mais $X' \cup Y' \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$ contredit l'hypothèse de minimalité.

□

Le résultat suivant caractérise un matroïde non connexe en termes de ses indépendants.

Proposition 3.3.3 *Un matroïde \mathcal{M} est non connexe si et seulement si pour un ensemble quelconque $T \subset E$, on a $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{M}|T), I_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{M}|(E \setminus T))\}$*

On a donc que si $\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(E_1) \oplus \mathcal{M}(E_2)$ avec $E = E_1 + E_2$ alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}(E)) = \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{M}(E_1)), I_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{M}(E_2))\}.$$

La connexité d'un matroïde graphique caractérise la 2-connexité d'un graphe.

Proposition 3.3.4 *Soit G un graphe sans boucle et sans sommets isolés. Si $|V(G)| \geq 3$ alors $\mathcal{M}(G)$ est connexe si et seulement si G est 2-connexe.*

Démonstration. (*Nécessité*) Supposons que $\mathcal{M}(G)$ est connexe et on montrera que G est 2-connexe. Soient $x, y, z \in V(G)$ et soit $G' = G \setminus z$ tel que $x, y \in V(G')$. Soit P une chaîne reliant x et y dans G . Si les arêtes de P ne contiennent pas z comme l'une de ses extrémités alors P est une chaîne reliant x et y dans G' . Sinon, il existe deux sommets $z_1, z_2 \in V(G')$, $z_1 \neq z_2$ tels que z_1, z_2 sont adjacents à z . Comme $\mathcal{M}(G)$ est connexe il existe un cycle C dans G contenant les arêtes $\{z, z_1\}$ et $\{z, z_2\}$, d'où on peut former une chaîne P' de z_1 à z_2 (sans passer par z) dans G' . Alors, $P[x, z_1] \cup P'[z_1, z_2] \cup P[z_2, y]$ est une chaîne reliant x à y dans G' .

(*Suffisance*) Supposons que G est 2-connexe. On procède par contradiction, supposons $\mathcal{M}(G)$ admet au moins deux composantes connexes. Soit G_1 le graphe induit par l'une de ces composantes connexes. Comme G n'a pas de boucles alors $|V(G_1)| \geq 2$ avec $G_1 \neq G$. Alors, G admet exactement une arête $\{x, y\}$ avec l'une de ses extrémités dans G_1 (disons que $x \in V(G_1)$). On a $\{x, y\} \notin E(G_1)$. Comme G est 2-connexe alors $G \setminus x$ admet une chaîne P_{yz} reliant y à un sommet $z \in G_1 \setminus x$ avec $E(P_{yz}) \cap (G_1 \setminus x) = \emptyset$. Comme G_1 est connexe, il admet une chaîne P_{zx} reliant z à x . Alors, la chaîne $P_{yz} \cup P_{zx}$ et l'arête $\{x, y\}$ forment un cycle dans G ce qui est en contradiction avec le fait que $\{x, y\} \notin E(G_1)$.

□

3.3.1 Exercices

Exercice 3.12 Montrer qu'un matroïde et son dual ont les mêmes composantes connexes.

Exercice 3.13 Soit \mathcal{M} un matroïde sur E . Pour chaque $e \in E$, soit

$$\gamma(e) = \{e\} \cup \{f \in E \mid \text{il existe un circuit de } \mathcal{M} \text{ contenant } e \text{ et } f\}.$$

On définit la relation γ sur E par $e \gamma f$ si et seulement si $e \in \gamma(f)$.

Montrer que γ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.14 Montrer que les classes de matroïdes graphiques, co-graphiques, transversals, réguliers et IF-représentables sont fermées sur l'opération de somme directe.

Exercice 3.15 Soient \mathcal{M} un matroïde connexe et $e \in \mathcal{M}$. Montrer que $\mathcal{M} \setminus e$ ou \mathcal{M}/e est connexe.

Exercice 3.16 Soient \mathcal{M} un matroïde sur E et B une base de \mathcal{M} . Pour $e \in E \setminus B$ on désigne par C_e le circuit fondamental de e relativement à B . Montrer que \mathcal{M} est connexe si et seulement la famille d'ensembles $(C_e \cap B)_{e \in E \setminus B}$ est connexe de réunion B .

Exercice 3.17 Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ des matroïdes sur des ensembles E_1, E_2, \dots, E_k tels que $E_i \cap E_j = \{e\}$ pour $1 \leq i < j \leq k$. On pose $E = \bigcup_{1 \leq i \leq k} E_i$. Soit \mathcal{C} l'ensemble des parties de E de la forme suivante : ou bien un circuit de \mathcal{M}_i ne contenant pas e pour $1 \leq i \leq k$, ou bien $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ pour C_i circuit de \mathcal{M}_i contenant e . Montrer que \mathcal{C} est l'ensemble des circuits d'un matroïde \mathcal{M} sur E .

Ce matroïde noté $\text{Ser}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k; e)$ est appelé la *connexion en série* des matroïdes \mathcal{M}_i , $1 \leq i \leq k$.

Exercice 3.18 On considère un matroïde connexe \mathcal{M} sur E et $e \in E$ tel que $\mathcal{M} \setminus e$ ne soit pas connexe. Soient E_i $i = 1, 2, \dots, k$ les composantes connexes de $\mathcal{M} \setminus e$. On pose $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}/(E \setminus (E_i \cup \{e\}))$. Montrer que $\mathcal{M} = \text{Ser}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k; e)$.

Chapitre 4

Matroïdes Graphiques et Binaires

4.1 Matroïdes des cycles d'un graphe

Soit $G = (S, E)$ un graphe (avec éventuellement des boucles et des arêtes multiples). Le *matroïde des cycles* d'un graphe $G = (S, E)$, noté $C(G)$, est le matroïde sur E ayant pour circuits les (ensembles d'arêtes des) cycles élémentaires de G .

- les indépendants de $C(G)$ sont les (ensembles d'arêtes des) forêts de G
- les bases de $C(G)$ sont les (ensembles d'arêtes des) forêts couvrantes de G
- si G est connexe, les bases de $C(G)$ sont les (ensembles d'arêtes des) arbres couvrants de G
- le rang de $C(G)$ est donné par $r(C(G)) = |S| - c(G)$, où $c(G)$ désigne le nombre de composantes connexes de G
- la fonction rang de $C(G)$ est donnée par $r_{c(G)}(X) = |S| - c((S, X))$ pour $X \subset E$

Les mineurs du matroïde $C(G)$ sont les matroïdes de cycles des mineurs correspondants du graphe G . Pour $A \subset E$ on a

$$C(G) \setminus A = C(G \setminus A)$$

$$C(G)/A = C(G/A)$$

où $G \setminus A$ resp. G/A désigne le graphe obtenu à partir de G en supprimant resp. contractant les arêtes dans A .

4.2 Matroïdes des cocycles d'un graphe

Le *matroïde des cocycles* d'un graphe $G = (S, E)$, noté $B(G)$ (anglais *bond*), est le matroïde sur E ayant pour circuits les (ensembles d'arêtes des) cocycles élémentaires de G .

- les bases de $B(G)$ sont les complémentaires des (ensembles d'arêtes des) forêts couvrantes de G
- si G est connexe, les bases de $B(G)$ sont les complémentaires des (ensembles d'arêtes des) arbres couvrants de G , encore appelés *coarbres*
- le rang de $B(G)$ est donné par $r(B(G)) = |E| - |S| + c(G)$, où $c(G)$ désigne le nombre de composantes connexes de G

Le matroïde des cocycles est le dual du matroïde des cycles. On a

$$B(G) = C^*(G)$$

- la fonction rang de $B(G)$ s'exprime par dualité à partir de la fonction rang de $C(G)$.

Les mineurs de $B(G)$ sont des matroïdes de cocycles de mineurs du graphe G . Pour $A \subset E$ on a

$$B(G) \setminus A = B(G/A) \text{ et } B(G)/A = B(G \setminus A).$$

4.3 Matroïdes dans les graphes planaires

Un graphe est dit *planaire* s'il peut être représenté dans le plan sans que ses arêtes se recoupent en dehors des sommets.

Le graphe K_4 est planaire. Par contre K_5 et $K_{3,3}$, le graphe biparti complet sur 3+3 sommets, ne sont pas planaires.

- une *face* d'une représentation d'un graphe planaire dans le plan, ou *graphe plan*, est une composante connexe - au sens topologique - du complémentaire du graphe dans le plan.

Désignons par s, a et f le nombre de sommets, arêtes et faces respectivement d'un graphe plan connexe. On a la relation suivante (ne pas oublier la face infinie).

Proposition 4.3.1 (formule d'Euler) *Si G est planaire alors*

$$s - a + f = 2.$$

Démonstration. On sait que $r(G) + r^*(G) = |E(G)|$ et $r(G) = |V(G)| - 1$. Alors, $r^*(G) = |V(G^*)| - 1$ et

$$f(G) = |V(G^*)| = r^*(G) + 1 = |E(G)| - r(G) + 1 = |E(G)| - |V(G)| + 1 + 1 = m - n + 2 = f.$$

□

Les mineurs d'un graphe planaire étant également planaires il existe des graphes non planaires dont tout mineur propre est planaire. On a montré que ces graphes sont au nombre de deux : ce sont les graphes K_5 et $K_{3,3}$, souvent appelés *graphes de Kuratowski*. En effet le topologue C. Kuratowski a établi en 1927 dans le contexte des variétés topologiques qu'un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucune subdivision de K_5 et $K_{3,3}$ (une *subdivision* d'un graphe est obtenue en remplaçant des arêtes par des chemins). Cette propriété est facilement équivalente à la propriété de mineur.

Théorème 4.3.2 *Soit G un graphe. Alors, G est planaire si et seulement s'il n'a aucun mineur de $\mathcal{M}(G)$ est isomorphe à K_5 ou à $K_{3,3}$.*

Démonstration. (Suffisance) Si G n'est pas planaire alors G ne contient ni une subdivision de K_5 ni une subdivision de $K_{3,3}$ et donc $\mathcal{M}(G)$ ne contient ni $\mathcal{M}(K_5)$ ni $\mathcal{M}(K_{3,3})$ comme mineurs.

(Nécessité) Supposons que G est planaire. $\mathcal{M}(G)$ contient soit $\mathcal{M}(K_5)$ ou bien $\mathcal{M}(K_{3,3})$ comme mineur. Alors, il existe un graphe G' obtenu à partir de G en utilisant de suppressions et de contraction d'arêtes, tel que $\mathcal{M}(G')$ est isomorphe à $\mathcal{M}(K_5)$ (ou bien à $\mathcal{M}(K_{3,3})$). Mais K_5 (et $K_{3,3}$) est 3-connexe alors, d'après le Théorème 4.3.5, G' est isomorphe à K_5 (ou bien à $K_{3,3}$) ce qui n'est pas possible car ni K_5 ni $K_{3,3}$ sont planaires (on ne peut pas avoir un graphe non planaire à partir d'un graphe planaire en appliquant une suite de suppressions et de contractions).

□

Les graphes de Kuratowski sont très liés aux matroïdes graphiques et cographiques. En effet tout mineur d'un matroïde graphique étant graphique, les matroïdes graphiques peuvent être caractérisés par des mineurs exclus.

mineurs

Théorème 4.3.3 (Tutte) *Un matroïde est graphique si et seulement aucun de ses n'est isomorphe à $U_{2,4}, F_7, F_7^*, K_5^* = B(K_5)$ ou $K_{3,3}^* = B(K_{3,3})$.*

Les 3 premiers mineurs expriment qu'un matroïde graphique est régulier (voir plus bas Section 5). Les 2 derniers sont liés au théorème de Kuratowski et à la dualité dans les graphes.

A tout graphe plan G on peut associer un autre graphe plan G^* par une construction appelée *dualité des graphes planaires* échangeant les sommets et les faces, et conservant les arêtes à isomorphisme près.

4.3.1 Construction du dual planaire

On place un sommet de G^* dans chaque face de G , et pour chaque arête e de G on relie par une arête e^* de G^* les sommets contenus dans les faces de G situées de part et d'autre de e en effectuant le tracé de façon planaire ce qui est toujours possible (ces faces peuvent être identiques lorsque e est un isthme de G , dans ce cas e^* est une boucle de G^*). On a $s^* = f$ $a^* = a$ et $f^* = s$. En répétant la construction on obtient $G^{**} \sim G$ (avec G^* connexe).

En complétant le plan par un point à l'infini on obtient la sphère S^2 . Inversement toute représentation d'un graphe sur S^2 donne lieu à des représentations planes, le point à l'infini pouvant toujours être choisi en dehors du graphe. Si un graphe planaire G est 3-connexe sa représentation sphérique est topologiquement unique : deux représentations sphériques de G se déduisent l'une de l'autre par un homéomorphisme de S^2 . La représentation plane d'un graphe planaire 3-connexe est topologiquement unique, au choix de la face infinie près. Le graphe dual G^* de G est alors unique. Si le graphe G n'est pas 3-connexe il peut avoir des représentations planes non équivalentes. Alors les graphes duals G^* correspondant à ces représentations peuvent être combinatoirement différents.

Proposition 4.3.4

$$C(G^*) \approx C^*(G)$$

Démonstration. L'isomorphisme de la proposition est donné par la bijection $e \mapsto e^*$. Un cycle élémentaire du graphe plan G^* sépare en deux l'ensemble de ses faces i.e. des sommets de G : celles qui sont situées à l'intérieur resp. à l'extérieur du cycle. Le cocycle élémentaire de G associé au cycle par la bijection est défini par cette bipartition.

□

Mentionnons le résultat suivant :

Théorème 4.3.5 (Whitney) *Un graphe G est déterminé par son matroïde des cycles (ou des cocycles) si et seulement si G est 3-connexe.*

Lorsqu'un graphe planaire non 3-connexe a des duals non isomorphes, tous ont le même matroïde des cycles conformément à la Proposition 4.3.4. La proposition 4.3.4 s'exprime qu'un matroïde de graphe planaire est à la fois graphique et cographique. La réciproque est vraie. D'où,

Théorème 4.3.6 *Soit \mathcal{M} un matroïde. \mathcal{M} est un matroïde d'un graphe planaire si et seulement si aucun de ses mineurs est isomorphe à $U_{2,4}$, F_7 , F_7^* , K_5 , K_5^* , $K_{3,3}$ ou $K_{3,3}^*$.*

4.4 Représentations vectorielles

Un matroïde de la forme $C(G)$ resp. $B(G)$ est dit *graphique* resp. *cographique*.

Proposition 4.4.1 *Les matroïdes graphiques (resp. cographiques) sont représentables sur tout corps.*

Démonstration. Soient $G = (S, E)$ un graphe, et \mathbb{F} un corps quelconque. On va orienter les arêtes de G , on obtient $D(G)$. Soit $A = A(D(G))$ la matrice d'incidence de $D(G)$.

$$a_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est sommet initial de } e \\ -1 & \text{si } i \text{ est sommet final de } e \\ 0 & \text{si } i \notin e \end{cases}$$

On considère la matrice $A' = A'(D(G))$ obtenue à partir de A en réduisant chaque entrée modulo \mathbb{F} . Ceci ne change pas la matrice sauf si \mathbb{F} est de caractéristique deux, dans ce cas, chaque entrée négative change de signe. On va vérifier que $\mathcal{M}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{M}(A')$ sur \mathbb{F} .

Soit $C = \{e_1, \dots, e_k\}$ un cycle de $\mathcal{M}(G)$. Si C est une boucle alors la colonne c correspondante de A' et donc c est un circuit de $\mathcal{M}(A')$. Supposons que C n'est pas une boucle et soit C_{e_1}, \dots, C_{e_k} les colonnes correspondantes de A' . On parcours C cycliquement en commençant par e_1 , et pour chaque e_j on définit $\alpha_j = 1$ (resp. -1) si on parcours e_j dans la même orientation (resp. orientation opposée) que l'orientation de e_j . $\alpha_1 C_{e_1}, \dots, \alpha_k C_{e_k}$ sont les vecteurs incidents à une réorientation de C (dans laquelle chaque arête est orientée dans la direction du parcours). On a que dans cette réorientation de C chaque sommet de C est le sommet initial et terminal d'exactlyement un arc.

Alors, $\sum_{i=1}^k \alpha_i C_{e_i} = 0$ et alors, C_{e_1}, \dots, C_{e_k} sont linéairement dépendants.

Conversement, supposons que $\{f_1, \dots, f_m\}$ est un circuit de $\mathcal{M}(A')$. On considère les colonnes correspondantes C_{f_1}, \dots, C_{f_m} . Si $m = 1$ alors f_1 est une boucle de G et donc f_1 est un circuit de $\mathcal{M}(G)$. Supposons que $m \geq 2$. On a donc qu'il existe $\beta_1, \dots, \beta_k \neq 0$ éléments dans \mathbb{F} tels que

$\sum_{i=1}^k \beta_i C_{f_i} = 0$. Si une ligne de cette matrice contient une entrée non nulle, alors elle contient au moins 2 entrées non nulles. Soit G_1 le graphe associé à la matrice constituée de les colonnes C_{f_1}, \dots, C_{f_m} , on a que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V(G_1)$ et donc G_1 admet un cycle. On en déduit que $\{f_1, \dots, f_m\}$ est un dépendant dans $\mathcal{M}(G)$.

□

Un matroïde représentable sur tout corps est dit *régulier*. Les matroïdes réguliers sont équivalents aux matrices *totalement unimodulaires* (i.e., une matrice à coefficients 0,1,-1 dont tous les sous-déterminants valent 0,1 ou -1 - 0 ou inversible dans le module \mathbb{Z}). En effet, une matrice $I \mid A$, où I est la matrice identité, est une représentation fondamentale d'un matroïde régulier si et seulement si la matrice A est totalement unimodulaire.

Proposition 4.4.2 Soit G un graphe. Alors, $\mathcal{M}(G)$ est représentable avec une matrice unimodulaire sur \mathbb{R} .

Démonstration. On prouve que $A(D(G))$ est unimodulaire sur \mathbb{R} par induction sur $|E(G)|$. Soit B une sous-matrice de taille $m \times m$ de $A(D(G))$. On montre que $|\det(B)| = 0, 1, -1$. Si $|E(G)| = 1$, alors c'est évident. Soit $|E(G)| = n$, si $m < n$, alors B est une matrice obtenue à partir de $A \setminus e$, $e \in E(G)$ et, d'après l'hypothèse d'induction, $|\det(B)| = 0, 1, -1$. On suppose maintenant $m = n$. On suppose que chaque ligne $B \neq 0$ (sinon $|\det(B)| = 0$).

- Cas 1 : B admet une ligne avec exactement une entrée $b_{i,j} \neq 0$. On a $|\det(B)| = |\det(B_{ij})|$. B_{ij} est la matrice obtenue à partir de B en supprimant la ligne i et la colonne j de B . Alors on a le résultat d'après l'hypothèse d'induction.
- Cas 2 : Chaque ligne admet au moins 2 entrées non nulles. Alors B admet au moins $2n$ entrées non nulles. Mais, chaque colonne de B admet au plus 2 entrées non nulles. Alors, B admet exactement $2n$ entrées non nulles (deux par ligne et deux par colonne). On a donc que B est la matrice d'adjacence (sommets-arc) d'un sous-graphe de $D(G)$, noté G' . De plus, $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V(G')$, alors G' admet un cycle et donc les colonnes de B sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire, $|\det(B)| = 0$.

□

Les matroïdes graphiques et cographiques sont ainsi des matroïdes réguliers.

4.4.1 Exercices

Exercice 4.20 (i) Démontrer la formule d'Euler sans utiliser la fonction rang (indication : récurrence sur le nombre d'arêtes, enlever une arête contenue dans un cycle s'il en existe, jusqu'à arriver à un arbre.

(ii) Utiliser la formule d'Euler pour vérifier que K_5 et $K_{3,3}$ (le graphe des 3 puits et des 3 maisons des jeux mathématiques) ne sont pas planaires.

Exercice 4.21 Donner deux représentations planes du graphe de sommets a, b, c, d et d'arêtes $1 = ab$ $2 = ab$ $3 = ac$ $4 = bc$ $5 = ad$ $6 = bd$ telles que les duals planaires correspondants soient non isomorphes

Exercice 4.22 Soit G un graphe et $A(G)$ sa matrice d'incidence (non orientée). Alors, $A(G)$ est unimodulaire si et seulement si G est biparti.

La représentation du matroïde des cycles donnée en Proposition 4.4.1 est très simple, mais n'est pas de pleine dimension. En effet pour tout $e \in E$ on a $\sum_{x \in V} v_{e,x} = 0$: la dimension est au plus $|V| - 1$. De façon plus précise, si $V = V_1 + V_2 + \dots + V_p$ sont les composantes connexes de G , on a $\sum_{x \in V_i} v_{e,x} = 0$ pour toute composante connexe de G . On retrouve le fait que le rang de $C(G)$ est $|V| - p$, égal à la dimension d'une représentation vectorielle de Whitney.

Pour obtenir une représentation de pleine dimension, on applique les constructions du chapitre ???. Considérons une base B de $C(G)$, autrement dit une forêt couvrante du graphe. A tout $e \in E \setminus B$ on associe le vecteur γ_e de \mathbb{R}^E fonction caractéristique du cycle unique contenu dans $B \cup \{e\}$ pour le sens de parcours du cycle défini par e : pour tout $x \in E$ la composante de γ_e sur x vaut 0 si x n'est pas dans le cycle, 1 si x appartient au cycle et est orienté dans le sens du parcours, -1 si x appartient au cycle et est orienté en sens inverse. Le sous-espace de \mathbb{R}^E engendré par les vecteurs

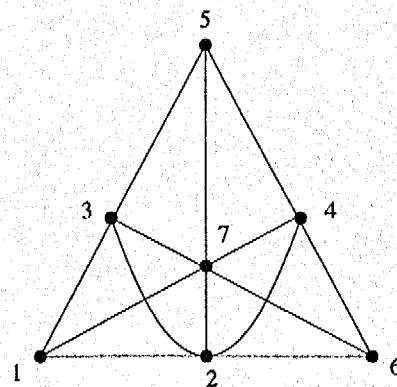


FIGURE 4.1 – F_7 .

γ_e pour $e \in E \setminus B$ est appelé l'*espace des cycles* de \vec{G} , ou encore l'*espace des flots*. Le matroïde $C(G)$ est le matroïde des supports de l'espace des cycles.

On obtient une représentation de Whitney de pleine dimension en associant à B la base canonique de IF^B et à tout $e \in E \setminus B$ la restriction à B de γ_e .

4.5 Matroïdes binaires

Un matroïde *binaire* est un matroïde vectoriel sur \mathbb{Z}_2 . Bien évidemment tout matroïde graphique est binaire. La contention contraire n'est pas vrai en général, en effet le résultat suivant montre que F_7 est binaire pour autant F_7 n'est pas graphique (voir exercices).

Théorème 4.5.1 F_7 est représentable sur un corps IF si et seulement si IF est de caractéristique égale à 2.

Démonstration. Soit A une matrice binaire représentant F_7 , voir figure 4.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{37} \end{pmatrix}$$

Sans perde de généralité, on suppose que A est de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a'_{14} & \dots & a'_{17} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} & \dots & a'_{37} \end{pmatrix}$$

Comme $\{2, 3, 4\}$ est un circuit alors on a $a'_{14} = 0, a'_{24} \neq 0$ et $a'_{34} \neq 0$. De même, comme $\{1, 3, 5\}$ est un circuit alors $a'_{15} \neq 0, a'_{25} = 0$ et $a'_{35} \neq 0$, et comme $\{1, 2, 6\}$ est un circuit alors $a'_{16} \neq 0, a'_{26} \neq 0$ et $a'_{36} = 0$. Finalement, comme $\{1, 2, 3, 7\}$ est un dépendant alors $a'_{17} \neq 0, a'_{27} \neq 0$ et $a'_{37} \neq 0$.

