

小波滤波方法及应用

潘泉^① 孟晋丽^① 张磊^② 程咏梅^① 张洪才^①

^①(西北工业大学自动化学院 西安 710072)

^②(加拿大McMaster大学电子与计算机工程系)

摘要: 小波滤波是十年来小波分析在信号处理技术中应用的一个重要领域, 与传统的滤波方法相比, 具有独特的优势。该文在对目前小波滤波文献进行理解和综合的基础上, 通过对小波滤波问题的描述, 系统论述了小波滤波的基本原理、模型和滤波特性; 对小波滤波方法进行了分类, 对三类基本方法进行了分析比较; 着重对小波滤波方法中的基本问题进行了阐述, 并对小波滤波中存在的问题和解决问题的设想及展望给出了系统的见解。

关键词: 滤波; 阈值; 模型; 小波

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)01-0236-07

Wavelet Filtering Method and Its Application

Pan Quan^① Meng Jin-li^① Zhang Lei^② Cheng Yong-mei^① Zhang Hong-cai^①

^①(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

^②(Department of Electrical and Computer Engineering, McMaster University, Canada)

Abstract: Wavelet filtering is a new research in the field of signal processing in the last decade. It has predominance over the traditional filtering methods. This paper presents the principle, model and characteristics of wavelet denoising method, basing on the analysis and synthesis of developments in this research domain in the past few years. Wavelet denoising methods are sorted into three groups and they are commented. This paper pays attention to the key points, existing problems and the thought of how to solve these problems.

Key words: Filtering; Threshold; Model; Wavelet

1 引言

近年来, 小波滤波不断出现在有关信号及图像处理研究的文献中^[1-9], 这标志着一种新的滤波思路出现。不同尺度上的信号和噪声具有不同特征, 小波分析使信号和图像的多尺度处理技术得到迅速发展。20世纪90年代初期, 在文献中开始出现小波去噪(denoising)^[8]及降噪(noise reduction)^[3,9]的概念及提法。事实上, 随着小波去噪方法研究的深入和具体应用环境的多样性, 其功能已不再局限于单纯的去噪、降噪, 因此, 本文统一采用小波滤波这一说法。随着小波分析的发展, 基于小波分析和子带分解的边缘检测与滤除噪声的方法得到迅速发展^[4,10]。Mallat等利用Lipschitz指数在多尺度上对信号和噪声的奇异性(Singularity)进行描述, 提出基于小波变换模极大值原理的信号和图像滤波方法^[4]。Rosenfield指出, 在进行数字图像处理时, 直接将相邻频带上的数据相乘, 可以准确定位信号边缘^[11]。基于该思想, Xu提出基于信号尺度间相关性的空域相关滤波算法(Spatially Selective Noise Filtration, SSNF)^[5]。随后, 以Donoho为首的学术群体另辟蹊径, 提出小波域阈值滤波方法, 取得了不少理论及

应用成果^[6,12]。

小波滤波可按以下特征分类^[13]: (1)按所采用的变换方法分为: 进行基变换、利用框架变换和通过选取最优基变换。(2)按所利用的小波性质分为: 能量集中性、多分辨率特性、尺度内相关性和时频局部化特性。(3)按使用的模型分为: 贝叶斯方法、非贝叶斯方法等。

近年来, 本课题组对小波滤波方法进行了大量深入的研究工作, 取得了一定成果, 提出了理论完整的自适应空域相关滤波算法, 并在小波域阈值滤波算法上取得了重大突破^[14-24]。本文基于我们近年来的工作, 结合国内外最新进展, 试图给出一个全面的综述。第2节给出小波滤波的基本原理及模型; 第3节分析比较小波滤波的3种基本方法; 第4节重点论述小波滤波算法中的关键问题; 第5节对小波基选取问题进行阐述; 最后对小波滤波中存在的问题和解决问题的设想给出一些意见和建议。

2 小波滤波原理及模型

2.1 小波变换简介

2.1.1 连续小波变换的定义及特性 信号 $x(t)$ 的连续小波变换定义为

$$Wx(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (1)$$

其中

2005-03-08 收到, 2006-06-14 改回

教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金教技函(2001)1号和国家自然科学基金(60172037, 60372085)资助项目

$$\psi_{a,b}(t) = (1/\sqrt{a})\psi[(t-b)/a] \quad (2)$$

为小波基函数, a 为尺度因子, b 为平移因子。

适当选择母小波 $\psi(t)$, 可使 $\psi_{a,b}(t)$ 及其傅里叶变换 $\Psi_{a,b}(\omega)$ 同时具有较好的局部性, 因此小波分析是时-频分析^[25]。

