

# Théorie des matroïdes

## Nouvelles tendances et interactions

M. Las Vergnas

*C.N.R.S.*

*Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)*

*Combinatoire et Optimisation*

*4 Place Jussieu, 75005 Paris*

&

J.L. Ramírez Alfonsín

*Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier*

*Université Montpellier 2*

*Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier*

2 octobre 2012



# Chapitre 1

## Introduction : exemples fondamentaux

### 1.1 Introduction

Le mot *matroïde* apparaît pour la première fois dans un article fondateur publié par H. Whitney en 1935. Dans cet article la structure de matroïde est introduite comme abstraction ensembliste des relations de dépendance entre les vecteurs colonnes d'une matrice, d'où le suffixe 'oïde' indiquant qu'il s'agit d'une structure proche d'une matrice. A la même époque, partant d'un point de vue différent - la notion de fermeture géométrique - S. MacLane parlait de  $\phi$ -*espace*. Le mot 'matroïde', à l'euphonie quelquefois contestée, fait référence à l'aspect algébrique de la structure. La première monographie sur les matroïdes, 'Combinatorial geometries', publié H. Crapo et G-C. Rota en 1970, met l'accent sur l'aspect géométrique des matroïdes, envisagés comme généralisation des géométries projectives finies. Citons également le terme *espace d'indépendance*, utilisé dans le livre 'Transversal Theory' de L. Mirsky publié en 1971. Les tentatives pour modifier la terminologie de Whitney n'ont eu qu'un succès relatif et aujourd'hui le terme 'matroïde' paraît définitivement établi.

La diversité de ces termes reflète la diversité des objets pouvant être utilisés pour définir un matroïde. Ainsi les *indépendants*, les *bases*, les *circuits*, la *fonction rang*, la *fonction fermeture*, les *fermés*, les *hyperplans*, etc... d'un matroïde permettent chacun de le caractériser. Chacun de ces objets donnant lieu à plusieurs axiomatiques, le chapitre des fondements de la théorie des matroïdes est bien fourni.

La structure de matroïde peut être obtenue en retenant les principales propriétés ensemblistes, autrement dit combinatoires, de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Cependant les propriétés définissant les matroïdes ne caractérisent pas les espaces vectoriels : les matroïdes constituent une classe d'objets beaucoup plus vaste. Ainsi d'autres exemples naturels de matroïdes peuvent être construits à partir des graphes, des groupes, des corps, des ensembles ordonnés, etc. donnant lieu à une grande variété d'applications. La structure de matroïde a permis d'établir de très nombreux résultats dans ces divers domaines, et de plus, souvent, elle a unifié les preuves en les rendant à la fois plus simples et plus générales. La théorie des matroïdes est aujourd'hui un des outils fondamentaux de la combinatoire

structurelle.

Du point de vue algébrique, les matroïdes ne distinguent dans les relations de dépendances linéaires que deux types de coefficients 0 et  $\neq 0$ . Du point de vue géométrique les matroïdes axiomatisent les relations d'incidence dans les configurations de points : colinéarité, coplanarité, etc.

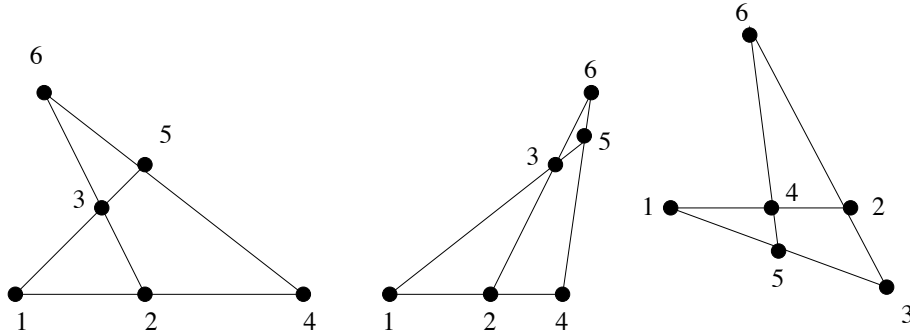


FIGURE 1.1 – Exemple

A titre d'exemple on vérifiera que les incidences des trois configurations de la Figure 1.1 sont les mêmes : les matroïdes de ces trois configurations sont identiques.

Remarquons par contre que si les positions relatives sont les mêmes dans les configurations (a) et (b) elles sont par contre sont différentes dans (c). Une théorie plus fine que celle des matroïdes, la théorie des *matroïdes orientés*, introduite au début des années 1970 permet de rendre compte de ces différences. La théorie des matroïdes orientés a des applications à la convexité, aux polyèdres, en programmation linéaire.

Dans les années 1980 diverses structures généralisant les matroïdes et matroïdes orientés sont apparues. Citons entre autres les *greedoïdes*, les  $\Delta$ -*matroïdes*, les *matroïdes de Coxeter*.

## 1.2 Exemples fondamentaux

Il existe de nombreux exemples naturels de matroïdes. On peut ainsi construire des matroïdes à partir de graphes, d'espaces vectoriels, de dépendance algébrique, de groupes, d'ensembles ordonnés, etc. Les exemples fondamentaux étudiés par Whitney sont les *matroïdes de cycles* et de *cocycles* de graphes, et de *dépendances linéaires* dans les espaces vectoriels. La terminologie des matroïdes provient de ces deux exemples. *Indépendants*, *bases*, *rang* (= dimension), *fermeture*, *fermés* (= sous-espaces), *hyperplans* sont des termes d'algèbre linéaire, *circuits*, *cocircuits* des termes de théorie des graphes.

Dans cette première approche nous définirons les matroïdes par leurs circuits. Les circuits d'un matroïde  $M = (E, \mathcal{C})$  sur un ensemble d'*éléments*  $E$  sont des parties de  $E$ . Nous

verrons au Chapitre 2 les propriétés caractérisant l'ensemble  $\mathcal{C}$  des circuits des matroïdes. Dans la présente introduction nous décrirons quelques exemples classiques.

### 1.2.1 Matroïdes des cycles d'un graphe

Soit  $G = (S, E)$  un graphe (orienté ou non). Les éléments du *matroïde*  $\mathbf{C}(G)$  des cycles de  $G$  sont les arêtes de  $G$ .

**Exemple 1.2.1** Les circuits de  $\mathbf{C}(G)$  sont les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires<sup>1</sup> de  $G$ . Un matroïde de cycles de graphe est dit *graphique*.

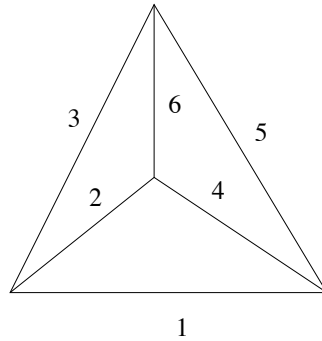


FIGURE 1.2 – Graphe complet à 4 sommets.