On a donc que A doit être de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i \neq 0$ éléments dans \mathbb{F} . On transforme cette matrice dans la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 & r & s & 0 & i \end{pmatrix}$$

en multipliant la ligne 1 par c^{-1} , la ligne 2 par f^{-1} , la ligne 3 par i^{-1} , la colonne 4 par $d^{-1}f$, la colonne 5 par $a^{-1}c$, la colonne 6 par $b^{-1}c$, la colonne 1 par c , la colonne 2 par f et la colonne 3 par i .

Maintenant, Comme $\{147\}$ est un circuit alors $\det(c_1, c_4, c_7) = 0$, c'est-à-dire,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & r & 1 \end{pmatrix} = 0$$

d'où, on trouve que $r = 1$. De même, comme $\{257\}$ et $\{367\}$ sont de circuits alors

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & q & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

D'où, $s = q = 1$. On obtient donc que A est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, comme $\{456\}$ est dépendants, alors

$$0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(-1) + 1 = 1 = 1 = 2.$$

On a donc que la caractéristique de \mathbb{F} est égale à 2 (pour avoir $2 = 0$).

□

Proposition 4.5.2 *La représentation de Tutte sur \mathbb{Z}_2 d'un matroïde binaire est unique.*

Démonstration. Soient \mathcal{M} un matroïde binaire sur un ensemble E , $V \subset \mathbb{Z}_2^E$ tel que $\mathcal{M} = \text{Supp}(V)$. Considérons une base B de \mathcal{M} , $e \in E \setminus B$ et C_e le circuit fondamental de e . Le vecteur fondamental γ_e de e , uniquement défini dans le cas général par les propriétés $\gamma_e \in V$, $\gamma_e(e) = 1$ et $s(\gamma_e) = C_e$ est dans le cas binaire uniquement déterminé par C_e : on a $\gamma_e(x) = 1$ pour $x \in C_e$ et $\gamma_e(x) = 0$ pour $x \in E \setminus C_e$. Rappelons que $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ constitue une base fondamentale de V , base qui se trouve ainsi uniquement déterminée par \mathcal{M} .

□

L'espace $V \subset 2^E$ est appelé l'espace binaire du matroïde \mathcal{M} . Nous le noterons $V_2(\mathcal{M})$, ou plus simplement $V(\mathcal{M})$ si aucune confusion n'en résulte.

Dans le contexte des espaces binaires on identifie couramment dans les notations un vecteur de 2^E et son support. Remarquons que le support de la somme binaire de deux vecteurs X et Y est

la différence symétrique $X\Delta Y = (X\setminus Y) \cup (Y\setminus X)$ des ensembles X et Y correspondants, et que le support du produit binaire de deux vecteurs X et Y est l'intersection des ensembles correspondants. On peut donc écrire $X + Y = X\Delta Y$ et $X \cdot Y = X \cap Y$. Notons que la différence symétrique $X_1\Delta X_2\Delta \cdots \Delta X_k$ est simplement l'ensemble des éléments appartenant à un nombre pair des X_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Les matroïdes binaires constituent la classe la plus simple de matroïdes vectoriels. Ils ont de nombreuses caractérisations.

Proposition 4.5.3 Soit \mathcal{M} un matroïde. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{M} est binaire
- (ii) une différence symétrique non vide de circuits contient un circuit
- (iii) la différence symétrique de deux circuits comodulaires distincts d'intersection non vide est un circuit
- (iv) pour toute base B et tout circuit C on a

$$C = \Delta_{e \in C \setminus B} C_B(e)$$

où $C(B; e)$ désigne le circuit fondamental de C relativement à B .

(v) l'intersection d'un circuit et d'un cocircuit est de cardinal pair.

Démonstration. Nous montrerons l'équivalence de (i) et (ii), puis les implications $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii)$.

(i) \Rightarrow (ii) Soit $\lambda : E \rightarrow V(r, 2)$ une représentation binaire de \mathcal{M} sur $V(r, 2)$ avec $r(\mathcal{M}) = r$. Soient C_1, C_2 deux circuits de \mathcal{M} , alors

$$\sum_{e \in C_1} \lambda(e) = 0 \text{ et } \sum_{e \in C_2} \lambda(e) = 0$$

et donc $\sum_{e \in C_1} \lambda(e) + \sum_{e \in C_2} \lambda(e) = 0$. Si $f \in C_1 \cap C_2$ alors λf apparaît deux fois dans la somme et donc

$$\sum_{e \in C_1 \Delta C_2} \lambda(e) = 0$$

d'où, $C_1 \Delta C_2$ contient un circuit.

(ii) \Rightarrow (i) Soit \mathcal{M} un matroïde vérifiant (i). Désignons par V l'espace binaire engendré par les circuits de \mathcal{M} et posons $\mathcal{M}' = \text{Supp}(V)$. Par construction tout circuit de \mathcal{M} est dans V donc contient un circuit de \mathcal{M}' . Inversement tout circuit de \mathcal{M}' étant dans V est par construction une différence symétrique de circuits de \mathcal{M} donc contient un circuit de \mathcal{M} d'après (i).

(ii) \Rightarrow (iii) Soient X et Y deux circuits comodulaires distincts tels que $X \cap Y \neq \emptyset$. D'après (ii) il existe un circuit $Z \subset X\Delta Y$. Mais par la propriété d'élimination pointée et l'unicité impliquée par la comodularité nécessairement Z contient $X\Delta Y$. D'où, $Z = X\Delta Y$.

(iii) \Rightarrow (iv) Nous faisons une récurrence sur $|C \setminus B|$.

- $|C \setminus B| = 1$, soit $C \setminus B = \{e\}$. Alors $C = C_B(e)$.
- $|C \setminus B| = 2$, soit $C \setminus B = \{e_1, e_2\}$. Posons $C_i = C_B(e_i)$ pour $i = 1, 2$. On a $r(C \cup C_1) \geq |(C \cup C_1) \cap B| = |C \cup C_1| - 2$ et $r(C \cap C_1) = |C \cap C_1|$, donc

$$|C \cap C_1| + |C \cup C_1| - 2 \leq r(C \cap C_1) + r(C \cup C_1) \leq r(C) + r(C_1) = |C| - 1 + |C_1| - 1$$

par suite les inégalités sont des égalités, et les circuits C et C_1 sont comodulaires. On a $e_1 \in C \cap C_1$, donc d'après (iii) $C \Delta C_1$ est un circuit, et comme ce circuit est contenu dans $B \cup \{e_2\}$ on nécessairement $C \Delta C_1 = C_2$. D'où $C = C_1 \Delta C_2$.

- $|C \setminus B| \geq 3$. Soient $e_1, e_2 \in C \setminus B$ $e_1 \neq e_2$ et B' une base de \mathcal{M} telle que $C \setminus \{e_1, e_2\} \subset B' \subset B \cup C \setminus \{e_1, e_2\}$. On a $C \setminus B' = \{e_1, e_2\}$, donc d'après le cas précédent $C = C'_1 \Delta C'_2$ où $C'_i = C_{B'}(e_i)$ pour $i = 1, 2$.

Comme $C'_1, C'_2 \subset B' \cup C \subset B \cup C$ les ensembles $C'_1 \setminus B$ et $C'_2 \setminus B$ partitionnent $C \setminus B$. Par récurrence il vient

$$C = C'_1 \Delta C'_2 = (\Delta_{e \in C'_1 \setminus B} C_B(e)) \Delta (\Delta_{e \in C'_2 \setminus B} C_B(e)) = \Delta_{e \in C \setminus B} C_B(e).$$

(iv) \Rightarrow (v) Soient C un circuit et D un cocircuit. Considérons une base B de \mathcal{M} de la forme $B = A \cup \{e\}$ où A est une base de l'hyperplan $E \setminus D$ et $e \in D$. Comme $y \in C_B(x)$ si et seulement si $x \in C_{E \setminus B}^*(y)$ pour tout $y \in B$ et $x \in E \setminus B$ où B est une base d'un matroïde (voir exercices 3.1.1) et puisque $B \cap D = \{e\}$ on a

$$C_B(x) \cap D = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin D, \\ \{e, x\} & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Donc (d'après (iv)) $C \cap D = (\Delta_{x \in C \setminus B} C_B(x)) \cap D$ étant une différence symétrique d'ensembles $C_B(x) \cap D$ de cardinal 0 ou 2 est de cardinal pair.

(v) \Rightarrow (ii) Soit $X = C_1 \Delta C_2 \Delta \cdots \Delta C_k$ une différence symétrique non vide de circuits de \mathcal{M} . Supposons que X ne contienne pas de circuit. Soient B une base de \mathcal{M} contenant X et $e \in X$. Considérons le cocircuit D complémentaire de l'hyperplan engendré par $B \setminus \{e\}$. On a $D \cap X = \{e\}$. Mais d'après (v) $C_i \cap D$ est pair pour $i = 1, 2, \dots, k$. D'où une contradiction.

□

Théorème 4.5.4 *Un matroïde est binaire si et seulement si aucun de ses mineurs n'est isomorphe à $U_{2,4}$.*

Démonstration. Nous montrons que la propriété du théorème est directement équivalente à la propriété (iii) de la Proposition 4.5.3. Remarquons que (iii) est immédiatement équivalente à (iii') : pour tous circuits comodulaires distincts C_1, C_2 d'intersection non vide $C_1 \cup C_2$ contient exactement 3 circuits (à savoir C_1, C_2 et $C_1 \Delta C_2$).

Soit \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E . Supposons que (iii') soit en défaut, et considérons deux circuits comodulaires distincts C_1, C_2 tels que $C_1 \cup C_2$ contienne ≥ 4 circuits. Soient $e_1 \in C_2 \setminus C_1$ et $e_2 \in C_1 \setminus C_2$. Par suite de la comodularité de C_1, C_2 , et donc de l'unicité du circuit contenu dans $C_1 \cup C_2 \setminus e$ pour $e \in C_1 \cap C_2$, il existe $e_3, e_4 \in C_1 \cap C_2$ et des circuits C_3, C_4 tels que $C_1 \Delta C_2 \subset C_3 \cap C_4$, $e_3 \in C_4 \setminus C_3$ et $e_4 \in C_3 \setminus C_4$. Posons $A = E \setminus (C_1 \cup C_2)$ et $X = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{M} \setminus A / X$ a exactement 4 circuits : les quatre ensembles $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \setminus \{e_i\}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Donc $\mathcal{M} \setminus A / X \sim U_{2,4}$.

Inversément supposons que $U_{2,4}$ soit un mineur de \mathcal{M} . Il existe $A, X \subset E$ tels que $A \cap X = \emptyset$, X indépendant et $\mathcal{M} \setminus A / X \sim U_{2,4}$. Posons $E \setminus A \cup X = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Par définition du contraté $X \cup \{e_i, e_j\}$ est une base de \mathcal{M} pour tous $1 \leq i < j \leq 4$. Par suite il existe $X_i \subset X$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ tel que $C_i = X_i \cup \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \setminus \{e_i\}$ soit un circuit de \mathcal{M} . On vérifie immédiatement que C_1, C_2 circuits fondamentaux relativement à la base $B = X \cup \{e_3, e_4\}$ sont comodulaires (cf la démonstration de la Proposition 2), et que $C_3, C_4 \subset C_1 \cup C_2$. La propriété (iii') est donc en défaut.

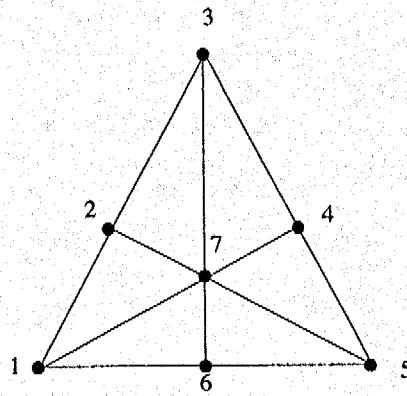


FIGURE 4.2 – F_7^- .

□

Exemple 4.5.5 Le matroïde F_7^- (voir figure 4.2) n'est pas binaire car il admet $U_{2,4}$ comme mineur.
En effet,

$$\mathcal{B}(F_7^- \setminus \{6, 7\}) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \\ \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

et donc

$$\mathcal{B}((F_7^- \setminus \{6, 7\})^*) = \{\{4, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}.$$

Alors,

$$\mathcal{B}((F_7^- \setminus \{6, 7\})^*) = \{\{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}$$

et

$$\mathcal{B}((F_7^- \setminus \{6, 7\})^*) = \mathcal{B}(F_7^- \setminus \{6, 7\}/5) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} = \mathcal{B}(U_{2,4}).$$

4.5.1 Exercices

Exercice 4.23 Etablir que chacune des propriétés suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un matroïde \mathcal{M} sur un ensemble E soit binaire.

- (i) Une différence symétrique de circuits est une union disjointe de circuits.
- (ii) Pour tous circuits C_1, C_2 distincts et $x, y \in C_1 \cap C_2$ l'ensemble $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\}$ contient un circuit.
- (iii) Toute codroite est contenue dans au plus 3 hyperplans.
- (iv) Pour toutes bases B, B' et tout $x \in B$ il existe un nombre impair d'éléments $y \in B'$ tels que $B - x + y$ et $B' + x - y$ soient deux bases
- (v) L'intersection d'un circuit et d'un cocircuit est de cardinal différent de 1 ou 3
- (vi)* Il existe une base B de \mathcal{M} telle que pour tout circuit C de \mathcal{M} on ait

$$C = \Delta_{e \in E \setminus B} C_B(e)$$

Exercice 4.24 Montrer que F_7 n'est pas graphique. Qu'en est-il pour $F_7 \setminus 7$?

Exercice 4.25 Montrer que F_7^- est représentable sur un corps \mathbb{F} si et seulement si \mathbb{F} est de caractéristique égale à 2.

(ii) En utilisant Théorème 4.5.1 montrer que $F_7 \cup F_7^-$ ne représentable sur aucun corps.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 5

Matroïdes Représentables

5.1 Matroïdes de dépendances linéaires et affines

Soient \mathbb{F} un corps, d un entier ≥ 1 , E un ensemble (fini) et $\mathcal{V} = (v_e)_{e \in E}$ une famille de vecteurs de \mathbb{F}^d indexée par E . Nous avons vu en Théorème 2.1.2 que

$$\mathcal{I} = \{X \subset E \mid \text{les vecteurs } v_e \text{ } e \in X \text{ sont linéairement indépendants sur } \mathbb{F}\}$$

est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E appelé le *matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{F} de la famille \mathcal{V}* . Nous le noterons $\text{Lin}_{\mathbb{F}}(\mathcal{V})$, ou $\text{Lin}_{\mathbb{F}}(E)$, ou même $\text{Lin}(E)$, en identifiant dans les notations un élément $e \in E$ et le vecteur v_e correspondant.

Les circuits de $\text{Lin}(E)$ sont les sous-ensembles $C \subset E$ tels que $(v_e)_{e \in C}$ soit linéairement dépendants sur \mathbb{F} , et C minimal pour l'inclusion avec cette propriété.

Lemme 5.1.1 *Soient C est un circuit de $\text{Lin}(E)$ et $\lambda : C \rightarrow \mathbb{F}$ une application non nulle, vérifiant $\sum_{e \in C} \lambda(e)v_e = 0$. Alors λ est définie à un facteur multiplicatif non nul près, et on a $\lambda(e) \neq 0$ pour tout $e \in C$.*

Rappelons que des vecteurs $(v_e)_{e \in X}$ de \mathbb{F}^d sont *affinement dépendants sur \mathbb{F}* s'il existe une application non nulle $\lambda : X \rightarrow \mathbb{F}$ telle que $\sum_{e \in X} \lambda(e)v_e = 0$ et $\sum_{e \in X} \lambda(e) = 0$.

La dépendance affine dans \mathbb{F}^d se ramène à la dépendance linéaire dans $\mathbb{F}^d \times \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^{d+1}$. En effet clairement des vecteurs $(v_e)_{e \in X}$ sont affinement dépendants sur \mathbb{F} si et seulement si les vecteurs $(v_e \times \{1\})_{e \in X}$ sont linéairement dépendants sur \mathbb{F} . Les indépendants du *matroïde des dépendances affines sur \mathbb{F} de $\mathcal{V} = (v_e)_{e \in E}$* , noté $\text{Aff}_{\mathbb{F}}(\mathcal{V})$, ou $\text{Aff}_{\mathbb{F}}(E)$, ou $\text{Aff}(E)$, sont donnés par

$$\mathcal{I}_{\text{Aff}(E)} = \{X \subset E \mid \text{les vecteurs } v_e \text{ } e \in X \text{ sont affinement indépendants sur } \mathbb{F}\}.$$

On remarque que $r(\text{Aff}(E)) = \dim(E) + 1$. Nous utiliserons souvent la dépendance affine dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 pour donner des exemples géométriques de petits matroïdes de rangs 3 ou 4.

Exemple 5.1.2 Cycles de $M(K_4)$. Le matroïde $M(K_4)$ est le matroïde à 6 éléments dont les circuits sont les cycles élémentaires du graphe complet K_4 . En Chapitre 4 est montré qu'un tel matroïde est représentable sur tout corps. On vérifie en particulier que $M(K_4)$ est le matroïde des dépendances affines sur \mathbb{R} des 6 points du plan \mathbb{R}^2 donnés par les colonnes de la matrice suivante

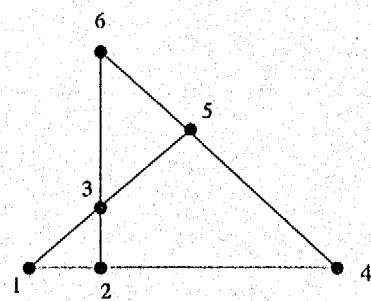


FIGURE 5.1 – Représentation géométrique

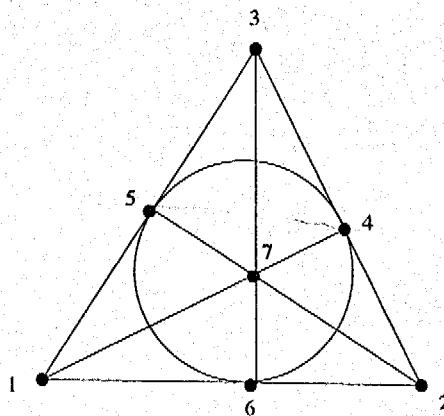


FIGURE 5.2 – Représentation affine conventionnelles de F_7 dans le plan. La droite 456 est représentée par un cercle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.1.3 Matroïde de Fano F_7 . Le matroïde F_7 est le plan projectif fini d'ordre $m = 2$. D'après la formule classique il comporte $m^2 + m + 1 = 7$ éléments. On vérifie que F_7 est le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_2 des 7 vecteurs non nuls de \mathbb{Z}_2^3 , autrement dit des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_2 des colonnes de la matrice

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Exemple 5.1.4 matroïde de MacLane M_8 . Le matroïde de Mac-Lane est obtenu en enlevant un point au plan affine d'ordre $m = 3$. Il a $m^2 - 1 = 8$ éléments. On vérifie que M_8 est le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_3 des colonnes de la matrice

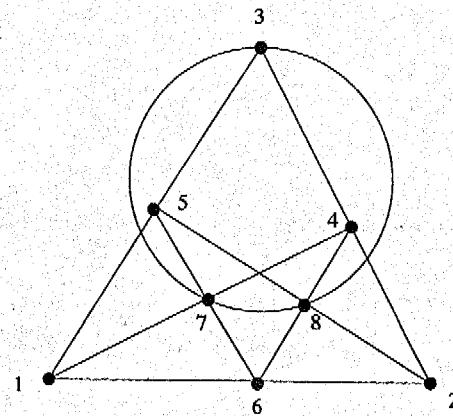


FIGURE 5.3 - Représentation affine conventionnelle du matroïde de MacLane dans le plan. La droite 378 est représentée par un cercle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1.1 Exercices

Exercice 5.27 Soit \mathcal{V} une famille de vecteurs $(v_e)_{e \in E}$ de \mathbb{F}^d . Soit $f : \mathbb{F}^d \rightarrow \mathbb{F}^d$ une application linéaire non singulière. On pose $f(\mathcal{V}) = (f(v_e))_{e \in E}$. Montrer que $\text{Lin}(\mathcal{V}) = \text{Lin}(f(\mathcal{V}))$.

Exercice 5.28 Soit M le matroïde des dépendances linéaires des colonnes d'une matrice \mathcal{A} . Est-ce que M est modifié par les opérations suivantes sur les lignes de \mathcal{A} : (i) échange de deux lignes, (ii) multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, (iii) addition d'une ligne à une autre ?

Comment cet exercice se relie-t-il au précédent ?

Exercice 5.29 Quel est le nombre maximal d'éléments d'un matroïde simple, i.e. sans boucle ni éléments en parallèle, de rang r vectoriel sur un corps fini \mathbb{F} à q éléments ?

Exercice 5.30 Montrer que \mathbb{F}_7 est coordonnable sur un corps \mathbb{F} si et seulement si \mathbb{F} est de caractéristique 2.

Exercice 5.31 Montrer que M_8 est coordonnable sur un corps \mathbb{F} si et seulement si l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a une solution dans \mathbb{F} .

5.2 Matroïde de supports

Soient \mathbb{F} un corps, E un ensemble et V un sous-espace de l'espace vectoriel \mathbb{F}^E des applications de E dans \mathbb{F} . Le support $s(v)$ d'un vecteur $v \in V$ est défini par

$$s(v) = \{e \in E \mid v(e) \neq 0\}$$

Lemme 5.2.1 Les supports minimaux pour l'inclusion des vecteurs non nuls de V constituent les circuits d'un matroïde sur E .

Démonstration. Soit

$$\mathcal{C} = \{X \subset E \mid X \text{ minimal pour l'inclusion tel qu'il existe } v \in V \setminus \{0\} \text{ satisfaisant } X = s(v)\}.$$

Considérons $X, Y \in \mathcal{C}$, $X \neq Y$, et $e \in X \cap Y$. On a $X = s(u)$ et $Y = s(v)$ avec $u, v \in V$. Le vecteur $w = v(e)u - u(e)v \in V$ est non nul car $X \neq Y$. Par suite il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $Z \subset s(w)$. On a $Z \subset s(w) \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$.

□

Le matroïde dont l'ensemble des circuits est donné par le Lemme 5.2.1 est appelé le *matroïde des supports* de V . Nous le noterons $\text{Supp}(V)$.

Remarquons que si $v, v' \in V$ sont deux vecteurs tels que $s(v) = s(v')$ est un circuit de $\text{Supp}(V)$ alors $v' = \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Dans les exemples l'espace vectoriel V sera en général donné par une base. Soit B une base de $\text{Supp}(V)$. On rappelle que d'après le lemme de pivotement (lemme ??) pour tout $e \in E \setminus B$ il existe un circuit unique $C \subset B \cup \{e\}$. Par suite il existe un vecteur unique $\gamma_e \in V$ tel que $s(\gamma_e) \subset B \cup \{e\}$ et $\gamma_e(e) = 1$. Le vecteur γ_e est appelé *vecteur fondamental de e relativement à B*.

Proposition 5.2.2 Les vecteurs $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ constituent une base de V .

Démonstration. Les vecteurs $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ sont indépendants, en effet leurs restrictions à $E \setminus B$ constituent une matrice identité.

Soit $u \in V$ et considérons $u' = u - \sum_{e \in E \setminus B} u(e) \gamma_e$. On a $u' \in V$ et $s(u') \subset B$ d'où $u' = 0$. On a $u = \sum_{e \in E \setminus B} u(e) \gamma_e$.

□

La base $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ est appelée *base fondamentale de V associée à B*.

Corollaire 5.2.3

$$r(\text{Supp}(V)) = |E| - \dim V$$

Exemple 5.2.4 (suite) Le matroïde $\mathcal{M}(K_4)$ est égal à $\text{Supp}(V)$ où V est le sous-espace de \mathbb{Z}_2^E $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ engendré par les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

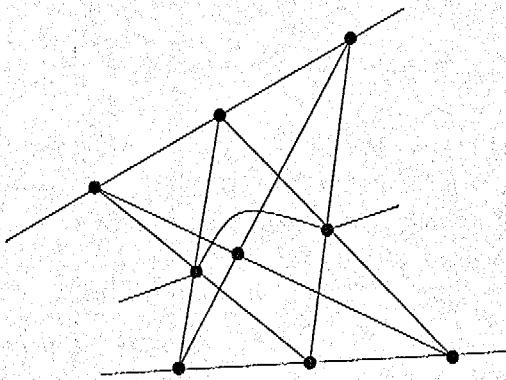


FIGURE 5.4 – Non-Pappus.

