Gestion de flux dans le réseau
TD n ° 6
Modélisation mathématique
Q4

Sibylle Roux Juliette Arazo Nicolas Le Gallo
Tanguy Thomas

13 décembre 2017

Table des matières

1 Etude de la file M/M/1

1.1 Conception d'une représentation informatique

Pour stocké les valeurs simulés on utilisera un tableau de la forme :

instant t	$q(t)$	incrément

Cette représentation est idéale : elle réunit toutes les informations utiles du fonctionnement des serveurs :

- l'instant où se passe l'evenement
- le type d'evenement (entrée ou sortie d'un client dans le système)
- le nombres de clients présent dans le système

Cette dernière valeur nous sera utile pour avoir la taille de la fille d'attente :

$$taille\_file = max(q(t) - 1, 0) \tag{1}$$

1.2 Conception et développement d'un algorithme de simulation en scilab

Nous avons à notre disposition une fonction SciLab $insere(q, ta, ts)$ avec :

- **q** : Matrice de notre représentation informatique de la file
- **ta** : Temps actuel
- **ts** : Temps de service

```
function newq = insere(q, ta, ts)
    if q($, 1) < ta then
        q($+1,:) = [ta, 1, 1];
    else
        ind = sum(q(:, 1) < ta);
        q(ind+2:$+1, :) = q(ind+1:$, :);
        q(ind+1,:) = [ta, q(ind,2), 1];
        q(ind+1:$,2) = q(ind+1:$,2) + 1;
    end
    s = q($, 1) + ts
    q($+1, :) = [s, q($, 2) - 1, -1];
    newq = q
endfunction
```

Nous avons aussi la fonction $randExp(n, lambda)$ qui genere un vecteur de taille n de valeurs aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = lambda$

```
function t = randExp(n, lambda)
    t = -log(1 - rand(n,1)) / lambda
endfunction
```

C'est à l'aide de ces deux fonctions citées plus haut que l'on peut définir la fonction : $queue(Tmax, lambda, mu)$ où :

- **Tmax** : Instant maximal de la représentation de la file
- **lambda** : λ correspondant aux temps inter-arrivées
- **mu** : λ correspondant aux temps de service

```
function a=queue(Tmax, lambda, mu)
    Q = [0, 0, 0];
    t = 0; // temps courant
    while (t < Tmax)
        t_ia=randExp(1,lambda);
        t=t+t_ia;
        ts=randExp(1,mu);
        Q=insere(Q,t,ts);
    end
    a = Q (Q(:,1)<Tmax,:)
endfunction
```

1.3 Simulation de trajectoires

1.3.1 Simulation de l'évolution d'un file d'attente

Pour simuler les différentes trajectoires, on va utiliser une fonction Scilab $traj(n, lambda, mu)$ où :

- **n** : correspondant à l'instant maximal de la représentation de la file
- **lambda** : λ correspondant aux temps inter-arrivées
- **mu** : λ correspondant aux temps de service

```
function traj(n,lambda,mu)
    for i=1:50 // 50 trajectoires
        Q = queue(n, lambda, mu); // lambda est 5 fois plus grand que mu
        plot2d2(Q(:,1), max(Q(:,2) - 1, 0), style=2) // trace la courbe
    end
endfunction
```

1.3.2 Distribution statistiques de la taille de la file d'attente

Pour avoir la distribution statistique de des trajectoires, on va utiliser une fonction Scilab $distrib(n, lambda, mu)$ où :

- **n** : correspondant à l'instant maximal de la représentation de la file
- **lambda** : λ correspondant aux temps inter-arrivées
- **mu** : λ correspondant aux temps de service

```
function Qi=distrib(n,lambda,mu)
    Qi = zeros(500, 1);
    for i=1:500
        Q = queue(n, lambda, mu);
```