Les circuits du matroïde des cycles du graphe complet  $K_4$  (illustré dans la Figure 1.2) est

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

Les circuits sont écrits dans l'ordre lexicographique des éléments. Nous désignerons ce matroïde par  $M(K_4)$ .

### 1.2.2 Matroïde des cocycles d'un graphe

Soit  $G = (E, S)$  un graphe (orienté ou non). Les éléments du *matroïde*  $\mathbf{B}(G)$  des cocycles de  $G$  sont les arêtes de  $G$ . Les circuits de  $\mathbf{B}(G)$  sont les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires<sup>2</sup> de  $G$ . Un matroïde de cocycles de graphe est dit *cographique*.

**Exemple 1.2.2** Nous noterons  $M(K_4)^*$  le matroïde des cocycles du graphe  $K_4$ . Les circuits de  $M(K_4)^*$  (voir Exemple 1.2.1) sont les suivants :

1. Un *cycle élémentaire* de  $G$  est un parcours fermé  $(x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{\ell-1}, e_{\ell}, x_{\ell} = x_0)$   $x_i \in S$   $e_i \in E$  dont les sommets (et donc les arêtes) sont tous distincts.

2. Dans un graphe connexe  $G = (S, E)$  un *cocycle élémentaire* est l'ensemble des arêtes joignant  $A$  et  $B$  pour une partition  $S = A + B$  de l'ensemble des sommets telle que les deux sous-graphes de  $G$  sur  $A$  et  $B$  soient connexes.

$$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

Nous montrerons au Chapitre 2 que les circuits de  $M(K_4)^*$  peuvent s'obtenir combinatoirement à partir des circuits de  $M(K_4)$  : premier exemple d'une dualité faisant passer d'un matroïde  $M$  à son dual  $M^*$ . Les circuits de  $M^*$  sont également appelés *cocircuits* de  $M$ .

On peut remarquer que la bijection  $i \rightarrow 7 - i$  fait passer des cocircuits de  $M(K_4)$  à ses circuits. Cette particularité provient de ce que le graphe  $K_4$  planaire est isomorphe à son dual planaire. En effet nous verrons au Chapitre 4 que le matroïde des cocycles d'un graphe planaire  $G$  est isomorphe au matroïde des cycles de son dual planaire  $G^*$ .

### 1.2.3 Matroïde vectoriels

Soient  $\mathbb{F}$  un corps,  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}$ ,  $E$  un ensemble et  $(v_e)_{e \in E}$  une famille de vecteurs de  $V$ . Le *matroïde des dépendances linéaires* sur  $\mathbb{F}$  de la famille de vecteurs est le matroïde sur  $E$  dont les circuits sont les parties  $C \subset E$  minimales pour l'inclusion telles que les vecteurs  $v_e$   $e \in C$  soient *linéairement dépendants* sur  $\mathbb{F}$ .

**Exemple 1.2.3** *Considérons les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  donnés par les colonnes de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

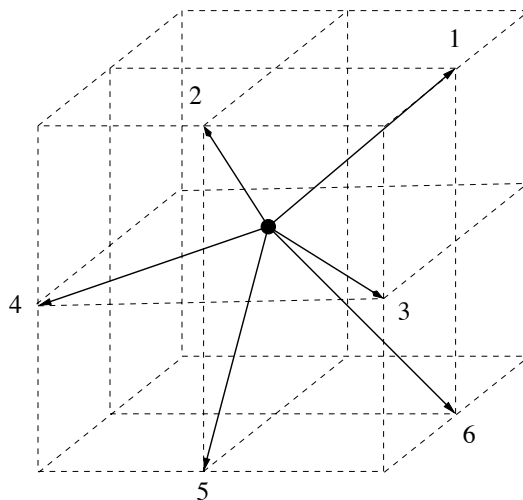
*On vérifie que le matroïde des dépendances linéaires sur  $\mathbb{R}$  des vecteurs colonnes est le matroïde  $M(K_4)$  (voir Figure 1.3).*

Un matroïde de dépendance linéaire est dit *linéaire*. Un matroïde est dit *binaire* s'il est vectoriel sur le corps fini à 2 éléments  $GF(2)$ , *ternaire* s'il est vectoriel sur  $GF(3)$ . Un matroïde vectoriel sur tout corps est dit *régulier*. Les matroïdes graphiques et cographiques sont réguliers.

### 1.2.4 Note sur la dépendance affine

Soient  $\mathbb{F}$  un corps,  $E$  un ensemble et  $(p_e)_{e \in E}$  une configuration de points dans un espace  $\mathbb{F}^d$ . (Rappel) Des points  $p_i$   $i = 1, 2, \dots, k$  sont dit *affinement dépendants* s'il existe des coefficients  $\lambda_i$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = 0$  et  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ .

Le *matroïde des dépendances affines* sur  $\mathbb{F}$  de la configuration de points est le matroïde sur  $E$  dont les circuits sont les parties  $C \subset E$  minimales pour l'inclusion telles que les points  $p_e$   $e \in C$  soient *affinement dépendants* sur  $\mathbb{F}$ .

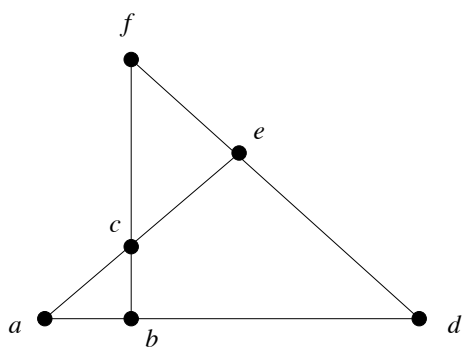
FIGURE 1.3 – Représentation géométrique de  $M(K_4)$ .

Les matroïdes de dépendances affines sont identiques aux matroïdes de dépendances linéaires (voir Chapitre ??). Ils présentent cependant l'intérêt de ramener les petits exemples de matroïdes vectoriels en dimension 3 resp. 4 à des configurations de points en dimension 2 resp. 3 plus faciles à lire. Ainsi dans le cas de  $K_4$  la Figure 1.4 fournit une interprétation géométrique très simple des cocircuits. On vérifiera que les cocircuits de  $K_4$  sont exactement les complémentaires des droites définies par les points de la configuration de la Figure 4. Cette observation illustre un résultat général : les cocircuits d'un matroïde sont les complémentaires de ses hyperplans (voir Chapitre 2).

**Exemple 1.2.4** *Considérons les points de  $\mathbb{R}^2$  donnés par les colonnes de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

*On vérifie que le matroïde des dépendances affines sur  $\mathbb{R}$  des points de la configuration est le matroïde  $M(K_4)$ .*

FIGURE 1.4 – Représentation affine de  $M(K_4)$ .