5.3 Equivalence des constructions de Whitney-Tutte

Le résultat principal de ce section est : pour un corps donné les constructions de Whitney et de Tutte produisent les mêmes matroïdes.

Les matroïdes obtenus par les constructions de Whitney et de Tutte à partir d'un corps donné \mathbb{F} sont dits *vectoriels sur \mathbb{F}* . Rappelons qu'il existe des matroïdes non vectoriels (par exemple le matroïde de non-Pappus, voir figure 5.4)

Etant donné un matroïde vectoriel \mathcal{M} sur E une famille $(v_e)_{e \in E}$ de vecteurs de \mathbb{F}^d telle que $\mathcal{M} = \text{Lin}(E)$ est appelée une *représentation de Whitney* de \mathcal{M} sur \mathbb{F} . Un sous-espace V de \mathbb{F}^E tel que $\mathcal{M} = \text{Supp}(V)$ est appelé une *représentation de Tutte de \mathcal{M}* sur \mathbb{F} .

La construction d'une représentation de Tutte à partir d'une représentation de Whitney est canonique et immédiate.

Soit $(v_e)_{e \in E}$ une famille de vecteurs de \mathbb{F}^d . L'*espace des dépendances linéaires de $(v_e)_{e \in E}$ sur \mathbb{F}* est l'espace vectoriel V sur \mathbb{F} défini par

$$V = \{\lambda \in \mathbb{F}^E \mid \sum_{e \in E} \lambda(e)v_e = 0\}$$

Le Lemme 5.1.1 entraîne

Proposition 5.3.1

$$\text{Supp}(V) = \text{Lin}_{\mathbb{F}}((v_e)_{e \in E}).$$

En pratique V est donné par une base fondamentale associée à une base B de $\text{Lin}(E)$. En effet pour tout $e \in E \setminus B$ le vecteur v_e s'écrit uniquement comme combinaison linéaire des vecteurs de B . On a $v_e = \sum_{x \in B} \lambda_e(x)v_x$. Soit $\gamma \in \mathbb{F}^E$ défini par $\gamma(e) = 1$, $\gamma_e(x) = 0$ pour $x \in E \setminus B \setminus \{e\}$ et $\gamma_e(x) = -\lambda_e(x)$ pour $x \in B$. Clairement les vecteurs $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ constituent une base fondamentale de V .

On obtient une représentation de Whitney à partir d'une représentation de Tutte en inversant la construction précédente. Soient V un sous-espace de \mathbb{F}^E et soit B une base de $\text{Supp}(V)$. On forme la base fondamentale $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ de V associée à B . À tout $e \in E$ on associe alors un vecteur $v_e \in \mathbb{F}^B$: pour $e \in B$ on définit v_e par $v_e(e) = 1$ et $v_e(x) = 0$ si $x \in B$, $x \neq e$ (autrement dit les vecteurs $(v_e)_{e \in B}$ constituent la base canonique de \mathbb{F}^B), pour $e \in E \setminus B$ le vecteur v_e est la restriction de $-\gamma_e$ à B .

Proposition 5.3.2

$$\text{Lin}_{\mathbb{F}}((v_e)_{e \in E}) = \text{Supp}(V).$$

Démonstration. Soit C un circuit de $\mathcal{M} = \text{Supp}(V)$. Il existe $u \in V$ tel que $s(u) = C$. On a $u = \sum_{e \in C \setminus B} u(e)\gamma_e$. Prenant les restrictions à B il vient $\sum_{e \in C \cap B} u(e)v_e = -\sum_{e \in C \setminus B} u(e)v_e$ donc C est dépendant dans $\mathcal{M}' = \text{Lin}_{\mathbb{F}}((v_e)_{e \in E})$. Inversement soit C un circuit de \mathcal{M}' . Il existe une application $\lambda : C \rightarrow \mathbb{F} \setminus \{0\}$ telle que $\sum_{e \in C} \lambda(e)v_e = 0$. Le vecteur $u = \sum_{e \in C \setminus B} \lambda(e)\gamma_e$ est un vecteur non nul de V tel que $s(u) \subset C$, donc C est dépendant dans \mathcal{M} .

□

D'après les démonstrations des ces dernières propositions on a

Proposition 5.3.3 Soit A une matrice quelconque à coefficients dans un corps \mathbb{F} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{M} est le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{F} des colonnes de la matrice $(I \ A)$
- (ii) \mathcal{M} est le matroïde des supports de l'espace vectoriel sur \mathbb{F} engendré par les lignes de la matrice $(-A^t \ I)$.

Exemple 5.3.4 (suite) La représentation de Whitney de F_7 sur \mathbb{Z}_2 donnée dans l'exemple 1 est une matrice fondamentale relativement à la base $\{1, 2, 3\}$. On obtient une représentation de Tutte en appliquant la Proposition 9.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{matrix}$$

Exemple 5.3.5 (suite) Soit à construire la matrice fondamentale d'une représentation de Tutte de M_8 sur \mathbb{Z}_2^3 associée à la base $\{1, 2, 4, 6\}$. On peut soit calculer directement les vecteurs fondamentaux $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_7, \gamma_8$ comme dépendances linéaires des colonnes correspondantes - $\{1, 2, 4, 6\}$ pour γ_1 , $\{2, 3, 4, 6\}$ pour γ_3 , etc ... ou bien par pivotement se ramener à une représentation de Whitney fondamentale relativement à $\{2, 4, 6\}$, puis appliquer la Proposition 9.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \end{matrix}$$

5.3.1 Exercices

Exercice 5.3.2 Montrer qu'un matroïde binaire i.e. vectoriel sur \mathbb{Z}_2 est déterminé par les circuits fondamentaux relatifs à une base quelconque

Exercice 5.3.3 Montrer que les matroïdes suivants sont isomorphes

- le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_2 des 10 vecteurs de \mathbb{Z}_2^5 comportant 3 coordonnées égales à 1 et 2 égales à 0
- le matroïde des supports de l'espace vectoriel sur \mathbb{Z}_2 engendré par les cycles pairs du graphe complet K_5
- le matroïde des dépendances linéaires sur R des 10 vecteurs de R^5 comportant 3 coordonnées égales à 0 et 2 égales à 1.

Ce matroïde, désigné par \mathbf{R}_{10} , a été introduit par Seymour sous la première forme en 1976.

5.4 Dual d'un matroïde vectoriel

Théorème 5.4.1 *Le dual d'un matroïde vectoriel sur un corps \mathbb{F} est vectoriel sur \mathbb{F} .*

Soit V un sous-espace de \mathbb{F}^E . On rappelle que l'*orthogonal* V^\perp est défini à partir du produit scalaire canonique $\langle u, v \rangle = \sum_{e \in E} u(e)v(e)$ par

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{F}^E \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in V\}$$

Le Théorème 5.4.1 est un corollaire immédiat de la proposition suivante. suivante.

Proposition 5.4.2

$$(Supp(V))^* = Supp(V^\perp)$$

Soient B une base de $M = Supp(V)$ et $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$ la base fondamentale de V associée à B . Pour tout $e \in B$ on définit un vecteur $\omega_e \in \mathbb{F}^E$ par $\omega_e(e) = 1$, $\omega_e(x) = 0$ pour $x \in B \setminus \{e\}$ et $\omega_e(x) = -\gamma_x(e)$ pour $x \in E \setminus B$.

Lemme 5.4.3 *Les vecteurs $(\omega_e)_{e \in B}$ constituent une base fondamentale de V^\perp .*

Démonstration. Pour tout $e \in B$ et $f \in E \setminus B$ on a

$$\langle \gamma_f, \omega_e \rangle = \sum_{x \in E} \gamma_f(x)\omega_e(x) = \gamma_f(e)\omega_e(e) + \gamma_f(f)\omega_e(f) = \gamma_f(e) + \omega_e(f) = 0$$

d'où $\omega_e \in V^\perp$.

Soit $u \in V^\perp$. Considérons $u' = u - \sum_{e \in B} u(e)\omega_e$. Par construction on a $s(u') \subset E \setminus B$, par suite pour $f \in E \setminus B$ on a $\langle u', \gamma_f \rangle = u'(f)$. Comme $u' \in V^\perp$ il vient $u'(f) = 0$, d'où $u' = 0$, autrement dit les $(\omega_e)_{e \in B}$ engendrent V^\perp . Les restrictions des $(\omega_e)_{e \in B}$ à B formant la base canonique de \mathbb{F}^B , on a bien le résultat annoncé.

□

Le Lemme précédente peut encore être énoncé : si V est un sous-espace de \mathbb{F}^E engendré par les lignes d'une matrice de la forme $(A \ I)$ (matrice fondamentale) alors V^\perp est engendré par les lignes de $(I - A^t)$.

Démonstration de la Proposition 5.4.2. Soit $M' = Supp(V^\perp)$. Avec les notations du Lemme 5.4.3 les vecteurs $(\omega_e)_{e \in B}$ constituent une base fondamentale de V^\perp , donc $E \setminus B$ est une base de M' . On a $B^* \subset B'$. La même construction appliquée aux $(\omega_e)_{e \in B}$ redonne les $(\gamma_e)_{e \in E \setminus B}$. En particulier $(V^\perp)^\perp = V$. Par suite $E \setminus B \in B'$ entraîne $B \in B$, soit de façon équivalente $E \setminus B \in B^*$. On a bien $B^* = B'$. □

Proposition 5.4.4 Soient A une matrice (non nécessairement fondamentale) à coefficients dans un corps \mathbb{F} et M le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{F} des colonnes de A . Alors M^* est le matroïde des supports de l'espace vectoriel sur \mathbb{F} engendré par les lignes de A .

Démonstration. Soit V l'espace vectoriel des dépendances linéaires des colonnes de la matrice $A = (a_{ij})$ à d lignes indexées par i et n colonnes indexées par j . On a $M = \text{Supp}(V)$, d'après la Proposition 3.1. Soit W l'espace vectoriel engendré par les lignes de A . On a $W \subset V^\perp$. En effet pour $\lambda \in V$ par définition de V on a $\sum_{j=1}^{n=d} \lambda_j a_{ij} = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, d$, autrement dit le produit scalaire de λ et de chacune des lignes de A est nul, donc la i -ème ligne de A appartient à V^\perp , et par suite $W \subset V^\perp$. D'autre part on a $\dim(W) = \text{rang}(A) = r(M) = r$ et $\dim(V) = n - r(M)$, d'où $W = V^\perp$. Par la Proposition 4.2 on a donc $\text{Supp}(W) = M^*$.

□

5.4.1 Exercices

Exercice 5.34 Soit V le sous-espace de \mathbb{Z}_3^5 engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 0, 0, 2)$ et $(1, 2, 1, 0, 1)$. Déterminer $V \cap V^\perp$.

Exercice 5.35 Soient A une matrice de format $d \times n$ (d lignes, n colonnes) à coefficients dans une corps \mathbb{F} . Soit A_1 la matrice $(d+n) \times n$ définie par

$$A_1 = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$$

On considère les opérations élémentaires suivantes sur les matrices de format $(d+n) \times n$:

- échange de deux colonnes
- échange de deux lignes parmi les d premières
- multiplication d'une colonne par un scalaire $\neq 0$
- addition d'une colonne à une autre

(i) Montrer que par une suite de ces opérations on peut toujours transformer la matrice A_1 en une matrice A_2 de la forme

$$A_2 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où T est une matrice $d \times r$, $0 \leq r \leq d$, ayant des 1 sur la diagonale principale et des 0 au-dessus, et où 0 représente une matrice $d \times (n-r)$ de 0.

(ii) Montrer que l'entier r défini par A_2 est le rang du matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{F} des colonnes de A .

(iii) Montrer que M est uniforme de rang $n-1$ i.e. un circuit si et seulement si $r = n-1$ et tous les coefficients de la matrice D de format $n \times 1$ sont $\neq 0$.

(iv) Plus généralement montrer que les $n-r$ colonnes de D constituent une base de l'espace des dépendances linéaires sur \mathbb{F} des colonnes de A .

5.5 Mineurs d'un matroïde vectoriel

Proposition 5.5.1 *Les mineurs d'un matroïde vectoriel sur un corps \mathbb{F} sont également vectoriels sur \mathbb{F} .*

5.5.1 Représentation de Whitney

Soit M le matroïde des dépendances linéaires sur un corps \mathbb{F} de vecteurs $(v_e)_{e \in E}$ de \mathbb{F}^d . On suppose que les v_e sont des vecteurs colonnes.

Pour $F \subset E$ il est immédiat que $M(F)$ est le matroïde des dépendances linéaires \mathbb{F} des vecteurs $(v_e)_{e \in F}$.

Pour la contraction considérons M/a pour un $a \in E$. Les opérations de lignes - multiplication par un scalaire non nul, et addition de deux lignes - ne changeant pas le matroïde, on peut se ramener au cas où v_a est un vecteur unité si v_a n'est pas le vecteur nul. Alors M/a est le matroïde des dépendances linéaires des vecteurs $(v'_e)_{e \in E \setminus \{a\}}$ où v'_e est le vecteur obtenu à partir de v_e en supprimant la composante qui est non nulle dans v_a . S'on change la composante on obtient une autre représentation de M/a . Si $v_a = (0, 0, \dots, 0)$, alors a est une boucle de M , et $M/a = M \setminus a$.

5.5.2 Représentation de Tutte

Soient M le matroïde des supports d'un sous-espace $V \subset \mathbb{F}^E$, et $A \subset E$.

Soient V'_A le sous-espace de $\mathbb{F}^{E \setminus A}$ constitué des restrictions à $E \setminus A$ des vecteurs de V dont le support est contenu dans $E \setminus A$ et V''_A le sous-espace de $\mathbb{F}^{E \setminus A}$ constitué des restrictions à $E \setminus A$ des vecteurs de V .

On vérifie facilement que $M \setminus A$ resp. M/A est le matroïde des supports de V'_A resp. V''_A .

Dans la pratique cependant V est donné par une base, et en particulier une base fondamentale associée à une base B de M . Il s'agit donc de construire une base fondamentale de V'_A resp. V''_A .

Considérons le cas où $A = \{a\}$.

- *Suppression* Si $a \in E \setminus B$, les restrictions à $E \setminus \{a\}$ des vecteurs fondamentaux des $e \in E \setminus \{a\} \setminus B$ constituent une base fondamentale de V'_a associée à B : dans la matrice fondamentale on efface la ligne et la colonne de a .

Si $a \in B$, ou bien a n'est dans le support d'aucun vecteur fondamental alors a est un isthme de M et en effaçant la colonne de a on obtient une base fondamentale de V'_a associée à la base $B \setminus \{a\}$ de $M \setminus a$, ou bien a est dans le support d'au moins un vecteur fondamental γ_b , et on se ramène au cas précédent par pivotement en faisant sortir a de la base, et entrer b .

- *Contraction* Si $a \in B$, les restrictions à $E \setminus \{a\}$ des vecteurs fondamentaux des $e \in E \setminus B$ constituent une base fondamentale de V''_a associée à $B \setminus \{a\}$: dans la matrice fondamentale on efface la colonne de a .

Si $a \in E \setminus B$, ou bien a est une boucle, la restriction de γ_a à B est le vecteur nul, alors en effaçant la colonne et la ligne de a on obtient une base fondamentale de V''_a associée à la base B de $M/a = M \setminus a$, ou bien γ_a a au moins une composante non nulle en $b \in B$, et on se ramène au cas précédent par pivotement en faisant entrer a dans la base, et sortir b .

La propriété d'être vectoriel sur un corps \mathbb{F} se conservant pour les mineurs, pour tout corps \mathbb{F} il existe une liste de *mineurs exclus*, autrement dit de matroïdes non vectoriels sur \mathbb{F} mais dont tout mineur propre est vectoriel sur \mathbb{F} . La détermination de la liste des *mineurs exclus pour \mathbb{F}* constitue

une caractérisation des matroïdes vectoriels sur \mathbb{F} : un matroïde est vectoriel sur \mathbb{F} si et seulement si aucun de ses mineurs n'est dans la liste des mineurs exclus pour \mathbb{F} .

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: on sait que la liste des mineurs exclus est infinie, et il semble hors de portée de pouvoir la déterminer

- $\mathbb{F} = GF(2) = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, matroïdes binaires : la liste se réduit au seul matroïde $U_{2,4}$, W.T. Tutte (1958) (preuve : une page, voir Chapitre 4)

- $\mathbb{F} = GF(3) = \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, matroïdes ternaires : la liste comporte 4 matroïdes F_7 F_7^* $U_{2,5}$ $U_{3,5}$, J.F. Kahn, P. Seymour (1978/79) (preuve : plus de 10 pages)

- $\mathbb{F} = GF(4)$: la liste comporte 8 matroïdes explicitement décrits, résultat récent de J.F. Geelen, A.M.H. Gerards, A. Kapoor (2000) (preuve : plus de 50 pages)

Le dernier résultat est plutôt un tour-de-force, à confronter à la véritable question ouverte du domaine : la liste est-elle finie pour un corps fini donné ?

5.6 Matroïde réguliers

Tout mineur d'un matroïde régulier étant régulier d'après les résultats du chapitre 4, on peut caractériser les matroïdes réguliers par une liste de *mineurs exclus*. D'après un théorème de W.T. Tutte (1958) cette liste est finie et se réduit à 3 matroïdes : $U_{2,4}$ F_7 et F_7^* . Une preuve en 7-8 pages est parue récemment (A.M.H. Gerards)

Les matrices totalement unimodulaires étaient connues de H. Poicaré dès le début du 20ème siècle, qui les avaient rencontrées dans le contexte des complexes simpliciaux, un graphe étant en particulier un complexe simplicial de dimension 1. Il avait posé le problème de leur construction. W.T. Tutte avait apporté une réponse partielle sous forme d'une liste de mineurs exclus. La construction complète est due à P. Seymour (1980). Essentiellement, en plus des matroïdes graphiques et cographiques, un seul autre matroïde R_{10} est nécessaire et suffisant pour construire tous les matroïdes réguliers.

Le matroïde R_{10} est le matroïde des dépendances linéaires sur $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des 10 vecteurs de \mathbb{Z}_2^5 ayant 3 composantes égales à 1 et 2 composantes égales à 0. Ou encore le matroïde des supports du sous-espace de \mathbb{Z}_2^{10} engendré par les cycles pairs de K_5 (ces cycles sont soit un rectangle, soit deux triangles avec un sommet commun). Ou encore le matroïde des dépendances linéaires sur $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ des 10 vecteurs de \mathbb{Z}_3^5 ayant 2 composantes égales à 1 et 3 composantes égales à 0. Ou encore le matroïde des dépendances affines sur R des milieux des 10 arêtes du simplexe de dimension 4.

A partir des briques élémentaires constituées par les matroïdes graphiques, cographiques et R_{10} 3 opérations simples permettent de construire tous les matroïdes réguliers : les 1-, 2- et 3-sommes. La 1-somme est simplement la somme directe de deux matroïdes sur des ensembles disjoints. La 2-somme est le recollement de deux matroïdes sur des ensembles avec un seul élément commun. La 3-somme est le recollement de deux matroïdes binaires sur des ensembles ayant 3 éléments communs constituant un 3-circuit dans chacun des matroïdes.

La preuve du théorème de Seymour occupe une cinquantaine de pages.

5.6.1 Applications

Une application importante de la caractérisation de Seymour est un algorithme qui déterminer si une matrice est totalement modulaire en temps polynomial. Une deuxième application est le résultat

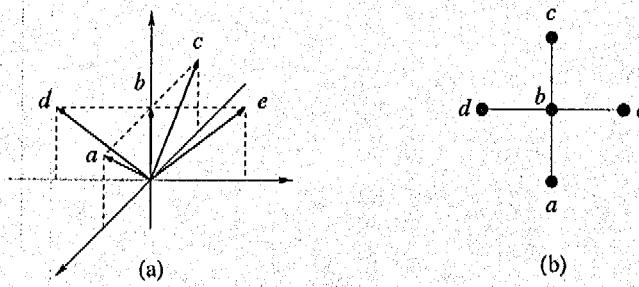


FIGURE 5.5 – Vecteurs a, b, c, d, e et leurs matroïde associés.

suivante de Heller [7] : le programme linéaire

$$\text{maximiser } c^t x$$

$$\text{tel que } Ax \leq b, x \geq 0$$

admet une solution x à coordonnées entiers pour un vecteur b entier quelconque si et seulement si A est totalement unimodulaire. On remarque que la plus part de problème d'optimisation combinatoire peuvent être réalisé comme de problème de programmation unimodulaire.

Terminons par une application inattendue en cristallographie. Un *zonotope* est un polyèdre de \mathbb{R}^d de la forme

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i,$$

où les v_i sont n vecteurs donnés et les $-1 \leq \alpha_i \leq 1$ des réels variables. Les zonotopes sont de polytopes convexe symmetric centralement avec beaucoup de propriété intéressantes.

Exemple 5.6.1 Un cube est un zonotope dans \mathbb{R}^3 construit avec les vecteurs unitaires des axes de coordonnées.

Exemple 5.6.2 Le permutoèdre est un zonotope, la figure 5.6 illustre le permutoèdre dans \mathbb{R}^3 . Dans cette exemple les vecteurs a, b, c et b, d, e sont colinéaires, voir figure 5.5.

Les sommets du zonotope sont les vecteurs avec chaque $\alpha_i = \pm 1$, et les étiquettes de chaque sommet donne le vecteur ayant $\alpha_i = +1$.

A la fin du 19ème siècle le cristallographe Voronoï, bien connu en géométrie algorithmique pour les *diagrammes de Voronoï*, avait montré qu'il existe exactement 5 types de zonotopes de \mathbb{R}^3 pavant l'espace par translation.

Récemment P. McMullen a montré qu'un zonotope pave l'espace si et seulement si ses 2-faces ont toutes 4 ou 6 arêtes. Cette propriété équivaut à ce que le matroïde des vecteurs v_i est binaire. Ce matroïde étant également réel, il est régulier : en effet on sait qu'un matroïde binaire est régulier si (et seulement si) il est vectoriel sur au moins un corps de caractéristique différente de 2. Par suite, un zonotope pave l'espace par translation si et seulement si le matroïde associé est régulier.

Le résultat de Voronoï revient donc à ce qu'il existe exactement 5 matroïdes réguliers de rang 3.

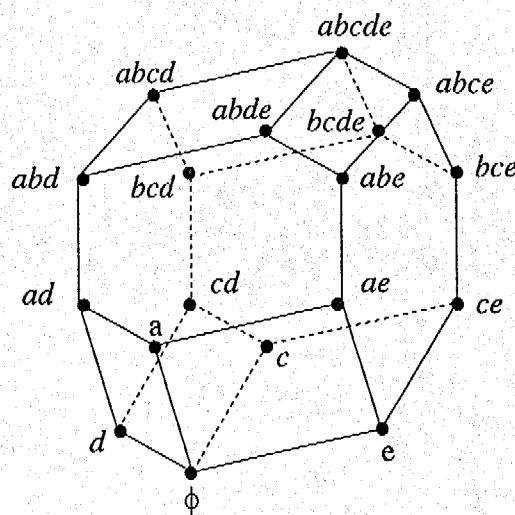


FIGURE 5.6 – Permutaèdre.

5.6.2 Exercices

Exercice 5.37 Exhiber les 5 matroïdes réguliers de rang 3 comme matroïdes de configurations affines de points de R^2 [indication : un matroïde binaire n'ayant pas de mineur $U_{2,4}$, dans une telle configuration il existe au plus 3 directions à partir d'un point donné].

Construire les zonotopes associés et vérifier la propriété de pavage.

