SOUTHWEST JIAOTONG UNIVERSITY

高 数 作 业

知识点总结

学　　院：电气工程学院

专　　业：电子信息工程

学生姓名：MG

学　　号：2024111878

指导教师：陈桂玲

2023 年 12 月 24 日

LaTeX

目录

1 摘要

临近期末，陈桂林老师发布高数论文————知识点总结（第四章至第七章前三节）期末大作业。学生认为数学的解题思路是活的，对应不同题目有不同思路，同一道题目亦有不同思路，然而针对题目采取知识点的总结会导致本论文内容过多，故本论文决定采取对书上的定义定理以及一些方法进行汇总，方便期末复习时对定义定理进一步加深印象。最后决定采用 LaTeX 的形式完成论文也是对 LaTeX 写作能力的一次锻炼。

2 不定积分

2.1 不定积分的概念与性质

2.1.1 原函数与不定积分的概念

定理 4.1 （原函数存在定理） 若函数 f(x) 在区间 I 上连续，则在区间 I 上存在可导函数 F(x), 使得对任意一 x∈I 都有 F'(x)=f(x).
简单来说：**连续函数一定存在原函数**.

定理 4.2（原函数之间的关系定理） 如果函数 f(x) 在区间 I 上存在原函数，那么其任意两个原函数之间只相差一个常数项.

定义 4.2 （不定积分的定义） 函数 f（x）在区间 I 上的全体原函数所形成的函数族称为 f（x）在区间 I 上的**不定积分**, 记作 $\int$ f(x)dx. 其中记号“$\int$”称为**积分号**，f（x）称为**被积函数**，f(x)dx 称为**被积表达式**,x 称为**积分变量**，C 称为**积分常数**.

2.1.2 不定积分的性质

定理 4.3 （不定积分的定义）

1. 微分运算与积分运算互为逆运算.

   (1) $[\int f(x)dx]'=f(s)$ 或 $d[\int f(x)dx]=f(x)dx$.

   (2) $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$; 特别地，有 $\int dx=x+C$.

2. 被积函数中不为零的常数因子可以移到积分号的前面，即

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx(k\text{ 为非零常数}).$$

3. 两个函数的和（或差）的不定积分等于各个函数的不定积分的和（或差），即

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

2.2 换元积分法

2.2.1 第一换元积分法

定理 4.4(第一类换元积分法) 设 $\int f(u)du=F(u)+C$. 如果 $u=\varphi$ 具有连续导数，那么

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C.$$

2.2.2 第二换元积分法

定理 4.5（第二类换元积分法） 设 $y=f(x)$，$f=\varphi(t)$ 及 $x'=\varphi'(t)$ 均为连续函数，且 φ'（t）$\neq 0$, 并设 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数，若 $F(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(t))+C.$$

2.3 分部积分法

定理 4.6（分部积分公式） 设函数 u=u(x),v=v(x) 的导函数连续，则

$$\int udv=uv-\int vdu \text{ 或者 } \int uv'dx=uv-\int vu'dx$$

2.4 有理函数的不定积分

2.4.1 有理函数的不定积分

定义 4.3(有理函数的定义) 形如

$$\tfrac{P(x)}{Q(x)}=\tfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

(其中 n,m 为正整数,a_0 ,a_1 ,...,a_m 及 b_0,b_1 ,...,b_n 为实常数，且 a_0 0,b_0 0)
的函数称为**有理函数** (也称为**有理分式**). 当 n>m 时，称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为**真分式**；当 n≤m 时，称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为**假分式**.

推论 对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以展开成如下的求和表达式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\Big(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\Big)+\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\Big) \tag{1}$$

其中 a_{jk},b_{jk},c_{jk} 是唯一确定的实数，而

$$Q(x)=(x-x_1)^{k1}\ldots(x-x_l)^{kl}(x^2-p_1x+q_1)^{m1}\ldots(x^2-p_nx+q_n)^{m_n} \tag{2}$$

3 定积分

3.1 定积分的概念与性质

3.1.1 定积分的概念

定理 5.1（函数可积的充分条件）

1. 若函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续，则 f(x) 在 [a,b] 上可积.
2. 若函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上除去有限多个间断点外处处连续，且在 [a,b] 上有界，则 f(x) 在 [a,b] 上可积.
3. 若函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上有界且单调，则 f（x）在 [a,b] 上可积.

