Gestion de flux dans le réseau
TD n$^\circ$5
Modélisation mathématique
Q4

Sibylle Roux   Juliette Arazo   Nicolas Le Gallo
Tanguy Thomas

29 novembre 2017

Table des matières

1 Essaies randoms

1.1 Loi Hypergeometrique

1.2 Preuve mathématique

Paramètres

$$N = 20; n = 3; m = 2 : P = \frac{2}{20} \tag{1}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{m}{0} \times \binom{N-m}{3}}{\binom{N}{n}} \tag{2}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \times \binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2}} = 0.7158 \tag{3}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2 \times \frac{18\times17}{2}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2}} = 0.2684 \tag{4}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{1 \times 18}{\frac{20\times19\times18}{3\times2}} = 0.0158 \tag{5}$$

```
clear
clc
function s=hypergeo(N,n,P)
    M=P*N;
    s=0;
    for i=0:n-1
        if rand()<P
            M=M-1;
            N=N-1;
            s=s+1;
            P=M/N;
        else
```

```
            N=N-1;
            P=M/N;
        end
    end
endfunction
N=20; n=3; P=2/20;t=[]; nb=10000
for j=1:nb+1
    t(j)=hypergeo(N,n,P); //100 tirages de loi hypergeo
end
frequences=tabul(t)// on calcule les frequences obtenues
frequences(:,2)=frequences(:,2)/nb
disp(frequences)
```

Resultats d'un essai

nombre de succès	0	1	2
resultats programme	0.0172	0.2728	0.7101
resultats mathématiques	0.0158	0.2684	0.7158

Les valeurs obtenues par le programme sont proches des valeurs mathématiques. On peut en conclure que le programme retranscrit bien une loi hypergéométrique.

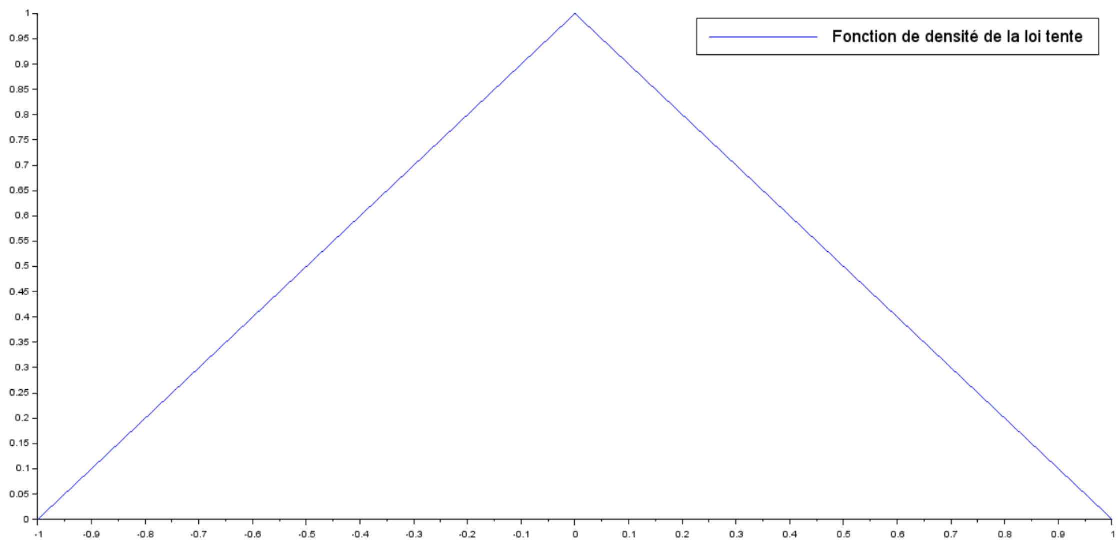
2 Etude mathématique de la loi tente

2.1 Densité

2.1.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} -1 <= x <= 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.2 Représentation graphique



2.2 Fonction de répartition

2.2.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < -1 \\ f(x) = 1 + x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ f(x) = 1 - x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \, \mathrm{d}x & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{x} 1 + x \, \mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{x} 1 - x \, \mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 - x \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{x} 0 \, \mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ 0 + \int_{-1}^{x} 1 + x \, \mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ 0 + \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \, \mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} 0 \, \mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{8}$$