Exercice 5.38 Soit $C_{k,n}$ la matrice binaire déterminée par la matrice identité $I_{(n \times n)}$ suivie de la matrice de taille $(n \times n)$ qui consiste de tous les décalages cycliques de la colonne avec k uns suivis de $(n-k)$ zéros.

(a) Montrer que

- (i) $C_{2,n}$ est toujours graphique,
- (ii) $C_{3,n}$ est isomorphe à R_{10} et
- (iii) $C_{3,n}$ n'est pas unimodulaire pour tout $n > 5$.

(b) Est-ce que $C_{k,n}$ est unimodulaire pour tout $k \geq 4$ et $n > k$?

Chapitre 6

Intersection, transposé et union de matroïdes

6.1 Intersection

Lemme 6.1.1 Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux matroïdes sur un même ensemble E . Les problèmes suivants sont équivalents :

- (P1) Déterminer le cardinal maximal d'un indépendant commun à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .
- (P2) Déterminer le cardinal maximal de l'intersection d'une base de \mathcal{M}_1 et d'une base de \mathcal{M}_2 .
- (P3) Déterminer le cardinal minimal de l'intersection d'une base de \mathcal{M}_1 et d'une base de \mathcal{M}_2 .
- (P4) Déterminer le cardinal maximal de la réunion d'une base de \mathcal{M}_1 et d'une base de \mathcal{M}_2 .
- (P5) Déterminer le cardinal minimal de la réunion d'une base de \mathcal{M}_1 et d'une base de \mathcal{M}_2 .

Démonstration. (P1) \Leftrightarrow (P2) puisque tout indépendant est restriction d'un base. Soient B_1 une base de \mathcal{M}_1 et B_2 une base de \mathcal{M}_2 . (P2) \Leftrightarrow (P5) et (P3) \Leftrightarrow (P4) sont une conséquence immédiate de l'égalité $|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = r(\mathcal{M}_1) + r(\mathcal{M}_2)$.

(P2) \Leftrightarrow (P4) L'ensemble $B'_2 = E \setminus B_2$ est une base du matroïde \mathcal{M}_2^* . On a $B_1 \cap B_2 = (B_1 \cup B'_2) \setminus B'_2$. Comme $|B'_2| = r(\mathcal{M}_2^*) = |E| - r(\mathcal{M}_2)$ est une constante, (P2) pour \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 revient donc à maximiser $|B_1 \cup B'_2|$, autrement dit à (P4) pour \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2^* .

□

Théorème 6.1.2 [Edmonds 1970] Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ deux matroïdes sur un même ensemble E . Désignons par \mathcal{I}_1 resp. \mathcal{I}_2 l'ensemble des indépendants de \mathcal{M}_1 resp. \mathcal{M}_2 . Alors

$$\max_{X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |X| = \min_{A \subset E} (r_1(A) + r_2(E \setminus A))$$

ou encore, de façon équivalente

Théorème 6.1.3 Pour tout entier k , il existe $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ tel que $|X| \geq k$ si et seulement si $r_1(A) + r_2(E \setminus A) \geq k$ pour tout $A \subset E$.

Démonstration. (Nécessité) Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ tel que $|X| \geq k$. Soit $A \subset E$. Comme $X \cap A \in \mathcal{I}_1$ il vient $r_1(A) \geq |X \cap A|$. De même $X \setminus A \in \mathcal{I}_2$ entraîne $r_2(E \setminus A) \geq |X \setminus A|$. D'où $r_1(A) + r_2(E \setminus A) \geq |X \cap A| + |X \setminus A| = |X| \geq k$.

(Suffisance) On utilise une récurrence sur $|E|$. Supposons le théorème démontré pour tous les matroïdes sur des sous-ensembles propres de E . Pour un raisonnement par contradiction supposons qu'on ait $r_1(A) + r_2(E \setminus A) \geq k$ pour tout $A \subset E$ mais qu'il n'existe aucun $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ tel que $|X| \geq k$.

Soit $e \in E$. Il n'existe pas d'indépendant commun X à $\mathcal{M}_1 \setminus e$ et $\mathcal{M}_2 \setminus e$ avec $|X| \geq k$ sinon on aurait $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, en contradiction avec notre hypothèse.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $A \subset E \setminus \{e\}$ tel que $r_{\mathcal{M}_1 \setminus e}(A) + r_{\mathcal{M}_2 \setminus e}(E \setminus \{e\} \setminus A) < k$. Posons $A' = E \setminus \{e\} \setminus A$. On a

$$(1) \quad r_1(A) + r_2(A') \leq k - 1$$

Notons que $r_1(A \cup \{e\}) + r_2(A') \geq k$, d'où $r_1(A \cup \{e\}) > r_1(A)$, et par suite e n'est pas une boucle de \mathcal{M}_1 . De même e n'est pas une boucle de \mathcal{M}_2 .

Par suite, il n'existe pas d'indépendant commun X' à $\mathcal{M}_1 \setminus e$ et $\mathcal{M}_2 \setminus e$ de cardinal $|X'| \geq k - 1$. Sinon on aurait $X = X' \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ avec $|X| \geq k$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $B \subset E \setminus \{e\}$ tel que $r_{\mathcal{M}_1 \setminus e}(B) + r_{\mathcal{M}_2 \setminus e}(E \setminus \{e\} \setminus B) < k - 1$. Posons $B' = E \setminus \{e\} \setminus B$. On a $r_{\mathcal{M}_1 \setminus e}(B) = r_{\mathcal{M}_1}(B \cup \{e\}) - r_{\mathcal{M}_1}(\{e\}) = r_1(B \cup \{e\}) - 1$, et de même $r_{\mathcal{M}_2 \setminus e}(B') = r_2(B' \cup \{e\}) - 1$. D'où

$$(2) \quad r_1(B \cup \{e\}) + r_2(B' \cup \{e\}) \leq k$$

Additionnant (1) et (2) on obtient

$$(3) \quad r_1(A) + r_2(A') + r_1(B \cup \{e\}) + r_2(B' \cup \{e\}) \leq 2k - 1$$

Par sous-modularité on a

$$(4) \quad r_1(A) + r_1(B \cup \{e\}) \geq r_1(A \cap B) + r_1(A \cup B \cup \{e\})$$

et

$$(5) \quad r_2(A') + r_2(B' \cup \{e\}) \geq r_2(A' \cap B') + r_2(A' \cup B' \cup \{e\})$$

d'où

$$(6) \quad r_1(A \cap B) + r_1(A \cup B \cup \{e\}) + r_2(A' \cap B') + r_2(A' \cup B' \cup \{e\}) \leq 2k - 1$$

Notons que $A' \cup B' \cup \{e\} = E \setminus (A \cap B)$ et $A' \cap B' = E \setminus (A \cup B \cup \{e\})$. Donc par hypothèse

$$(7) \quad r_1(A \cap B) + r_2(A' \cup B' \cup \{e\}) \geq k$$

et

$$(8) \quad r_1(A \cup B \cup \{e\}) + r_2(A' \cap B') \geq k$$

Additionnant (7) et (8) on obtient

$$(9) \quad r_1(A \cap B) + r_2(A' \cup B' \cup \{e\}) + r_1(A \cup B \cup \{e\}) + r_2(A' \cap B') \geq 2k$$

qui contredit (6).

□

La démonstration ci-dessus (due à P. Seymour) est directe et rapide. Cependant elle n'est pas constructive. Nous allons donner une seconde démonstration, algorithmique celle-là, dans la cadre de la forme (P4) du problème d'intersection (recherche de deux bases *maximamente distantes*).

Lemme 6.1.4 Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ deux matroïdes sur un ensemble E , B_1 une base de \mathcal{M}_1 , B_2 une base de \mathcal{M}_2 , et X un sous-ensemble de E . On a

$$|B_1 \cup B_2| \leq r_{\mathcal{M}_1}(X) + r_{\mathcal{M}_2}(X) + |E \setminus X|$$

On a l'égalité si et seulement si

- (i) X contient $E \setminus (B_1 \cup B_2)$
- (ii) $X \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- (iii) $X \cap B_1$ engendre X dans \mathcal{M}_1 et $X \cap B_2$ engendre X dans \mathcal{M}_2 .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |B_1 \cup B_2| &= |X \cap (B_1 \cup B_2)| + |(B_1 \cup B_2) \setminus X| \\ &\leq |X \cap B_1| + |X \cap B_2| + |E \setminus X| \\ &\leq r_{\mathcal{M}_1}(X) + r_{\mathcal{M}_2}(X) + |E \setminus X| \end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé les inégalités $|X \cap (B_1 \cup B_2)| \leq |X \cap B_1| + |X \cap B_2|$, $|(B_1 \cup B_2) \setminus X| \leq |E \setminus X|$, $|X \cap B_1| \leq r_{\mathcal{M}_1}(X)$ et $|X \cap B_2| \leq r_{\mathcal{M}_2}(X)$. On a $|B_1 \cup B_2| = r_{\mathcal{M}_1}(X) + r_{\mathcal{M}_2}(X) + |E \setminus X|$ si et seulement ces quatre inégalités sont des égalités. Clairement les quatre égalités sont équivalentes aux propriétés (i)-(iii).

□.

Algorithme maximalité réunion de bases.

Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ deux matroïdes sur un ensemble E , B_1 une base de \mathcal{M}_1 et B_2 une base de \mathcal{M}_2 .

Pour $e \in E \setminus B_1$ désignons par $s_1(e)$ le circuit fondamental dans \mathcal{M}_1 de e relativement à B_1 .

Pour $e \in B_1$ on pose $s_1(e) = \{e\}$. On définit de même $s_2 : E \rightarrow 2^E$ à partir de \mathcal{M}_2 et B_2 .

Pour $e \in E$ posons $s(e) = s_1(e) \cup s_2(e)$.

Pour $A \subset E$ posons $s(A) = \bigcup_{e \in A} s(e)$.

On pose $s^1(A) = s(A)$ et on définit inductivement s^i par $s^{i+1}(A) = s(s^i(A))$.

Finalement on définit $\hat{s} : 2^E \rightarrow 2^E$ par $\hat{s}(A) = \bigcup_{i=1,2,\dots} s^i(A)$. Remarquons que $e \in s(e)$ donc $A \subset s(A)$.

Par suite pour tout $A \subset E$ il existe i_0 tel que $s^i(A) = \hat{s}(A)$ pour $i \geq i_0$. Distinguons deux cas.

Cas 1) Si $\hat{s}(E \setminus (B_1 \cup B_2)) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ on peut augmenter $|B_1 \cup B_2|$.

Il existe $e \in E \setminus (B_1 \cup B_2)$ tel que $s(e) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

Soit k le plus petit indice i tel que $s^i(e) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, et soit $e_k \in s^k(e) \cap B_1 \cap B_2$.

Posons $e_0 = e$. Par définition de s^k il existe e_1, e_2, \dots, e_{k-1} tels que $e_i \in s(e_{i-1})$ pour $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Soit C_1 le circuit fondamental de $e_0 = e$ relativement à B_1 si $e_1 \in B_1$ resp. relativement à B_2 si $e_1 \in B_2$.

Pour $i = 2, \dots, k$ on pose $C_i = s(e_{i-1})$.

Nous distinguons quatre cas suivant la parité de k et l'indice $i = 1, 2$ tel que $e_1 \in B_i$.

Supposons d'abord k pair et $e_1 \in B_1$.

Tous les e_i d'indices $i = 1, 2, \dots, k-1$ impairs resp. pairs sont dans $B_1 \setminus B_2$ resp. $B_2 \setminus B_1$.

Par construction $e_0 \in E \setminus (B_1 \cup B_2)$ et $e_k \in B_1 \cap B_2$.

Posons $B'_1 = B_1 \cup \{e_0, e_2, \dots, e_{k-2}\} \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ et $B'_2 = B_2 \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{k-1}\} \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_k\}$.

Notons que par la minimalité de k les circuits fondamentaux C_i $i = 1, 2, \dots, k$ sont tels que $C_i \cap \{e_0, e_1, \dots, e_k\} = \{e_{i-1}, e_i\}$. En conséquence les pivots utilisant C_1, C_3, \dots, C_{k-1} pour obtenir B'_1 à partir de B_1 resp. C_2, C_4, \dots, C_k pour obtenir B'_2 à partir de B_2 peuvent être effectués simultanément : B'_1 est une base de \mathcal{M}_1 et B'_2 une base de \mathcal{M}_2 .

Les 3 autres cas s'obtiennent à l'aide de modifications évidentes. On a $B'_1 \cup B'_2 = B_1 \cup B_2 \cup \{e\}$.

Cas 2) Si $\hat{s}(E \setminus (B_1 \cup B_2)) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$ alors $|B_1 \cup B_2|$ est maximal.

Posons $X = \hat{s}(E \setminus (B_1 \cup B_2))$.

Remarquons que $X \cap (B_1 \cup B_2)$ engendre $X \setminus (B_1 \cup B_2) = E \setminus (B_1 \cup B_2)$ dans \mathcal{M}_1 et dans \mathcal{M}_2 .

D'autre part $X \cap B_1$ engendre $X \cap B_2$ dans \mathcal{M}_1 et $X \cap B_2$ engendre $X \cap B_1$ dans \mathcal{M}_2 .

Donc $X \cap B_1$ engendre X dans \mathcal{M}_1 et $X \cap B_2$ engendre X dans \mathcal{M}_2 .

D'après le Lemme 6.1.4 on sait que s'il existe X avec ces propriétés alors $|B_1 \cup B_2|$ est maximal.

Remarque 6.1.5 Considérons des bases B_1 de \mathcal{M}_1 et B_2 de \mathcal{M}_2 d'intersection maximale. L'ensemble $X = \hat{s}(E \setminus (B_1 \cup B'_2))$ construit par l'algorithme ci-dessus à partir des deux bases maximalement distantes B_1 de \mathcal{M}_1 et $B'_2 = E \setminus B_2$ de \mathcal{M}_2^* donne l'égalité dans la condition du Théorème

6.1.2 appliqué à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . En effet d'après le Lemme 6.1.4 on a

$$\begin{aligned} |B_1 \cap B_2| &= |B_1 \cup B'_2| - |B'_2| \\ &= r_{\mathcal{M}_1}(X) + r_{\mathcal{M}_2^*}(X) + |E \setminus X| - |r(\mathcal{M}_2^*)| \\ &= r_{\mathcal{M}_1}(X) + |X| + r_{\mathcal{M}_2}(E \setminus X) - r(\mathcal{M}_2) + |E \setminus X| - |E| + r(\mathcal{M}_2) \\ &= r_{\mathcal{M}_1}(X) + r_{\mathcal{M}_2}(E \setminus X). \end{aligned}$$

6.2 Transporté

Soient E, E' deux ensembles. Nous dirons qu'une application $\Gamma : E \rightarrow 2^{E'}$ est une *application multivoque de E dans E'* . Remarquons que la donnée de Γ est équivalente à celle d'une matrice en 0-1 sur $E \times E'$, ou encore à celle d'un graphe biparti sur les deux ensembles de sommets E et E' . Une application $\alpha : F \rightarrow E'$, où $F \subset E$, est un *couplage relativement à Γ* si

- 1) α est une application injective et
- 2) $\alpha(x) \in \Gamma(x)$ pour tout $x \in F$.

Cette définition traduite en termes du graphe biparti associé à Γ correspond à la notion habituelle de couplage dans un graphe.

Théorème 6.2.1 Soient E et E' deux ensembles, Γ une application multivoque de E dans E' , \mathcal{M} un matroïde sur E et \mathcal{I} l'ensemble des indépendants de \mathcal{M} . Posons,

$$\mathcal{I}' := \{\alpha(X) \mid X \in \mathcal{I} \text{ et } \alpha \text{ couplage de } X \text{ dans } E'\}.$$

Alors, \mathcal{I}' est l'ensemble des indépendants d'un matroïde \mathcal{M}' sur E' .

Nous désignerons par $\Gamma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'$ le matroïde \mathcal{M}' défini dans le Théorème 6.2.1, et nous l'appellerons le *transporté* de \mathcal{M} par Γ .

Démonstration du Théorème 6.2.1. On montre que \mathcal{I}' vérifie les axiomes des indépendants d'un matroïde. Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{I}'$ et que $X' \in \mathcal{I}'$ et $Y' \subset X'$ impliquent $Y' \in \mathcal{I}'$. Vérifions la propriété d'augmentation.

Soient $X', Y' \in \mathcal{I}'$ tels que $|X'| < |Y'|$. Par définition, il existe $X, Y \in \mathcal{I}$, $\alpha : X \rightarrow X'$ et $\beta : Y \rightarrow Y'$ couplages relativement à Γ tels que $X' = \alpha(X)$ et $Y' = \beta(Y)$. Supposons de plus X, Y, α, β avec ces propriétés choisis de façon que $|X \cap Y|$ soit maximal.

Les applications α, β étant injectives on a $|X| < |Y|$. Par suite, d'après la propriété d'augmentation dans \mathcal{M} , il existe $e \in Y \setminus X$ tel que $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Construisons inductivement une suite $e_1 = e, x_1, e_2, x_2, \dots$ aussi longue que possible telle que $x_i = \beta(e_i)$ et $e_{i+1} = \alpha^{-1}(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots$. Une telle suite est appelée *chaîne alternée relativement aux couplages α, β* . Remarquons que cette suite se termine ou bien dans $X \setminus Y$ ou bien dans $Y' \setminus X'$. Supposons que la suite se termine en $e_{k+1} \in X \setminus Y$. Considérons $X_1 = X \setminus \{e_{k+1}\} \cup \{e\}$ et α_1 égale à α sur $X \setminus \{e_2, \dots, e_{k+1}\}$ et à β sur $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. On vérifie facilement que $X_1 \in \mathcal{I}$, $\alpha_1 : X_1 \rightarrow E'$ est un couplage relativement à Γ et $X' = \alpha_1(X_1)$. D'où une contradiction avec le choix de X, Y, α, β puisque $|X_1 \cap Y| = |X \cap Y| + 1$.

Donc la suite se termine en $x_k \in Y' \setminus X'$. Considérons $X_1 = X \cup \{e\}$ et α_1 égale à α sur $X \setminus \{e_2, \dots, e_k\}$ et à β sur $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. On vérifie facilement que $X_1 \in \mathcal{I}$, $\alpha_1 : X_1 \rightarrow E'$ est un couplage relativement à Γ et $X' \cup \{x_k\} = \alpha_1(X_1)$. D'où $X' \cup \{e'\} \in \mathcal{I}'$ avec $e' = x_k \in Y' \setminus X'$. \square

Nous donnerons en Appendice 6.4.1 une seconde démonstration du Théorème 6.2.1, de caractère plus géométrique.

Proposition 6.2.2 *Le fonction rang du matroïde $\Gamma(\mathcal{M})$ est donnée par*

$$\begin{aligned} r_{\Gamma(\mathcal{M})}(X) &= \min_{Z \subset E} (r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |X \cap \Gamma(Z)|) \\ &= \min_{Y \subset X} (r_{\mathcal{M}}(\Gamma^{-1}(Y)) + |X \setminus Y|) \end{aligned}$$

pour tout $X \subset E'$.

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition dans le cas $X = E'$. Soit F l'ensemble des arêtes du graphe biparti G défini par Γ , autrement dit l'ensemble des paires $(x, y)_{x \in E, y \in \Gamma(x)}$. Pour $x \in E \cup E'$ on notera F_x l'ensemble des arêtes de G incidentes à x .

On a $r(\Gamma(\mathcal{M})) = \max |A|$ pour A de la forme $A = \{(x, \alpha(x)) \mid x \in X\}$ tel que $X \in \mathcal{I}$ et α couplage de X dans E' relativement à Γ . Un ensemble A avec les propriétés précédentes est un indépendant commun aux deux matroïdes N_1 et N_2 suivants :

1) Soit \mathcal{J}_1 l'ensemble des parties Y de F telles que $|Y \cap F_x| = 1$ pour $x \in X$ avec $X \in \mathcal{I}$ et $|Y \cap F_x| = 0$ pour $x \in E \setminus X$. Clairement \mathcal{J}_1 est l'ensemble des indépendants du matroïde N_1 sur F obtenu à partir de \mathcal{M} en remplaçant chaque élément $x \in E$ l'ensemble F_x d'éléments en parallèle.

2) Le matroïde N_2 est le matroïde de partition sur F défini par les ensembles F_x pour $x \in E'$. Soit \mathcal{J}_2 l'ensemble des indépendants de N_2 .

Par le Théorème 6.1.2 on a $\max_{A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2} |A| = \min_{B \subset F} (r_{N_1}(F \setminus B) + r_{N_2}(B))$. Soit $B \subset F$ réalisant le minimum dans le membre de droite. Il est immédiat que $r_{N_1}(F \setminus B)$ est le rang dans \mathcal{M} de l'ensemble des sommets de G dans E incidents à au moins une arête dans $F \setminus B$. Soit Z l'ensemble des sommets $x \in E$ tels que $F_x \subset B$. Posons $B' = \bigcup_{x \in Z} F_x$. On a $r_{N_1}(F \setminus B) = r_{N_1}(F \setminus B') = r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z)$. D'autre part $r_{N_2}(B)$ est le nombre de sommets dans E' incidents à une arête de B . Comme $B' \subset B$, on a $|\Gamma(Z)| = r_{N_2}(B') \leq r_{N_2}(B)$. Il vient $r_{N_1}(F \setminus B') + r_{N_2}(B') \leq r_{N_1}(F \setminus B) + r_{N_2}(B)$, donc nécessairement B' réalise également le minimum. Ce minimum est donc de la forme $r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |\Gamma(Z)|$ pour un $Z \subset E$. Inversement pour tout $Z \subset E$ en posant $B = \bigcup_{x \in Z} F_x$ on a $r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |\Gamma(Z)| = r_{N_1}(F \setminus B) + r_{N_2}(B)$, ce qui achève la démonstration de première partie de la proposition.

Pour démontrer la seconde partie considérons Z réalisant le minimum dans $\min_{Z \subset E} (r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |X \cap \Gamma(Z)|)$. Posons $Y = X \setminus \Gamma(Z)$ avec $X \subset E'$. On a $\Gamma^{-1}(Y) \subset E \setminus Z$ et $|X \cap \Gamma(Z)| = |X \setminus Y|$, par suite $\min_{Y \subset X} (r_{\mathcal{M}}(\Gamma^{-1}(Y)) + |X \setminus Y|) \leq r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |X \cap \Gamma(Z)| = \min_{Z \subset E} (r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |X \cap \Gamma(Z)|)$.

Inversement soit Y réalisant le minimum dans $\min_{Y \subset X} (r_{\mathcal{M}}(\Gamma^{-1}(Y)) + |X \setminus Y|)$. Posons $Z = E \setminus \Gamma^{-1}(Y)$. On a $\Gamma^{-1}(Y) = E \setminus Z$ et $X \cap \Gamma(Z) \subset X \setminus Y$. Par suite $\min_{Z \subset E} (r_{\mathcal{M}}(E \setminus Z) + |X \cap \Gamma(Z)|) \leq r_{\mathcal{M}}(\Gamma^{-1}(Y)) + |X \setminus Y| = \min_{Y \subset X} (r_{\mathcal{M}}(\Gamma^{-1}(Y)) + |X \setminus Y|)$. D'où l'égalité.

□

6.3 Union de matroïdes

Théorème 6.3.1 Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ $k \geq 2$ matroïdes sur un ensemble E , et \mathcal{I}_i l'ensemble des indépendants de \mathcal{M}_i pour $i = 1, 2, \dots, k$. On pose

$$\mathcal{I} = \{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \mid X_i \in \mathcal{I}_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k\}$$

Alors, \mathcal{I} est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E , appelé union des matroïdes $(\mathcal{M}_i)_{i=1,2,\dots,k}$ et noté $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 \vee \dots \vee \mathcal{M}_k$.

La fonction rang du matroïde $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 \vee \dots \vee \mathcal{M}_k$ est donnée par

$$r_{\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 \vee \dots \vee \mathcal{M}_k}(A) = \min_{X \subseteq A} \left(\sum_{i=1}^{i=k} r_i(X) + |A \setminus X| \right)$$

pour $A \subseteq E$.