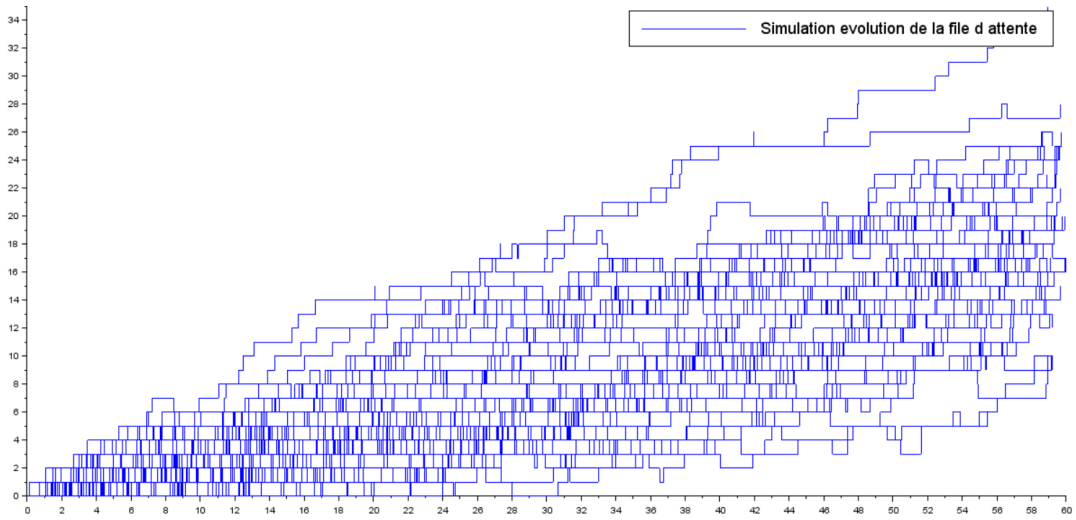
```
        Qi(i) = Q($, 2);
    end
    distr = tabul(Qi,'i')
    bar(distr(:,1),distr(:,2)/500)
    legend("Distribution de Q"+string(n))
endfunction
```

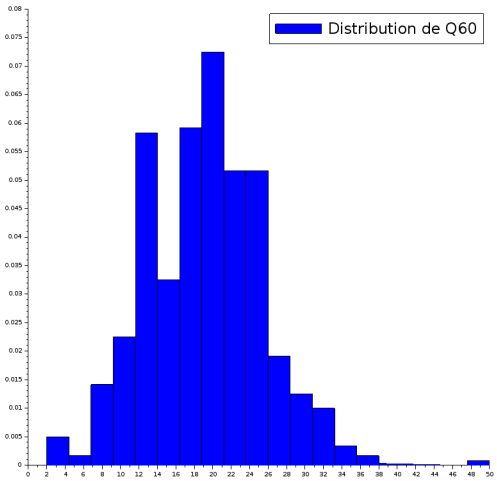
Lorsque l'amplitude sera très grande, on optera plutôt pour une autre version de cette fonction $distribv2(n, lambda, mu)$:

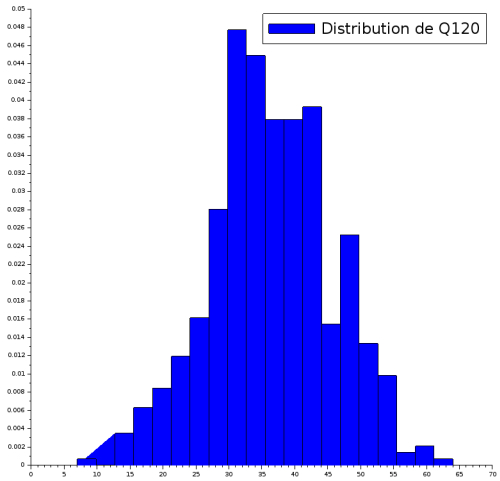
```
function Qi=distribv2(n,lambda,mu)
    Qi = zeros(500, 1);
    for i=1:500
        Q = queue(n, lambda, mu);
        Qi(i) = Q($, 2);
    end
    histplot(20,Qi)
    legend("Distribution de Q"+string(n))
endfunction
```