# Chapitre 2

## Axiomatiques des matroïdes

### 2.1 Indépendants

Un *matroïde*  $\mathcal{M}$  est une paire ordonnée  $(E, \mathcal{I})$  où  $E$  est un ensemble fini ( $E = \{1, \dots, n\}$ ) et  $\mathcal{I}$  est une famille de sous-ensembles de  $E$  qui vérifie les conditions suivantes :

(I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ,

(I2) Si  $I_1 \in \mathcal{I}$  et  $I_2 \subset I_1$  alors  $I_2 \in \mathcal{I}$ ,

(I3) (*propriété d'augmentation*) Si  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  et  $|I_1| < |I_2|$  alors  $\exists e \in I_2 \setminus I_1$  tel que  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

Les membres de  $\mathcal{I}$  sont appelés les *indépendants* de  $\mathcal{M}$ . Un sous-ensemble de  $E$  qui n'est pas dans  $\mathcal{I}$  est appelé *dépendant*.

La démonstration du résultat suivant est immédiate.

**Proposition 2.1.1** *(I1) + (I2) + (I3) est équivalent à (I1) + (I2) + (I3') où*

*(I3') pour tout  $A \subset E$  les ensembles de  $\mathcal{I}$  contenus dans  $A$  et maximaux pour l'inclusion avec cette propriété ont tous même cardinal.*

La Proposition 2.1.1 s'exprime très simplement dans le langage de la Topologie Algébrique : l'ensemble des indépendants d'un matroïde est un complexe simplicial dont toutes les restrictions sont pures.

**Théorème 2.1.2** [Whitney 1935] *Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps  $\mathbb{F}$ . Soit  $\mathcal{I}$  la famille des sous-ensembles  $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\} = E$  tel que l'ensemble des colonnes  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{F}$ . Alors,  $(E, \mathcal{I})$  est un matroïde.*

*Démonstration.* Les propriétés (I1) et (I2) sont trivialement vérifiés. On montre la propriété (I3). Soient  $I'_1, I'_2 \in \mathcal{I}$  tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons  $I_1$  et  $I_2$ , sont linéairement indépendants et avec  $|I_1| < |I_2|$ . On raisonne par l'absurde, on suppose que

$I_1 \cup e$  est linéairement dépendant pour tout  $e \in I_2 \setminus I_1$ . Soit  $W$  l'espace engendré par  $I_1$  et  $I_2$ . D'une part,  $\dim(W) \geq |I_2|$  et d'autre part  $W$  est contenu dans l'espace engendré par  $I_1$ .

$$|I_2| \leq \dim(W) \leq |I_1| < |I_2|$$

ce qui est une contradiction.

□

On dit que deux matroïdes  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont *isomorphes* (noté par  $M_1 \equiv M_2$ ) si et seulement s'il existe une bijection  $\varphi : E(\mathcal{M}_1) \rightarrow E(\mathcal{M}_2)$  telle que pour tout  $X \subseteq E(\mathcal{M}_1)$ ,  $X$  est indépendant dans  $\mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \varphi(X)$  est indépendant dans  $\mathcal{M}_2$ . Un matroïde qui est isomorphe à un matroïde obtenu à partir d'une matrice sur un corps  $\mathbb{F}$  est appelé *représentable* ou *vectoriel* sur  $\mathbb{F}$ .

## 2.2 Circuits

Un sous-ensemble  $X \subseteq E$  est dit *dépendant minimal* si tout sous-ensemble propre de  $X$  est indépendant. Un sous-ensemble dépendant minimal d'un matroïde  $\mathcal{M}$  est appelé *circuit* de  $\mathcal{M}$ . On dénote par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des circuits d'un matroïde.

On remarque que  $\mathcal{I}$  peut être déterminé par  $\mathcal{C}$  (les membres de  $\mathcal{I}$  sont les sous ensembles de  $E$  qui ne contiennent pas un membre de  $\mathcal{C}$ ).

**Proposition 2.2.1** *La famille  $\mathcal{I}$  peut être déterminée par  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Les membres de  $\mathcal{I}$  sont tous les sous ensembles de  $E$  qui ne contiennent pas un membre de  $\mathcal{C}$ .

□

**Proposition 2.2.2** *L'ensemble de circuits  $\mathcal{C}$  d'un matroïde vérifie les conditions suivantes :*

- (C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ,
- (C2)  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  et  $C_1 \subseteq C_2$  alors  $C_1 = C_2$ ,
- (C3) (propriété d'élimination) Si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ,  $C_1 \neq C_2$  et  $e \in C_1 \cap C_2$  alors il existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tel que  $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$ .

*Démonstration.* Les propriétés (C1) et (C2) trivialement vérifiées. On montre la propriété (C3) par contradiction. On suppose que  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  ne contienne pas de circuit. On a que  $C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$ , et donc il existe  $f \in C_2 \setminus C_1$ . Comme  $C_2$  est un ensemble dépendant minimal, on a  $C_2 \setminus \{f\} \in \mathcal{I}$ . Soit  $X \subseteq C_1 \cup C_2$  tel que  $X$  soit indépendant est maximal et  $C_2 \setminus \{f\} \subset X$ . On remarque que  $f \notin X$  (sinon, on aurait  $C_2 \subset X$ ) et de plus il existe  $g \in C_1$  tel que  $g \notin X$  (sinon, on aurait  $C_1 \subset X$ ). Et on a  $g \neq f$  car  $g \in C_1$  et  $f \notin C_1$ . Alors,  $|X| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|$ , et  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  est un indépendant (car  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  ne contient pas de circuit). Soit  $X_1 = X$ ,  $X_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ , avec  $|X_1| < |X_2|$ . Alors, d'après la propriété (I3) il existe  $h \in X_2 \setminus X_1 = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \setminus X$  tel que  $X_1 \cup \{h\} = X \cup \{h\} \in \mathcal{I}$  ce qui est une contradiction avec le fait que  $X$  est maximal.

□

**Théorème 2.2.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une famille des sous-ensembles de  $E$ . Alors,  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur  $E$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  vérifie les propriétés (C1), (C2) et (C3).*

*Démonstration.* La nécessité découle de la Proposition 2.2.2.