Dans le théorème l'hypothèse que les matroïdes \mathcal{M}_i sont sur un même ensemble est faite pour des raisons de commodité. On peut toujours s'y ramener sans perdre en généralité de façon significative. En effet si les matroïdes \mathcal{M}_i sont sur des ensembles E_i quelconques posons

$$E = \bigcup_{i=1}^k E_i.$$

Pour $i = 1, \dots, k$, définissons un matroïde $\widetilde{\mathcal{M}}_i$ sur E par les conditions $\widetilde{\mathcal{M}}_i(E_i) = \mathcal{M}_i$ et $r_{\widetilde{\mathcal{M}}_i}(e) = 0$ pour $e \in E \setminus E_i$, autrement dit on prolonge \mathcal{M}_i à E en ajoutant des boucles. Clairement l'ensemble \mathcal{I} ne change pas lorsqu'on passe des \mathcal{M}_i aux $\widetilde{\mathcal{M}}_i$.

Démonstration du Théorème 6.3.1. Soient \tilde{E}_i des copies deux à deux disjointes de E et $\widetilde{\mathcal{M}}_i$ la copie de \mathcal{M}_i sur \tilde{E}_i . On désigne par

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=1}^k \widetilde{\mathcal{M}}_i$$

la somme directe des matroïdes $\widetilde{\mathcal{M}}_i$ pour $i = 1, \dots, k$. L'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathcal{M}}$ est l'ensemble

$$\tilde{E} = \sum_{i=1}^k \tilde{E}_i.$$

Soit Γ l'application de \tilde{E} dans E associant à $\tilde{x} \in \tilde{E}_i$ l'élément $x \in E$ dont il est la copie. D'après les définitions \mathcal{I} est l'ensemble des indépendants du matroïde $\Gamma(\widetilde{\mathcal{M}})$, ce qui établit la première partie du théorème.

L'expression du rang de l'union de matroïdes s'obtient immédiatement à partir de la deuxième expression du rang dans la Proposition 9.11. \square

Exemple 6.3.2 Soit $r = r_1 + \dots + r_k$. Alors,

$$U_{r_1,n} \cup \dots \cup U_{r_k,n} = \begin{cases} U_{r,n} & \text{si } r < n, \\ U_{n,n} & \text{si } r \geq n. \end{cases}$$

6.4 Intersection de matroïdes et complexité

Les trois théorèmes d'intersection, transporté et union sont équivalents en un certain sens.

En effet nous avons calculé la fonction rang du transporté à partir du théorème d'intersection, et nous avons montré que l'union se ramenait à un transporté. La boucle se referme en remarquant d'après l'équivalence des problèmes (P1)-(P2) et (P5) le théorème d'intersection s'obtient simplement à partir de l'union.

Démonstration du Théorème 6.2.1 à partir du Théorème 6.3.1. Soit $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$ et $B'_2 = E \setminus B_2$. On a, $|B_1 \cap B_2| = |(B_1 \cup B'_2) \setminus B'_2| = |B_1 \cup B'_2| - |B'_2|$ et donc l'équivalence de (P1)-(P2) et (P4) revient à

$$\max_{\substack{B_1 \in \mathcal{B}_1 \\ B_2 \in \mathcal{B}_2}} |B_1 \cap B_2| = r(\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^*) - r(\mathcal{M}_2^*).$$

D'après le Théorème 6.3.1 on a $r(\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^*) = \min_{X \subset E} (r_1(X) + r_2^*(X) + |E \setminus X|)$. Donc,

$$\max_{\substack{B_1 \in \mathcal{B}_1 \\ B_2 \in \mathcal{B}_2}} |B_1 \cap B_2| \geq k \text{ si et seulement } r_1(X) + r_2^*(X) + |E \setminus X| \geq r(\mathcal{M}_2^*) + k \text{ pour tout } X \subset E$$

ou encore

$$r_1(X) + |X| + r_2(E \setminus X) - r(\mathcal{M}_2) + |E| - |X| \geq |E| - r(\mathcal{M}_2),$$

soit $r_1(X) + r_2(E \setminus X) \geq k$. □

Il est naturel de considérer le problème de la généralisation du théorème d'intersection de 2 matroïdes à l'intersection de $k \geq 2$ matroïdes. Mais jusqu'à présent un tel résultat n'a pas été obtenu. En fait il semble peu probable qu'il puisse exister une solution satisfaisante.

On peut remarquer que dans la démonstration précédente l'existence du dual d'un matroïde joue un rôle fondamental, et on ne voit pas comment généraliser dans cette direction à plus de 2 matroïdes. Une raison plus convaincante est fournie par la théorie de la complexité des algorithmes.

Considérons un graphe orienté $G = (S, E)$. On définit 3 matroïdes sur E . Les deux premiers \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont les matroïdes de partition définis par les partitions $(\omega^+(x))_{x \in S}$ et $(\omega^-(x))_{x \in S}$ de E . Le matroïde \mathcal{M}_3 est le matroïde des cycles du graphe G .

Lemme 6.4.1 *Il existe un chemin hamiltonien dans G si et seulement si il existe un indépendant de cardinal $|S| - 1$ commun aux 3 matroïdes $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$.*

Démonstration. Soit X un indépendant commun à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . Il est immédiat que les composantes connexes du graphe (S, X) sont des chemins ou des cycles orientés. Si X est de plus indépendant dans \mathcal{M}_3 le graphe (S, X) ne peut comporter de cycle. Enfin si $|X| = |S| - 1$ on ne peut avoir qu'une seule composante, on a alors nécessairement un chemin hamiltonien. La réciproque est immédiate.

□

Un problème de décision est dit de classe *NP* ('deterministic polynomial') si ses solutions peuvent être vérifiées en temps polynomial, i.e. au moyen d'un algorithme utilisant un nombre polynomial d'étapes. L'exemple type de problème *NP* est celui de la *satisfiabilité* booléenne.

Proposition 6.4.2 *Le problème de l'intersection de 3 matroïdes est NP-complet.*

Démonstration. En effet on sait que le problème de l'existence d'un chemin hamiltonien est un problème NP-complet (voir par exemple Garey-Johnson). D'après le Lemme 6.4.1 ce problème se ramène à l'intersection de 3 matroïdes, donc ce problème est lui-même NP-complet.

□

Par contre l'algorithme d'intersection de deux matroïdes est polynomial à partir de l'oracle d'indépendance. Il est en particulier polynomial pour des matroïdes vectoriels.

6.4.1 Exercices

Exercice 6.40 Soit $\mathcal{M}_1(E, \mathcal{I}_1)$ et $\mathcal{M}_2(E, \mathcal{I}_2)$ deux matroïdes.

(i) Montrer directement des axiomes d'indépendance (sans utiliser la notion de matroïde transposé) que $\mathcal{M}(E, \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$ est un matroïde.

(ii) Est-il vrai que $\mathcal{M}(E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ est un matroïde ?

Exercice 6.41 Est-il vrai que l'union de matroïdes graphiques est graphique ? et binaire ?

Exercice 6.42 Montrer qu'un matroïde est transversal si et seulement si il est l'union de matroïdes de rang 1.

Exercice 6.43 Soit $B(V; A, B)$ un graphe biparti et soit \mathcal{M} un matroïde sur l'ensemble A . Montrer qui si \mathcal{M} est transversal alors $\Gamma(\mathcal{M})$ n'est plus forcément transversal.

Exercice 6.44 (i) Peut-on préciser l'équivalence des 3 théorèmes en se servant de notions de complexité ?

(ii)* Dans le Lemme 6.4.1 on a 2 matroïdes de partition et un matroïde graphique. Un matroïde de partition est un cas particulier de matroïde graphique. Quel est le statut du problème de l'intersection de 3 matroïdes de partition ?

Appendice A

Généralisation de l'algorithme à l'union de $k \geq 2$ bases.

Proposition 6.4.3 Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$, $k \geq 2$ matroïdes sur un ensemble E , B_i une base de \mathcal{M}_i pour $i = 1, 2, \dots, k$, et X un sous-ensemble de E . On a

$$|B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k| \leq \sum_{i=1,2,\dots,k} r_{\mathcal{M}_i}(X) + |E \setminus X|$$

On a l'égalité si et seulement si

- (i) X contient $E \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)$,
- (ii) $X \cap B_i \cap B_j = \emptyset$ pour tous $1 \leq i < j \leq k$,
- (iii) $X \cap B_i$ engendre X dans \mathcal{M}_i pour $i = 1, 2, \dots, k$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k| &= |X \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)| + |(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \setminus X| \\ &\leq \sum_{i=1,2,\dots,k} |X \cap B_i| + |E \setminus X| \\ &\leq \sum_{i=1,2,\dots,k} r_{\mathcal{M}_i}(X) + |E \setminus X|. \end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé les inégalités

$$|X \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)| \leq \sum_{i=1,2,\dots,k} |X \cap B_i|,$$

$$|(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \setminus X| \leq |E \setminus X|,$$

et

$$\sum_{i=1,2,\dots,k} |X \cap B_i| \leq \sum_{i=1,2,\dots,k} r_{\mathcal{M}_i}(X).$$

On a $|B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k| = \sum_{i=1,2,\dots,k} r_{\mathcal{M}_i}(X) + |E \setminus X|$ si et seulement ces inégalités sont des égalités.

Clairement les égalités sont équivalentes aux propriétés (i)-(iii).

□

Algorithme maximalité réunion de $k \geq 2$ bases.

Soient $k \geq 2$, et \mathcal{M}_i $i = 1, \dots, k$ des matroïdes sur un ensemble E , B_i une base de \mathcal{M}_i pour $i = 1, \dots, k$.
Pour $e \in E \setminus B_i$ désignons par $s_i(e)$ le circuit fondamental dans \mathcal{M}_i de e relativement à B_i .

Pour $e \in B_i$ on pose $s_i(e) = \{e\}$.

Pour $e \in E$ posons $s(e) = \bigcup_{i=1,2,\dots,k} s_i(e)$.

Pour $A \subset E$ posons $s(A) = \bigcup_{e \in A} s(e)$.

On pose $s^1(A) = s(A)$ et on définit inductivement s^i par $s^{i+1}(A) = s(s^i(A))$.

Finalement on définit $\hat{s} : 2^E \rightarrow 2^E$ par $\hat{s}(A) = \bigcup_{i=1,2,\dots} s^i(A)$. Remarquons que $e \in s(e)$ donc $A \subset s(A)$.

Par suite pour tout $A \subset E$ il existe i_0 tel que $s^i(A) = \hat{s}(A)$ pour $i \geq i_0$.

On pose $X = \hat{s}(E \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k))$. Distinguons deux cas.

Cas 1) Si $X \cap B_i \cap B_j \neq \emptyset$ pour i, j tels que $1 \leq i < j \leq k$.

Soit ℓ le plus petit indice tel que $s^\ell(e)$ rencontre un des $B_i \cap B_j$.

Si $\ell = 1$ (on augmente $|B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k|$ par un pivotement).

Si $\ell \geq 2$ (on peut diminuer ℓ)

Cas 2) Si X ne rencontre aucun des $B_i \cap B_j = \emptyset$ alors les hypothèses du lemme sont vérifiées et $|B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k|$ est maximal.

Appendice B

Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , et Γ une application multivoque de E dans un ensemble E' . Sans perdre en généralité on peut supposer que $E \cap E' = \emptyset$. Nous construisons dans cette section un matroïde N sur $E \cup E'$ tel que $\mathcal{M} = N(E)$ et $\Gamma(\mathcal{M}) = N(E')$. Le matroïde N est construit à partir de \mathcal{M} et de Γ par des extensions principales, qui sont la version matroïde de la notion

de position générale. On a donc ainsi une interprétation géométrique simple du transporté d'un matroïde.

Disons qu'une application multivoque $\Gamma : E \rightarrow 2^{E'}$ est *normale* si $E \subset E'$ et $\Gamma(x) \cap E = \{x\}$ pour tout $x \in E$. On peut associer une application multivoque normale à une application multivoque quelconque. Soit $\Gamma : E \rightarrow 2^{E'}$. Sans perdre en généralité on peut supposer $E \cap E' = \emptyset$. On définit alors $\tilde{\Gamma} : E \rightarrow 2^{E \cup E'}$ par $\tilde{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma(x)$ pour tout $x \in E$. L'application $\tilde{\Gamma}$ est normale au sens précédent.

Considérons un matroïde \mathcal{M} sur E . Posons $N = \tilde{\Gamma}(\mathcal{M})$. Il est clair que $\mathcal{M} = N(E)$ et $\Gamma(\mathcal{M}) = N(E')$. L'application $\tilde{\Gamma}$ permet de construire un matroïde N contenant à la fois \mathcal{M} et son transporté $\Gamma(\mathcal{M})$ comme sous-matroïdes.

Dans ce paragraphe nous allons définir une construction, appelée *extension principale*, et montrer que N peut être construit à partir de \mathcal{M} par une succession d'extensions principales. On obtiendra ainsi en particulier une construction de $\Gamma(\mathcal{M})$.

Proposition 6.4.4 *Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , $r_{\mathcal{M}} : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction rang de \mathcal{M} , $A \subset E$ un sous-ensemble de E et a un élément n'appartenant pas à E . On définit une application $r' : 2^{E \cup \{a\}} \rightarrow \mathbb{N}$ en posant pour $X \subset E$*

$$\begin{aligned} r'(X) &= r_{\mathcal{M}}(X), \\ r'(X \cup \{a\}) &= \begin{cases} r_{\mathcal{M}}(X) & \text{si } A \subset cl_{\mathcal{M}}(X), \\ r_{\mathcal{M}}(X) + 1 & \text{si } A \not\subset cl_{\mathcal{M}}(X). \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Vérifier les axiomes.

□ :

Nous dirons que Γ normale est *élémentaire* si $|E' \setminus E| = 1$. Soit $\Gamma : E \rightarrow 2^{E'}$ une application multivoque de E dans E' . Pour $X \subset E$ on pose $\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$. Soient E, E', E'' 3 ensembles, $\Gamma : E \rightarrow 2^{E'}$ et $\Gamma' : E' \rightarrow 2^{E''}$ deux applications multivoques. On définit alors la *composée* $\Gamma \circ \Gamma' : E \rightarrow 2^{E''}$ de Γ et Γ' par $(\Gamma \circ \Gamma')(x) = \Gamma'(\Gamma(x))$ pour tout $x \in E$. La composition d'applications multivoques est clairement associative.

Soit $\Gamma : E \rightarrow E'$ une application multivoque normale et $E' \setminus E = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ une indexation quelconque de $E' \setminus E$. Pour $i = 0, 1, \dots, k$ posons $E_i = E \cup \{a_1, \dots, a_i\}$. On a $E_0 = E$ et $E_k = E'$. Soit $1 \leq i \leq k$. On définit une application multivoque $\Gamma_i : E_{i-1} \rightarrow E_i$ en posant pour $x \in E_{i-1}$

$$\Gamma_i(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin E \text{ ou bien si } x \in E \text{ et } a_i \notin \Gamma(x), \\ \{x, a_i\} & \text{si } x \in E \text{ et } a_i \in \Gamma(x). \end{cases}$$

Soit \mathcal{I} un ensemble de parties de E . On définit inductivement \mathcal{I}_i par $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$ et \mathcal{I}_i est le transporté de \mathcal{I}_{i-1} par les couplages relativement à Γ_i pour $i = 1, 2, \dots, k$.

Lemme 6.4.5 *Avec les notations précédentes on a*

$$\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \dots \circ \Gamma_k.$$

De plus \mathcal{I}_k est le transporté de \mathcal{I} par les couplages relativement à Γ .

Démonstration. La première assertion est immédiate. Pour démontrer la seconde désignons par \mathcal{I}' le transporté de \mathcal{I} par les couplages relativement à Γ . Soit $X_0 \in \mathcal{I}$. Pour $i = 1, 2, \dots, k$ soit $\alpha_i : X_{i-1} \rightarrow E_i$ un couplage relativement à Γ_i tel que $X_i = \alpha_i(X_{i-1})$. L'application composée $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_k$ est clairement un couplage de $X = X_0$ sur $Y = X_k$ relativement à Γ . On a donc $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}'$.

Pour montrer l'inclusion inverse considérons $Y \in \mathcal{I}'$. Soit α un couplage de $X \subset E$ sur Y relativement à Γ . Posons $a' = a_k$. On a deux cas.

Cas 1) Si $a' \notin Y$ posons $X' = Y$ et soient β l'identité sur X' et $\alpha' = \alpha$.

Cas 2) Si $a' \in Y$ posons $a = \alpha^{-1}(a')$. Notons que $a \neq a'$ puisque $a \in X \subset E$ et $a' \notin E$. On a $a \notin X'$. En effet si $a \in X'$, comme $a \in X \subset E$ on aurait $\alpha^{-1}(a) = a$ d'après l'extensivité de Γ , d'où $\alpha^{-1}(a) = a = \alpha^{-1}(a')$, contredisant $a \neq a'$. Posons $X' \setminus \{a'\} \cup \{a\}$. Soient β défini par l'identité sur $X' \setminus \{a\}$ et $\beta(a) = a'$, et α' défini par $\alpha' = \alpha$ sur $X \setminus \{a\}$ et $\alpha'(a) = a$. Il est immédiat que α' est un couplage relativement à $\Gamma' = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \dots \circ \Gamma_{k-1}$ et que β est un couplage relativement à Γ_k .

Dans les deux cas on a $X' = \alpha'(X)$ et $Y = \beta(X')$. Par récurrence sur k il vient $Y \in \mathcal{I}_k$.

□

Le Lemme 6.4.5 permet de ramener le cas général du transporté d'un matroïde à une succession de transportés élémentaires.

Proposition 6.4.6 *Soient \mathcal{M} un matroïde sur E , $a \notin E$ et Γ une application multivoque normale de E dans $E \cup \{a\}$. Désignons par N l'extension principale de \mathcal{M} sur $E \cup \{a\}$ définie par $A = \Gamma^{-1}(a)$. Alors $\mathcal{M} = N(E)$ et $N = \Gamma(\mathcal{M})$.*

Démonstration. Utiliser les fonctions rang de N et $\Gamma(\mathcal{M})$.

□

Conclusion

En combinant les résultats de cette section on obtient une construction géométrique des transportés de matroïdes, donc également de l'union de matroïdes.

Appliquons-la au cas de l'union de deux matroïdes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sur un ensemble E . Soient E_1, E_2 deux copies disjointes de E , $\tilde{\mathcal{M}}_1, \tilde{\mathcal{M}}_2$ les copies de \mathcal{M}_1 resp. \mathcal{M}_2 sur E_1 resp. E_2 , et $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_2$. Soit N le matroïde défini par des extensions principales \tilde{e} pour chacune des droites de \mathcal{M} de la forme $e_1 e_2$ où e_1 et e_2 sont les copies d'un même élément $e \in E$. Alors $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = N(\tilde{E})$.

Chapitre 7 C 8

au sens du l'information

Applications

7.1 Partitions en bases

Théorème 7.1.1 (Edmonds 1965) Soit M un matroïde sur un ensemble E , et k un entier ≥ 2 . Il existe k bases disjointes de M si et seulement si pour tout $X \subset E$ on a

$$kr_M(X) + |E \setminus X| \geq kr(M)$$

Démonstration. Clairement il existe k bases disjointes de M si et seulement si $r(\bigvee_k M) \geq kr(M)$. La formule du rang de l'union de matroïdes donne immédiatement le théorème.

□

On peut reformuler ce Théorème de la façon suivante :

Théorème 7.1.2 Le nombre maximal de bases de M deux à deux disjointes est égal

$$\min_{\substack{X \subset E \\ r_M(X) = r(M)}} \left\lceil \frac{|E \setminus X|}{r(M) - r_M(X)} \right\rceil$$

Théorème 7.1.3 (Tutte 1961) Soit G un graphe connexe, et k un entier ≥ 2 . Il existe k arbres couvrants de G deux à deux disjoint si et seulement si pour toute partition de l'ensemble des sommets de G le nombre d'arêtes non contenues dans un même ensemble de la partition est $\geq k(p-1)$, où p désigne le nombre parties (non vides) de la partition.

Démonstration. Montrons directement que la condition est nécessaire. Posons $G = (S, E)$. Soient A_i $i = 1, 2, \dots, k$ les ensembles d'arêtes de k arbres couvrants deux à deux arête-disjoints, et $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p$ une partition de S en p parties non vides. Pour chaque i le nombre d'arêtes de A_i joignant deux S_j différents est $\geq p-1$ puisque le graphe d'adjacence des S_j est connexe. Donc le nombre total d'arêtes des A_i non contenues dans un même S_j est $\geq k(p-1)$.

La démonstration de la réciproque était à l'origine longue et difficile. On l'obtient facilement à partir du Théorème 1.

Un arbre couvrant de G est une base du matroïde des cycles $C(G)$. Il faut donc montrer que la condition $kr_M(X) + |E \setminus X| \geq kr(M)$ pour $X \subset E$ est vérifiée lorsque $M = C(G)$. Considérons

la partition $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p$ définie par les composantes connexes du graphe (S, X) . On a $r_{C(G)}(X) = |S| - p$ et $r(C(G)) = |S| - 1$, donc $r(C(G)) - r_{C(G)}(X) = p - 1$. Il vient

$$\begin{aligned} |E \setminus X| &\geq \text{nombre d'arêtes entre les } S_j \\ &\geq k(p - 1) \\ &= k(r(C(G)) - r_{C(G)}(X)) \end{aligned}$$

□

7.2 Recouvrements par des bases

Théorème 7.2.1 (cas vectoriel Horn 1955, matroïdes Edmonds 1965) Soient M un matroïde sur un ensemble E , et k un entier ≥ 2 . L'ensemble E est réunion de $\leq k$ bases de M si et seulement si pour tout $X \subset E$ on a

$$kr_M(X) \geq |X|$$

On peut reformuler ce Théorème de la façon suivante :

Théorème 7.2.2 Le nombre minimal de bases (ou d'indépendants) recouvrant E est égal à

$$\max_{\substack{X \subset E \\ r(X) \neq 0}} \left\lceil \frac{|X|}{r_M(X)} \right\rceil.$$

Démonstration. Il existe k bases recouvrant E si et seulement si $r(\bigvee_k M) = |E|$. Donc d'après la formule du rang de l'union de matroïdes - Théorème 5.3 - si et seulement si $\min_{X \subset E} (kr_M(X) + |E \setminus X|) = |E|$, soit si et seulement si $kr_M(X) \geq |X|$ pour tout $X \subset E$.

La démonstration directe de la nécessité est simple. Supposons en effet que $E = \bigcup_{i=1,2,\dots,k} B_i$, où B_i est une base de M pour $i = 1, 2, \dots, k$. Alors pour $X \subset E$ on a

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap (\bigcup_{i=1,2,\dots,k} B_i)| \\ &= |\bigcup_{i=1,2,\dots,k} (X \cap B_i)| \\ &\leq \sum_{i=1,2,\dots,k} |X \cap B_i| \\ &\leq kr_M(X) \end{aligned}$$

□

La démonstration de Horn de la réciproque fait l'objet de deux exercices marqués difficiles dans Bourbaki (cf. Algèbre Linéaire, paragraphe 7, exercices 6 et 7).

Lemme 7.2.3 (Nash-Williams 1964) Soient G un graphe et k un entier ≥ 2 . Il existe k arbres recouvrant G si et seulement si pour tout sous-ensemble de sommets X le nombre d'arêtes du sous-graphe $G(X)$ est $\leq k(|X| - 1)$.

Démonstration. Montrons directement que la condition est nécessaire. Posons $G = (S, E)$. Supposons que $E = \bigcup_{i=1,\dots,k} A_i$, où (S, A_i) est un arbre pour $i = 1, 2, \dots, k$. On a $|E(X)| \leq \sum_{i=1,\dots,k} (E(X) \cap A_i)$. Comme $|E(X) \cap A_i| \leq |X| - 1$ puisque (S, A_i) est sans cycle, il vient $|E(X)| \leq k(|X| - 1)$.