1.3.3 Temps de service supérieur en moyenne aux temps inter-arrivées

Paramètre : $n = 60$; $lambda = 0.5$; $mu = 0.2$



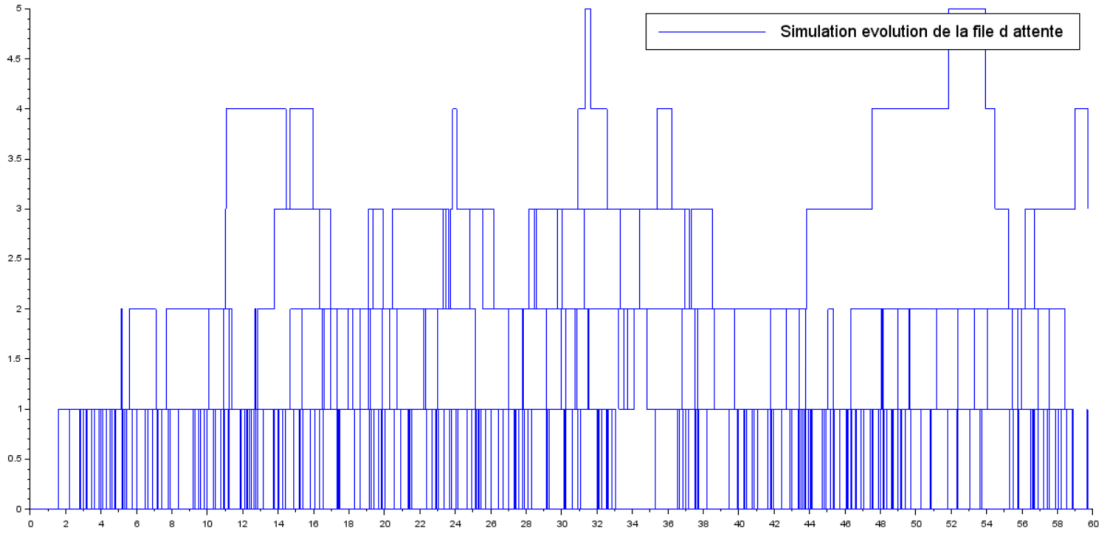


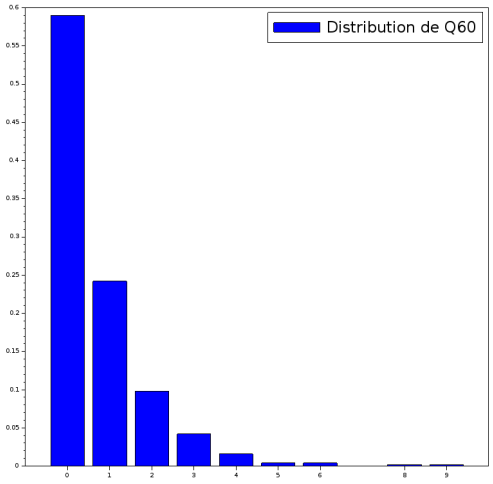


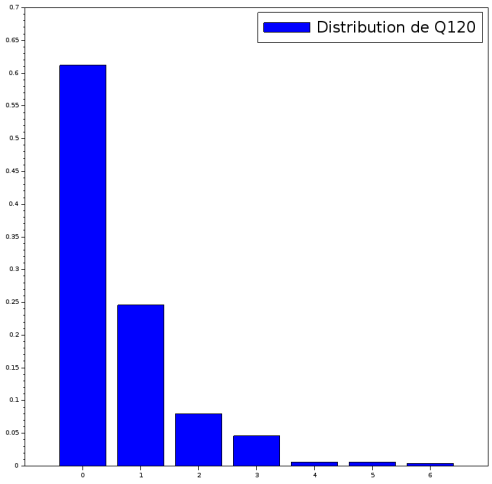
	Q60	Q120
mean()	18.54	36.806
variance()	40.212826	81.158681

