复杂网络

高一鸣　王方正　邵逸岚　庞冰瑶　赵帅　张永辉

计算机学院

2018.04.27

马尔科夫场

王方正

马尔科夫随机场，又称为概率无向图模型，是一个可以由无向图表示的联合概率分布。

图

图是由结点及连接结点的边组成的集合。结点和边分别记作v和e，结点和边的集合分别记作V和E，图记作$G = (V, E)$。

无向图是指边没有方向的图。

概率图模型

概率图模型（PGM）是由图表示的概率分布。设有联合概率分布$P(Y)$,$Y \in \mathcal{Y}$是一组随机变量。由无向图$G = (V, E)$表示概率分布，即在图G中，结点$v \in V$表示一个随机变量Y_v，$Y = (Y_v)_{v \in V}$；边$e \in E$表示随机变量之间的概率依赖关系。

马尔可夫性：三者等价

- 成对马尔可夫性:$P(Y_u, Y_v|Y_O) = P(Y_u|Y_O)P(Y_v|Y_O)$
- 局部马尔可夫性:$P(Y_v, Y_O|Y_W) = P(Y_v|Y_W)P(Y_O|Y_W)$
- 全局马尔可夫性:$P(Y_A, Y_B|Y_C) = P(Y_A|Y_C)P(Y_B|Y_C)$

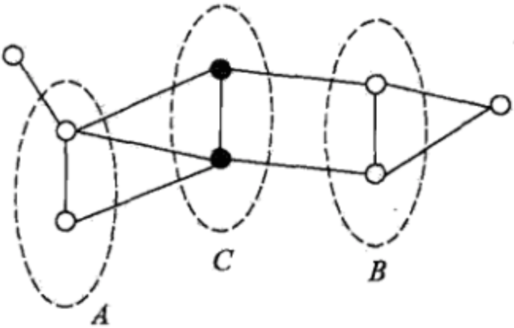

图 1: 局部马尔可夫性

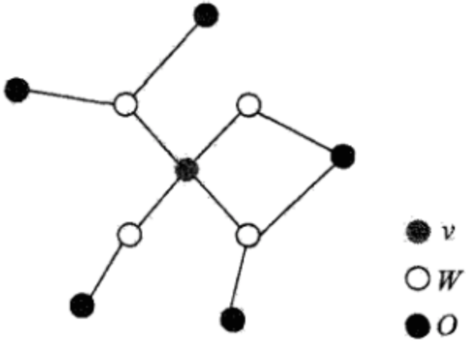

图 2: 全局马尔可夫性

概率无向图模型

设有联合概率分布$P(Y)$，由无向图$G=(V,E)$表示，在图G中，结点表示随机变量，边表示随机变量之间的依赖关系。如果联合概率分布$P(Y)$满足成对、局部或全局马尔可夫性，就称此联合概率分布为概率无向图模型或马尔可夫随机场。

团

无向图G中任何两个结点均有边连接的结点子集称为团。

最大团

若C是无向图G的一个团，并且不能再加进任何一个G的结点使其成为一个更大的团，则称此C为最大团。

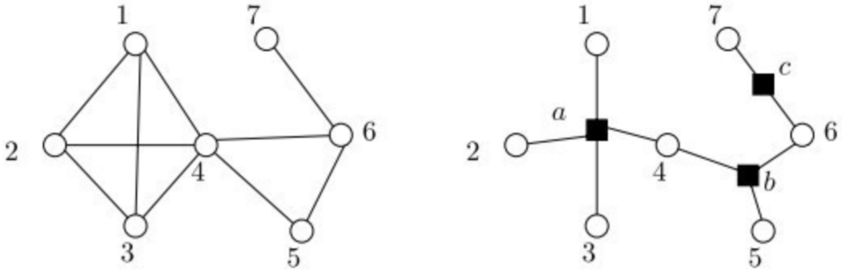

图 3: 无向图与因子图

将概率无向图模型的联合概率分布表示为其最大团上的随机变量的函数的乘积形式的操作，称为概率无向图模型的因子分解。具体公式为：

$$P(Y) = \frac{1}{Z} \prod_{C} \Psi_C(Y_C)$$

其中，Z是规范化因子，由式

$$Z = \sum_{Y} \prod_{C} \Psi_C(Y_C)$$

给出。规范化因子保证$P(Y)$构成一个概率分布。

函数$\Psi_C(Y_C)$称为势函数，通常定义为指数函数：

$$\Psi_C(Y_C) = exp^{-E(Y_C)}$$

势函数的作用是刻画变量之间的相关关系，它是非负函数，并且在所偏好的变量取值上有较大函数值。

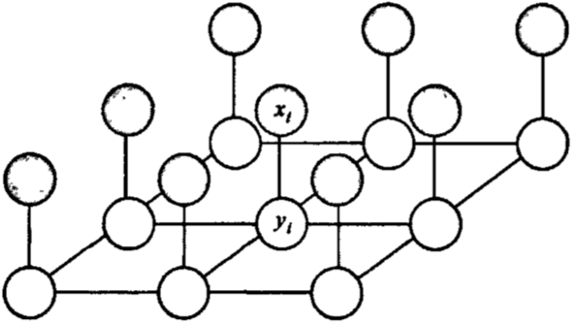

图 4: Pairwise MRF 模型

贝叶斯网络

邵逸岚

贝叶斯公式：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

后验概率=(相似度*先验概率)/标准化常量

贝叶斯网络(Bayesian Network)是一种经典的概率图模型，它借助有向无环图(Directed Acyclic Graph, DAG)来刻画属性之间的依赖关系，并使用条件概率表(Conditional Probability Table, CPT)来描述属性的**联合**概率分布。