Pour la réciproque il faut établir que pour tout $A \subset E$ on a $kr_{C(G)}(A) \geq |A|$. Soient X_1, X_2, \dots, X_p les composantes connexes du graphe (S, A) . Désignons par E_i resp. A_i l'ensemble des arêtes dans E resp. A dont les deux extrémités sont dans X_i . On a

$$\begin{aligned} kr_{C(G)}(A_i) - |A_i| &= k(|X_i| - 1) - |A_i| \\ &\geq |E_i| - |A_i| \geq 0 \end{aligned}$$

Comme $r_{C(G)}(A) = \sum_{i=1, \dots, p} r_{C(G)}(A_i)$ et $|A| = \sum_{i=1, \dots, p} |A_i|$, en sommant pour $i = 1, 2, \dots, k$ il vient

$$kr_{C(G)}(A) - |A| \geq 0$$

La condition du Théorème 2 est bien vérifiée.

□

Le théorème de Nash-Williams peut également s'énoncer : le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration des arêtes d'un graphe G sans cycle unicolore est égal à

$$\max_{\substack{X \subset S \\ |X| \neq 1}} \left\lceil \frac{\text{nombre d'arêtes de } G(X)}{|X| - 1} \right\rceil$$

où S désigne l'ensemble des sommets de G .

7.2.1 Exercices

Exercice 4.46 Un graphe resp. un graphe biparti plongeable dans le plan projectif (donc en particulier un graphe planaire) peut être recouvert par 3 resp. 2 arbres (exemple K_6 resp. $K_{4,3}$).

Le théorème de Nash-Williams et l'exercice sont des applications au matroïde des cycles d'un graphe. La proposition qui suit est une application au matroïde des cocycles.

Rappelons deux définitions de théorie des graphes. Un graphe est *k-arête connexe* si tout cocycle est de cardinal $\geq k$. Un *coarbre* est le complémentaire d'un arbre couvrant dans l'ensemble des arêtes.

Corollaire 7.2.4 (i) [Kundu 1974] Un graphe 4-arête connexe peut être recouvert par 2 coarbres
(ii) [Jaeger 1979] Un graphe 3-arête connexe peut être recouvert par 3 coarbres

Démonstration. Nous reprenons la démonstration de Jaeger. En fait nous démontrerons à la fois (i) et (ii) en montrant que pour $k = 3, 4$ un graphe k -arête connexe peut être recouvert par $k/(k-2)$ coarbres. Un coarbre d'un graphe $G = (S, E)$ étant une base du matroïde des cocycles $B(G)$ d'après le Théorème 2 on doit vérifier que pour tout $X \subset S$ on a

$$\frac{k}{k-2} r_{B(G)}(X) \geq |X|$$

On a $r_{B(G)}(X) = |X| + r_{C(G)}(E \setminus X) - r(C(G))$. Distinguons deux cas.

- Si le graphe $(S, E \setminus X)$ est connexe on a $r_{C(G)}(E \setminus X) = r(C(G))$ d'où $r_{B(G)}(X) = |X|$, et par suite la condition est vérifiée

- Sinon le graphe $(S, E \setminus X)$ a $p \geq 2$ composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p . Le graphe G étant k -arête connexe de chaque C_i sort au moins k arêtes, donc le nombre des arêtes ayant leurs extrémités dans

$2 C_i$ différents est $\geq kp/2$. Remarquons que les arêtes non contenues dans un même C_i sont dans X , par suite $|X| \geq kp/2$, et donc $p \leq \frac{2}{k}|X|$. On a $r_{C(G)}(E \setminus X) = |S| - p$, il vient

$$\begin{aligned} r_{B(G)}(X) &= |X| - p + 1 \\ &\geq |X|(1 - \frac{2}{k}) \end{aligned}$$

la condition est vérifiée.

□

7.3 Application à la conjecture du 5-flot

F. Jaeger a établi la propriété (ii) du Corollaire 2.2 comme lemme dans une approche de la conjecture du 5-flot de Tutte.

Conjecture 7.3.1 Conjecture du 5-flot [Tutte 1954] *Un graphe orienté sans isthme a un 5-flot partout non nul, autrement dit un flot à valeurs 1,2,3,4 modulo 5.*

Théorème 7.3.2 (Jaeger 1979) *Tout graphe sans isthme possède un 8-flot partout non nul.*

Démonstration. Soit $A \subset E$ un arbre de G . Pour $e \in E \setminus A$ désignons par $\gamma_e \in \{0,1\}^E$ le cycle fondamental de e relativement à A . Remarquons que $\phi_A = \sum_{e \in E \setminus A} \gamma_e$ est un flot binaire de G non nul sur le coarbre $E \setminus A$.

Supposons G 3-arête connexe. D'après la proposition il existe 3 arbres A_1, A_2, A_3 tels que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset$. Considérons $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. D'après ce qui précède ϕ est un flot de G à valeurs dans \mathbb{Z}_2^3 partout non nul, d'où un 8-flot partout non nul.

Le cas général d'un graphe sans isthme se déduit du cas 3-arête connexe par recollements de graphes.

□

On peut montrer que si la conjecture de Tutte est vraie pour k_0 elle est vraie pour tout $k \geq k_0$. Lorsque Jaeger a obtenu son résultat aucune valeur n'était connue. En 1980 par une méthode différente P. Seymour a établi l'existence d'un 6-flot partout non nul. L'existence d'un 5-flot est encore actuellement une conjecture. Finalement mentionnons que le graphe de Petersen ne possède pas de 4-flot partout non nul.

7.4 Echange multiple des bases

Théorème 7.4.1 [Greene 1975] *Soient M un matroïde, et B_1, B_2 deux bases de M . Quel que soit $X \subset B_1$ il existe $Y \subset B_2$ tel que $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ soient deux bases.*

Dans le cas vectoriel le théorème se déduit du développement de Laplace d'un déterminant [exercice].

Démonstration du Théorème 8.5.1. On se ramène au cas $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ en considérant $M/(B_1 \cap B_2)$. Remarquons qu'il existe $Y \subset B_2$ tel que $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ soient deux bases si et seulement si $r_{(M/X) \vee (M/(B_1 \setminus X))}(B_2) = |B_2|$.

En effet $r_{(M/X) \vee (M/(B_1 \setminus X))}(B_2) = |B_2|$ si et seulement si il existe $Y \subset B_2$ tel que Y soit indépendant dans $M/(B_1 \setminus X)$ et $B_2 \setminus Y$ soit indépendant dans M/X . De façon équivalente on a $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ indépendants dans M . Posons $r = r(M)$. On a $|B_1 \setminus X \cup Y| = r - |X| + |Y| \leq r$ et $|B_2 \setminus Y \cup X| = r - |Y| + |X| \leq r$, d'où $|X| = |Y|$. Par suite $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ sont deux bases.

D'après cette remarque en utilisant la formule du rang de l'union de matroïdes il faut vérifier qu'on a $r_{M/X}(Z) + r_{M/(B_1 \setminus X)}(Z) + |E \setminus Z| \geq |B_2|$ pour tout $Z \subset B_2$. On a

$$\begin{aligned}
& r_{M/X}(Z) + r_{M/(B_1 \setminus X)}(Z) + |B_2 \setminus Z| = \\
& = r_M(X \cup Z) - r_M(X) + r_M((B_1 \setminus X) \cup Z) - r_M(B_1 \setminus X) + |B_2| - |Z| \\
& = r_M(X \cup Z) + r_M((B_1 \setminus X) \cup Z) - |X| - |B_1 \setminus X| + |B_2| - |Z| \\
& = r_M(X \cup Z) + r_M((B_1 \setminus X) \cup Z) - |Z| \\
& \text{donc d'après l'inégalité sous-modulaire} \\
& \geq r_M((X \cup Z) \cup (B_1 \setminus X)) + r_M((X \cup Z) \cap (B_1 \setminus X)) - |Z| \\
& = r_M(B_1 \cup Z) + r_M(Z) - |Z| \\
& = |B_1| + |Z| - |Z| = |B_1|
\end{aligned}$$

□

7.5 Cycles disjoints dans un graphe plan 4-régulier

7.6 Jeu de commutation de Shannon

Chapitre 8

Applications

8.1 Partitions en bases

Théorème 8.1.1 [4] Soit \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , et k un entier ≥ 2 . Il existe k bases disjointes de \mathcal{M} si et seulement si pour tout $X \subset E$ on a

$$kr_{\mathcal{M}}(X) + |E \setminus X| \geq kr(\mathcal{M}).$$

Démonstration. Clairement il existe k bases disjointes de \mathcal{M} si et seulement si $r(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_i) \geq kr(\mathcal{M})$ ou encore, d'après la formule du rang de l'union de matroïdes (Théorème 6.3.1) si et seulement si

$$\min_{X \subset E} \left(\sum_{i=1}^{i=k} r(X) + |E \setminus X| \right) \geq kr(\mathcal{M})$$

si et seulement si

$$\min_{X \subset E} (kr(X) + |E \setminus X|) \geq kr(\mathcal{M})$$

si et seulement si $kr_{\mathcal{M}}(X) + |E \setminus X| \geq kr(\mathcal{M})$ pour tout $X \subset E$.

□

On peut reformuler Théorème 8.1.1 de la façon suivante :

Théorème 8.1.2 Le nombre maximal de bases de \mathcal{M} deux-à-deux disjointes est égal à

$$\min_{\substack{X \subset E \\ r_{\mathcal{M}}(X) = kr(\mathcal{M})}} \left[\frac{|E \setminus X|}{r(\mathcal{M}) - r_{\mathcal{M}}(X)} \right]$$

Théorème 8.1.3 [23] Soit G un graphe connexe, et k un entier ≥ 2 . Il existe k arbres couvrants de G deux-à-deux disjoints si et seulement si pour toute partition de l'ensemble des sommets de G le nombre d'arêtes non contenues dans un même ensemble de la partition est $\geq k(p-1)$, où p désigne le nombre parties (non vides) de la partition.

Démonstration. Montrons directement que la condition est nécessaire. Posons $G = (S, E)$ et soient A_i , $i = 1, 2, \dots, k$ les ensembles d'arêtes de k arbres couvrants deux-à-deux arête-disjoints, et $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p$ une partition de S en p parties non vides. Pour chaque i le nombre d'arêtes de A_i joignant deux S_j différents est $\geq p - 1$ puisque le graphe d'adjacence des S_j est connexe. Donc le nombre total d'arêtes des A_i non contenues dans un même S_j est $\geq k(p - 1)$.

La démonstration de la réciproque était à l'origine longue et difficile. On l'obtient facilement à partir du Théorème 8.1.1.

Un arbre couvrant de G est une base du matroïde des cycles $\mathcal{M}(G)$. Il faut donc montrer que la condition $kr_{\mathcal{M}}(X) + |E \setminus X| \geq kr(\mathcal{M})$ pour $X \subset E$ est vérifiée. Considérons la partition $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p$ définie par les composantes connexes du graphe (S, X) . On a $r_{\mathcal{M}(G)}(X) = |S| - p$ et $r(\mathcal{M}(G)) = |S| - 1$, donc $r(\mathcal{M}(G)) - r_{\mathcal{M}(G)}(X) = p - 1$. Il vient

$$\begin{aligned} |E \setminus X| &\geq \text{nombre d'arêtes entre les } S_j \\ &\geq k(p - 1) \\ &= k(r(\mathcal{M}(G)) - r_{\mathcal{M}(G)}(X)). \end{aligned}$$

□

8.2 Recouvrements par des bases

Théorème 8.2.1 [8, 5] Soient \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble E , et $k \geq 2$ un entier. L'ensemble E est réunion de $\leq k$ bases de \mathcal{M} si et seulement si pour tout $X \subset E$ on a

$$kr_{\mathcal{M}}(X) \geq |X|.$$

La démonstration de la nécessité du Théorème 8.2.1 est simple. En effet, supposons en effet que $E = \bigcup_{i=1}^k B_i$, où B_i est une base de \mathcal{M} pour $i = 1, \dots, k$. Alors pour $X \subset E$ on a

$$\begin{aligned} |X| &= \left| X \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^k (X \cap B_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |X \cap B_i| \\ &\leq kr_{\mathcal{M}}(X). \end{aligned}$$

La démonstration de Horn de la réciproque fait l'objet de deux exercices marqués difficiles dans Bourbaki (cf. Algèbre Linéaire, paragraphe 7, exercices 6 et 7).

Démonstration du Théorème 8.2.1 Il existe k bases recouvrant E si et seulement si $r\left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}\right) = |E|$.

Donc d'après la formule du rang de l'union de matroïdes (Théorème 6.3.1) si et seulement si

$$\min_{X \subset E} (kr_{\mathcal{M}}(X) + |E \setminus X|) = |E|,$$

soit, si et seulement si $kr_{\mathcal{M}}(X) \geq |X|$ pour tout $X \subset E$.

On peut reformuler Théorème 8.2.1 de la façon suivante :

Théorème 8.2.2 *Le nombre minimal de bases (ou d'indépendants) recouvrant E est égal à*

$$\max_{\substack{X \subseteq E \\ r(X) \neq 0}} \left\lceil \frac{|X|}{r_M(X)} \right\rceil.$$

Lemme 8.2.3 [23, 15] *Soient G un graphe connexe et $k \geq 2$ un entier. Il existe k arbres recouvrant G si et seulement si pour tout sous-ensemble de sommets X le nombre d'arêtes du sous-graphe $G(X)$ est $\leq k(|X| - 1)$.*

Démonstration. Montrons directement que la condition est nécessaire. Posons $G = (S, E)$ et soit $X \subseteq S$. Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^k A_i$, où (S, A_i) est un arbre pour $i = 1, \dots, k$. On a $|E(X)| \leq \sum_{i=1}^k |E(X) \cap A_i|$. Comme $|E(X) \cap A_i| \leq |X| - 1$ puisque (S, A_i) est sans cycle, il vient $|E(X)| \leq k(|X| - 1)$.

Pour la réciproque il faut établir que pour tout $A \subset E$ on a $kr_{M(G)}(A) \geq |A|$. Soient X_1, \dots, X_p les composantes connexes du graphe (S, A) . Désignons par E_i (resp. A_i) l'ensemble des arêtes de E (resp. A) dont les deux extrémités sont dans X_i (notons que $A_i \subseteq E_i$). On a

$$\begin{aligned} kr_{M(G)}(A_i) - |A_i| &= k(|V(X_i)| - 1) - |A_i| \\ &\geq |E_i| - |A_i| \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $r_{M(G)}(A) = \sum_{i=1}^p r_{M(G)}(A_i)$ et $|A| = \sum_{i=1}^p |A_i|$, en sommant pour $i = 1, \dots, k$ il vient

$$kr_{M(G)}(A) - |A| \geq 0.$$

La condition du Théorème 8.2.2 est bien vérifiée.

□

Le Théorème 8.2.3 peut également s'énoncer : le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration des arêtes d'un graphe G sans cycle unicolore est égal à

$$\max_{\substack{X \subseteq S \\ |X| \neq 1}} \left\lceil \frac{\text{nombre d'arêtes de } G(X)}{|X| - 1} \right\rceil$$

où S désigne l'ensemble des sommets de G .

Exercice

Un graphe (resp. un graphe biparti) plongeable dans le plan projectif - donc en particulier un graphe planaire - peut être recouvert par 3 (resp. 2 arbres)

8.3 Recouvertures par de coarbres

Le Théorème 8.2.3 et l'exercice sont des applications au matroïde des cycles d'un graphe. La proposition qui suit est une application au matroïde des cocycles.

Rappelons deux définitions de théorie des graphes. Un graphe est k -arête connexe si tout cocycle est de cardinal $\geq k$. Un *coarbre* est le complémentaire d'un arbre couvrant dans l'ensemble des arêtes.

- Proposition 8.3.1** (i) [11] *Un graphe 4-arête connexe peut être recouvert par 2 coarbres.*
(ii) [9] *Un graphe 3-arête connexe peut être recouvert par 3 coarbres.*

Démonstration. Nous reprenons la démonstration de Jaeger. En fait nous démontrerons à la fois (i) et (ii) en montrant que pour $k = 3, 4$ un graphe k -arête connexe peut être recouvert par $k/(k-2)$ coarbres. Un coarbre d'un graphe $G = (S, E)$ étant une base du matroïde des cocycles $B(G)$ d'après le Théorème 8.2.1 on doit vérifier que pour tout $X \subset S$ on a

$$\frac{k}{k-2} r_{M^*(G)}(X) \geq |X|$$

On a $r_{M^*(G)}(X) = |X| + r_{M(G)}(E \setminus X) - r(M(G))$. Distinguons deux cas.

Cas 1) Si le graphe $(S, E \setminus X)$ est connexe on a $r_{M(G)}(E \setminus X) = r(M(G))$ d'où $r_{M^*(G)}(X) = |X|$, et par suite la condition est vérifiée

Cas 2) Sinon le graphe $(S, E \setminus X)$ a $p \geq 2$ composantes connexes C_1, \dots, C_p . Le graphe G étant k -arête connexe de chaque C_i sort au moins k arêtes, donc le nombre des arêtes ayant leurs extrémités dans deux C_i différents est $\geq kp/2$. Remarquons que les arêtes non contenues dans un même C_i sont dans X , par suite $|X| \geq kp/2$, et donc $p \leq \frac{2}{k}|X|$. On a $r_{M(G)}(E \setminus X) = |S| - p$, il vient

$$\begin{aligned} r_{M^*(G)}(X) &= |X| - p + 1 \\ &\geq |X|(1 - \frac{2}{k}) \end{aligned}$$

la condition est vérifiée.

□

8.4 Application à la conjecture du 5-flot

Soit H un graphe orienté (et donc chaque arête a une extrémité *positive* et une extrémité *negative*). Soit $S \subset V(H)$ et soit $\omega_H^+(S)$ (resp. $\omega_H^-(S)$) l'ensemble d'arêtes de H avec de extrémités positives (resp. négatives) dans S et d'extrémités négatives (resp. positives) dans $V \setminus S$.

Soit G un groupe abélien (avec notation additive) et soit $H = (V, E)$ un graphe orienté avec $E(H) \neq \emptyset$. Un G -flot dans H est une application $\phi : G \leftrightarrow E(H)$ telle que

$$\sum_{e \in \omega^+(v)} \phi(e) = \sum_{e \in \omega^-(v)} \phi(e) \text{ pour tout } v \in V(H).$$

Un G -flot est *partout non nul* ('nowhere zero') si $\phi(e) \neq 0$ pour tout $e \in E(H)$.

Tutte [22] a montré qu'un graphe G planaire (sans isthme) est k -faces colorable si et seulement si G admet un \mathbb{Z}_k -flot partout non nul où \mathbb{Z}_k désigne le groupe cyclique à k éléments. Mentionnons que le graphe de Petersen ne possède pas de 4-flot partout non nul.

Conjecture 8.4.1 [22] *Soit G sans isthme et non contenant une subdivision du graphe de Petersen. Alors, G admet un 4-flot partout non nul.*

On remarque que la validité de cette conjecture impliquerait le Théorème des 4 couleurs F. Jaeger [9] a établi la propriété (ii) du Proposition 8.3.1 comme lemme dans une approche de la conjecture du 5-flot de Tutte.

Conjecture 8.4.2 [22] **Conjecture du 5-flot** *Un graphe orienté sans isthme a un 5-flot partout non nul, autrement dit un flot à valeurs 1,2,3,4 modulo 5.*

Théorème 8.4.3 [9] *Tout graphe sans isthme possède un 8-flot partout non nul.*

Démonstration. Soit $A \subset E$ un arbre de G . Pour $e \in E \setminus A$ désignons par $\gamma_e \in \{0,1\}^E$ le cycle fondamental de e relativement à A . Remarquons que $\phi_A = \sum_{e \in E \setminus A} \gamma_e$ est un flot binaire de G non nul sur le coarbre $E \setminus A$.

Supposons que G est 3-arête connexe. D'après la Proposition 8.3.1 il existe 3 arbres A_1, A_2, A_3 tels que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$. Considérons $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. D'après ce qui précède ϕ est un flot de G à valeurs dans \mathbb{Z}_2^3 partout non nul, d'où un 8-flot partout non nul.

Le cas général d'un graphe sans isthme se déduit du cas 3-arête connexe par recollements de graphes.

□

On peut montrer que si la conjecture de Tutte est vraie pour k_0 elle est vraie pour tout $k \geq k_0$. Lorsque Jaeger a obtenu son résultat aucune valeur n'était connue. En 1980 par une méthode différente P. Seymour [19, 20] a établi l'existence d'un 6-flot partout non nul. L'existence d'un 5-flot est encore actuellement une conjecture.

8.5 Echange multiple des bases

Théorème 8.5.1 [Greene 1975] *Soient \mathcal{M} un matroïde, et B_1, B_2 deux bases de \mathcal{M} . Quel que soit $X \subset B_1$ il existe $Y \subset B_2$ tel que $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ soient deux bases.*

Dans le cas vectoriel le théorème se déduit du développement de Laplace d'un déterminant [exercice].

Démonstration du Théorème 8.5.1. On se ramène au cas $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ en considérant $\mathcal{M}/(B_1 \cap B_2)$. Remarquons qu'il existe $Y \subset B_2$ tel que $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ soient deux bases si et seulement si $r_{(\mathcal{M}/X) \vee (\mathcal{M}/(B_1 \setminus X))}(B_2) = |B_2|$.

En effet $r_{(\mathcal{M}/X) \vee (\mathcal{M}/(B_1 \setminus X))}(B_2) = |B_2|$ si et seulement si il existe $Y \subset B_2$ tel que Y soit indépendant dans $\mathcal{M}/(B_1 \setminus X)$ et $B_2 \setminus Y$ soit indépendant dans \mathcal{M}/X . De façon équivalente on a $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ indépendants dans \mathcal{M} . Posons $r = r(\mathcal{M})$. On a $|B_1 \setminus X \cup Y| = r - |X| + |Y| \leq r$ et $|B_2 \setminus Y \cup X| = r - |Y| + |X| \leq r$, d'où $|X| = |Y|$. Par suite $B_1 \setminus X \cup Y$ et $B_2 \setminus Y \cup X$ sont deux bases. D'après cette remarque en utilisant la formule du rang de l'union de matroïdes il faut vérifier qu'on a $r_{\mathcal{M}/X}(Z) + r_{\mathcal{M}/(B_1 \setminus X)}(Z) + |E \setminus Z| \geq |B_2|$ pour tout $Z \subset B_2$. On a

$$\begin{aligned} & r_{\mathcal{M}/X}(Z) + r_{\mathcal{M}/(B_1 \setminus X)}(Z) + |B_2 \setminus Z| = \\ &= r_{\mathcal{M}}(X \cup Z) - r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}((B_1 \setminus X) \cup Z) - r_{\mathcal{M}}(B_1 \setminus X) + |B_2 \setminus Z| - |Z| \\ &= r_{\mathcal{M}}(X \cup Z) + r_{\mathcal{M}}((B_1 \setminus X) \cup Z) - |X| - |B_1 \setminus X| + |B_2 \setminus Z| - |Z| \\ &= r_{\mathcal{M}}(X \cup Z) + r_{\mathcal{M}}((B_1 \setminus X) \cup Z) - |Z| \\ &\text{donc d'après l'inégalité sous-modulaire} \\ &\geq r_{\mathcal{M}}((X \cup Z) \cup (B_1 \setminus X)) + r_{\mathcal{M}}((X \cup Z) \cap (B_1 \setminus X)) - |Z| \\ &= r_{\mathcal{M}}(B_1 \cup Z) + r_{\mathcal{M}}(Z) - |Z| \\ &= |B_1| + |Z| - |Z| = |B_1| \end{aligned}$$

□

8.6 Couplages dans de graphes bipartis

Un ensemble de sommets d'un graphe est dit *transversal* s'il contient au moins l'une d'extrémités de chaque arête.

