Gestion de flux dans le réseau
TD n$^\circ$5
Modélisation mathématique
Q4

Sibylle Roux Juliette Arazo Nicolas Le Gallo
Tanguy Thomas

25 novembre 2017

Table des matières

1 Essaies randoms

1.1 Loi Hypergeometrique

```
function s=hypergeo(N,n,P)
    M=P*N;
    s=0;
    for i=0:n-1
        if rand()<P
            M=M-1;
            N=N-1;
            s=s+1;
            P=M/N;
        else
            N=N-1;
            P=M/N;
        end
    end
endfunction
N=20; n=3; P=2/20;t=[];
for j=1:100
    t(j)=hypergeo(N,n,P); //100 tirages de loi hypergeo
end
frequences=tabul(t)    // on calcule les frequences obtenues
disp(frequences)
```

1.2 Preuve mathématique

Paramètres

$$N = 20; n = 3; m = 2 : P = \frac{2}{20} \tag{1}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{m}{0} \times \binom{N-m}{3}}{\binom{N}{n}} \tag{2}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \times \binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2}} = 0.7158 \tag{3}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2 \times \frac{18 \times 17}{2}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}} = 0.2684 \tag{4}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{1 \times 18}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}} = 0.0158 \tag{5}$$

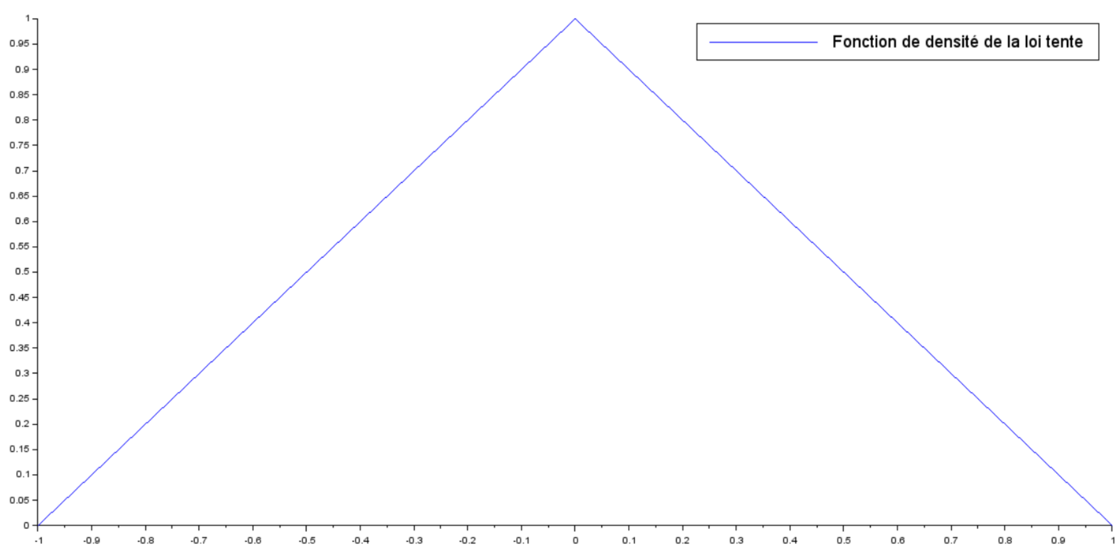
2 Etude mathématique de la loi tente

2.1 Densité

2.1.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} -1 <= x <= 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.2 Représentation graphique



2.2 Fonction de répartition

2.2.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < -1 \\ f(x) = 1 + x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ f(x) = 1 - x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 1 + x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 - x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ 0 + \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ 0 + \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} 0 \,\mathrm{d}x & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{8}$$

