

Gestion de flux dans le réseau

TD n ° 5

Modélisation mathématique

Q4

Sibylle Roux

Juliette Arazo

Nicolas Le Gallo

Tanguy Thomas

29 novembre 2017

Table des matières

1	Essais randoms	3
1.1	Loi Hypergeometrique	3
1.2	Preuve mathématique	3
2	Etude mathématique de la loi tente	4
2.1	Densité	4
2.1.1	Fonction	4
2.1.2	Représentation graphique	5
2.2	Fonction de répartition	6
2.2.1	Fonction	6
2.2.2	Représentation graphique	7
2.3	Inverse	7
2.3.1	Fonction	7
2.3.2	Représentation graphique	8
3	Inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle	8
3.1	Fonction	8
3.2	Représentation graphique	9
4	Mesure de l'écart	10
4.1	Mesure de l'écart pour la loi tente	10
4.2	Mesure de l'écart pour la loi exponentielle	11
4.3	Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle	11
5	Conclusion	12
A	Etude mathématique de la loi tente	13
A.1	Représentation graphique de la densité	13
A.2	Représentation graphique de la fonction de répartition	13
A.3	Représentation graphique de la fonction inverse	13
B	Inverse de la fonction de répartition	14
B.1	Représentation graphique de la fonction inverse	14
C	Mesure de l'écart	14
C.1	Mesure de l'écart pour la loi tente	14
C.2	Mesure de l'écart pour la loi exponentielle	15
C.3	Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle	16
C.4	Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur 1	16
C.5	Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur 2	17
C.6	Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur 3	18

1 Essais randoms

1.1 Loi Hypergeometrique

1.2 Preuve mathématique

Paramètres

$$N = 20; n = 3; m = 2 : P = \frac{2}{20} \quad (1)$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{m}{0} \times \binom{N-m}{3}}{\binom{N}{n}} \quad (2)$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \times \binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}} = 0.7158 \quad (3)$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2 \times \frac{18 \times 17}{2}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}} = 0.2684 \quad (4)$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{1 \times 18}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}} = 0.0158 \quad (5)$$

```
clear
clc
function s=hypergeo(N,n,P)
    M=P*N;
    s=0;
    for i=0:n-1
        if rand()<P
            M=M-1;
            N=N-1;
            s=s+1;
            P=M/N;
        else
```

```

        N=N-1;
        P=M/N;
    end
end
endfunction
N=20; n=3; P=2/20;t=[]; nb=10000
for j=1:nb+1
    t(j)=hypergeo(N,n,P); //100 tirages de loi hypergeo
end
frequences=tabul(t)// on calcule les frequences obtenues
frequences(:,2)=frequences(:,2)/nb
disp(frequences)

```

Resultats d'un essai

nombre de succès	0	1	2
resultats programme	0.0172	0.2728	0.7101
resultats mathématiques	0.0158	0.2684	0.7158

Les valeurs obtenues par le programme sont proches des valeurs mathématiques. On peut en conclure que le programme retranscrit bien une loi hypergéométrique.