(Suffisance) on va montrer la propriété (I3) (les propriétés (I1), (I2) sont évidentes). Soit  $X, Y \in \mathcal{I}$  avec  $|X| < |Y|$ . On montre la propriété (I3) par récurrence sur  $|X \cup Y|$ . Si  $X \cup Y \in \mathcal{I}$  alors la propriété est vérifiée. Sinon, il existe un circuit  $C \subset X \cup Y$ . Supposons que  $C$  est choisi tel que  $|C \setminus Y|$  est minimal. Comme  $X \in \mathcal{I}$  (resp.  $Y \in \mathcal{I}$ ) alors  $C \setminus X \neq \emptyset$  (resp.  $C \setminus Y \neq \emptyset$ ) et donc soit  $e \in C \setminus X$  (resp.  $f \in C \setminus Y$ ). Soit  $Y' = Y \setminus e \setminus f$ . On affirme que  $Y'$  est indépendant. En effet, sinon, il existerait un circuit  $Z \subset Y'$  avec  $f \in Z$  car  $Y' \setminus f = Y' \setminus e$  est indépendant et donc comme  $f \in Z \cap C$ , d'après (C3) il existe un circuit  $C' \subset (Z \cup C) \setminus f$ . On a que  $(C' \setminus Y) \subset (C \setminus Y) \setminus f$  ce qui est une contradiction car  $|C \setminus Y|$  est minimal. Donc  $Y'$  est bien un indépendant. La propriété (I3) découle par récurrence car  $|Y'| = |Y| - 1$  et  $|X \cup Y'| = |X \cup Y| - 1$ .

□

**Proposition 2.2.4** *(C1) + (C2) est équivalent à (C1) + (C2') où*

*(C2') (propriété d'élimination pointée) pour tous  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $e \in X \cap Y$  et  $f \in X \setminus Y$  il existe  $Z \in \mathcal{C}$  tel que  $f \in Z \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$ .*

*Démonstration.* Trivialement (C2') implique (C2). Montrons qu'inversement (C1) et (C2) impliquent (C2').

Soient  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $e \in X \cap Y$  et  $f \in X \setminus Y$ . Supposons contrairement à (C2') qu'il n'existe aucun  $Z \in \mathcal{C}$  tel que  $f \in Z \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$ . Sans perdre en généralité, on peut supposer que  $X, Y, e, f$  ont été choisis avec ces propriétés de façon que  $|X \cup Y|$  soit minimal.

D'après (C2) il existe  $X' \in \mathcal{C}$  tel que  $X' \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$ . D'après (C1) on a  $X' \setminus X \neq \emptyset$ . Soit  $x \in X' \setminus X$ . On a  $x \in X' \setminus Y$  et  $e \in Y \setminus X'$ . Par le choix de  $X$  et  $Y$  on a  $f \notin X'$ , d'où  $|X' \cup Y| < |X \cup Y|$ . La minimalité de  $|X \cup Y|$  implique que  $X'$  et  $Y$  vérifient (C2'), donc il existe  $Y' \in \mathcal{C}$  tel que  $e \in Y' \subset (X' \cup Y) \setminus \{x\}$ . On a  $e \in X \cap Y'$ ,  $f \in X \setminus Y'$  et  $|X \cup Y'| < |X \cup Y|$  puisque  $x \notin X \cup Y'$ . La minimalité de  $|X \cup Y|$  implique que  $X$  et  $Y'$  vérifient (C2'), donc il existe  $Z \in \mathcal{C}$  tel que  $f \in Z \subset (X \cup Y') \setminus \{e\} \subset (X \cup Y) \setminus \{e\}$ .

□

**Proposition 2.2.5** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des cycles (ou circuits) élémentaires de  $G$ . Alors,  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur  $E$ .*

*Démonstration.* Les propriétés (C1), (C2) sont évidentes. On montre la propriété (C3). Soient  $C_1, C_2$  deux cycles de  $G$  tels que  $e = (u, v) \in C_1 \cap C_2$ . On va montrer qu'il existe un cycle

$C_3$  dans  $G$  tel que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$ .

Soit  $P_i$  une chaîne élémentaire qui relie  $u$  à  $v$ ,  $i \in \{1, 2\}$  avec  $E(P_i) \subset C_i \setminus e$ .

On parcourt  $P_1$  à partir de  $u$  vers  $v$  et soit  $w$  le premier sommet tel que l'arête suivante ne soit pas dans  $P_2$ , et soit  $x$  le premier sommet qui est sur  $P_1$  et  $P_2$  qui apparaît après  $w$  un tel sommet existe car  $P_1$  et  $P_2$  finissent en  $v$ ). Soit

$$C_3 := P_1(w, x) + P_2(x, w)$$

Il est clair que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$ .

□

Un matroïde formé par les cycles d'un graphe  $G$  est dit *graphique*, noté par  $\mathcal{M}(G)$ . Dans un matroïde graphique  $\mathcal{M}(G)$ , les dépendants sont les cycles et les indépendants sont donc les sous-graphes sans cycle, i.e., les *forêts* de  $G$ .

**Proposition 2.2.6** *Soit un matroïde  $M = (E, \mathcal{I})$ ,  $I \in \mathcal{I}$  et  $e \in E$ , tel que  $I \cup e$  est dépendant. Alors, il existe un circuit unique contenu dans  $I \cup e$  et ce circuit contient  $e$ .*

*Démonstration.* (Existence)  $I \cup e$  contient bien un circuit  $C$  car  $I \cup e$  est dépendant et de plus  $e \in C$  (sinon  $C \subset I$ , ce qui est impossible).

(Unicité) Supposons qu'il existe un autre circuit  $C' \subset I \cup e$ ,  $C' \neq C$  et  $e \in C'$ . D'après (C3), il existe un circuit  $\overline{C} \subseteq (C' \cup C) \setminus e$ . Comme  $(C' \cup C) \setminus e \subset I \in \mathcal{I} \Rightarrow \overline{C} \subset I$ , ce qui est impossible.

□

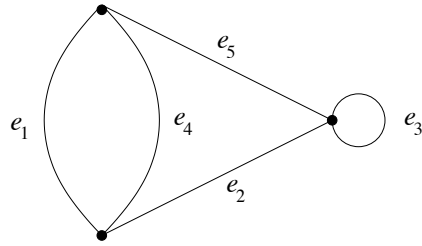


FIGURE 2.1 – Exemple

**Exemple 2.2.7** *Soit le matroïde  $\mathcal{M}(G)$  graphique obtenu à partir du graphe  $G$  de la figure 2.1. Soit  $A$  la matrice suivante.*

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*On a donc  $\mathcal{M}(G)$  est isomorphe à  $\mathcal{M}(A)$  (sous la bijection  $e_i \rightarrow i$ ).*

## 2.3 Bases

Une *base* d'un matroïde est un indépendant maximal (pour l'inclusion).

**Lemme 2.3.1** *Les bases d'un matroïde sont équicardinales (elles ont le même nombre d'éléments).*

*Démonstration.* Par l'absurde. Soient  $B_1, B_2$  deux bases telles que  $|B_1| < |B_2|$ , d'après (I3) il existe  $x \in B_2 \setminus B_1$  tel que  $B_1 \cup x \in \mathcal{I}$  ce qui est une contradiction avec le fait que  $B_1$  est un indépendant maximal.

□

**Lemme 2.3.2** *Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bases d'un matroïde  $\mathcal{M}$ . Alors,  $\mathcal{B}$  vérifie les conditions suivantes :*

(B1)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

(B2) (propriété d'échange)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  et  $x \in B_1 \setminus B_2$  alors il existe  $y \in B_2 \setminus B_1$  tel que  $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$ .