2.1.2 离散小波变换^[26] 在离散小波变换中, 常用的离散方法是将 a 按幂级数离散, b 在尺度内均匀离散, 即 $a = a_0^j$, $b = nb_0a_0^j$ ($a_0 \neq 1$, $b_0 > 0$, j, n 为整数)。若取 $a_0 = 2$, 并将 t 轴用 b_0 归一化, 有

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n) \quad (3)$$

信号 $x(t)$ 的离散小波变换为

$$Wx(j, n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,n}^*(t) dt \quad (4)$$

计算上述离散小波变换的快速算法为 Mallat 算法。

2.2 基本原理

小波变换具有以下性质: (1)时频局部化特性; (2)多分辨率特性; (3)解相关特性; (4)选基灵活性。其中, 性质(1)和性质(2)决定了小波滤波方法能在去除噪声的同时, 很好地保留信号的突变或图像的边缘^[27]。

含噪信号经小波变换后, 小波系数主要由噪声和信号的细节特征组成。基于此, 本文给出如下描述: 小波滤波, 就是利用具体问题的先验知识, 根据信号系数和噪声系数在不同尺度上具有不同性质的机理, 构造相应规则, 在小波域对含噪信号的系数进行处理。目的在于减小甚至完全剔除噪声系数, 同时最大限度地保留信号系数, 得到真实信号的最优估计。“最优”的精确定义依赖于应用要求。

关于小波滤波还有几点需要说明: 首先, 不是平滑, 而是试图去除所有噪声, 保留所有信号, 并不考虑它们的频率范围。其次, 是在小波域对小波系数进行处理。第三, 滤波过程一般由 3 个步骤完成: (1)小波变换; (2)对小波系数非线性处理, 以滤除噪声; (3)小波逆变换。最后, 小波滤波是一种非参数方法^[28]。

2.3 基本模型

假设含噪数据

$$f_i = g_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

由真实信号 g_i 和噪声 ε_i 组成, ε_i 与 g_i 相互独立。其向量表示为 $f = g + \varepsilon$ 。假定 ε 满足以下条件: (1)服从正态分布; (2)不相关; (3)方差为常量。滤波的目标是在观察到 f 的前提下, 对 g 进行估计。

对观测数据经过小波变换, 得

$$w = \theta + \eta \quad (6)$$

前述滤波过程的 3 个步骤可描述为

$$w = W(f), \quad w_i = D(w, t), \quad \hat{g} = W^{-1}(w_i)$$

其中 $W(\cdot)$ 和 $W^{-1}(\cdot)$ 分别为小波变换和逆变换算子, $D(\cdot, \cdot)$ 为非线性滤波算子, 它是滤波问题的核心。

3 小波滤波基本方法

现有小波滤波方法大致可分为 3 类: (1)空域相关滤波,

利用信号小波系数在各尺度间具有相关性滤波; (2)基于奇异性检测的滤波, 利用信号和噪声具有不同的奇异性滤波; (3)小波域阈值滤波, 根据幅值较大的系数由重要信号产生这一假设滤波。

3.1 空域相关滤波^[5]

信号的小波系数在不同尺度间具有很强的相关性, 噪声系数却弱相关或不相关。将相邻尺度上的系数相乘得到空域相关系数, 若某点归一化后的相关系数幅值大于其小波系数幅值, 则认为该点为信号突变点, 抽取该点。对抽取出的小波系数进行逆变换, 得到滤波信号。

Xu在提出空域相关滤波方法时, 没有给出噪声方差的估计及终止迭代的阈值^[5]。Pan在计算各分解尺度上噪声方差后, 提出噪声能量阈值的理论计算方法, 给出终止迭代的准则, 首次提出了理论完整的空域相关滤波算法。并对其进行改进, 得到具有满意滤波效果的自适应空域相关滤波算法^[14,20,22]。值得指出的是, 相关系数如何定义将直接影响滤波结果^[29]。

3.2 基于奇异性检测的小波滤波^[4,8]

Mallat认为信号的Lipschitz指数为正, 噪声的Lipschitz指数为负^[4]。通过确定各尺度上信号的模极大值, 重构得到滤波信号。若信号在某奇异点邻域内剧烈振荡, 小波系数的模极大值无法描述其奇异性。小波“脚印”(footprints)在一定程度上缓解了该问题^[30], 但在实际应用中存在较大局限性, 滤波效果也不理想。

基于模极大值检测的滤波算法有很好的理论基础, 滤波性能较稳定, 对噪声的依赖性较小; 只要信号与噪声具有不同 Lipschitz 指数, 即可进行滤波。缺点是由模极大值重构信号的算法复杂。