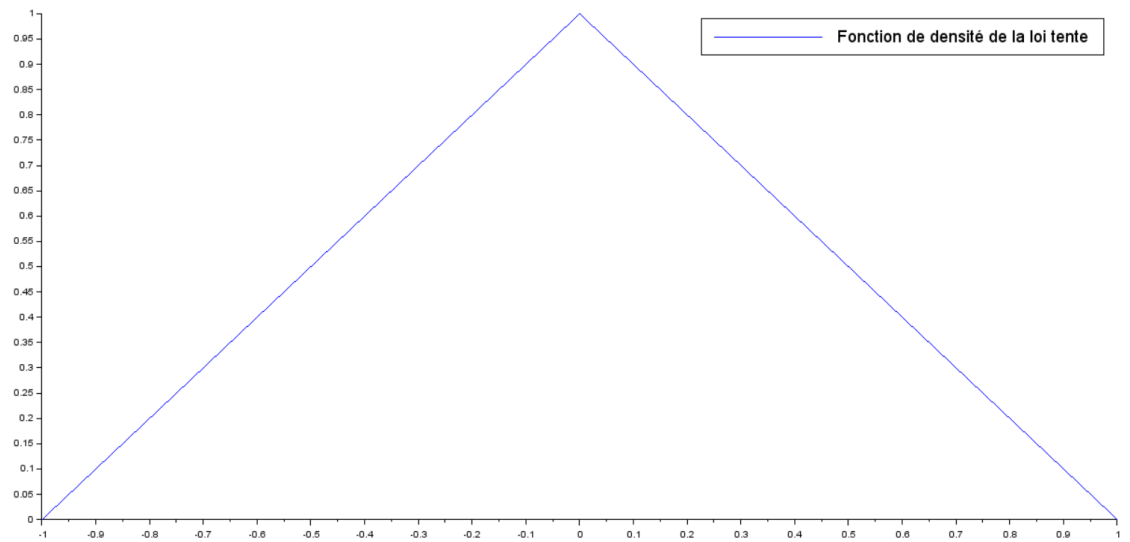
2 Etude mathématique de la loi tente

2.1 Densité

2.1.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.2 Représentation graphique



2.2 Fonction de répartition

2.2.1 Fonction

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < -1 \\ f(x) = 1 + x & \text{pour } -1 < x < 0 \\ f(x) = 1 - x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \, dx & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^x 1 + x \, dx & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^0 1 + x \, dx + \int_0^x 1 - x \, dx & \text{pour } 0 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^0 1 + x \, dx + \int_0^1 1 - x \, dx + \int_1^x 0 \, dx & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ 0 + \int_{-1}^x 1 + x \, dx & \text{pour } -1 < x < 0 \\ 0 + \frac{1}{2} + \int_0^x 1 - x \, dx & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_1^x 0 \, dx & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

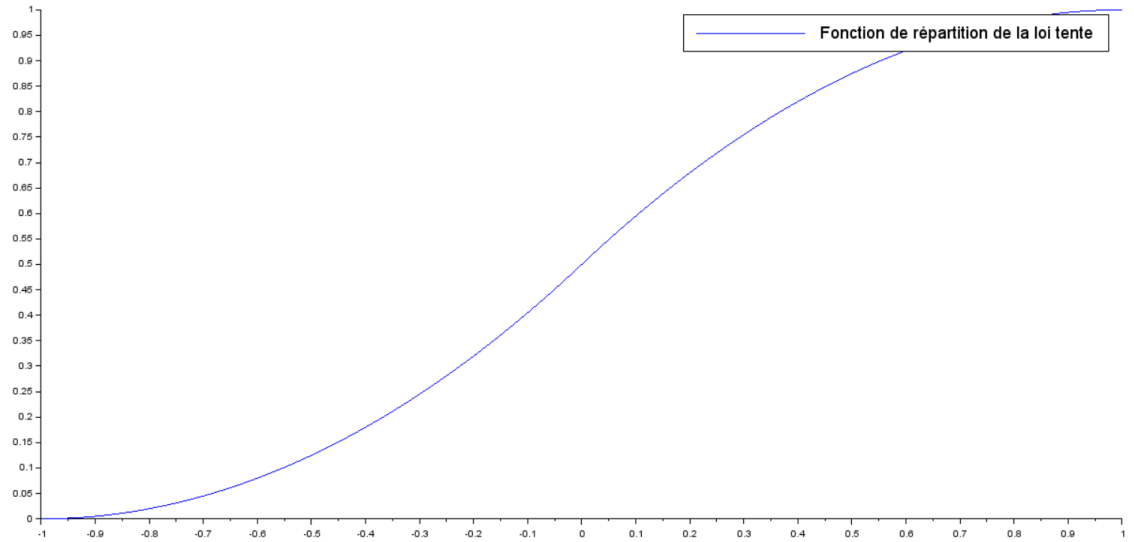
$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \int_{-1}^x 1 + x \, dx & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \int_0^x 1 - x \, dx & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{1}{2} \times (1 + 2x + x^2) & \text{pour } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{2} \times (-1 - 2x + x^2 + 1 - 1) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \\ \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \quad (12)$$

2.2.2 Représentation graphique



2.3 Inverse

2.3.1 Fonction

On va donc inverser les deux fonctions de répartitions de la loi tente (??)