*Démonstration.* On a  $B_2, B_1 \setminus x \in \mathcal{I}$ ,  $|B_1 \setminus x| < |B_2|$ , d'après (I3) il existe  $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus x)$  tel que  $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{I}$ . On a  $y \in B_2 \setminus B_1$  et en plus  $B_1 \setminus x \cup y$  est contenu dans un ensemble indépendant maximal  $B'$ . Comme  $|B'| = |B_1|$  et  $|B_1| = |(B_1 \setminus x) \cup y|$  on a  $(B_1 \setminus x) \cup y = B'$  et donc  $(B_1 \setminus x) \cup y$  est une base.

□

**Remarque 2.3.3** *Si  $\mathcal{M}(G)$  est graphique, alors une base de  $\mathcal{M}$  correspond à un arbre couvrant de  $G$ .*

**Théorème 2.3.4** *Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{B}$  une famille des sous-ensembles de  $E$  qui vérifie (B1) et (B2). Soit  $\mathcal{I}$  la famille des sous-ensembles qui sont contenus dans l'un de ensembles de  $\mathcal{B}$ . Alors,  $(E, \mathcal{I})$  est un matroïde.*

*Démonstration.* Les propriétés (I1), (I2) sont trivialement vérifiées. On démontre (I3). Soit  $X, Y \in \mathcal{I}$  tels que  $|X| < |Y|$ . Il existe  $B, B' \in \mathcal{B}$  tel que  $X \subset B$  et  $Y \subset B'$ . Sans pert de généralité, on peut supposer  $B, B'$  choisis avec ce propriétés tels que  $|B \cap B'|$  soit maximal.

On a  $B \setminus B' \subset X$ . On effet sinon soit  $x \in B \setminus B' \setminus X$ . D'après (B2) il existe  $y \in B'$  tel que  $B_1 = B - x + y \in \mathcal{B}$ . On a  $X \subset B_1$  et  $|B_1 \cap B'| > |B \cap B'|$  en contradiction avec le choix de  $B$  et  $B'$ . De même,  $B' \setminus B \subset Y$ . Comme,  $|B| = |B'|$  on a  $|B \setminus B'| = |B' \setminus B|$ , donc  $|X| < |Y|$  implique  $|B \cap B' \cap X| = |B' \cap B \cap Y|$ . Par suite  $B \cap B' \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$ , d'où (I3) avec  $e \in B \cap (Y \setminus X)$ .

□

Soient  $\mathcal{M}(G)$  et  $\mathcal{M}(H)$  deux matroïdes graphiques isomorphes, est-il vrai que  $G$  et  $H$  sont isomorphes? Non, par exemple, tous les matroïdes représentant les arbres de taille  $n$  fixée sont isomorphes. On discuteras en Chapitre ?? quand un matroïdes graphique  $\mathcal{M}(G)$  définit  $G$ .

Un ensemble d'éléments dans un matroïde contenant une base est appelé *générateur*. La proposition suivante est immédiate.

**Proposition 2.3.5** (*théorème de la base incomplète*)

Soient  $M$  un matroïde,  $X$  un indépendant de  $M$  et  $Y$  un générateur de  $M$  tels que  $X \subset Y$ . Alors il existe une base  $B$  de  $M$  telle que  $X \subset B \subset Y$ .

## 2.4 Rang

Soit  $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$  et  $X \subseteq E$ . On définit l'ensemble  $\mathcal{I} \setminus X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$ . Alors  $(X, \mathcal{I} \setminus X)$  est un matroïde, noté  $\mathcal{M}|_X$ . Le *rang* d'un ensemble  $X \subseteq E$  est le cardinal d'une base de  $\mathcal{M}|_X$ , noté  $r_{\mathcal{M}}(X)$ , c'est-à-dire  $r_{\mathcal{M}}(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$ .

**Théorème 2.4.1** Soit  $E$  un ensemble fini et  $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $r$  est la fonction rang du matroïde  $(E, \mathcal{I})$  (où  $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\}$ ).
- (b)
  - (R1)  $0 \leq r(X) \leq |X|$ , pour tout  $X \subseteq E$ ,
  - (R2)  $r(X) \leq r(Y)$ , pour tous  $X \subseteq Y$ ,
  - (R3) (*inégalité sous-modulaire*)  $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$  pour tous  $X, Y \subseteq E$ .
- (c)
  - (R1')  $r(\emptyset) = 0$ .
  - (R2')  $r(X) \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 1$ , pour tout  $X \subseteq E, y \in E$ ,
  - (R3') Si  $r(X \cup x) = r(X \cup y) = r(X)$  alors  $r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$  pour tout  $X \subseteq E, x, y \in E$ .

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Soit  $r(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$ . Les propriétés (R1), (R2) sont évidents. Maintenant pour (R3). Soit  $B_{X \cap Y}$  une base de  $X \cap Y$ . Alors,  $B_{X \cap Y}$  est indépendant maximal de  $\mathcal{M}|_{(X \cap Y)}$  et donc  $B_{X \cap Y}$  est contenue dans une base  $B_{X \cup Y}$  de  $\mathcal{M}|_{(X \cup Y)}$ .

On remarque que  $\begin{cases} B_{X \cup Y} \cap X \text{ est un ensemble indépendant dans } \mathcal{M}|_X \\ B_{X \cup Y} \cap Y \text{ est un ensemble indépendant dans } \mathcal{M}|_Y. \end{cases}$

On a  $|B_{X \cup Y} \cap X| \leq r(X)$  et  $|B_{X \cup Y} \cap Y| \leq r(Y)$ . En utilisant le fait que  $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$  on obtient

$$r(X) + r(Y) \geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| = |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)|$$

$$= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)| = |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$$

(b)  $\Rightarrow$  (c)] Il est évident que (R1) implique (R1').

(R2') :

$$r(X) \stackrel{R2}{\leq} r(X \cup y) \stackrel{R3}{\leq} r(X) + r(y) - r(X \cap y) \leq r(X) + r(y) \leq r(X) + 1.$$

Pour (R3'), si  $x = y$  alors (R3') est trivial. Supposons que  $x \neq y$ . On considère

$$2r(X) = r(X) + r(X) \stackrel{R2}{\leq} r(X) + r(X \cup \{x, y\}) \stackrel{R3}{\leq} r(X \cup \{x\}) + r(X \cup \{y\}) = r(X) + r(X).$$

Donc,  $r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a)] Soient  $\mathcal{I} = \{I \subseteq E | r(I) = |I|\}$ . On va montrer que  $(E, \mathcal{I})$  est un matroïde. D'après (R1')  $r(\emptyset) = 0$  donc  $\emptyset \in \mathcal{I}$  et donc (I1) est vérifiée.