3.3 小波域阈值滤波^[6,12]

小波域阈值滤波算法由Donoho等提出, 用于滤除信号中高斯白噪声。通过设定一适当阈值, 认为小于该阈值的系数由噪声产生, 将其置零, 而保留大于阈值的系数, 从而抑制信号中的噪声。该方法对阈值选取敏感。对此, 潘、张等构造了一个均方差函数的近似函数, 通过极小化该函数得到均方差意义下的自适应最优阈值^[15,24]。

3.3.1 有色噪声 受Donoho工作启发, 一些学者研究了相关噪声的情况^[31-33], 为简化相关噪声的处理提供了理论依据。然而, 对于有色噪声的滤波, 仍刚刚起步。

3.3.2 平移不变小波变换(Translation Invariant Discrete Wavelet Transforms, TIDWT) Cycle-Spinning法^[34]与非抽取小波变换^[7]的引入解决了正交小波变换缺乏平移不变性的问题。Pan验证了不同形式的平移不变小波变换之间的等价性^[15], Berkner将它们统一命名为平移不变小波变换^[1]。

3.3.3 非均匀采样数据 Kovac等研究了对非均匀采样数据的滤波^[35], 利用插值法将非均匀采样数据转换成均匀采样数据进行滤波。这样做有可能改变统计特性, 影响滤波效果。

一些学者提出基于提升框架(lifting scheme)构造二代小波(second generation wavelet)对非均匀采样数据滤波的方法^[13,36],但目前提升框架的理论体系尚不完善,滤波效果也不理想。

3.3.4 自适应收缩滤波 引入不同度量方法(如概率和隶属度等),对小波系数被噪声污染的程度量化描述^[33,37-40],进而对小波系数处理。相对于传统的小波域阈值滤波,该方法没有明确的阈值,具有更大灵活性。目前,该方法还没有统一的理论基础。此外,潘和蔡等提出谱滤波的初步模型。

4 若干关键问题

在小波滤波中,对小波系数重要程度的判断、阈值函数的选取以及阈值的确定是几个关键问题。

4.1 小波系数的显著性函数(significance measure)

前面所述 3 类滤波方法,通过判断小波系数所含信息量大小或被噪声污染程度(例如绝对值,尺度间相关性或模极大值),确定对小波系数置零、收缩还是保留。在给定的量化描述指标下,若某小波系数被判断为所含信号成分较大,认为它重要;否则,认为不重要。一般将上述度量指标称为小波系数的显著性函数^[13]。

目前应用较多的构造显著性函数的方法有:Donoho对小波系数取绝对值^[6];Xu将相邻尺度上对应的小波系数相乘^[5];Mallat通过判断小波系数随尺度变化的趋势来决定取舍^[4]。这些显著性函数的构造未考虑先验信息。若要得到性能优良的滤波方法,需将小波域相关性及先验信息考虑在内,通过对小波系数建模构造合适的小波系数显著性函数。

4.2 小波域系数模型

小波系数模型最初由Mallat提出^[41]。目前,小波系数模型主要分尺度内模型、尺度间模型和混合模型^[42]。

4.2.1 尺度内模型 尺度内模型考虑同一尺度内小波系数的统计特性,以及相邻系数间的关系。若某一系数非零,则与其相邻的系数也往往不为零。分块阈值化滤波(block thresholding)方法在判断一个系数是否由突变点产生时,将其相邻系数的信息考虑在内^[43],这可看作一种简单的尺度内模型。目前使用较多的是广义高斯分布(Generalized Gaussian Distributed, GGD)模型^[44]。Hansen等假设同一尺度内的小波系数独立同分布,取得了很好的滤波效果^[45]。Chang则认为小波系数服从具有未知参数的混合GGD,提出具有很强自适应特性的阈值滤波方法^[2]。Mihcak等发现小波系数的绝对值或平方值符合Markov场分布,由此提出小波系数的层内混合模型^[39];另外,还有考虑小波系数状态在尺度内相关的隐马尔可夫链(Hidden Markov Chain, HMC)模型^[37]。

4.2.2 尺度间模型 尺度间模型描述不同尺度间小波系数的相关性。最早利用该原理的是空域相关滤波方法^[5],其中的空域相关系数可看作一种尺度间模型。Sadler分析了空域相关系数的数学特性,并用于阶跃信息的检测与估计^[46]。Sender