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} & \text{pour } -1 < x < 0 \\ y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$y_1 = \frac{(1+x)^2}{2} \quad y_2 = \frac{2-(1-x)^2}{2} \quad (14)$$

$$2y_1 = (1+x)^2 \quad 2y_2 = 2-(1-x)^2 \quad (15)$$

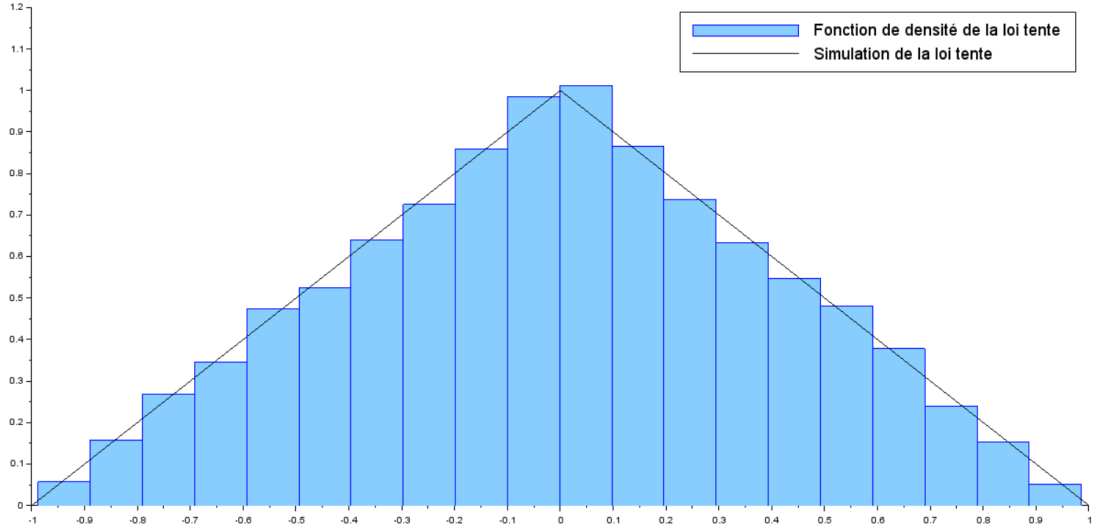
$$\sqrt{2y_1} = 1+x \quad 2-2y_2 = (1-x)^2 \quad (16)$$

$$x = \sqrt{2y_1} - 1 \quad x = 1 - \sqrt{2-2y_2} \quad (17)$$

Donc la fonction inverse est :

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 1 & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{2 - 2x} & \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad (18)$$

2.3.2 Représentation graphique



3 Inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle

3.1 Fonction

$$y = 1 - e^{-\lambda t} \quad (19)$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - y \quad (20)$$