(I2) : Soit  $X \in \mathcal{I}, x \in X$  et  $Y = X \setminus x$  (et donc  $Y \subset X$ ). Alors,

$$|Y| + 1 = |X| \stackrel{\text{def}}{=} r(X) = r(Y \cup x) \stackrel{(R2')}{\leq} r(Y) + 1 \stackrel{(R1')+(R2')}{\leq} |Y| + 1.$$

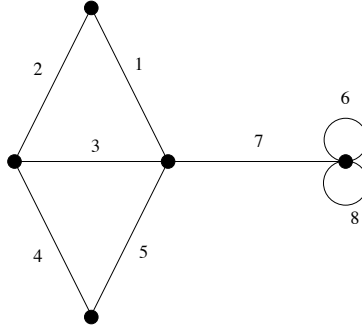
Alors,  $r(Y) = |Y|$  et donc  $Y \in \mathcal{I}$  puis le résultat s'en suit par récurrence.

(I3) : Soit  $X, Y \in \mathcal{I}$  avec  $|Y| < |X|$  et soit  $X \setminus Y = \{x_1, \dots, x_k\}$ . On raisonne par l'absurde, on suppose que (I3) n'est pas vérifiée, alors  $Y \cup x_i \notin \mathcal{I}$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire,  $r(Y \cup x_i) = |Y|$  (par R2'). Alors, d'après (R3)'  $r(Y \cup \{x_1, x_i\}) = r(Y)$ . En appliquant l'argument précédant récursivement on obtient  $r(Y) = r(Y \cup \{x_1, \dots, x_k\}) = r(Y \cup X) \geq r(X)$  ce qui est une contradiction par (R2')

□

Soit  $\mathcal{M}(G)$  un matroïde graphique. Alors,  $r(\mathcal{M}(G)) = |V(G)| - \omega(G)$ . où  $\omega(G)$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ , en particuliers si  $G$  connexe alors  $r(\mathcal{M}(G)) = |V(G)| - 1$ . Plus généralement, si  $X \subseteq E$  alors  $r(X) = V(G[X]) - \omega(G[X])$  où  $G[X]$  dénote le graphe induit par l'ensembles d'arêtes correspondant aux éléments  $X$ .

**Exemple 2.4.2** Soit  $G'$  le graphe illustré en figure 2.2. Alors,  $r(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 3$ ,  $r(\{6, 7, 5\}) = 2$ ,  $r(\{6, 7, 4\}) = 2$  et  $r(\{6, 8\}) = 0$ .

FIGURE 2.2 –  $G'$ 

## 2.5 Fermeture

La *fermeture* d'un ensemble  $A$  dans  $\mathcal{M}$  est définie par  $cl(A) = \{x \in E \mid r(A \cup x) = r(A)\}$ .

**Exemple 2.5.1** On reprend l'exemple de la figure 2.2. On a  $cl(\{567\}) = \{5678\}$ ,  $cl(\{135\}) = \{1352468\}$  et  $cl(\{\emptyset\}) = \{68\}$ .

**Proposition 2.5.2** La fonction  $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  d'un matroïde  $\mathcal{M}$  vérifie :

- (CL1) (*extensivité*) Si  $X \subseteq E$  alors  $X \subseteq cl(X)$
- (CL2) (*croissance*) Si  $X \subseteq Y \subseteq E$  alors  $cl(X) \subseteq cl(Y)$
- (CL3) (*indempotence*) Si  $X \subseteq E$  alors  $cl(cl(X)) = cl(X)$
- (CL4) (*propriété d'échange*) Si  $X \subseteq E, x \in E$  et  $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$  alors  $x \in cl(X \cup y)$

*Démonstration.* (CL1) : Evident.

(CL2) : Soit  $X \subseteq Y, x \in cl(X)$

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) = r(X \cup \{x\}) + r(Y) &\stackrel{(R3)}{\geq} r((X \cup \{x\}) \cap Y) + r((X \cup \{x\}) \cup Y) \\ &\stackrel{(R2)}{\geq} r(X) + r(Y \cup \{x\}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow r(Y) \geq r(Y \cup \{x\})$ , mais on sait que  $r(Y \cup \{x\}) \stackrel{(R2)}{\geq} r(Y)$

$\Rightarrow r(Y) = r(Y \cup \{x\})$

$\Rightarrow x \in cl(Y)$ .

(CL3) : On utilisant (R3') plusieurs fois on obtient  $r(cl(X)) = r(X)$  et donc on obtient que  $cl(cl(X)) = cl(X)$ .

(CL4) : Par l'absurde, on suppose  $x \notin cl(X \cup y)$  et donc  $r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup y) + 1$ . Comme  $y \in cl(X \cup \{x\}) \Rightarrow r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{x\})$ . On déduit  $r(X \cup \{y\}) + 1 = r(X \cup \{x\})$ . En plus, comme  $y \notin cl(X)$  alors  $r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1$ . On a donc  $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$ , ce qui est en contradiction avec (R2').



□

**Théorème 2.5.3** Soit  $E$  un ensemble, la fonction  $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est la fonction fermé d'un matroïde si et seulement si  $cl$  vérifie (CL1), (CL2), (CL3) et (CL4).

Soit  $X \subset E$ ,  $cl(X)$  est aussi appelé le *fermé* (ou le *flat*) de  $X$  et  $X$  est dit *fermé* si  $X = cl(X)$ .

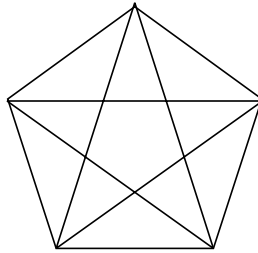
**Théorème 2.5.4** L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fermés d'un matroïde est caractérisé par les propriétés suivantes :

- (F1) Toute intersection de fermés est un fermé.
- (F2) la fermeture définie par  $cl(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F$  vérifie la propriété d'échange.

L'ensemble  $E$  est fermé de rang  $r(\mathcal{M})$ . Le fermé de rang 0 est constitué par l'ensemble des boucles de  $\mathcal{M}$ . Un fermé de rang 1, ou *point* est une classe d'éléments *parallèle*. Un matroïde tel que  $\emptyset$  soit fermé, et tous ses points comportent un seul élément, est dit *simple*. Un *hyperplan* est un fermé de rang  $r(\mathcal{M}) - 1$ .

**Exemple 2.5.5** Soit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K_5)$ . Calculons les fermés de  $\mathcal{M}$ .

- Fermé de rang 1  $\rightarrow$  les 10 arêtes de  $K_5$ .
- Fermé de rang 2  $\rightarrow$  les  $\left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ triangles} \\ 15 \text{ paires d'arêtes disjointes} \end{array} \right.$
- Fermé de rang 3  $\rightarrow$  les  $\left\{ \begin{array}{l} 5 K_4 \\ 10 K_2 \text{ et } K_3 \text{ disjoints} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{hyperplan de } \mathcal{M}$
- Fermé de rang 4  $\rightarrow K_5$ .