1.3.4 Temps de service inférieur en moyenne aux temps inter-arrivées

Paramètre : $n = 60$ **;** $lambda = 0.2$ **;** $mu = 0.5$



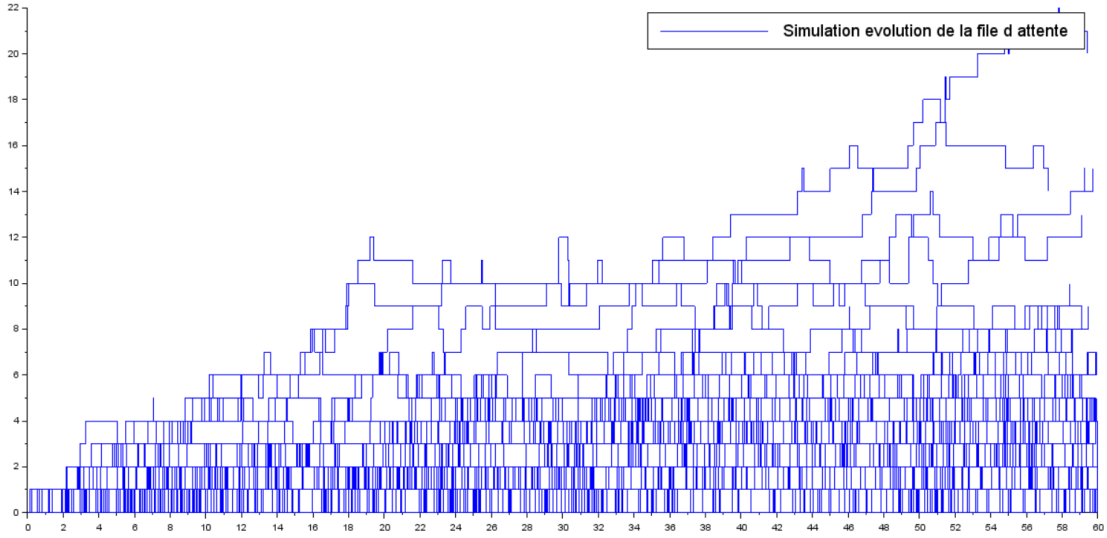


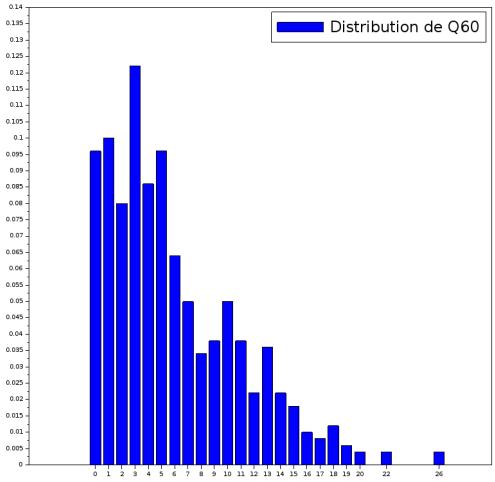


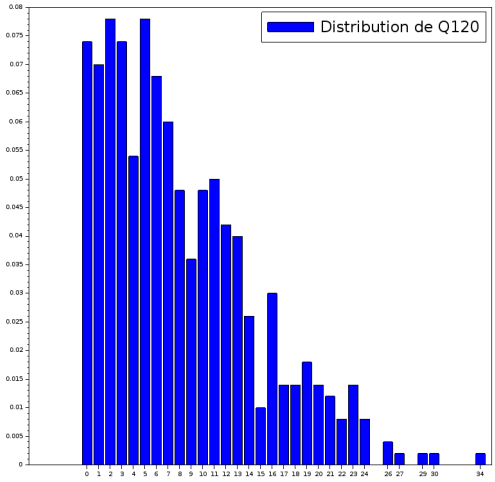
	Q60	Q120
mean()	0.582	0.704
variance()	0.9611984	1.1787415

1.3.5 Temps de service égaux en moyenne aux temps inter-arrivées

Paramètre : $n = 60$ **;** $lambda = 0.5$ **;** $mu = 0.5$







	Q60	Q120
mean()	5.726	8.476
variance()	24.792509	46.350124

2 Etude de la file à 3 serveurs

2.1 Simulation de stratégie circulaire

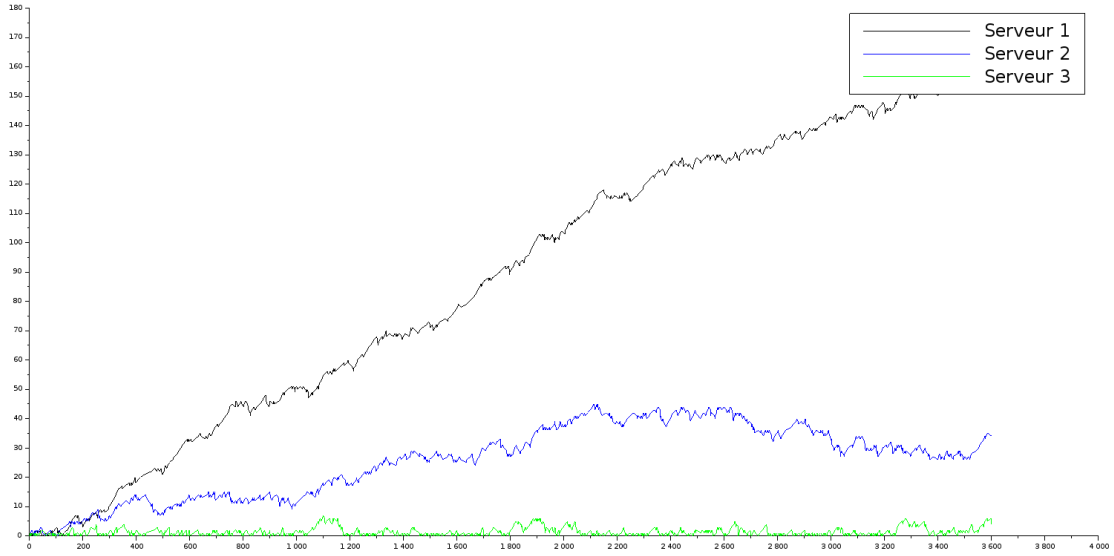
Pour simuler la stratégie circulaire, on va utiliser la fonction $circul(Tmax, lambda, mu)$ où :