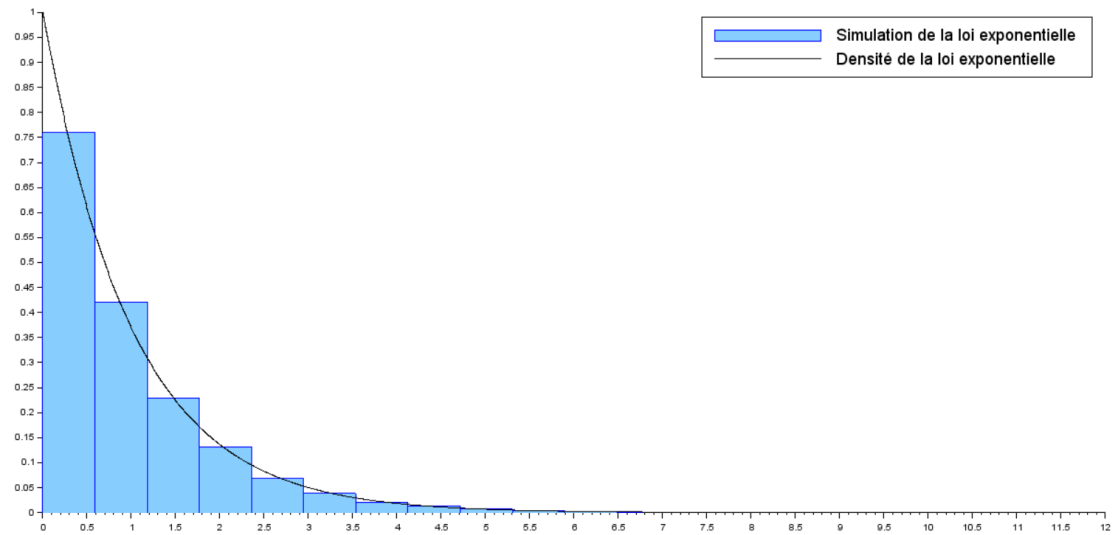
$$-\lambda t = \ln(1 - y) \quad (21)$$

$$t = -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda} \quad (22)$$

Donc la fonction inverse est :

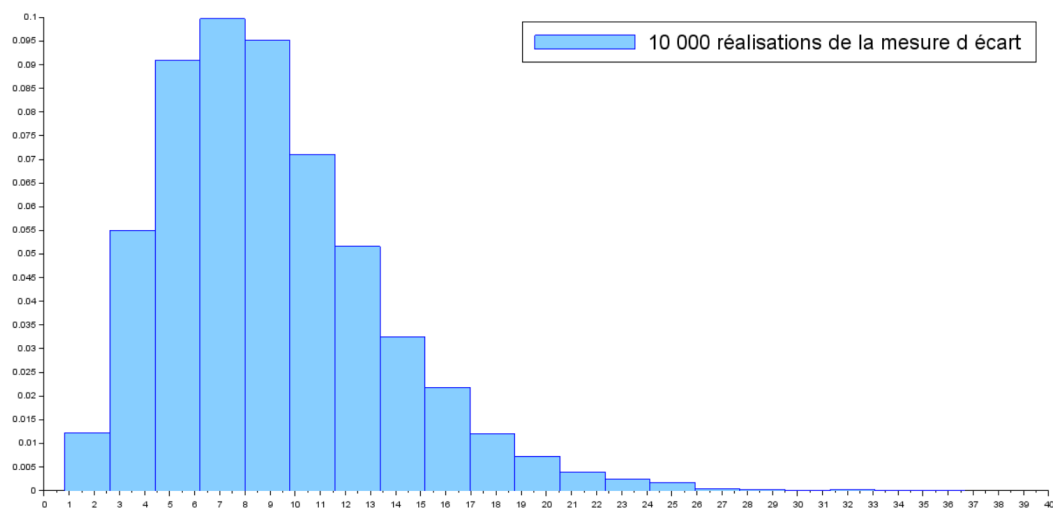
$$F^{-1}(t) = -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda} \quad (23)$$