FIGURE 2.3 – Graphe  $K_5$ 

## 2.6 Algorithme glouton

Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble de sous-ensembles de  $E$  et on suppose que  $\mathcal{I}$  vérifie (I1) et (I2). Soit  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , et on note  $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$ ,  $X \subseteq E$ ,  $w(\emptyset) = 0$ .

Un *problème d'optimisation* consiste alors à trouver un ensemble maximal  $B$  de  $\mathcal{I}$  avec un poids maximal.

---

**Algorithm 1:** Algorithme glouton pour  $(\mathcal{I}, w)$ .

---

**début**

```

 $X_0 = \emptyset$ 
 $j = 0$ 
tant que 'il existe  $e \in E \setminus X_j \mid X_j \cup \{e\} \in \mathcal{I}$  faire
    Choisir un élément  $e_{j+1}$  de poids maximum
     $X_{j+1} \leftarrow X_j \cup \{e_{j+1}\}$ 
     $j \leftarrow j + 1$ 
 $B_G \leftarrow X_j$ 
retourner  $B_G$ 

```

**fin**


---

**Théorème 2.6.1** Soit  $\mathcal{I}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ . Alors,  $(\mathcal{I}, E)$  est un matroïde si et seulement si les conditions suivante sont vérifiées :

- (I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2)  $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$
- (G) Pour toute fonction  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , l'algorithme glouton donne un ensemble maximal de  $\mathcal{I}$  de poids maximal.

*Démonstration. (Nécessité)* On va montrer que  $G$  est vérifiée. On affirme que  $B_G = \{e_1, \dots, e_r\}$  est une base de  $\mathcal{M}$  de poids maximal. Soit  $B$  une autre base  $B = \{f_1, \dots, f_r\}$ , on montre que  $w(e_j) \geq w(f_j), j = 1, \dots, r$ . Par l'absurde, supposons que  $w(f_1) \geq w(f_2) \geq \dots \geq w(f_r)$  et qu'il existe un entier  $k$  tel que  $w(e_k) < w(f_k)$ . Soit  $I_1 = \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  et  $I_2 = \{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  avec  $|I_1| < |I_2|$ . D'après (I3), on a  $I_1 \cup f_t \in \mathcal{I}$  où  $f_t \in I_2 \setminus I_1$  avec  $t \leq k$ . Mais  $w(f_t) \geq w(f_k) > w(e_k)$ , alors l'algorithme glouton aurait choisit  $f_t$  à la place de  $e_k$ . Ce qui est une contradiction.

*(Suffisance)* On suppose (I1), (I2) et (G) et va montrer que  $\mathcal{M} = (\mathcal{I}, E)$  vérifie (I3). On raisonne par l'absurde, supposons que  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ,  $|I_1| < |I_2|$  tels que  $I_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$  pour tout  $e \in I_2 \setminus I_1$ , on a  $|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$ . Alors, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $(1 + \epsilon)|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$ . On défini  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit

$$w(e) = \begin{cases} 2 & \text{si } e \in I_1 \cap I_2 \\ 1/|I_1 - I_2| & \text{si } e \in I_1 \setminus I_2 \\ (1 + \epsilon)/|I_2 - I_1| & \text{si } e \in I_2 \setminus I_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algorithme glouton choisit d'abord les éléments de  $I_1 \cap I_2$  et puis tous les éléments de  $I_1 \setminus I_2$  (car  $(1 + \epsilon)|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$ ). Par hypothèse, l'algorithme ne choisit pas les éléments dans  $I_2 \setminus I_1$ .

Il reste  $E \setminus (I_1 \cup I_2)$  (avec  $w(e) = 0$ ).

$$\begin{aligned} w(B_G) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2| \left( \frac{1}{|I_1 - I_2|} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 \end{aligned}$$

On sait que  $I_2$  est contenu dans un ensemble maximal  $I'_2 \in \mathcal{I}$ .

$$\begin{aligned} w(I'_2) &\geq w(I_2) = 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 - I_1| \left( \frac{1 + \epsilon}{|I_2 - I_1|} \right) \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon \\ &> 2|I_1 \cap I_2| + 1 = w(B_G) \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction avec (G).

□

### 2.6.1 Matroïde transversal

Soit  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  et soit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ ,  $A_i \subseteq S$ ,  $n \geq k$ . Un *transversal* de  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$  de  $S$  tel que  $e_{j_i} \in A_i$  (autrement dit, il existe une bijection entre  $\{e_1, \dots, e_k\}$  et  $\{A_1, \dots, A_k\}$ ). Un ensemble  $X \subseteq S$  est dit un *transversal partiel* de  $\mathcal{A}$  s'il existe  $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$  tel que  $X$  est un transversal de  $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_l}\}$ .

Soit  $G = (U, V; E)$  le graphe biparti formé à partir de  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  et  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ ,  $A_i \subseteq S$  où  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$  et deux sommets  $u_i \in U$  et  $v_j \in V$  sont reliés si et seulement si  $s_i \in A_j$ . On a donc qu'un  $X$  est un transversal partiel de  $\mathcal{A}$  si et seulement s'il existe un couplage dans  $G = (U, V; E)$  où chaque arête du couplage admet un sommet de  $U$  correspondant à l'un de éléments de  $X$ , voir figure ??.

**Exemple 2.6.2** Soit  $E = \{e_1, \dots, e_6\}$  et  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  avec  $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$ ,  $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ,  $A_3 = \{e_2, e_3\}$  et  $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$ . Alors,  $\{e_1, e_3, e_2, e_6\}$  est un transversal de  $\mathcal{A}$  et  $X = \{e_6, e_4, e_2\}$  est un transversal partiel de  $\mathcal{A}$  car  $X$  est transversal de  $\{A_1, A_2, A_3\}$ , voir figure 2.4.

**Théorème 2.6.3** Soit  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  et soit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ ,  $A_i \subseteq S$ . L'ensemble de transversals partiels de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde.

*Démonstration.* (I1) et (I2) sont évidents. On montre (I3). Soit  $G$  le graphe bipartite associé à  $E$  et  $\mathcal{A}$ . Soit  $I_1, I_2$  de transversaux partiels  $|I_1| < |I_2|$  et soient  $w_1, w_2$  deux couplages de  $G$  (disons, couplage bleu et rouge) tels que les sommets correspondants à  $I_j$  sont d'extrémités

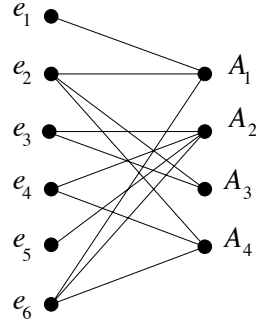


FIGURE 2.4 – Exemple de transversal

d'arêtes  $w_j$ . Soit  $G'$  le sous-graphe de  $G$  induit par les arêtes de  $w_1 \setminus w_2$  (disons, arêtes rouges) et  $w_2 \setminus w_1$  (disons, arêtes bleues) mais pas d'arêtes dans  $w_1 \cap w_2$  (bicoloriées).