则基于相邻尺度间的相关性,提出基于双变量收缩函数的阈值滤波算法^[47]。小波四叉树模型对不同尺度上系数间的相关性进行描述,Shapiro基于此提出嵌入式零树编码器^[48]。Banham用自回归模型描述四叉树节点由粗尺度到细尺度的动态演化过程,提出多尺度卡尔曼平滑滤波器滤波的方法^[49]。Crouse引入隐马尔可夫树(Hidden Markov Tree, HMT)模型,使用转移矩阵将不同尺度上小波系数间的联合统计特性量化^[50]。Fan在对HMT改进的基础上,提出一种称作HMT-2的四状态模型^[51]。另外,Romberg利用自然图像固有的自相似性对HMT进行简化^[52]。Pizurica利用尺度间的相关信息对小波系数进行分类后,估计小波系数的分布,以判断其是否由突变点产生^[53]。Zhang等基于尺度间模型,提出了基于空域相关的阈值滤波方法,并在医学图像的去噪及复原中取得成功应用^[16,18]。

4.2.3 混合模型 混合模型综合上述两种模型的特点,在考虑同一尺度内系数间相关性的同时,也考虑不同尺度间系数的关系。Liu利用互信息(mutual information)对小波系数间的相关性定量分析,发现互信息不仅取决于所采用的统计模型,而且与所使用的小波基有关^[54]。Portilla将尺度内和尺度间的相关性考虑在内,提出了高斯尺度混合(Gaussian Scale Mixture, GSM)模型^[55]。文献[19]将不同尺度上同一位置的点组成向量,通过对向量的统计特性进行估计,得到一种基于混合模型滤波算法。

对一维信号而言,尺度间相关性比尺度内相关性相对重要。而对二维图像,如何建立更有效的混合模型则仍是需研究的课题。目前对小波滤波的研究已逐渐转移到了这个领域^[42]。

4.3 阈值函数选取

阈值函数体现了对小波系数的处理策略。主要分为软阈值函数,硬阈值函数和半软阈值函数,它们的基本思想是去除小幅值的系数;对幅值较大的系数进行收缩或保留^[6,12,14,15]。

Bruce和Gao得出结论:硬阈值法往往使得滤波结果有较大方差,软阈值法使滤波结果有较大偏差^[56]。为克服软阈值法和硬阈值法的缺点,Gao提出半软阈值(semisoft shrinkage)函数,并得到了基于半软阈值法的Minimax阈值^[6]。Gao随后将Garrote函数作为阈值函数^[58],并证明上述各种阈值方法得到的滤波结果渐近相等。另外,文献[59]从选取最优阈值的角度,构造了具有高阶连续导数的阈值函数,通过优化搜索得到最优阈值。

以上所讨论的阈值函数,都假定真实信号为确定性信号,可统称为显式阈值函数。另一类隐式阈值函数基于贝叶斯模型得到^[60,61]。在假定真实信号的小波系数服从某一先验分布的基础上,得到隐式的阈值化方法收缩函数。这类隐式阈值函数的选取需坚实的统计学基础。

4.4 阈值确定

小波域阈值滤波中,如何确定阈值是一个关键问题。目前有大量文献提出不同的阈值确定方法^[6,12,62-64]:通用(universal)阈值、极小化风险阈值、假设检验法和BayesShrink阈值等。

(1) 通用阈值法 对于多维独立正态变量,当维数趋于无穷时,噪声系数幅值大于阈值 $t = \sigma\sqrt{2\ln N}$ 的概率趋于零,其中 σ 为噪声标准差, N 为信号长度^[6]。潘等基于小波变换的双通道滤波器组分解结构,从理论上得到 σ^2 的一致无偏估计^[14,21]。进一步提出自适应阈值 $t = c \cdot \sigma$, 验证了 $c \in [3.0, 4.0]$ 是合理的^[14,15,24]。

(2) 极小化风险阈值 极小化风险阈值即均方差(Mean Square Error, MSE)意义下的最优阈值。MSE 函数描述了滤波结果与真实信号在均方意义下的偏离程度。目前主要有 SURE 法、交叉验证算法和广义交叉验证算法估计 MSE 函数。

(a) SURE(Stein's Unbiased Estimator of Risk)法^[12]

SURE 函数是 MSE 函数的无偏估计。故极小化 SURE 函数得到的阈值为最优阈值的无偏估计。

(b) 交叉验证(Cross-Validation, CV)算法

CV 算法是一种基于 MSE 准则确定最优阈值的法^[62]。可根据实际问题需要自适应选取估计准则。

(c) 广义交叉验证(Generalized Cross-Validation, GCV)算法^[63]

GCV 算法以 SURE 为基础,性能优于 CV 算法。GCV 有偏,偏差为 σ^2 , 但得到的最优阈值无偏。

(3) 多假设检验法 阈值处理过程可看作是一个多假设检验过程^[64]。在满足给定错误发现率(False Discovery Rate, FDR)上界的前提下,最优阈值使所保留的系数个数达到极大值。该方法可解释通用阈值依赖于信号长度的现象。其局限性在于:如何给定 FDR, 将信号误判为噪声的情况亦考虑在内。