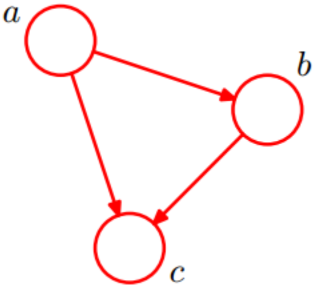

图 5: 贝叶斯网络结构图

贝叶斯网络B由结构G和参数Θ构成，即$B = \langle G, \Theta \rangle$。给定父结点集，假设每个属性与它的非后裔属性独立，于是将属性$x_1, x_2, ..., x_d$的联合概率分布定义为:

$$P_B(x_1, x_2, ..., x_d) = \prod_{i=1}^{d} P_B(x_i|\pi_i) = \prod_{i=1}^{d} \theta_{x_i|\pi_i}$$

以5中的网络结构为例，联合概率分布可定义为：

$$P(a, b, c) = P(a)P(b|a)P(c|a, b)$$

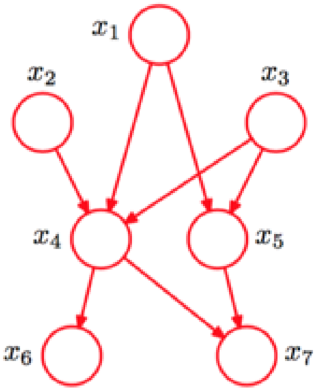

图 6: 较复杂的贝叶斯网络

其联合概率分布可定义为：

$$P(x_1, ..., x_7) = P(x_1)P(x_2)P(x_3)P(x_4|x_1, x_2, x_3)$$
$$p(x_5|x_2, x_3)P(x_6|x_4)P(x_7|x_4, x_5)$$

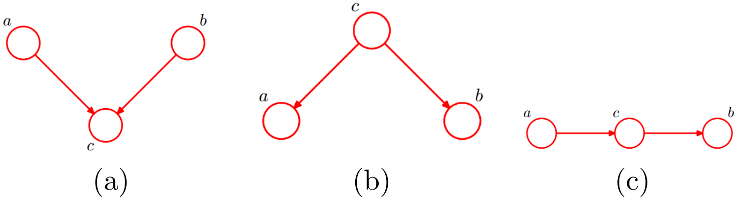

图 7: 贝叶斯网络中属性的典型依赖关系

$$(a)\sum_c P(a,b,c)=\sum_c P(a)P(b)P(c|a,b)$$
$$\Rightarrow P(a,b)=P(a)P(b)$$

$$(b)P(a,b,c)=P(c)P(a|c)P(b|c)$$
$$\Rightarrow P(a,b|c)=P(a|c)P(b|c)$$

$$\begin{aligned}(c)P(a,b|c)&=P(a,b,c)/P(c)\\&=P(a)P(c|a)P(b|c)/P(c)\\&=P(a,c)P(b|c)/P(c)\\&=P(a|c)P(b|c)\end{aligned}$$

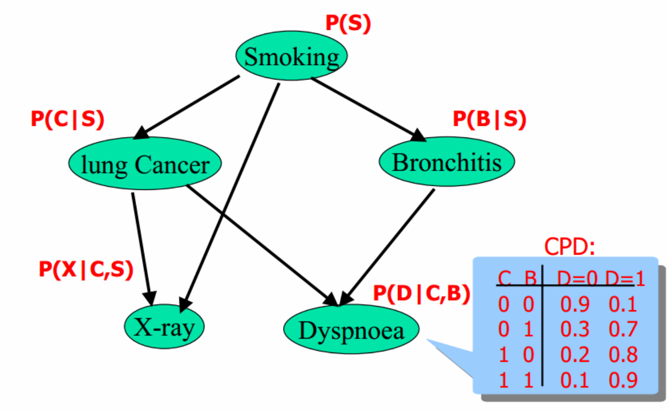
P(S)
Smoking
P(C|S)
lung Cancer
P(B|S)
Bronchitis
P(X|C,S)
X-ray
Dyspnoea
P(D|C,B)
CPD:
C B D=0 D=1
0 0 0.9 0.1
0 1 0.3 0.7
1 0 0.2 0.8
1 1 0.1 0.9

图 8: 贝叶斯网络实例

在给定x_i的条件下，x_{i+1}的分布与$x_1, x_2, ..., x_{i-1}$无关，即x_{i+1}的分布只与x_i有关。这种顺次演变的随机过程，叫做马尔科夫链。马尔科夫链是贝叶斯网络的一种特例。

图 9: 马尔科夫链结构

马尔科夫链可表示为：

$$P(X_{n+1}=x|X_0,X_1,...,X_n)=P(X_{n+1}=x|X_n)$$

随机变量X_1,X_2...取值范围的合集成为“状态空间”，X_i的值表示在时间i的状态。马尔科夫链是时间和状态都是离散的马尔科夫过程。

如果状态空间是有限的，则转移概率分布可以表示为一个具有(i,j)元素的矩阵，称之为“转移矩阵”$\mathbf{P}$：

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = i | X_n = j)$$

对于一个离散状态空间，k步转移概率的积分即为求和，可以对转移矩阵求k次幂来求得。$\mathbf{P}^k$即是k步转移后的转移矩阵。

平稳分布是一个满足以下方程的向量:

$$\mathbf{P}\pi^* = \pi^*$$

在此情况下，稳态分布π^*是一个对应于特征根为1的、该转移矩阵的特征向量。