On a qu'il y a plus d'arêtes rouges que bleues car  $|w_1| = |I_1| < |I_2| = |w_2|$ . Comme  $w_1$  et  $w_2$  sont de couplages alors  $d(v) = 1$  ou  $2$  pour tous sommet  $v \in V(G')$  est donc chaque composantes connexes de  $G'$  est soit une chaîne soit un cycle. Si  $d(v) = 2$  alors les deux arêtes incidentes à  $v$  ont couleurs différents (car  $w_1$  et  $w_2$  sont des couplages) et donc tous cycle de  $G'$  et tous chaîne de longueur pair ont exactement le même nombre d'arêtes rouges et bleues. Comme  $G'$  admet plus d'arêtes bleues que rouges alors il existe un chaîne de longueur impair telle que la première et dernière arêtes sont rouges. En plus, l'une de cetttes deux arêtes est incidente à un sommets correspondant à un element  $e$  de  $E$ ,  $e \in I_2 \setminus I_1$ . En échangeant les arêtes rouges et bleues de cette chaîne on trouve une chaîne avec une arête bleue incidente à  $e$  et donc un nouveau couplage contenant tous les sommets correspondant à  $I_1$  qui sont d'extrémités des arêtes dans le couplage  $w_1$  avec la nouvelle chaîne, c'est-à-dire,  $I_1 \cup e$  est un transversal partiel.

□

Un matroïde ainsi obtenu est appelé *matroïde transversal*.

### Problème d'assignation

Soit  $\{T_i\}$  un ensemble de tâches ordonés par rapport à leur importance (priorités) et soit  $\{E_i\}$  un ensemble de employés capable de réaliser un ou plusieurs de cetttes tâches. On suppose que les tâches seront faites au même temps (et donc chaque employer peut faire qu'une seule tâche à la fois). Le problème est d'assigner les tâches aux employés de façon optimal (en maximisant les priorités).

On peut résoudre ce problème en appliquant l'algorithme glouton au matroid transversal  $\mathcal{M}$  où  $S = \{T_i\}$  et  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  avec  $A_i$  est l'ensemble de tâches pour laquelle l'employés  $i$  est qualifié de réaliser. On remarque que le nombre maximum des tâches qui peut-être réalisés au même temps est égal au plus grand transversal partiel de  $\mathcal{A}$  avec  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

la fonction correspondant à l'importance de tâches.

## 2.6.2 Exercices

**Exercice 2.1** Soient  $r$  et  $n$  deux entiers  $0 \leq r \leq n$ , et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Montrer que  $\mathcal{I} = \binom{E}{r}$  l'ensemble des  $r$ -parties de  $E$  est l'ensemble des indépendants du matroïde  $U_{n,r}$ . Calculer le rang de  $U_{n,r}$ .

**Exercice 2.2** Soient  $r$  et  $n$  deux entiers  $1 \leq r \leq n$  et  $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r)$  une  $r$ -partition de  $n$ . Considérons un ensemble  $E$  à  $n$  éléments et une  $r$ -partition  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_r$  de  $E$  telle que  $|E_i| = n_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, r$ . Soit

$$\mathcal{I} = \{X \subset E \mid |X \cap E_i| \leq 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r\}.$$

Montrer que  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde d'un matroïde dit *de partition* désigné par  $\mathcal{P}_\lambda$ .

**Exercice 2.3** Soit  $G(V, E)$  un graphe. Soit

$$\mathcal{I} = \{I : I \subseteq V \text{ tel qu'il existe un couplage } M \text{ en } G \text{ qui couvre } I\}.$$

Montrer que  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde dit *de couplage*

Quelle est la fonction rang de ce matroïde ?

**Exercice 2.4** Soit  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroïde et soit  $k \geq 0$  un entier. Soit

$$\mathcal{I}_k = \{X \in \mathcal{I} : |I| \leq k\}.$$

Montrer que  $\mathcal{I}_k$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde dit *tronqué*.

Quelle est la fonction rang de ce matroïde ?

**Exercice 2.5** Une collection  $\mathcal{F}$  d'ensembles est dit *mince* (*laminar* en anglais) si pour tout  $A, B \in \mathcal{F}$  on a soit  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$  ou  $A \cap B = \emptyset$ . Soit  $\mathcal{F}$  une collection mince de sous-ensembles de  $E$  et soit  $k(A)$  un entier pour tout  $A \in \mathcal{F}$ . Soit

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : |X \cap A| \leq k(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde dit *mince*.

Quelle est la fonction rang de ce matroïde ?

**Exercice 2.6** Soient  $E$  un ensemble et  $f : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  une application de l'ensemble des parties de  $E$  dans les entiers vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $f(A) \leq f(B)$  pour tous  $A \subset B \subset E$  ( $f$  est *non-décroissante*)
- (ii)  $f(A \cap B) + f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$  ( $f$  est *sous-modulaire*).

On pose

$$\mathcal{I} = \{X \subset E \mid |Y| \leq f(Y) \text{ pour tous } Y \subset X, Y \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{C} = \{C \subset E \mid C \notin \mathcal{I}, \text{ tel que } X \in \mathcal{I} \text{ pour tous } X \subset C, X \neq C\}$$

(a) Soit  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $|C| \geq 2$ . Montrer que  $f(C) = |C| - 1$  et  $f(C \setminus \{e\}) = f(C)$  pour tout  $e \in C$ .

(b) Montrer que  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde. On notera  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(f)$  le matroïde ainsi obtenu.

Alors d'après (b),  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des indépendants de  $\mathcal{M}$ . Dans la suite on suppose de plus que  $f(\emptyset) = 0$ .

(c) Montrer qu'on a  $r(\mathcal{M}) \leq f(X) + |E \setminus X|$  pour tout  $X \subset E$ .

Soient  $B$  une base de  $\mathcal{M}$ , et  $C_1, C_2, \dots, C_k$   $k = |E \setminus B|$  une indexation quelconque des circuits fondamentaux relativement à  $B$ . Pour  $1 \leq i \leq k$  on pose  $X_i = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_i$ .

(d) Montrer que  $f(X_i) = |X_i \cap B|$  [indication : récurrence sur  $i$ ]

En déduire que  $r(\mathcal{M}) = f(X_k) + |E \setminus X_k|$ , et donc en conséquence de (c) que  $r(\mathcal{M}(f)) = \min_{X \subset E} (f(X) + |E \setminus X|)$ .