(4) BayesShrink 阈值 主要针对二维图像提出^[65]。假设自然图像的小波系数服从 GGD 分布,极小化贝叶斯风险得到阈值 $T_B = \sigma^2 / \sigma_X^2$ 。其中, σ^2 为噪声方差, σ_X^2 为 GGD 分布的方差。

若阈值在整个滤波过程中固定不变,对所有小波系数采用相等的阈值进行处理,可称为全局阈值;而自适应阈值根据小波系数的局部特征进行阈值化处理,最简单的是可以适应于不同尺度上系数特征的阈值。另外,还有基于小波系数尺度内相关性以及尺度间相关性的自适应阈值,这涉及到了对小波系数建模的问题。

5 小波基的选取

不同小波基对信号的描述不同。对信号小波变换时,总希望所选小波基能同时具有下列性质:(1)对称或反对称;(2)

较短的支撑;(3)正交性;(4)较高的消失矩。然而要使一个小波基同时具有以上特性往往不现实,在应用中只能根据具体要求选择合适的小波基。

一般来说,一种小波基能很好描述某一类信号特征,但只对信号低频部分反复分解。而小波包可同时对信号的低频和低频部分分解,适用于细小边缘或纹理较多的图像。Cohen 等将小波包和平移不变小波变换结合,提出平移不变小波包滤波方法,并给出相应的阈值公式^[66]。多小波是单小波的发展,既保持了单小波良好的时频局部化特性,又将对称性、正交性、光滑性、紧支性等性质结合在一起,弥补了单小波的不足。对信号滤波时,可避免将一些特征模糊化^[67,68]。Felix 等构造的复数小波变换,具有近似的平移不变性、良好的方向选择性和线性相位等优点,并能获得信号的相频特性^[69]。此外, Candes 和 Donoho 构造了用于检测图像边缘的 Ridgelet, Curvelet 基等,对含噪图像进行滤波,取得了很好的滤波效果^[70,71]。

随着小波滤波理论研究的深入,若能做到按信号特征,自适应选择小波基,则对信号描述的效果将会得到较大改善。根据含噪信号特征,结合任务要求,或使用某种优化准则,优化小波函数的设计;或从已给定的小波基中,选择最优小波基,使之最有效地表示信号^[72]。采用提升方法构造二代小波,可在变换时,根据信号特征利用提升框架自适应地构造小波基^[73]。

最后需要指出的是:综合考虑算法的简繁程度和滤波效果,上述任何一种小波变换都不具有绝对优势,在实际应用中含噪信号的具体特征仍是选择小波基的首要因素。

6 小波滤波的前景

小波滤波已渗透到了许多理论和应用领域,但仍有大量问题有待解决。作者认为,小波滤波在以下方面的研究问题值得关注:

(1) Lipschitz 指数理论作为小波滤波的理论基础,仅仅通过对信号奇异性的数学描述来解释信号和噪声经小波变换后在不同尺度下所表现出来的不同性质。但无论是这种性质本质的含义或是目前小波系数幅值对 Lipschitz 指数度量的近似性,都很难令人满意。因此,对小波系数随尺度变化所呈现的特有性质进行更为科学、严谨的数学表述是小波滤波理论完备与有效应用的一个重要课题,而这在目前尚未引起国内外学者的普遍关注。

(2) 图像奇异性表示。可分离的小波变换在分析线奇异性时存在着固有的缺陷,如二维情形下,张量积小波通常更关心图像在水平、垂直和对角方向上的特征,很难刻画其他方向上的特征。不可分离的小波在一定程度上缓解了这一问题,但仍很难描述曲线奇异性。这意味着需要探讨有效的高维奇异性表示方法。

(3) 目前描述高维奇异性方法。Ridgelet(脊波)变换是作

用于Radon变换投影切片上的小波变换^[70]。Radon变换可有效地将高维奇异性转化为点奇异性,而小波变换在分析点奇异性时最优。因此Ridgelet的降维特性可将线奇异性转化为点奇异性分析。针对小波变换难以刻画方向信息的问题,二维Brushlet能很好地刻画角分辨率,描述不同方向、频率和位置的方向性纹理^[74]。而Curvelets是对二维空间中曲线奇异性的最优表示。如何将谐波分析领域的Curvelets、计算机视觉领域的霍夫(Hough)变换和信号处理领域的滤波器组理论有机结合,得到理论基础完整且具有离散算法的、基于多方向信息的多分辨率理论是下一步亟待研究、且具有挑战性的课题^[75]。