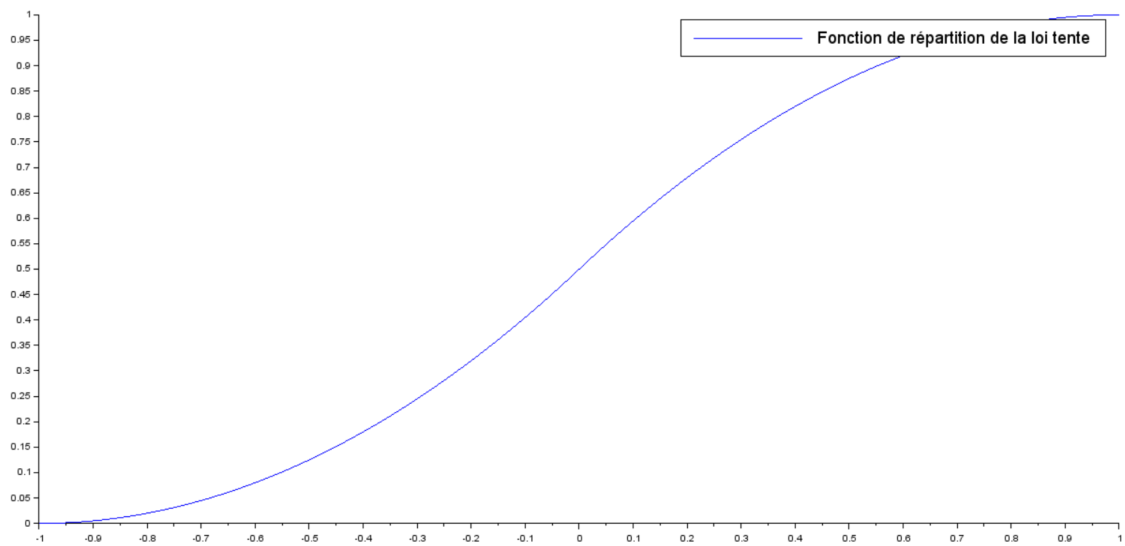
$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-1}^{x} 1 + x \, \mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \, \mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{9}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} \times (1 + 2x + x^2) & \text{pour } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{2} \times (-1 - 2x + x^2 + 1 - 1) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{11}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{12}$$

2.2.2 Représentation graphique



2.3 Inverse

2.3.1 Fonction

On va donc inverser les deux fonctions de répartitions de la loi tente

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases} \tag{13}$$

$$y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} \qquad y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} \tag{14}$$

$$2y_1 = (1+x)^2 \qquad 2y_2 = 2-(1-x)^2 \tag{15}$$

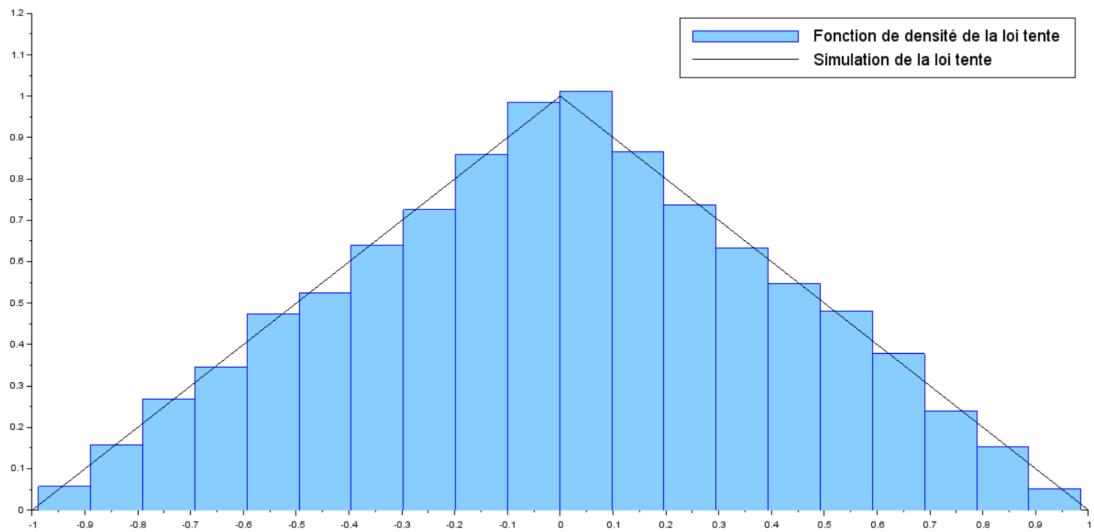
$$\sqrt{2y_1} = 1+x \qquad 2-2y_2 = (1-x)^2 \tag{16}$$

$$x = \sqrt{2y_1} - 1 \qquad x = 1 - \sqrt{2-2y_2} \tag{17}$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 1 & \text{pour} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{2-2x} & \text{pour} \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{18}$$

2.3.2 Représentation graphique



3 Inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle

3.1 Fonction

$$y = 1 - e^{-\lambda t} \tag{19}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - y \tag{20}$$