Théorème 8.6.1 [6, 10] *Soit $B = (U, V, E)$ un graphe biparti. Alors, le plus grand couplage dans B est égal au plus petit transversal de B .*

Démonstration. Soit \mathcal{M}_U le matroïde de partition induit par la partition $E = E_1 + \dots + E_{|U|}$ où chaque E_i consiste de l'ensemble d'arêtes incidentes au sommet $u_i \in U$. De même, soit \mathcal{M}_V le matroïde de partition induit par la partition $E = E_1 + \dots + E_{|V|}$ où chaque E_i consiste de l'ensemble d'arêtes incidentes au sommet $v_i \in V$. Un sous-ensemble X de E forme un couplage si et seulement si les éléments de X sont indépendants dans \mathcal{M}_U et \mathcal{M}_V . On a donc, d'après le Théorème 6.1.2 que la taille d'un couplage maximal est égal à $\min_{A \subseteq E} (r_U(A) + r_V(E \setminus A))$ où r_U et r_V désignent les fonctions rangs de \mathcal{M}_U et \mathcal{M}_V respectivement.

Remarquons que $r_U(A)$ (resp. $r_V(E \setminus A)$) est la nombre de l'ensemble de sommets $u(A)$ dans U (resp. le nombre de sommets $v(E \setminus A)$ dans V) qu'ont une extrémité dans A (resp. un extrémité dans $E \setminus A$). Clairement, l'ensemble de sommets $u(A) \cup v(E \setminus A)$ forme un transversal de B , d'où le résultat.

□

8.7 Jeu de commutation de Shannon

En 1960, C.E. Shannon a introduit le jeu suivant :

Jeu de commutation pour les graphes Soit G un graphe et e une arête de G . Deux joueurs, *Constructeur* et *Destructeur*, jouent alternativement. Un coup de Constructeur consiste à rendre une arête non jouée invulnérable à la suppression, (l'objectif de Constructeur est de construire un chemin entre les extrémités de l'arête injouable e). Un coup de Destructeur consiste à supprimer une arête non jouée (l'objectif de Breaker est d'empêcher Maker de réussir). Le jeu continue jusqu'à ce qu'un des joueurs est atteint son objectif.

Cela a été généralisée et également résolu pour les matroïde par Lehman [12].

Jeux de commutation pour les matroïdes Soit \mathcal{M} un matroïde et e un de ses éléments. Constructeur et Destructeur jouent alternativement en choisissant un élément non joué de \mathcal{M} différent de e . Constructeur la rendre invulnérable et Destructeur le supprime. Constructeur gagne la partie s'il construit un circuit de \mathcal{M} contenant e . Destructeur gagne dans les autres cas. Remarquons que si un joueur sait gagner en jouant en dixième alors il sait gagner en jouant en premier. En effet, le jeu ou Constructeur joue en premier se ramène au jeu ou Constructeur joue en second en ajoutant à \mathcal{M} un élément parallèle à e , élément qui sera nécessairement jouée par Destructeur lors de son premier coup. de plus on peut voir aisément que le jeu de Destructeur est équivalent au jeu de Constructeur sur le matroïde dual \mathcal{M}^* .

Théorème 8.7.1 [12] *Le jeu de commutation de Shannon est gagnant pour Constructeur jouant second si et seulement s'il existe deux ensembles disjoints X_1, X_2 de $E \setminus e$ tels que $e \in cl(X_1) = cl(X_2)$.*

On montrera que la condition est suffisante en donnant une stratégie explicite pour Constructeur.

Démonstration de la suffisance du Théorème 8.7.1. Soit $X = cl(X_1) = cl(X_2)$. Comme Constructeur peut ignorer le suppression de éléments qui ne sont pas dans X en jouant dans $\mathcal{M}|(X + e)$ alors on suppose que X_1 et X_2 sont deux bases disjointes.

Remarquons que si Destructeur joue d et constructeur joue c alors g ne plus valable et c est invulnerable et donc l'effet dans \mathcal{M} est la suppression et la contraction. Soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus d/c$, on a

$$e \in cl_{\mathcal{M}'}(X) \text{ si et seulement si } d \notin X \text{ et } e \in cl_{\mathcal{M}}(X + c).$$

Constructeur gagne si e est une boucle dans \mathcal{M}' ce qui est équivalent à $e \in cl_{\mathcal{M}}(F)$ où F est l'ensemble crés par Constructeur.

On procède par récurrence sur E . Si $|E| = 1$ alors e est une boucle et Constructeur gagne. Si $|E| \geq 2$ il suffit Constructeur donne une réponse à un élément d joué par Destructeur par un élément c tel que $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus d/c$ a deux bases disjointes. Si Destructeur joue un élément qui n'est pas dans X alors Constructeur peut choisir un élément *fictif* dans X (à la place de Destructeur) et les ensembles $X_1 - c - d$ et $X_2 - c - d$ sont disjoints et ils engendrent \mathcal{M}' . Supposons donc que Destructeur joue un élément d dans X_1 . Alors, il existe un élément $c \in X_2$ tel que $X' = X_1 \setminus d \cup c$ est une base de \mathcal{M} . Constructeur doit jouer élément c car maintenant $X' \setminus c$ et $X_2 \setminus c$ sont deux bases disjointes (non contenant e) dans \mathcal{M}' . \square

8.8 Cycles disjoints dans un graphe plan 4-régulier

Chapitre 9

Le polynôme de Tutte

9.1 Invariants

Un *invariant d'isomorphisme* d'un matroïde est une fonction f sur la classe de tous les matroïdes telle que

$$f(\mathcal{M}_1) = f(\mathcal{M}_2) \text{ si } \mathcal{M}_1 \text{ est isomorphe à } \mathcal{M}_2 \quad (9.1)$$

Pour tout $e \in \mathcal{M}$, on définit la récurrence suivante

$$f(\mathcal{M}) = \begin{cases} f(\mathcal{M} \setminus e) + f(\mathcal{M}/e) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme ni une boucle} \\ f(\mathcal{M}(e)) + f(\mathcal{M}\setminus) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Soit \mathcal{H} une classe de matroïde fermé sur d'isomorphismes et mineurs. Une fonction f dans \mathcal{H} vérifiant conditions (9.1) et (9.2) est dite un *invariant de Tutte-Grothendieck* ou un *T-G invariant*. Soit a, b des entiers nonnégatifs, on considère la généralisation suivante de (9.2)

$$f(\mathcal{M}) = \begin{cases} af(\mathcal{M} \setminus e) + bf(\mathcal{M}/e) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme ni une boucle} \\ f(\mathcal{M}(e)) + f(\mathcal{M}\setminus) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.3)$$

Une fonction f dans \mathcal{H} vérifiant conditions (9.1) et (9.3) est dite un *T-G invariant généralisée*. Un résultat fondamental nous dit que tout T-G invariant f est l'évaluation d'un certain polynôme à deux variables $t(x, y)$ où

$$f(I) = x \text{ et } f(B) = y$$

pour I un isthme et B une boucle.

On va caractériser tous les T-G invariants. Soit \mathcal{M} un matroïde de rang r . Le *polynôme rang* $S(\mathcal{M}; x, y)$ d'un matroïde \mathcal{M} est défini par

$$S(\mathcal{M}; x, y) = \sum_{X \subseteq E} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} \quad (9.4)$$

où $n(X) = |X| - r(X)$ est la fonction *nulité* de X .

Clairment, $S(\mathcal{M}; x, y)$ est un invariant d'isomorphisme sur la classe de tous les matroïdes. On a

$$S(I; x, y) = x^{r(I)-r(\emptyset)} y^{|\emptyset|-r(\emptyset)} + x^{r(I)-r(I)} y^{|I|-r(I)} = x + 1.$$

On peut également vérifier que $S(L; x, y) = y + 1$.

Lemme 9.1.1 $S(\mathcal{M}; x, y)$ est un $T\text{-}G$ invariant sur la classe de tous les matroïdes.

Démonstration. Soit $e \in \mathcal{M}$, on a

$$S(\mathcal{M}; x, y) = \sum_{X \subseteq E, e \notin X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} + \sum_{X \subseteq E, e \in X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} \quad (9.5)$$

Comme

$$\sum_{X \subseteq E, e \notin X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)},$$

et

$$r(E) = \begin{cases} r(E \setminus e) + 1 & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ r(E \setminus e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors,

$$\sum_{X \subseteq E, e \notin X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} x \sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{r(E \setminus e)-r(X)} y^{n(X)} = x S(\mathcal{M} \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ \sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{r(E \setminus e)-r(X)} y^{n(X)} = S(\mathcal{M} \setminus e; x, y) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.6)$$

On considère maintenant le deuxième terme de la somme (9.5),

$$\sum_{X \subseteq E, e \in X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \sum_{Y \subseteq E \setminus e} x^{r((E-e) \cup e)-r(Y \cup e)} y^{n(Y \cup e)}$$

Soit $Y \subseteq E \setminus e$, alors

$$r_{\mathcal{M}/e}(Y) = \begin{cases} r(Y \cup e) & \text{si } e \text{ est une boucle,} \\ r(Y \cup e) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$n_{\mathcal{M}/e}(Y) = \begin{cases} n(Y \cup e) - 1 & \text{si } e \text{ est une boucle,} \\ r(Y \cup e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{X \subseteq E, e \in X} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} y \sum_{Y \subseteq E \setminus e} x^{r_{\mathcal{M}/e}(E \setminus e)-r(Y)} y^{n_{\mathcal{M}/e}(Y)} = y S(\mathcal{M}/e; x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle,} \\ \sum_{Y \subseteq E \setminus e} x^{r_{\mathcal{M}/e}(E \setminus e)-r(Y)} y^{n_{\mathcal{M}/e}(Y)} = S(\mathcal{M}/e; x, y) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.7)$$

En utilisant (9.5), (9.6) et (9.7) on obtient

$$S(\mathcal{M}; x, y) = \begin{cases} S(\mathcal{M} \setminus e; x, y) + S(\mathcal{M}/e; x, y) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme ni une boucle,} \\ (x+1)S(\mathcal{M} \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ (x+1)S(\mathcal{M}/e; x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

avec $S(L; x, y) = y + 1$ et $S(B; x, y) = y + 1$, d'où le résultat.

□

Le théorème suivant généralise ce lemme en montrant que $S(\mathcal{M}; x, y)$ n'est pas seulement un T-G invariant mais plus important il est essentiellement le T-G invariant universelle.

Théorème 9.1.2 *Il existe une unique fonction $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}[x, y]$ telle que*

- (i) $t(I; x, y) = x$ et $t(B; x, y) = y$.
- (ii) (supression-contraction) si e est un élément d'un matroïde \mathcal{M} , et e n'est ni un isthme ni une boucle alors $t(\mathcal{M}; x, y) = t(\mathcal{M} \setminus e; x, y) + t(\mathcal{M}/e; x, y)$.
- (iii) Si e est un isthme ou une boucle du matroïde \mathcal{M} alors $t(\mathcal{M}; x, y) = t(\mathcal{M}(e); x, y)t(\mathcal{M} \setminus e; x, y)$.
- (iv) Soit R un anneau commutatif et soit f une fonction de \mathcal{M} dans R . Alors, si f vérifie (9.2) quand $|E| \geq 2$ alors pour tout matroïde \mathcal{M}

$$f(\mathcal{M}) = t(\mathcal{M}; f(I), f(B)).$$

Démonstration. D'après le Lemme 9.1.1 si $t(\mathcal{M}; x, y) = S(\mathcal{M}; x - 1, y - 1)$ alors les conditions (i) – (iii) sont vérifiées. Les seuls matroïdes (non-vides) que ne peuvent pas être décomposés par (ii) ou (iii) sont I et B , mais pour ces matroïdes $t(\mathcal{M}; x, y)$ est donné par (i). L'unicité de t peut-être facilement démontré par récurrence sur le nombre d'éléments de \mathcal{M} . Part (iv) peut être également démontré par induction.

□

On appelle $t(\mathcal{M}; x, y)$ le polynôme de Tutte de \mathcal{M} . D'après équation (9.4), on a

$$t(\mathcal{M}; x, y) = S(\mathcal{M}; x - 1, y - 1) = \sum_{X \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(X)} (y - 1)^{n(X)}. \quad (9.8)$$

Exemple 9.1.3 On calcul $t(U_{3,2}; x, y)$ en utilisant la récurrence du Théorème 9.1.2. Comme, l'élément 3 n'est pas ni un isthme ni une boucle de $U_{3,2}$ alors

$$\begin{aligned} t(U_{3,2}; x, y) &= t(U_{3,2} \setminus 3; x, y) + t(U_{3,2}/3; x, y) \\ &= t(U_{2,2}; x, y) + t(U_{2,1}; x, y). \end{aligned}$$

Comme le matroïde $U_{k,k}$, $k \geq 1$ consiste d'une seule base alors tous ses éléments sont des isthmes et donc

$$t(U_{2,2}; x, y) = t(U_{2,2}(2); x, y)t(U_{2,2} \setminus 2; x, y) = xt(U_{1,1}; x, y) = xt(I; x, y) = x^2.$$

et

$$t(U_{2,1}; x, y) = t(U_{2,1} \setminus 2; x, y) + t(U_{2,1}/2; x, y) = t(U_{1,1}; x, y) + t(U_{1,0}; x, y) = t(I; x, y) + t(B; x, y) = x + y.$$

On obtient,

$$t(U_{3,2}; x, y) = x^2 + x + y.$$

Calculons maintenant $t(U_{3,2}; x, y)$ en utilisant la fonction génératrice (9.8).

$$\begin{aligned}
t(U_{3,2}; x, y) &= \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{n(X)} \\
&= \sum_{X \subseteq E, |X|=0} (x-1)^{2-0} (y-1)^{0-0} + \sum_{X \subseteq E, |X|=1} (x-1)^{2-1} (y-1)^{1-1} + \\
&\quad \sum_{X \subseteq E, |X|=2} (x-1)^{2-2} (y-1)^{2-2} + \sum_{X \subseteq E, |X|=3} (x-1)^{2-2} (y-1)^{3-2} \\
&= (x-1)^2 + 3(x-1) + 3(1) + y-1 \\
&= x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 + 3 + y-1 = x^2 + x + y.
\end{aligned}$$

On remarque que $U_{3,2}$ est isomorphe à $\mathcal{M}(K_3)$.

Proposition 9.1.4 Pour tout matroïde \mathcal{M} ,

$$t(\mathcal{M}^*; x, y) = t(\mathcal{M}; y, x).$$

Une récurrence direct (en utilisant le Théorème 9.1.2 (iii)) établie le résultat suivant.

Proposition 9.1.5 Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux matroïdes sur l'ensembles E_1 et E_2 respectivement, avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Alors,

$$t(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2; x, y) = t(\mathcal{M}_1; x, y) t(\mathcal{M}_2; x, y).$$

La caractérisation suivante d'un T-G invariant est une généralisation immédiat du Théorème 9.1.2.

Théorème 9.1.6 Soit a et b deux éléments non-nuls d'un corps \mathbb{K} . Alors, Il existe une unique fonction $t' : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}[x, y]$ telle que

- (i) $t'(I; x, y) = x$ et $t'(B; x, y) = y$.
- (ii) (supression-contraction) si e est un élément d'un matroïde \mathcal{M} , et e n'est ni un isthme ni une boucle alors $t'(\mathcal{M}; x, y) = at'(\mathcal{M} \setminus e; x, y) + bt'(\mathcal{M}/e; x, y)$.
- (iii) Si e est un isthme ou une boucle du matroïde \mathcal{M} alors $t'(\mathcal{M}; x, y) = t'(\mathcal{M}(e); x, y) t'(\mathcal{M} \setminus e; x, y)$.

(iv) En plus, cette fonction t' est donnée par

$$t'(\mathcal{M}; x, y) = a^{|E|-r(E)} b^{r(E)} t(\mathcal{M}; x/b, y/a).$$

Proposition 9.1.7 Soit \mathcal{M} un matroïde. Alors,

- (i) $t(\mathcal{M}; 2, 2)$ compte le nombre de sous-ensembles de E .
- (ii) $t(\mathcal{M}; 1, 1)$ compte le nombre de bases de \mathcal{M} .
- (iii) $t(\mathcal{M}; 2, 1)$ compte le nombre d'indépendants de \mathcal{M} .
- (iv) $t(\mathcal{M}; 1, 2)$ compte le nombre d'ensembles générateurs de \mathcal{M} .

Démonstration. (i) D'après l'équation (9.8), on obtient $t(\mathcal{M}; 2, 2) = \sum_{X \subseteq E} 1^{r(E)-r(X)} 1^{n(X)} = 2^{|E|}$.

(ii) D'après l'équation (9.8), on obtient $t(\mathcal{M}; 1, 1) = \sum_{X \subseteq E} 0^{r(E)-r(X)} 0^{n(X)}$. Or $0^{r(E)-r(X)} 0^{n(X)}$ vaut 1

si $r(\mathcal{M}) - r(X) = 0$ et $|X| - r(X) = 0$ (zéro sinon). On a donc que $t(\mathcal{M}; 1, 1)$ correspond au nombre de sous-ensembles X de E tel que $r(\mathcal{M}) = r(X)$ (c'est-à-dire, X est indépendant) et $|X| = r(X)$ (c'est-à-dire, X est générateur). Autrement, les bases de \mathcal{M} .

On en déduit les parties (iii) et (iv) à partir de (ii).

□

On appelle *polynôme des indépendants* d'un matroïde \mathcal{M} la série génératrice

$$I(\mathcal{M}, z) = \sum_{i=1}^{|E|-1} f_i$$

où f_i désigne le nombre d'indépendants de taille i de \mathcal{M} .

Proposition 9.1.8 *Soit $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ un matroïde. Alors,*

$$I(\mathcal{M}, z) = z^{r(\mathcal{M})} t(\mathcal{M}; \frac{1}{z}, 1).$$

Démonstration.

$$t(\mathcal{M}; \frac{1}{z}, 1) = \sum_{X \subseteq E} -X \subseteq E \left(\frac{1}{z} + 1 - 1\right)^{r(\mathcal{M}) - r(X)} (1 - 1)^{|X| - r(X)} = \sum_{X \subseteq E} -X \subseteq E \left(\frac{1}{z}\right)^{r(\mathcal{M}) - r(X)} 0^{|X| - r(X)}.$$

Or $\left(\frac{1}{z}\right)^{r(\mathcal{M}) - r(X)} 0^{|X| - r(X)}$ n'est pas nul si et seulement si $|X| = r(X)$ (c'est-à-dire, X est indépendant). On a donc

$$t(\mathcal{M}; \frac{1}{z}, 1) = \sum_{X \subseteq E, X \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} \left(\frac{1}{z}\right)^{r(\mathcal{M}) - r(X)} = \left(\frac{1}{z}\right)^{r(\mathcal{M})} \sum_{X \subseteq E, X \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} z^{r(X)}.$$

On obtient,

$$I(\mathcal{M}, z) = z^{r(\mathcal{M})} \left(\frac{1}{z}\right)^{r(\mathcal{M})} \sum_{X \subseteq E, X \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} z^{r(X)} = \sum_{X \subseteq E, X \in \mathcal{I}(\mathcal{M})} z^{r(X)}.$$

□

9.2 Applications

9.3 Polynôme chromatique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif. Une λ -coloration de G est une application $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$. La coloration est dite *propre* si pour toute arête $\{u, v\} \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$. Soit $\chi(G, \lambda)$ le nombre de λ -colorations propres de G .

Théorème 9.3.1 *Soit $G = (V, E)$ et λ un entier positif. Alors,*

$$\chi(G, \lambda) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{\omega(G)}$$

où $\omega(G)$ désigne le nombre de composantes connexes du sous-graphe engandré par X .

Démonstration.

□

Le polynôme chromatique a été introduit par Birkhoff [1] comme un util pour attaquer le problème de quatre couleurs.

Théorème 9.3.2 Soit $G = (V, E)$ avec $\omega(G)$ composantes connexes. Alors,

$$\chi(G, \lambda) = \lambda^{\omega(G)} (-1)^{|V(G)| - \omega(G)} t(\mathcal{M}(G); 1 - \lambda, 0).$$

Démonstration. Soit $g(G, \lambda) = \lambda^{-\omega(G)} \chi(G, \lambda)$. A première vu cette fonction dépend de G , on montrera qu'en fait g dépend seulement de $\mathcal{M}(G)$, et s'on pose $g(\mathcal{M}(G), \lambda) = g(G, \lambda)$ alors cette fonction matroïde est bien un T-G invariant généralisé avec $a = 1$ et $b = -1$. Si $\mathcal{M}(G) = I$ ou B alors G est formé d'un isthme ou une boucle avec de sommets isolés. Alors, $g(B, \lambda) = 0$ et

$$g(I, \lambda) = \lambda^{\omega(G)} \chi(I, \lambda) = \lambda^{\omega(G)} \lambda(\lambda - 1) \lambda^{\omega(G)-1} = \lambda - 1$$

et donc g est bien définie si $|E(G)| = 1$. Supposons que g est une fonction matroïde bien définie si $|E(G)| < n$ et soit $|E(G)| = n$. Soit $e = \{u, v\} \in E(G)$ tel que e n'est ni un isthme ni une boucle. On peut partitioner l'ensemble de λ -colorations propres de $G \setminus e$ en deux classes, celles où u et v ont de couleurs différents et celles où u et v ont la même couleur. La première classe correspond à la classe de λ -colorations propre de G/e et la deuxième correspond à l'ensemble de λ -colorations propres de G . Evidemment G et G/e ont le même nombre de composantes connexes, en plus comme e n'est pas un isthme alors G et $G \setminus e$ ont le même nombre de composantes connexes aussi. Alors,

$$g(G \setminus e, \lambda) = g(G, \lambda) + g(G/e, \lambda)$$

et donc, d'après l'hypothèse d'induction, on a

$$g(G, \lambda) = g(\mathcal{M}(G) \setminus e, \lambda) + g(\mathcal{M}(G)/e, \lambda). \quad (9.9)$$

Maintenant, si e est une boucle de G , alors $g(G, \lambda) = g(B, \lambda) = 0$ et donc

$$g(G, \lambda) = g(B, \lambda) g(\mathcal{M}(G)/e, \lambda). \quad (9.10)$$

Finalement si $e = \{u, v\}$ est un isthme de G , alors le nombre de manières différents de λ -colorier G est égale au nombre de manières différents de λ -colorier $G \setminus e$ telles que u et v ont de couleurs différentes, ce qui est $\frac{\lambda-1}{\lambda} \chi(G \setminus e, \lambda)$ et donc

$$\chi(G, \lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda} \chi(G \setminus e, \lambda).$$

Comme $g(I, \lambda) = \lambda - 1$ et $\omega(G \setminus e) = \omega(G) + 1$ alors

$$\begin{aligned} g(G, \lambda) &= \lambda^{-\omega(G)} \chi(G, \lambda) \\ &= \lambda^{-\omega(G)} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} \right) \chi(G \setminus e, \lambda) \\ &= \left(\frac{g(I, \lambda)}{\lambda^{\omega(G)+1}} \right) \chi(G \setminus e, \lambda) \\ &= f(I, \lambda) g(G \setminus e, \lambda). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'induction, on obtient

$$g(G, \lambda) = g(I, \lambda)g(\mathcal{M}(G)/e, \lambda). \quad (9.11)$$

Les équations (9.9), (9.10) et (9.11) impliquent que g est bien définie autant que fonction matroïde et que f est un T-G invariant généralisé avec $a = 1$ et $b = -1$. Comme $g(I, \lambda) = \lambda - 1$ et $g(B, \lambda) = 0$ alors, en utilisant le Théorème 9.1.6 (iv) on obtient (avec $x = \lambda - 1$ et $y = 0$)

$$g(\mathcal{M}(G), \lambda) = (-1)^{|V(G)|-\omega(G)} t(\mathcal{M}(G); 1 - \lambda, 0)$$

et donc

$$\chi(G, \lambda) = \lambda^{\omega(G)} (-1)^{|V(G)|-\omega(G)} t(\mathcal{M}(G); 1 - \lambda, 0).$$

□

9.4 Orientations acycliques

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une *orientation* de G est une orientation des arêtes de G , c'est-à-dire, chaque arête a une extrémité *positive* et une extrémité *negative*. On dit qu'une orientation est *acyclique* (resp. *totalement acyclique*) si le graphe orienté n'a pas de cycle orienté (resp. si toute arête est contenu dans un cycle orienté).