(4)滤波效果评价。对滤波后信号或图像的质量进行评价是一个十分重要的问题,遗憾的是目前还没有一种为大家认可的通用的方法。目前常用的有两种方法:主观评价法和客观评价法。主观评价法会受评价人主观因素的影响,结论会带有主观色彩。客观评价法力求有一套公认的质量指标体系,而这一点是十分困难的。因此在实际应用中,常常将主观与客观两种方法相结合。这就需要建立从算法设计到滤波效果的实用的量化评价指标,但这又依赖于具体问题的要求和有效的数学描述。

(5)在整体处理问题的不同层次上,把多种滤波方法有机结合起来,充分发挥各自的优势是发展小波滤波方法的有效途径。同时,将小波滤波与人工智能结合,以取得“最优”的滤波效果也是值得注意的一个方向。

尽管小波滤波技术已成功运用于多种领域,但总的来说,目前该方法的工程应用与其理论发展相比还显得滞后和不足,许多应用研究还停留在仿真实验阶段。相信许多学者也正在为架起该理论与实际应用的桥梁而努力,所有这些努力的意义都在于能够将小波这个数学上十分优美的理论更好、更容易地应用到工程中去。某一特定的小波滤波方法不可能适用于所有的实际应用问题,目前在方法的选择上尚未形成统一的框架,而在应用设计上则缺乏有效的指导原则,与传统滤波器之间的定量关系的研究更是成效甚微。需要指出的是,本文的范围基本上是近年来国外学者的研究概况。事实上国内这几年有不少学者在这一领域开展了卓有成效的工作,限于篇幅未能给予涉及。

参 考 文 献

- [1] Berkner K and Wells R O. Smoothness estimates for soft-threshold denoising via translation-invariant wavelet transforms [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2002, 12(1): 1–24.
- [2] Chang S G, Yu B, and Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2000, 9(9): 1522–1530.
- [3] Lu J, Xu Y S, and Weaver J B, *et al.* Noise reduction by constrained reconstructions in the wavelet-transform domain [A]. *Proc. IEEE Signal Processing Society Seventh Workshop on Multidimensional Signal Processing*[C], Lake Placid, New York, Sept. 23–25, 1991: 1.9–1.9.
- [4] Mallat S and Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1992, 38(2): 617–643.
- [5] Xu Y S, Weaver J B, and Healy D M, *et al.* Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1994, 3(6): 747–758.
- [6] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1995, 41(3): 613–627.
- [7] Lang M, Guo H, and Odegard J E, *et al.* Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(1): 10–12.
- [8] Hsung T C, Lun DP-K and Siu W-C. Denoising by singularity detection [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1999, 47(11): 3139–3144.
- [9] Lu J. Signal recovery and noise reduction with wavelets [D]. Dartmouth College, Hanover, NH, 1993.
- [10] Lu J and Heally D M. Contrast enhancement of medical images using multiscale edge representation [J]. *Optical Engineering*, 1994, 33(7): 2151–2161.
- [11] Rosenfeld A. A nonlinear edge detection technique [A]. *Proc. of the IEEE*, 1970, 58(5): 814–816.
- [12] Donoho D L and Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. *J. of the Amer. Statist. Assoc.*, 1995, 90(432): 1200–1224.
- [13] Jansen M. Noise reduction by wavelet thresholding [M]. Springer Verlag, Lecture notes in Statistics (161), 2001.
- [14] Pan Q, Zhang L, and Dai G Zh, *et al.* Two denoising methods by wavelet transform [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1999, 47(12): 3401–3406.
- [15] Zhang L, Bao P, and Pan Q. Threshold analysis in wavelet-based de-noising [J]. *IEE Electronics Letters*. 2001, 37(24): 1485–1486.
- [16] Zhang L and Bao P. Denoising by spatial correlation thresholding [J]. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, 2003, 13(6): 535–538.
- [17] Zhang L and Bao P. Edge detection by scale multiplication in wavelet domain [J]. *Pattern Recognition Letter*, 2002, 23(6): 1771–1784.
- [18] Bao P and Zhang L. Noise reduction for magnetic resonance images via adaptive multiscale products thresholding [J]. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22(9): 1089–1099.
- [19] Zhang L, Bao P, and Wu X L. Hybrid inter-and intra-wavelet scale image restoration [J]. *Pattern Recognition*, 2003, 36(8): 1737–1746.
- [20] 潘泉, 张磊, 张洪才等. 子波域自适应滤波算法[J]. *航空学报*, 1997, 18(5): 583–586.
- [21] 潘泉, 戴冠中, 张洪才等. 基于阈值决策的子波域去噪方法[J]. *电子学报*, 1998, 26(1): 115–117.