- **Tmax** : Durée en seconde de la simulation
- **lambda** : λ correspondant aux temps inter-arrivées
- **mu** : vecteur contenant les λ correspondant aux temps de service des 3 serveurs

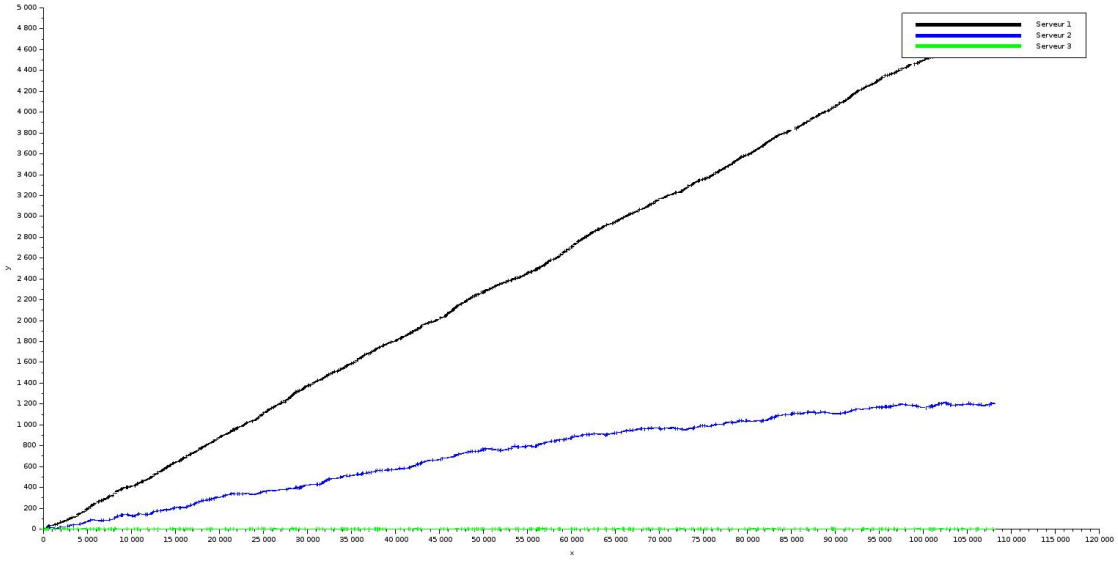
```
function [Q1, Q2, Q3] = circul(Tmax, lambda, mu)
    Q1 = [0, 0, 0]; Q2 = Q1; Q3 = Q1;
    i = 0;
    ta = 0;
    while (ta < Tmax)
        ia = randExp(1, lambda)
        i = i+1
        ta = ta + ia
        nq = modulo(i, 3) + 1
        ts = randExp(1, mu(nq))
        select nq
        case 1.
            Q1 = insere(Q1, ta, ts)
        case 2
```

```
            Q2 = insere(Q2, ta, ts)
        else
            Q3 = insere(Q3, ta, ts)
        end
    end
    Q1 = Q1(Q1(:,1)<Tmax,:)
    Q2 = Q2(Q2(:,1)<Tmax,:)
    Q3 = Q3(Q3(:,1)<Tmax,:)
endfunction
```

Dans cette fonction, on utilise 2 autres fonctions :



Simulation sur 1 heure



Simulation sur 30 heures

2.1.1 Etude numérique du temps de traversée du système pour une requête

Outil de calcul Pour calculer les temps de traversée du système, on a créé une fonction Scilab $texecute(Q1, Q2, Q3)$ où :