Théorème 9.4.1 [21] Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soit $a(G)$ le nombre d'orientation acyclique de G . Alors,

$$a(G) = (-1)^{|V(G)|} \chi(G, -1) = t(\mathcal{M}(G); 2, 0).$$

Démonstration. Soit $e = \{u, v\} \in E(G)$ tel que e n'est ni un isthme ni une boucle. On partitionne l'ensemble A d'orientations acycliques de $G \setminus e$ en deux sous-ensembles : A_1 , qui consiste d'orientations acycliques où $G \setminus e$ admet un chemin (chaîne orientée) de u à v ou un chemin de v à u , et A_2 qui consiste d'orientations acycliques où $G \setminus e$ n'admet ni un chemin de u à v ni un chemin de v à u .

Remarquons qu'un membre de A_1 ne peut pas avoir un chemin de u à v et un chemin de v à u (au même temps) sinon on aurait un cycle orienté. Et donc, pour chaque orientation dans A_1 , il y a exactement une orientation de e qui peut être prolongée dans une orientation acyclique de G . Maintenant, pour chaque orientation dans A_2 les deux orientations de l'arête e se prolongent en deux orientations acycliques de G . Comme chaque orientation acyclique de G peut-être obtenu (de façon unique) à partir de l'un de membre de A en assignant une orientation à e , on obtient

$$a(G) = |A_1| + 2|A_2|$$

mais

$$a(G \setminus e) = |A_1| + |A_2| \text{ et } a(G/e) = |A_2|$$

on en déduit que si e n'est ni un isthme ni une boucle de G

$$a(G) = a(G \setminus e) + a(G/e).$$

Si e est un isthme de G on a $a(G) = 2a(G \setminus e)$ sauf si G consiste d'une seule arête, dans ce cas $a(G) = a(I) = 2$ (I désigne un graphe qui consiste d'un isthme).

Finalement, si e est une boucle alors G n'admet pas d'orientation acyclique, c'est-à-dire, $a(G) = a(B) = 0$ (B désigne un graphe qui consiste d'une boucle). Donc $a(G)$ est bien un T-G invariant et, d'après le Théorème 9.1.2 (iv), on a

$$a(G) = t(\mathcal{M}(G), a(I), a(B)) = t(\mathcal{M}(G); 2, 0).$$

Finalement, d'après le Théorème 9.3.2, on obtient

$$a(G) = (-1)^{|V(G)|} \chi(G, -1).$$

□

Si l'on définit $a^*(G)$ comme le nombre d'orientation totalement cyclique, on peut démontrer de la même manière que ci-dessus le résultat suivant.

Théorème 9.4.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Alors,*

$$a^*(G) = t(\mathcal{M}(G); 0, 2).$$

9.5 Flots

Soit G un groupe abélien (avec notation additive) et soit $H = (V, E)$ un graphe orienté avec $E(H) \neq \emptyset$. On rappelle qu'un G -flot dans H est une application $\phi : E(H) \rightarrow G$ telle que la somme des poids des arêtes entrant dans v est égale à la somme de poids des arêtes sortant de v pour tout sommet $v \in V(H)$. Un G -flot de H est partout non nul si $\phi(e) \neq 0$ pour tout $e \in E(H)$. Soit $f_H(G)$ le nombre de G -flots de H partout non nul.

Théorème 9.5.1 *Soit H un graphe avec $\omega(H)$ composantes connexes. Alors,*

$$f_H(G) = (-1)^{|E(H)| - |V(H)| + \omega(H)} t(\mathcal{M}(G); 0, 1 - |G|).$$

On montre d'abord que $f_H(G)$ est indépendant de l'orientation de H .

Lemme 9.5.2 *$f_H(G)$ ne dépend pas de l'orientation de H .*

Démonstration. On considère l'orientation obtenu à partir de l'orientation initial où l'orientation d'un arête e est changée. En remplaçant le poids de e par son inverse dans H on détermine une bijection entre les ensembles de H -flot de H avec son orientation initial et de H avec la nouvelle orientation et donc leurs polynômes $f_H(G)$ est le même. Le résultat découle en généralisant l'argument précédent.

□

Démonstration du Théorème 9.5.1. Soit $g(\mathcal{M}(H), G) = f_H(G)$. On montrera que g est bien définie autant que fonction matroïde et qu'il est un T-G invariant généralisé avec $a = -1$ et $b = 1$. Si $|E(H)| = 1$ alors g est bien définie car $g(I, G) = 0$ et $g(B, G) = |G| - 1$. On suppose que la fonction est bien définie si $|E(H)| < n$ et soit $|E(H)| = n$.

Soit $e = \{u, v\} \in E(G)$ tel que e n'est ni un isthème ni une boucle. On partitionne l'ensemble W de G -flots partout non nul de H/e en deux sous-ensembles W_1 et W_2 où W_1 consiste de G -flots partout non nul de H/e qui sont également de G -flots partout non nul de $H \setminus e$. Alors $W_1 = f(H \setminus e, G)$.

En plus on affirme que les membres de W_2 sont en bijection avec l'ensemble de G -flots partout non nul de H . En effet, un membre de W_2 n'est pas un G -fot partout non nul de H/e car dans chaque sommets u et v dans $H \setminus e$ la somme des poids des arêtes orientées vers u (ou v) n'est pas égale à la somme des poids des arêtes orientées sortant de u (ou v). Si le frot vers u est égal à n , alors le frot sortant de v est aussi égal à n et en orientant e de u vers v et en lui assignant le poids n , on obtient un G -fot partout non nul de H . Comme tout G -fot partout non nul de H est obtenu de cette manière de façon unique, on a $|W_2| = f_H(G)$ et donc $f_H(G) = f_H(G/e) - f_H(G \setminus e)$. D'après l'hypothèse d'induction on obtient

$$f_H(G) = g(\mathcal{M}(H/e), G) - g(\mathcal{M}(H \setminus e), G). \quad (9.12)$$

Si e est une boucle de H , alors pour tout G -fot partout non nul de $H \setminus e$ on pose le poids de e l'un des éléments non nul de G . On obtient un G -fot partout non nul de H et chaque frot de H est obtenu de cette manière. Alors, si e est une boucle de $M(H)$ on a $f_H(G) = g(L, G)f_{H \setminus e}(G)$ et donc, d'après l'hypothèse d'induction, on obtient

$$f_H(G) = g(L, G)g(\mathcal{M}(H \setminus e), G). \quad (9.13)$$

Si e est un isthme de H , alors $f_H(G) = 0 = g(B, G)$, et donc

$$f_H(G) = g(B, G)f(H \setminus e, G). \quad (9.14)$$

Les équations (9.12), (9.13) et (9.14) impliquent que f est bien définie autant que fonction matroïde et que f est un T-G invariant généralisé avec $a = -1$ et $b = 1$. Comme $f(I, G) = 0$ et $f(B, H) = 1 - |G|$ alors, en utilisant Théorème 9.1.6 (iv) on obtient (avec $x = 0$ et $y = 1 - |G|$)

$$f(\mathcal{M}(H), G) = (-1)^{|E(H)| - |V(H)| + \omega(H)} t(\mathcal{M}(H); 0, 1 - |G|).$$

□

Une conséquence du théorème précédent est que $f_H(G)$ ne dépend pas du groupe abélien particulier G mais seulement de son ordre. Donc si $|G| = n$, on a $f_H(G) = f_H(\mathbb{Z}_n)$. On a également que $f_H(\lambda)$ est un polynôme en λ , appelé *polynôme de frot de H*.

9.6 Lacets

Un *lacet* L avec $c(L)$ composantes dans la sphère S^3 est une sub-varieté lise qui consiste de $c(L)$ courbes simples fermés sans intersections entre eux. Un *nœud* est un lacet avec une composante. Deux lacets L_1 et L_2 sont *isotopes* s'il existe une homotopie $h_t : S^3 \rightarrow S^3$, $(0 \leq t \leq 1)$ telle que $h_0 = L_1$, chaque h_t est un homomorphisme et $h_1 = L_2$. On se restreint au lacet *tame* et donc on suppose que la projection de $\pi(L)$ de L dans \mathbb{R}^2 est un graphe fini 4-régulier. Un *diagramme* $D(L)$ d'un lacet L est obtenu à partir de $\pi(L)$ en précisant les passages dessous/dessus sur chaque intersection (appelée *croisement*).

Un résultat fondamental de Reidemeister [17] assert :

Théorème 9.6.1 [17] *Deux lacets L_1 et L_2 sont isotopes si et seulement si le diagramme de L_1 peut être transformé en le diagramme de L_2 par une suite finie de mouvements (R1), (R2), (R3) et leurs inverses.*

Ces mouvements, connus comme les *mouvements de Reidemeister* sont appliqués localement (le reste du diagramme ne change pas). Un nœud est *trivial* s'il admet un diagramme sans croisement. L'un des problèmes majeurs dans la théorie des nœuds est de décider si deux lacets sont isotopes ou pas, en particulier, de donner une méthode efficace pour détecter si un nœud est trivial.

9.6.1 Interprétation graphique d'un lacet

Un diagramme $D(L)$ peut être considéré comme un graphe D' si les passages dessous/dessus sur chaque croisement sont ignorés. On a que D' est un graphe planaire 4-régulier. En plus, D' est eulérien et alors ses faces peuvent être 2-colorables (on utilise les couleurs noire et blanche et on colore la face extérieure en blanc). Ainsi, chaque sommet de D' est incident à 4 faces alternativement colorées avec les deux couleurs autour du sommet.

On considère le graphe $S(D')$ construit à partir de D' comme suit : les sommets de $S(D')$ correspondent aux faces colorées en noires et deux sommets sont adjacents si les faces correspondantes partagent un sommet. En plus, on va associer un signe à chaque arête de $S(D')$ selon la règle *gauche-dessus-droite* vue à partir des faces noires autour d'un croisement. On a ainsi que $S(D')$ est un graphe planaire avec ses arêtes signées (correspondant à un croisement de D).

Conversement, étant donné un graphe planaire (arête signée) G , on peut l'associer, de manière canonique, un diagramme d'un lacet D tel que $S(D') = G$ (G est appelé *graphe de Tait*). La construction est simple : on considère le graphe *medial* $m(G)$ de G ($m(G)$ est planaire 4-régulier). En effet, D' sera le diagramme induit par $m(G)$ où le passage dessous et dessus de chaque croisement est déterminé par le signe de l'arête appropriée de G .

Un lacet est dit *alterné* s'il admet un diagramme tel que les croisements sont alternés (dessous/dessus) lorsqu'on parcourt le lacet. On remarque que si un lacet $D(L)$ est alterné alors toutes les arêtes de $S(D)$ ont le même signe.

9.6.2 Le Crochet de Kauffman et le polynôme de Jones

Un *polynôme crochet* $\langle D \rangle$ d'un diagramme D est obtenu en utilisant les trois règles suivantes :

(K1)

(K2)

(K3)

Si l'on appliquait la règle (K3) à chaque de n croisements on obtient que $\langle D \rangle$ se décompose en 2^n sommes (avec poids en A ou en B) et chaque somme correspond à une *Résolution de système* particulier.

On va démontrer que $\langle D \rangle$ est un invariant de lacets. On commence par regarder un petit exemple où le graphe de Tait est soit une boucle ou un isthme.

D'après les règles ci-dessus on a

Analogiquement, pour la boucle, on obtient ,

Regardons et analysons le mouvement de Reidemeister (R3)

Pour que soit satisfait il faut donc que $AB = 1$ et $A^2 + B^2 + dAB = 0$, c'est-à-dire, $B = A^{-1}$ et $d = -(A^2 + A^{-2})$. La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 9.6.2 *Le polynôme $\langle D \rangle$ est invariant sur les deux cas de (R2) et (R3) si $B = A^{-1}$ et $d = -(A^2 + A^{-2})$.*

Exemple 9.6.3

On étudie maintenant les deux mouvements (R1).

et donc $\langle D \rangle$ n'est pas invariant sur (R1). Pour faire en sorte que $\langle D \rangle$ soit un invariant on considère de lacets et nœuds *orientés*. Pour chaque composante d'un lacet L on choisit une orientation de parcours. On dit que le croisement a poids +1 ou -1 d'après la convention suivante :

Si L est un nœud alors la définition est indépendant de l'orientation. En effet, avec l'autre orientation on retrouve le même signe sur chaque croisement. Pour un lacet, l'orientation doit être fixée car les signes peuvent changer les flèches appartenant à deux composantes différentes. Le *writhe* $\omega(D)$ est la somme de poids sur tous les croisements de D .

Théorème 9.6.4 *Le polynôme $f_D(A) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$ est un invariant de diagrammes orientés. On peut donc définir de façon unique $f_L(A) = f_D(A)$ pour tout diagramme D d'un lacet orienté L .*

Démonstration. Clairement $F_O(A) = 1$ pour les nœuds triviaux. On peut facilement vérifier que $\omega(D)$ ne change pas sur les mouvements (R2), (R3) et donc, d'après la Proposition 9.6.2, $f_D(A)$ est un invariant sur les mouvements (R2) et (R3). Pour (R1), on remarque que n'importe comment la courbe D' (resp. la courbe D'') est orientée on obtient un poids +1 (resp. un poids -1). Alors,

$$\begin{aligned} f_{D'}(A) &= (-A^3)^{-\omega(D')} \langle D' \rangle = (-A^3)^{-\omega(D)+1} \langle D' \rangle \\ &= (-A^3)^{-\omega(A)} (-A^3) \langle D' \rangle = (-A^3)^{-\omega(A)} (-A^3) (-A^{-3}) \langle D \rangle = f_D(A), \end{aligned}$$

et similairement, $f_{D''}(A) = f_D(A)$.

□

Le très célèbre *polynôme de Jones* $V_L(t)$ (originairement défini avec une approche complètement différente) est obtenu à partir de $f_L(A)$ en remplaçant $A = t^{-1/4}$. On a

$$V_L(t) = (-1)^{\omega(D)} t^{\frac{3\omega(D)}{4}} \langle D \rangle_{A=t^{-1/4}} \quad (9.15)$$

pour tout diagramme D de L .

L'*image miroir* \bar{D} d'un diagramme D est obtenu en remplaçant les passages dessous/dessus et inverser les passages dessus/dessous pour chaque croisement.

Exemple 9.6.5 *Le miroir d'un Trefle-droite T_d est un Trefle-gauche T_g .*

En regardant la récurrence du polynôme crochet on observe que $\langle \bar{D} \rangle$ peut-être obtenu à partir de $\langle D \rangle$ en remplaçant $A = A^{-1}$, c'est-à-dire, $\langle \bar{D} \rangle = \langle D \rangle_{A=A^{-1}}$. En choisissant la même orientation pour toutes les composantes, les poids dans l'image miroir sont échangés et donc $\omega(\bar{D}) = -\omega(D)$. D'où $(-A^3)^{-\omega(\bar{D})} = (-A^{-3})^{\omega(D)}$, ce qui montre le résultat suivant.

Corollaire 9.6.6 *Soit \bar{L} l'image miroir d'un lacet orienté L . Alors,*

$$f_{\bar{L}}(A) = f_L(A^{-1}) \text{ et } V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1}).$$

9.6.3 Diagrammes alternés

On rappelle qu'un entrelacement $D(L)$ est alterné si toutes les arêtes de $S(D)$ ont le même signe. Soit G le graphe de Tait induit par un diagramme signé D' . Si la récurrence (K3) est appliquée au $\langle D \rangle$ on obtient, en termes de G

$$\langle G \rangle = A^{-1} \langle G \setminus e \rangle + A \langle G/e \rangle \quad (9.16)$$

Donc, s'on pose $h(G) = \langle D \rangle$ on a

$$h(I) = -A^{-3} \quad (9.17)$$

et

$$h(B) = -A^3. \quad (9.18)$$

Théorème 9.6.7 Soit D un diagramme alterné positif et soit $G = (V, E)$ le graphe de Tait associé à D' . Alors,

$$\langle D \rangle = A^{2|V|-|E|-2} t(\mathcal{M}(G); -A^{-4}, -A^4)$$

et

$$\langle \bar{D} \rangle = A^{-2|V|+|E|+2} t(\mathcal{M}(G); -A^4, -A^{-4}).$$

Démonstration. Les équations (9.16), (9.17) et (9.18) impliquent que h est bien définie autant que fonction matroïde et que h est un T-G invariant généralisé avec $a = A^{-1}$ et $b = A$. Comme $h(I) = -A^{-3}$ et $h(B) = -A^3$, le résultat découle du Théorème 9.1.6 (iv).

□

D'après la formule d'Euler on a $2|V| - |E| - 2 = |V| - |F|$ et donc

$$\langle D \rangle = A^{|V|-|F|} t(\mathcal{M}(G); -A^{-4}, -A^4) \quad (9.19)$$

et

$$\langle \bar{D} \rangle = A^{|V^*|+|F^*|} t(\mathcal{M}(G^*); -A^4, -A^{-4}). \quad (9.20)$$

où G^* est le graphe dual de G . Autrement dit, l'images miroirs correspondent à la dualité entre G et G^* de graphes planaires connexes.

Exemple 9.6.8 Calculons $f_{T_d}(A)$ et $V_{T_d}(t)$. On a que $S(T_d) = K_3$ et, d'après l'Exercice 9.1.3, $T(\mathcal{M}(K_3); x, y) = x^2 + x + y$. Alors

$$\begin{aligned} \langle D(T_d) \rangle &= A^{2|V|-|E|-2} t(\mathcal{M}(G); -A^{-4}, -A^4) \\ &= At(\mathcal{M}(K_3); -A^{-4}, -A^4) \\ &= A(A^8 - A^{-4} - A^4) \\ &= A^{-7} - A^{-3} - A^5. \end{aligned}$$

En plus, $\omega(D) = 3$ et donc

$$f_{T_d}(A) = -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} \text{ et } V_{T_d}(t) = -t^4 + t^3 + t.$$

Pour T_g on obtient

$$f_{T_g}(A) = -A^{16} + A^{12} + A^4 \text{ et } V_{T_d}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}.$$

et donc T_d et T_g ne sont pas isotopes et tous les deux sont de noeuds non triviaux.

Soit $G = (V, E)$ le graphe de Tait induit par un diagramme alterné D . Comme les croisements de D correspondent aux arêtes de G , alors si l'on désigne par E_+ et E_- les sommets avec signes positifs et négatifs respectivement on a

$$|E| = |E_+| + |E_-| \text{ et } \omega(D) = |E_+| - |E_-|$$

ce qu'implique que $|E| - \omega(D) \equiv 0 \pmod{2}$, c'est-à-dire $(-1)^{\omega(D)} = (-1)^{|E|}$. En utilisant (9.15), (9.19) et (9.20) on obtient le résultat suivant.

Corollaire 9.6.9 Soit D un diagramme alterné positif d'un lacet L et soit $G = (V, E)$ le graphe de Tait associé à D . Alors,

$$f_L(A) = (-1)^{|E|} A^{|V|-|F|-3\omega(D)} t(\mathcal{M}(G); -A^{-4}, -A^4)$$

et

$$V_L(t) = (-1)^{|E|} t^{\frac{|F|-|V|}{4} + \frac{3\omega(D)}{4}} t(\mathcal{M}(G); -t, -t^{-1}).$$

Prenons $t = -1$ dans le polynôme de Jones d'un noeud alterné positif K . Le Corollaire 9.6.9 donne

$$(-1)^{|E| + \frac{|F|-|V|}{4} + \frac{3\omega(D)}{4}} = (-1)^{\frac{5|E|}{4} + \frac{3\omega(D)}{4} + \frac{|V|-1}{2}}$$

et donc, l'exposant est

$$2|E_+| + \frac{|E_-| - |V| + 1}{2}.$$

On peut vérifier que $|E_-| - |V| + 1$ est toujours pair, en obtenant

$$V_L(-1) = (-1)^{\frac{|E_-| - |V| + 1}{2}} t(\mathcal{M}(G); 1, 1)$$

ce qui mène à

$$|V_K(-1)| = \text{nombre d'arbres couvrants de } G.$$

9.6.4 Exercices

Exercice 9.48 Calculer $t(\mathcal{M}; x, y)$ quand \mathcal{M} consiste de m boucles et quand \mathcal{M} consiste de n isthmes.

Exercice 9.49 Est-il vrai que si $t(\mathcal{M}; x, y) = t(\mathcal{M}'; x, y)$ alors \mathcal{M} est isomorphe à \mathcal{M}' ?

Exercice 9.50 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Montrer par récurrence sur $|E(G)|$ que $\chi(G, \lambda)$ est un polynôme dans k de degré λ avec des coefficients entiers alternants et qui commence avec 1 et $-|E(G)|$.

Exercice 9.51 Est-il vrai que si $t(\mathcal{M}; x, y) = t(\mathcal{M}'; x, y)$ alors m est isomorphe à \mathcal{M}' ?

Bibliographie

- [1] G.D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. Math.*, **14**(2) (1912-13), 42-46.
- [2] R.E. Bixby et W.H. Cunningham, Converting linear programs to network programs, *Math. of Operation Research*, **5**, 321-357.
- [3] R.E. Bixby et W.H. Cunningham, Matroids, graphs and 3-connectivity, in *Graph Theory and Related Topics*, (J.A. Bondy and U.S.R. murty, eds.), Academic Press New York, (1981), 91-103.
- [4] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent sets, . *Res. Nat. Bur. STAndards Sect. B*, **69 B** (1965), 67-72.
- [5] J. Edmonds, Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams, . *Res. Nat. Bur. STAndards Sect. B*, **69 B** (1965), 73-77.
- [6] E. Ergeváry, On combinatorial properties of matrices, *Math. Lapok*, **38** (1931), 16-28.
- [7] I. Heller, On linear systems with integral valued solutions, *Pacific J. Math.*, (1957), 1351-1364.
- [8] A. Horn, A characterization of unions of linearly independent sets, *J. London Math. Soc.* , **30**, (1955), 494-496.
- [9] F. Jaeger, Flows and generalized coloring theorems in graphs, *J. Comb. Th. Ser. B*, **26** (1979), 205-216.
- [10] D. König, Graphen und Matrizen, *Math. Lapok*, **38** (1931), 116-119.
- [11] S. Kundu, Bounds on the number of disjoint spanning trees, *J. Comb. TH. Ser. B*, **17** (1974), 199-203.
- [12] A. Lehman, A solution of the Shannon switching game, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **12** (1964), 687-725.
- [13] L. Low, J. Pitman and A. Wolff, Simultaneous diagonal congruences, *J. Numb. Th.*, **29** (1988), 31-59.
- [14] C. St. J.A. Nash-Williams, Edge disjoint spanning trees of finite graphs, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 445-450.
- [15] C. St. J.A. Nash-Williams, An application of matroids to graph theory, in *Theory of graphs*, (Int. Sympos. Rome), Dunod Paris, (1966), 263-265.
- [16] A. Recski, *Matroid Theory and its Applications*, Springer 1989, 531 p.
- [17] K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **II** (1936), 102-109.
- [18] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford Science Publications 1992, 532 p.

- [19] P.D. Seymour, Nowhere-zero flows, in R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, Elsevier, Amsterdam (1995), 289-299.
- [20] P.D. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J. Combin. Theory Ser. B* **30** (1981)(2), 130-135.
- [21] R.P. Stanley, Acyclic orientations of graphs, *Disc. Math.*, **5** (1973), 171-178.
- [22] W.T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 80-91.
- [23] W.T. Tutte, On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 221-230.
- [24] N. White (éd.), *Theory of Matroids*, Cambridge University Press 1986, 316 p.
- [25] N. White (éd.), *Combinatorial Geometries*, Cambridge Univ. Press 1987, 312 p.
- [26] N. White (éd.), *Matroid Applications*, Cambridge University Press 1992, 363 p.