Pan Quan, Dai Guan-zhong, and Zhang Hong-cai, *et al.* A

- threshold selection method for hard-threshold filter algorithm. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 26(1): 115–117.
- [22] 张磊, 潘泉. 一种子波域滤波算法的改进[J]. 电子学报, 1999, 27(2): 19–21.
- Zhang Lei and Pan Quan. Improvements on an adaptive filtering algorithm in wavelet transform domain. *Acta Electronica Sinica*, 1999, 27(2): 19–21.
- [23] 王博, 潘泉, 张洪才. 基于子波分解的信号滤波算法[J]. 电子学报, 1999, 27(11), 71–74.
- Wang Bo, Pan Quan, and Zhang Hong-cai. Signal filtering algorithm based on the wavelet transformation. *Acta Electronica Sinica*, 1999, 27(11), 71–74.
- [24] 张磊, 潘泉, 张洪才等. 小波域滤波阈值参数 c 的选取[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 400–402.
- Zhang Lei, Pan Quan, and Zhang Hong-cai, *et al.* On the determination of threshold in threshold-based de-noising by wavelet transform. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(3): 400–402.
- [25] Rioul O and Vetterli M. Wavelets and signal processing [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1991, 8(4): 14–38.
- [26] Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet transform [J]. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intel.*, 1989, 11(7): 674–693.
- [27] Vidakovic B L and Ozoya C B. On time-dependent wavelet denoising [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1998, 46(9): 2549–2551.
- [28] Carl Taswell. The what, how and why of wavelet shrinkage denoising [J]. *Computing in Science and Engineering*, 2000, 2(3): 12–19.
- [29] 赵瑞珍. 小波理论及其在图像、信号处理中的算法研究[D]. [博士学位], 西安:西安电子科技大学, 2001.
- [30] Dragotti P L and Vetterli M. Wavelet footprints: theory, algorithms, and applications [J]. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 2003, 51(5): 1306–1323.
- [31] Johnstone I M and Silverman B W. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise [J]. *J. Royal Statistical Society B*, 1997, 59(2): 319–351.
- [32] Jansen M and Bultheel A. Multiple wavelet threshold estimation by generalized cross validation for data with correlated noise [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1999, 8(7): 947–953.
- [33] Badulescu P and Zaci R. Removal of mixed-noise using order statistic filter and wavelet domain Wiener filter [A]. Proceedings of the International Semiconductor Conference[C]. Sinaia Romania, 1999: 301–304.
- [34] Coifman R R and Donoho D L. Translation-invariant de-noising [A]. Wavelets in Statistics of Lecture Notes in statistics 103[C]. New York: Springer-Verlag, 1994: 125–150.
- [35] Arne Kovac. Wavelet thresholding for unequally spaced data [D], Ph.D. Thesis, Faculty of Science, University of Bristol, 1998.
- [36] Vanraes E, Jansen M, and Bultheel A. Stabilized wavelet transforms for non-equispaced data smoothing [J]. *Signal Processing*, 2002, 82(12): 1979–1990.
- [37] Malfait M and Roose D. Wavelet-based image denoising using a Markov random field a priori model [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1997, 6(4): 549–565.
- [38] Shark L K and Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain [J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 581–582.
- [39] Mihcak M, Kozintsev I, and Ramchandran K, *et al.* Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients [J]. *IEEE Signal Processing Lett.*, 1999, 6(12): 300–303.
- [40] Pizurica A and Philips W. Estimating probability of presence of a signal of interest in multiresolution single- and multiband image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.* (in press).
- [41] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intel.*, 1989, 11(7): 674–692.
- [42] Liu Juan. Wavelet-based statistical modeling and image estimation [D]. Ph.D. Thesis, Dept. Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana- Champaign, 2001.
- [43] Hall P, Kerkycharian G, and Picard D. On the minimax optimality of block thresholded wavelet estimators [J]. *Statistica Sinica*, 1999, 9(1): 33–50.
- [44] Moulin P, and Liu J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized-Gaussian and complexity priors [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1999, 45(3): 909–919.
- [45] Hansen M and Yu B. Wavelet thresholding via MDL for natural images [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2000, 46(5): 1778–1788.
- [46] Slader B M, and Swami A. Analysis of multiscale products for step detection and estimation [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1999, 45(4): 1043–1051.
- [47] Sender L and Selesnick I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 2002, 50(11): 2744–2756.
- [48] Shapiro J M. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1993, 41(12): 3445–3462.
- [49] Banham M R and Katsaggelos A K. Spatially adaptive wavelet-based multiscale image restoration [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1996, 5(4): 619–634.
- [50] Crouse M S, Nowak R D, and Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1998, 4(46): 886–902.
- [51] Fan G and Xia X G. Improved hidden Markov models in the wavelet-domain [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 2001, 49(1): 115–120.
- [52] Romberg J K, Choi H, and Baraniuk R G. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden Markov models [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2001, 10(7): 1056–1068.