— **Q1,Q2,Q3** : correspondent aux représentation des files

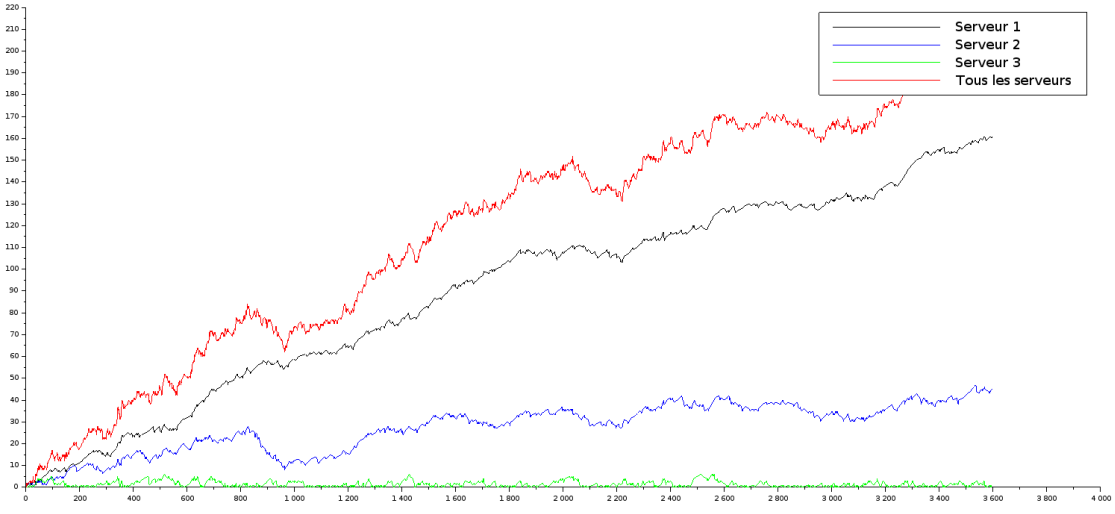
```
function [t1,t2,t3,t_mr] = texecute(Q1,Q2,Q3)
    //requetes sorties
    Q_s1 = Q1(Q1(:,3) == -1,1)
    Q_s2 = Q2(Q2(:,3) == -1,1)
    Q_s3 = Q3(Q3(:,3) == -1,1)

    //length file d'attentes requetes sorties
    l_s1 = length(Q_s1)
    l_s2 = length(Q_s2)
    l_s3 = length(Q_s3)

    //requetes entrées
    Q_re1 = Q1(Q1(:,3) == 1,1)
    Q_re2 = Q2(Q2(:,3) == 1,1)
    Q_re3 = Q3(Q3(:,3) == 1,1)

    //nb requetes entrées = nb requetes sorties
```

```
    Q_e1 = Q_re1(1:l_s1,1)
    Q_e2 = Q_re2(1:l_s2,1)
    Q_e3 = Q_re3(1:l_s3,1)

    //temps sortie - temps entrée
    t_e1 = Q_s1 - Q_e1
    t_e2 = Q_s2 - Q_e2
    t_e3 = Q_s3 - Q_e3

    //temps moyen requete par serveur
    t1 = mean(t_e1)
    t2 = mean(t_e2)
    t3 = mean(t_e3)

    //temps moyen systeme
    t_mr = (t1+t2+t3)/3
endfunction
```

Résultats pour une simulation Les résultats peuvent varier, mais sont proches de ces résultats :

	Serveur 1	Serveur 2	Serveur 3	Tous
moyenne	820.60768	246.56614	12.08801	359.75394

2.1.2 Etude numérique du nombre de requêtes dans le système



2.1.3 Recherche d'un régime stationnaire

2.2 Simulation de la stratégie d'affection aléatoire proportionnelle

2.2.1 Simulation

Pour simuler la stratégie d'affectation aléatoire proportionnelle, on utilise la fonction $aleaProp(Tmax, lambda, mu)$ où :

- **Tmax** : Durée en seconde de la simulation
- **lambda** : λ correspondant aux temps inter-arrivées
- **mu** : vecteur contenant les λ correspondant aux temps de service des 3 serveurs