3.2 Représentation graphique



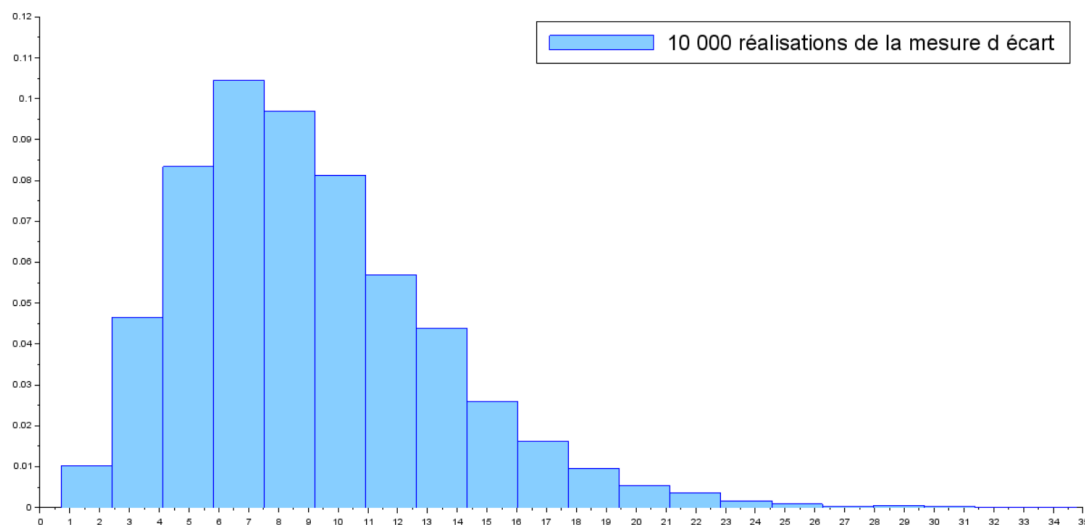
4 Mesure de l'écart

4.1 Mesure de l'écart pour la loi tente



Ce graphique représente l'histogramme de l'écart entre les valeurs théoriques et empiriques de 10 000 réalisations, pour la loi tente. On peut voir que la grande majorité des écarts se situe entre 5 et 10. Cependant, on constate qu'à cause de la fluctuation d'échantillonnage, certains écarts sont très importants. Il est donc essentiel de se donner une marge d'erreur, afin de pouvoir affirmer avec une relative certitude si un échantillon donné suit une loi tente. Dans notre cas, on sait que 95% des écarts sont inférieurs à 16.65 : on pourra donc conclure qu'un échantillon suit une loi tente si il ne dépasse pas le seuil de 16.65.

4.2 Mesure de l'écart pour la loi exponentielle



Comme pour le graphique précédent, celui-ci représente l'histogramme des écarts sur 10 000 réalisations, cette fois-ci pour la loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$. Ici, la plupart des écarts se situent entre 4 et 11. Néanmoins on observe toujours des valeurs très distante de la moyenne, on va donc aussi utiliser une marge d'erreur à 95% : dans ce cas, 95% des écarts sont inférieurs à 17,1, qui sera donc le seuil à ne pas dépasser pour qu'un échantillon suive une loi exponentielle.

4.3 Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle

Lorsqu'on calcule l'écart entre les mesures réalisées dans le dernier rapport (temps inter-arrivées), qui semblaient suivre une loi exponentielle, et une loi exponentielle, toutes deux de même paramètre $\lambda = 1/\text{moyenne}(t_i a)$, l'écart mesuré est de 14 . Or, 14 est inférieur au seuil 17, on peut donc estimer de façon assez certaine que les temps inter-arrivées suivent une loi exponentielle.

Nous allons faire de même pour les temps de service des trois serveurs, qui semblent aussi suivre des loi exponentielles de paramètre $\lambda = 1/\text{moyenne}(\text{tempsdeservice})$. On obtient les écarts suivants :

Serveur	1	2	3
Ecarts	8.1	4.02	7.07

Ainsi, on constate que les trois serveurs ont des temps de service qui suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/moyenne(tempsdeservice)$.

5 Conclusion

Notre hypothèse initiale était que les temps inter-arrivés et les temps de service des 3 serveurs suivent tous une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/moyenne(valeurs)$, propre à chacun. Grâce à des simulations de loi exponentielle, nous avons pu déterminer un seuil au-dessus duquel les écarts entre valeurs théoriques et empiriques seraient trop grands pour appartenir à la même loi. En calculant les écarts entre la simulation de loi exponentielle et les données des serveurs qui semblent suivre une loi exponentielle, nous avons pu déterminer que ceux-ci étaient en-dessous du seuil, ce qui confirme donc notre hypothèse initiale.

A Etude mathématique de la loi tente

A.1 Représentation graphique de la densité

```
t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=2)
legend("Fonction de densité de la loi tente")
```

A.2 Représentation graphique de la fonction de répartition

```
t = linspace(-1, 1, 301);
R=t;
i1 = t<-1;
i2 = (t>=-1) & (t<=0);
i3 = (t>0) & (t<=1);
i4 = t>1;
R(i1) = 0;
R(i2) = 0.5 + R(i2)+((R(i2)^2)/2)
R(i3) = 0.5 + R(i3)-((R(i3)^2)/2)
R(i4) = 1;
plot2d(t,R,style=2)
legend("Fonction de répartition de la loi tente")
```

A.3 Représentation graphique de la fonction inverse

```
function t = tente(n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    i1 = u < 1/2
    i2 = u >= 1/2
    t(i1) = sqrt(2*t(i1))-1;
    t(i2) = 1-sqrt(2-2*t(i2));
endfunction
histplot(20,tente(10000))

// Fonction de densité

t = linspace(-1, 1, 301);
T = t;
i1 = (t>=-1) & (t<=1);
```

```

i2 = t>1 & t<-1;
T(i1)=1-abs(T(i1));
T(i2)=0
plot2d(t,T,style=1)

legend("Fonction de densité de la loi tente","Simulation de la loi tente")