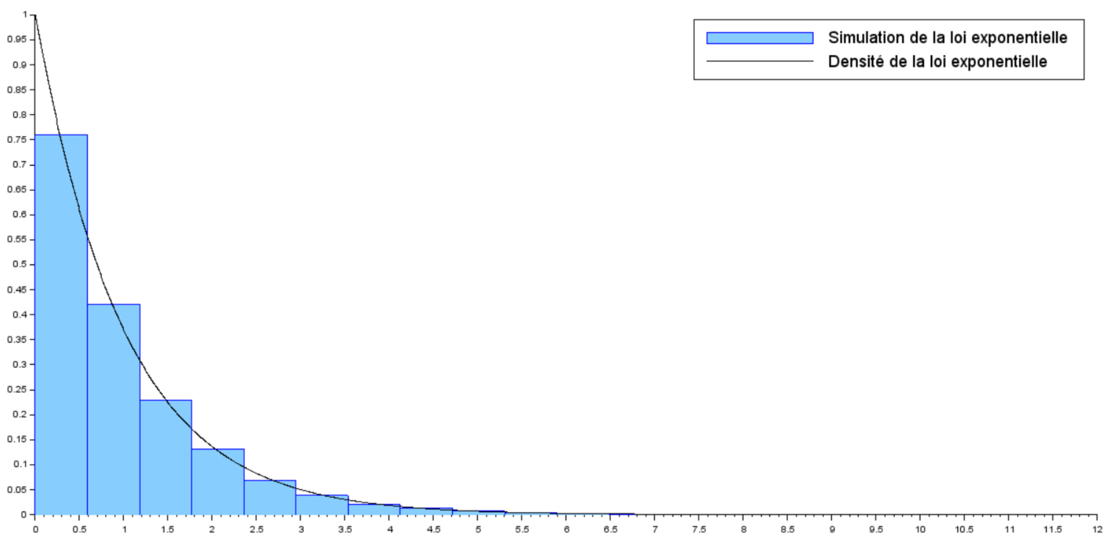
$$-\lambda t = ln(1 - y) \tag{21}$$

$$t = -\frac{ln(1-y)}{\lambda} \tag{22}$$

Donc la fonction inverse est :

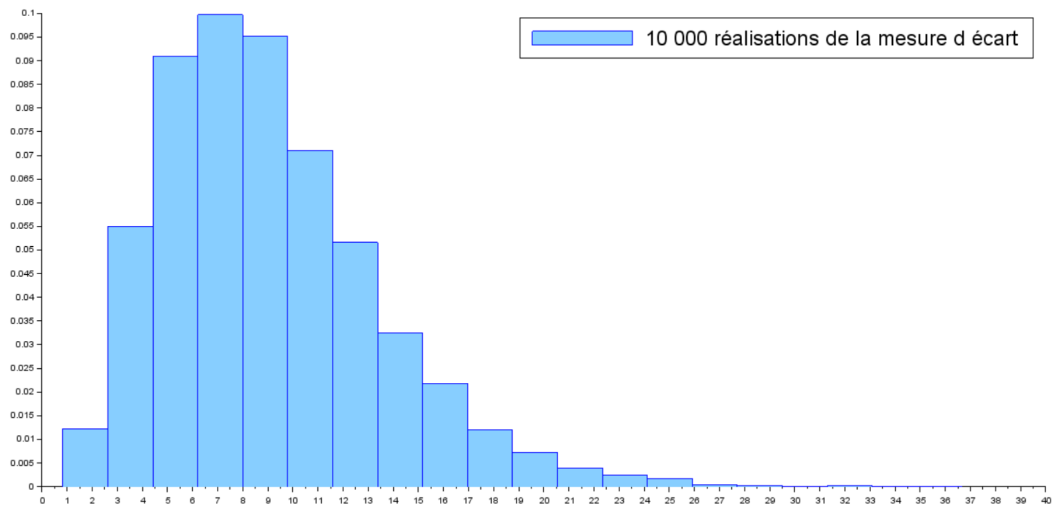
$$F^{-1}(t) = -\frac{ln(1-y)}{\lambda} \tag{23}$$