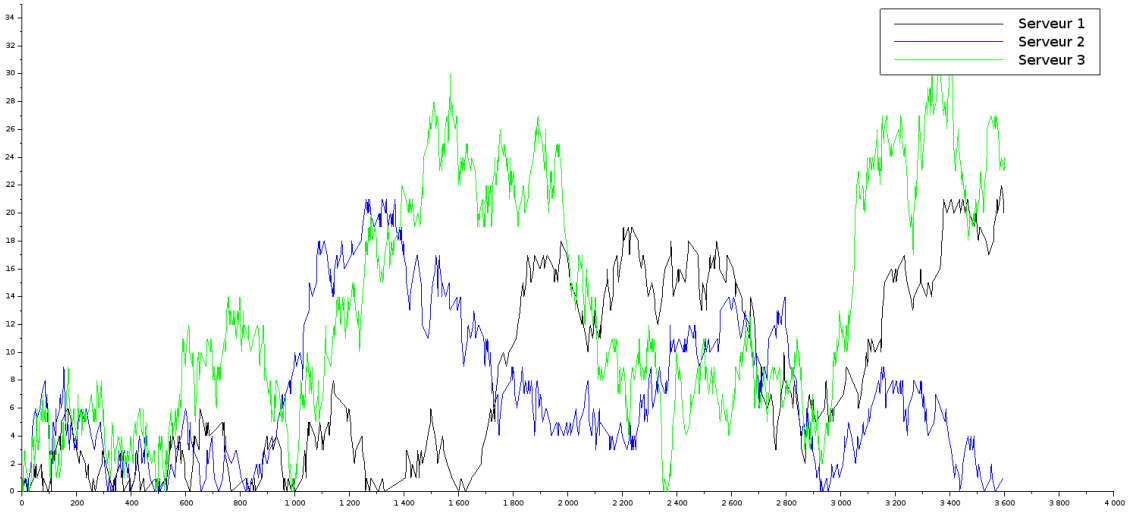
```
function [Q1, Q2, Q3] = aleaProp(Tmax, lambda, mu)
    Q1 = [0, 0, 0]; Q2 = Q1; Q3 = Q1;
    i = 0;
    ta = 0;
    while (ta < Tmax)
        ia = randExp(1, lambda)
        i = i+1
        ta = ta + ia
        nq = num_serv()
        ts = randExp(1, mu(nq))
        select nq
        case 1
            Q1 = insere(Q1, ta, ts)
        case 2
            Q2 = insere(Q2, ta, ts)
        else
            Q3 = insere(Q3, ta, ts)
        end
    end
    Q1 = Q1(Q1(:,1)<Tmax,:)
    Q2 = Q2(Q2(:,1)<Tmax,:)
    Q3 = Q3(Q3(:,1)<Tmax,:)
endfunction
```

Dans la fonction précédente, on utilise la fonction suivante : $num\_serv()$, qui génére le numéro de serveur à allouer généré aléatoirement de manière proportionnelle aux temps de service des différents serveurs.

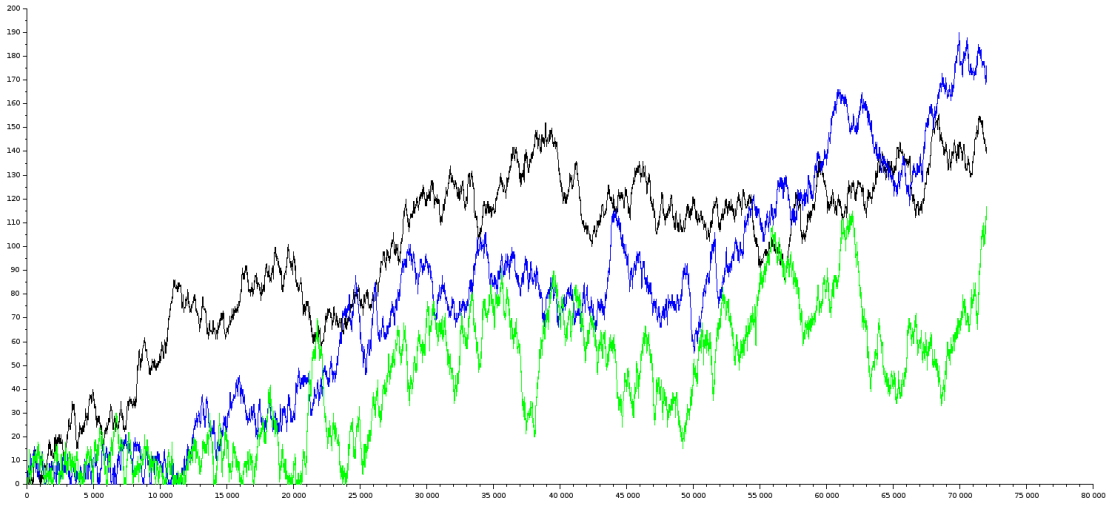
```
function nq = num_serv()
u = rand()
if u < 0.2 then
nq = 1
elseif u < 0.5
nq = 2
```

```
else
nq = 3
end
endfunction
```