```

B Inverse de la fonction de répartition

B.1 Représentation graphique de la fonction inverse

```

function t = expo(l,n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    t = -log(1-t)/l
endfunction
histplot(20,expo(1,100000))

// Fonction de densité de la loi exponentielle

a=0:0.01:12;
lambda=1;
b=lambda*exp(-lambda*a);
plot2d2(a,b,style=1)

legend("Simulation de la loi exponentielle","Densité de la loi exponentielle")

```

C Mesure de l'écart

C.1 Mesure de l'écart pour la loi tente

```

function q = quantile(p)
    if p < 0.5 then
        q = sqrt(2*p)-1;
    else
        q = 1-sqrt(2-2*p)
    end
endfunction

function t = tente(n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    i1 = u < 1/2
    i2 = u >= 1/2
    t(i1) = sqrt(2*t(i1))-1;

```

```

        t(i2) = 1-sqrt(2-2*t(i2));
endfunction

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = -1; C(n+1) = 1;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(i/n);
end
format(6)

Ei = 3000 / n // effectif espéré dans chaque classe

N = 10000
d = zeros(1, N);
for i = 1:N
    Oi = histc(C, tente(3000), normalization = '%f');
    // calcul de la différence et stockage dans le tableau d
    d(i) = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
end

histplot(20,d)
legend("10 000 réalisations de la mesure d'écart")

seuil=perctl(d,95)

```

C.2 Mesure de l'écart pour la loi exponentielle

```

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

function t = expo(l,n)
    u = rand(n, 1);
    t = u
    t = -log(1-t)/l
endfunction

lambda=1;

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 10000000000000;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end

```

```

format(6)

Ei = 3000 / n // effectif espéré dans chaque classe

N = 10000
d = zeros(1, N);
for i = 1:N
    Oi = histc(C, expo(lambda,3000), normalization = \%f);
    d(i) = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
end

histplot(20,d)
legend("10 000 réalisations de la mesure d écart")

seuil=perctl(d,95)

```

C.3 Mesure de l'écart entre les données et la loi exponentielle

```

// Extraction des temps inter-arrivées
t_ia = data(2:$, 2) - data(1:1237, 2);

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

lambda=1/mean(t_ia);

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 100;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
format(6)

Ei = 1237 / n // effectif espéré dans chaque classe

Oi = histc(C, t_ia, normalization = \%f);
d = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);

```

C.4 Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur 1

```

// Extraction des temps de service
index_bool = ( data(:, 3) == 1 )

```



```

tabS1 = data(index_bool, :)
t_s1 = tabS1(1:$,4);

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

lambda=1/mean(t_s1);

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 10000;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
format(6)

Ei = 412 / n // effectif espéré dans chaque classe

O1 = histc(C, t_s1, normalization = '%f');
d = sum((O1 - Ei) .^2 ./ Ei);

```

C.5 Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur 2

```

// Extraction des temps de service
index_bool = ( data(:, 3) == 2 )
tabS1 = data(index_bool, :)
t_s1 = tabS1(1:$,4);

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

lambda=1/mean(t_s1);

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 10000;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
format(6)

Ei = 413 / n // effectif espéré dans chaque classe

```

```
Oi = histc(C, t_s1, normalization = '%f');
d = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
```

C.6 Mesure de l'écart pour les temps de service du serveur

3

```
// Extraction des temps de service
index_bool = ( data(:, 3) == 3 )
tabS1 = data(index_bool, :)
t_s1 = tabS1(1:$,4);

function q = quantile(l,p)
    q = -log(1-p)/l
endfunction

lambda=1/mean(t_s1);

n = 10;
C = zeros(1, n + 1)
C(1) = 0; C(n+1) = 10000;
for i = 1:(n-1)
    C(i+1) = quantile(lambda,i/n);
end
format(6)

Ei = 413 / n // effectif espéré dans chaque classe

Oi = histc(C, t_s1, normalization = '%f');
d = sum((Oi - Ei) .^2 ./ Ei);
```