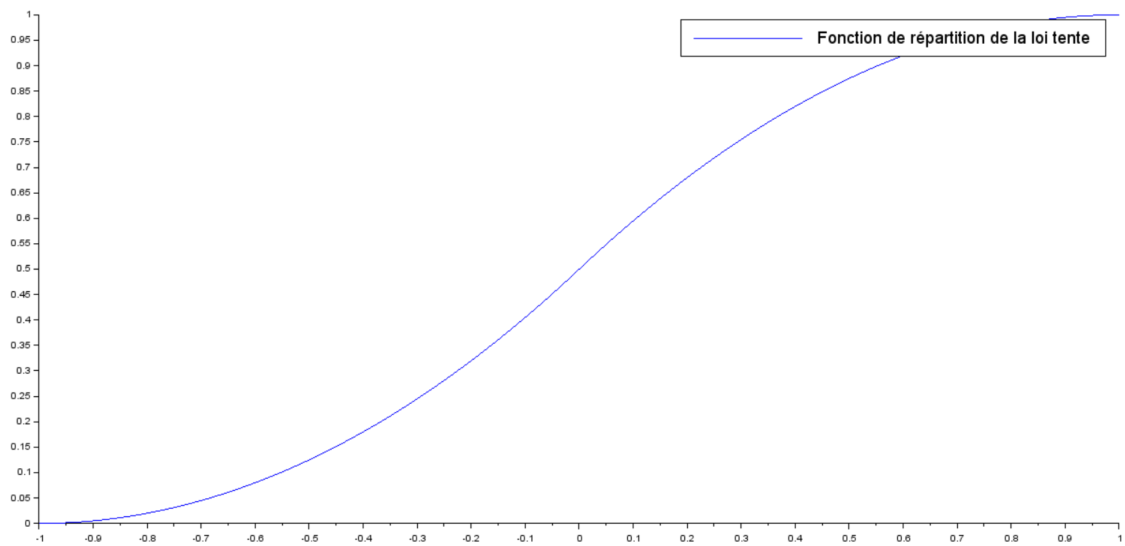
$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-1}^{x} 1 + x \,\mathrm{d}x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 1 - x \,\mathrm{d}x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{9}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} \times (1 + 2x + x^2) & \text{pour } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{2} \times (-1 - 2x + x^2 + 1 - 1) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{11}$$

$$<=> F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{12}$$

2.2.2 Représentation graphique



2.3 Inverse

2.3.1 Fonction

On va donc inverser les deux fonctions de répartitions de la loi tente

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases} \tag{13}$$

$$y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} \qquad y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} \tag{14}$$

$$2y_1 = (1+x)^2 \qquad 2y_2 = 2-(1-x)^2 \tag{15}$$

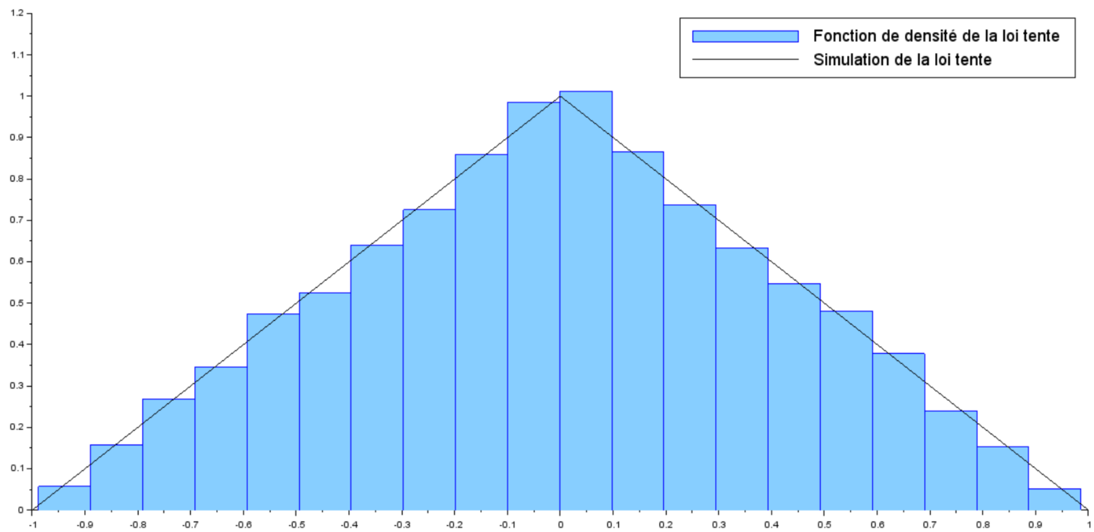
$$\sqrt{2y_1} = 1+x \qquad 2-2y_2 = (1-x)^2 \tag{16}$$

$$x = \sqrt{2y_1} - 1 \qquad x = 1 - \sqrt{2-2y_2} \tag{17}$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 1 & \text{pour} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{2 - 2x} & \text{pour} \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{18}$$