Résultats



Représentation de l'évolution des files d'attente pendant 20 heures



2.2.2 Etude numérique du temps de traversée du système pour une requête

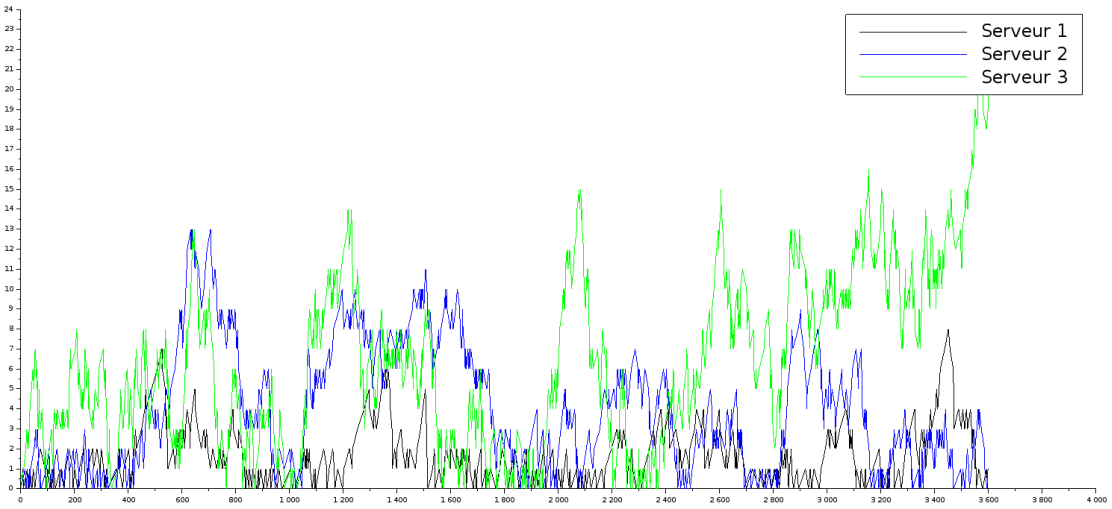
Résultats pour une simulation Les résultats peuvent varier, mais sont proches de ces résultats :

	Serveur 1	Serveur 2	Serveur 3	Tous
moyenne	182.58103	101.34571	115.17009	133.03228

On remarque que les résultats semblent plus équilibrés, et que les serveurs sont généralement mieux utilisés qu'avec la stratégie circulaire.

2.3 Autres stratégies, aléatoires ou/et déterministes

2.3.1 Stratégie semi-circulaire



Choix du serveur	Temps restants S1	Temps restants S3	Temps restant S2
1	15		
3	12	6	
2	9	3	10
3	6	6	7
3	3	9	4
1	15	6	1
2	12	3	10
3	9	6	7
3	6	9	4
2	3	6	11
1	15	3	8
3	12	6	5
2	9	3	12
3	6	6	9
3	3	3	6
1	15	0	3
2	12	0	10
3	9	6	7
3	6	9	4
2	3	6	11
1	15	3	8

Après etude, on remarque une suite récurrente dans l'affectation aux serveur le plus adéquat :

$$[1, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 2]$$

On obtient donc la fonction suivante :

```
function [Q1, Q2, Q3] = semicircul(Tmax, lambda, mu)
    Q1 = [0, 0, 0]; Q2 = Q1; Q3 = Q1;
    tab=[1,3,2,3,3,1,2,3,3,2];
    ta = 0;
    while (ta < Tmax)
        for i=1:10
            nq=tab(i);
            ia = randExp(1, lambda)
            ta = ta + ia
            ts = randExp(1, mu(nq))
            select nq
            case 1
                Q1 = insere(Q1, ta, ts)
            case 2
                Q2 = insere(Q2, ta, ts)
            else
```

```
                Q3 = insere(Q3, ta, ts)
            end
        end
    end
    Q1 = Q1(Q1(:,1)<Tmax,:)
    Q2 = Q2(Q2(:,1)<Tmax,:)
    Q3 = Q3(Q3(:,1)<Tmax,:)
endfunction
```

3 Conclusion