- [53] Pizurica A, Philips W, and Lemahieu I, *et al.* A versatile wavelet domain noise filtration technique for medical imaging [J]. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22(5): 323–331.
- [54] Liu Juan and Moulin P. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2001, 10(11): 1647–1658.
- [55] Portilla J, Strela V, and Wainwright M J, *et al.* Adaptive wiener denoising using a Gaussian scale mixture model in the wavelet domain. Proceedings of the Eight International Conference on Images Processing. Thessaloniki, Greece, 2001, 2: 37–40.
- [56] Bruce A G and Gao H-Y. Understanding waveShrink: variance and bias estimation [J]. *Biometrika*, 1996, 83(4): 727–746.
- [57] Bruce A G and Gao H-Y. Waveshrink with firm shrinkage [J]. *Statistica Sinica*, 1997, 7(4): 855–874.
- [58] Gao H-Y. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote [J]. *J. of Computational and Graphical Statistics*, 1998, 7(4): 469–488.
- [59] Zhang X-P and Desai M D. Adaptive denoising based on SURE risk [J]. *IEEE Signal Processing Lett.*, 1998, 5(10): 265–267.
- [60] Abramovich F, Sapatinas T, and Silverman B W. Wavelet thresholding via a Bayesian approach [J]. *J. Royal Statistical Society B*, 1998, 60(3): 725–749.
- [61] Vidakovic B. Nonlinear wavelet shrinkage with Bayes rules and Bayes factor [J]. *J. of the Amer. Statist. Assoc.*, 1998, 93(5): 173–179.
- [62] Nason G P. Wavelet shrinkage using cross-validation [J]. *J. Royal Statistical Society B*, 1996, 58(2): 463–479.
- [63] Jansen M, Malfait M, and Bultheel A. Generalized cross validation for wavelet thresholding [J]. *Signal Processing*, 1997, 56(1): 33–44.
- [64] Abramovich F and Benjamini Y. Thresholding of wavelet coefficients as multiple hypotheses testing Procedure [Z]. In A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors, *Wavelets and Statistics*, Springer, New York, 1995: 6–14.
- [65] Chang S G, Yu B, and Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2000, 9(9): 1532–1546.
- [66] Cohen I, Raz S, and Malah D. Translation-invariant denoising using the minimum description length criterion [J]. *Signal Processing*, 1999, 75(3): 201–223.
- [67] Downie T R, and Silverman B W. The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1998, 46(9): 2558–2561.
- [68] Bui T D and Chen G. Translation-invariant denoising using multiwavelets [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1998, 46(12): 3414–3420.
- [69] Felix C A Fernandes. Directional, shift-insensitive, complex wavelet transforms with controllable redundancy [D]. Texas A&M University, Ph.D. Thesis, Houston, 2002.
- [70] Candes E. Ridgelets: theory and applications [D]. Ph.D. Thesis, Department of Statistics, Stanford University, 1998.
- [71] Starck J L, Candes E J, and Donoho D L. The Curvelet transform for image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2002, 11(6): 670–684.
- [72] Krim H, Tucker D, and Mallat S, *et al.* On denoising and best signal representation [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1999, 5(7): 2225–2238.
- [73] Claypoole R L, Baraniuk R G, and Nowark R D. Adaptive wavelet transforms via lifting [A]. Proc. IEEE Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.[C], Phoenix, May 12–15, 1999, vol.3: 1513–1516.
- [74] Angelini E, Esser Y J P, and Van Heertum R, *et al.* Fusion of brushlet and wavelet denoising methods for nuclear images [A]. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging [C], Macro to Nano, April 15–18, 2004, 2: 1187–1191.
- [75] Do M N and Vetterli M. *Contourlets* [M]. New York, Academic Press, 2003.
- 潘 泉: 1961 年生, 教授, 博士生导师, 国际信息融合协会(ISIF) 会员, 陕西省自动化学会副理事长, 主要研究方向为复杂系统建模、估计与控制, 信息融合、C3I、多目标跟踪与识别、图像处理、小波分析与应用、生物信息学等, 已发表论文 110 篇, 被 SCI, EI, ISTP 收录 60 篇/次。
- 孟晋丽: 1976 年生, 博士生, 主要研究方向为数字信号处理、小波理论及应用。