2.3.2 Représentation graphique



3 Inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle

3.1 Fonction

$$y = 1 - e^{-\lambda t} \tag{19}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - y \tag{20}$$

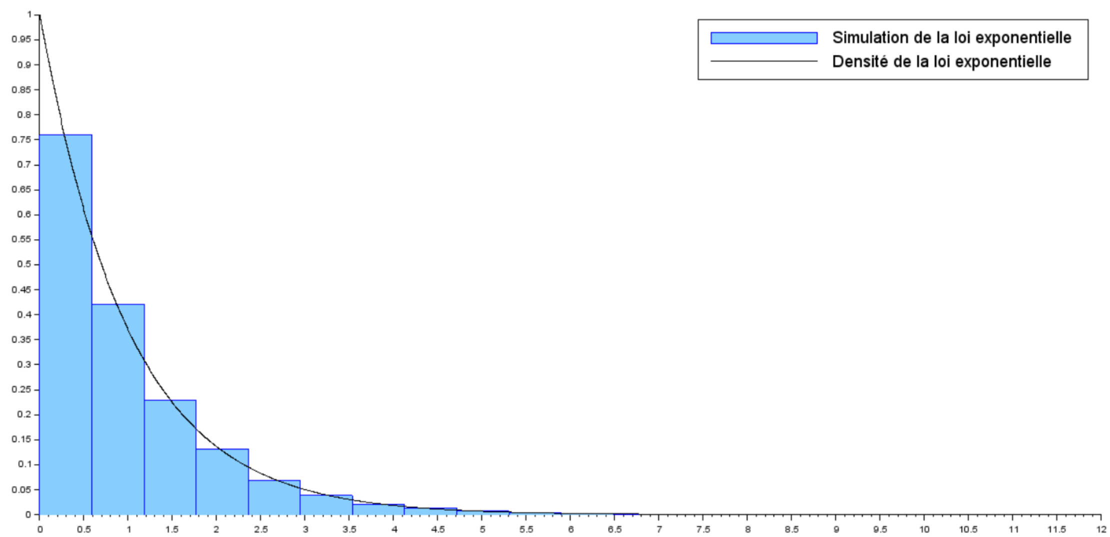
$$-\lambda t = ln(1 - y) \tag{21}$$

$$t = -\frac{ln(1 - y)}{\lambda} \tag{22}$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(t) = -\frac{ln(1 - y)}{\lambda} \tag{23}$$

3.2 Représentation graphique



Première partie
Conclusion

A Etude mathématique de la loi tente

A.1 Représentation graphique de la densité

```
t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=2)
legend("Fonction de densité de la loi tente")
```

A.2 Représentation graphique de la fonction de répartition

```
t = linspace(-1, 1, 301);
R=t;
i1 = t<-1;
i2 = (t>=-1) & (t<=0);
i3 = (t>0) & (t<=1);
i4 = t>1;
R(i1) = 0;
R(i2) = 0.5 + R(i2)+((R(i2)^2)/2)
R(i3) = 0.5 + R(i3)-((R(i3)^2)/2)
R(i4) = 1;
plot2d(t,R,style=2)
legend("Fonction de répartition de la loi tente")
```

A.3 Représentation graphique de la fonction inverse

```
function t = V(n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    i1 = u < 1/2
    i2 = u >= 1/2
    t(i1) = sqrt(2*t(i1))-1;
    t(i2) = 1-sqrt(2-2*t(i2));
endfunction
histplot(20,V(10000))

t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
```

```
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=1)

legend("Fonction de densité de la loi tente","Simulation de la loi tente")
```

B Inverse de la fonction de répartition

B.1 Représentation graphique de la fonction inverse

```
function t = V(l,n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    t = -log(1-t)/l
endfunction
histplot(20,V(1,100000))

a=0:0.01:12;
lambda=1;
b=lambda*exp(-lambda*a);
plot2d2(a,b,style=1)

legend("Simulation de la loi exponentielle","Densité de la loi exponentielle")
```