定理 5.2（定积分的性质）

1. **几何度量性质**：如果在区间 [a,b] 上 f(x)≡1, 那么

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b f(x)dx = b - a. \tag{3}$$

2. **线性性质**：设 k_1,k_2 均为常数，则

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx \tag{4}$$

3. **积分区间的可加性.**
4. **保号性**：如果在区间 [a,b] 上恒有 f(x)≥ 0, 那么 $\int_a^b f(x)dx$ ≥0.
5. **估值定理**设 M 和 m 分别是函数 f(x) 在区间 [a,b] 上的最大值和最小值，则

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a). \tag{5}$$

6. **积分中值定理**：如果函数 f(x) 在区间 [a,b] 上连续，那么在 [a,b] 上至少存在一点 ξ, 使得下式成立：

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \tag{6}$$

推论 1（单调性） 如果在区间 [a,b] 上恒有 f(x)≤g(x), 那么

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{7}$$

推论 2（绝对值不等式）

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx (a < b). \tag{8}$$

3.2 微积分基本公式

3.2.1 积分上限函数及其导数

定理 5.3（积分上限函数的导数公式） 若函数 f(x) 在区间 [a,b] 上连续，则积分上限函数 ϕ(x)=$\int_a^x$f(t)dt 在 [a,b] 上可导，并且它的导数

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)(a \leq x \leq b). \tag{9}$$

3.2.2 微积分基本定理

定理 5.4（微积分基本定理） 设函数 f(x) 在区间 [a,b] 上连续，若函数 F(x) 是 f(x) 在区间 [a,b] 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{10}$$

3.3 定积分的换元积分法和分部积分法

3.3.1 定积分的换元积分法

定理 5.7（定积分的换元积分法） 设函数 y=f(x) 在区间 [a,b] 上连续，函数 x=ϕ(t) 满足下列条件：

(1) $\phi(\alpha)$=a,$\phi(\beta)$=b;

(2) x=ϕ(t) 在 [α,β](或 [β,α]) 上具有连续导数，且其值域 R_ϕ=[a,b], 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.(\textbf{换元积分公式}) \tag{11}$$

注： “换元必换限”

3.3.2 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u'vdx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx. \tag{12}$$

注： “边积边代限”

3.4 反常积分

3.4.1 无穷区间上的反常积分

定义 5.2（无穷区间上的反常积分的敛散性） 无穷区间**连续**, 存在积分极限，则反常积分**收敛**, 否则**发散**.

3.4.2 无界区间上的反常积分

瑕点 如果函数 y=f(x) 在点 a 的任一邻域内都无界，则点 a 称为 y=f(x) 的**瑕点（奇点）**，也称为**无穷间断点**.

定义 5.3（无界函数的反常积分的敛散性） 对于无界函数，在其瑕点邻域内，若存在积分极限，则反常积分收敛，否则发散.

3.4.3 反常积分敛散性的判别法

定理 5.8（无穷区间上的反常积分的直接比较判别法） 设函数 f 和 g 在区间 [a,+∞) 上连续，且对所有的 x$\geq$a, 有 0$\leq$f(x)leqg(x).

1. 若 $\int_a^{+\infty}$g(x)dx 收敛，则 $\int_a^{+\infty}$f(x)dx 收敛.
2. 若 $\int_a^{+\infty}$f(x)dx 发散，则 $\int_a^{+\infty}$g(x)dx 发散.

3.4.4 反常积分的 Cauchy 主值

对于在瑕点邻域不可积分的无界函数，可以对其积分值赋予 Cauchy 主值的定义，用符号 **V.P. “Valeur principale”** 表示. 即，在这种情况下，通常说**反常积分在主值的意义下存在**.

4　定积分的应用

4.1　几个概念

1. 面积.
2. 体积.
3. 弧长.
4. 曲率.

注：　具体概念不展开论述.

4.2　几种方法

1. 定积分的微元法（定义法）.
2. 求面积的矩形法，求面积的柱壳法、截面法.
3. 不同坐标系下的积分（直角坐标，极坐标，复平面）.

注：　具体方法不展开论述.

5 微分方程

5.1 微分方程的几种类型

变量可分离微分方程 对于以下形式的微分方程：

$$y' = f(x, y) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{13}$$

可以写成以下形式:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{14}$$

齐次方程 若一节微分方程可化为：

$$\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x}). \tag{15}$$

的形式，则这种方程为**齐次方程**.

伯努利方程 方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y'', (n \neq 0, 1) \tag{16}$$

称为**伯努利 (Bernoulli) 方程**.

5.2 解微分方程的几种方法

两边对称积分法 对于形如 f(x)dx=g(y)dy 的微分方程，可以两边同时进行不定积分，得到该微分方程的解.

一阶线性微分方程的公式法 对于形如 y'+P(x)y=Q(x) 的一阶线性微分方程，有如下通解：

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{17}$$

注： 推导过程（**常数变易法**）在此不做阐述.

6 结语

数山有路勤为径，学海无涯苦作舟.