Gestion de flux dans le réseau
TD n$^\circ$5
Modélisation mathématique
Q4

Sibylle Roux Juliette Arazo Nicolas Le Gallo
Tanguy Thomas

23 novembre 2017

Table des matières

1 Essaies randoms

1.1

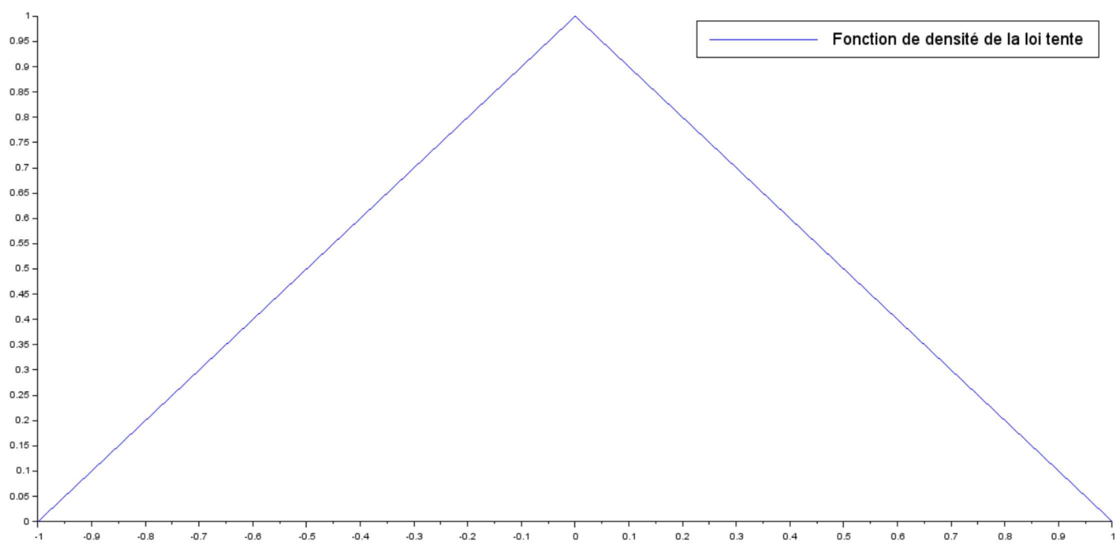
2 Etude mathématique de la loi tente

2.1 Densité

2.1.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} - 1 <= x <= 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.2 Représentation graphique



2.2 Fonction de répartition

2.2.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < -1 \\ f(x) = 1 + x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ f(x) = 1 - x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 - x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ 0 + \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ 0 + \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{3}$$

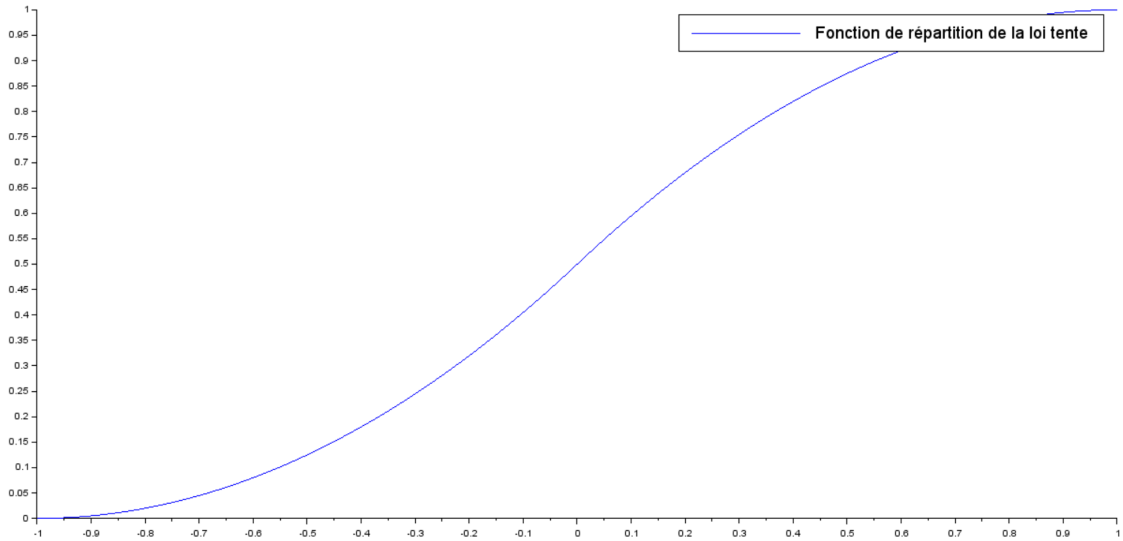
$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} \times (1 + 2x + x^2) & \text{pour } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{2} \times (-1 - 2x + x^2 + 1 - 1) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

2.2.2 Représentation graphique



2.3 Inverse

2.3.1 Fonction

On va donc inverser les deux fonctions de répartitions de la loi tente

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} \qquad y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} \tag{9}$$

$$2y_1 = (1+x)^2 \qquad 2y_2 = 2-(1-x)^2 \tag{10}$$

$$\sqrt{2y_1} = 1+x \qquad 2-2y_2 = (1-x)^2 \tag{11}$$

$$x = \sqrt{2y_1} - 1 \qquad x = 1 - \sqrt{2-2y_2} \tag{12}$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 1 & \text{pour} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{2 - 2x} & \text{pour} \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{13}$$

2.3.2 Représentation graphique

3 Inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle

3.1 Fonction

$$y = 1 - e^{-\lambda t} \tag{14}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - y \tag{15}$$

$$-\lambda t = ln(1 - y) \tag{16}$$

$$t = -\frac{ln(1 - y)}{\lambda} \tag{17}$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(t) = -\frac{ln(1 - y)}{\lambda} \tag{18}$$

3.2 Représentation graphique

Première partie

Conclusion

A Etude mathématique de la loi tente

A.1 Représentation graphique de la densité

```
t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=2)
legend("Fonction de densité de la loi tente")
```

A.2 Représentation graphique de la fonction de répartition

```
t = linspace(-1, 1, 301);
R=t;
i1 = t<-1;
i2 = (t>=-1) & (t<=0);
i3 = (t>0) & (t<=1);
i4 = t>1;
R(i1) = 0;
R(i2) = 0.5 + R(i2)+((R(i2)^2)/2)
R(i3) = 0.5 + R(i3)-((R(i3)^2)/2)
R(i4) = 1;
plot2d(t,R,style=2)
legend("Fonction de répartition de la loi tente")
```

A.3 Représentation graphique de la fonction inverse