3.2 Représentation graphique

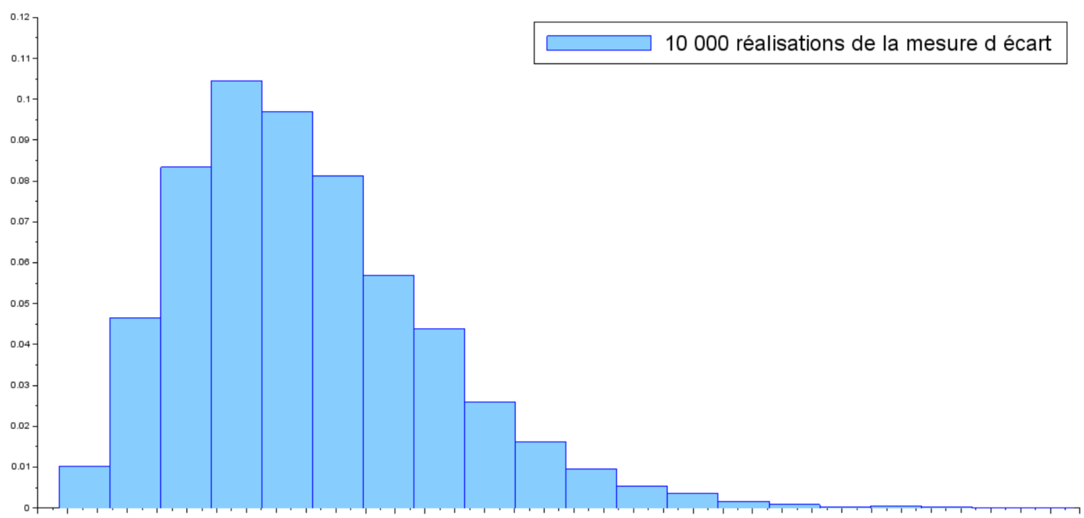


4 Mesure de l'écart

4.1 Mesure de l'écart pour la loi tente



4.2 Mesure de l'écart pour la loi exponentielle



4.3 Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle

5 Conclusion

A Etude mathématique de la loi tente

A.1 Représentation graphique de la densité

```
t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=2)
legend("Fonction de densité de la loi tente")
```

A.2 Représentation graphique de la fonction de répartition

```
t = linspace(-1, 1, 301);
R=t;
i1 = t<-1;
i2 = (t>=-1) & (t<=0);
i3 = (t>0) & (t<=1);
i4 = t>1;
R(i1) = 0;
R(i2) = 0.5 + R(i2)+((R(i2)^2)/2)
R(i3) = 0.5 + R(i3)-((R(i3)^2)/2)
R(i4) = 1;
plot2d(t,R,style=2)
legend("Fonction de répartition de la loi tente")
```

A.3 Représentation graphique de la fonction inverse

```
function t = tente(n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    i1 = u < 1/2
    i2 = u >= 1/2
    t(i1) = sqrt(2*t(i1))-1;
    t(i2) = 1-sqrt(2-2*t(i2));
endfunction
histplot(20,tente(10000))

// Fonction de densité

t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
```

```
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=1)

legend("Fonction de densité de la loi tente","Simulation de la loi tente")
```

B Inverse de la fonction de répartition

B.1 Représentation graphique de la fonction inverse

```
function t = expo(l,n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    t = -log(1-t)/l
endfunction
histplot(20,expo(1,100000))

// Fonction de densité de la loi exponentielle

a=0:0.01:12;
lambda=1;
b=lambda*exp(-lambda*a);
plot2d2(a,b,style=1)

legend("Simulation de la loi exponentielle","Densité de la loi exponentielle")
```

C Mesure de l'écart

C.1 Mesure de l'écart pour la loi tente

```
function q = quantile(p)
    if p < 0.5 then
        q = sqrt(2*p)-1;
    else
        q = 1-sqrt(2-2*p)
    end
endfunction

function t = tente(n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    i1 = u < 1/2
    i2 = u >= 1/2
    t(i1) = sqrt(2*t(i1))-1;
```

```
    t(i2) = 1-sqrt(2-2*t(i2));
endfunction

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = -1; C(n+1) = 1;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(i/n);
end
format(6)

Ei = 3000 / n // effectif espéré dans chaque classe

N = 10000
d = zeros(1, N);
for i = 1:N
    Oi = histc(C, tente(3000), normalization = \%f);
    // calcul de la différence et stockage dans le tableau d
    d(i) = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
end

histplot(20,d)
legend("10 000 réalisations de la mesure d écart")

seuil=perctl(d,95)
```

C.2 Mesure de l'écart pour la loi exponentielle

```
function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

function t = expo(l,n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    t = -log(1-t)/l
endfunction

lambda=1;

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 1000000000000;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
```

```
format(6)

Ei = 3000 / n // effectif espéré dans chaque classe

N = 10000
d = zeros(1, N);
for i = 1:N
    Oi = histc(C, expo(lambda,3000), normalization = \%f);
    d(i) = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
end

histplot(20,d)
legend("10 000 réalisations de la mesure d écart")

seuil=perctl(d,95)
```

C.3 Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle

```
// Extraction des temps inter-arrivées
t_ia = data(2:$, 2) - data(1:1237, 2);

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

lambda=1/mean(t_ia);

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 100;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
format(6)

Ei = 1237 / n // effectif espéré dans chaque classe

Oi = histc(C, t_ia, normalization = \%f);
d = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
```