Notes of Category Theory

MGIO

2024.10.15

目录

1 写在前面

这是关于 category Theory 的小笔记, 不知道我会写到哪里。主要参考书目是 *Basic Category Theory*

2 what is category

Definition 2.1. A category $\mathcal{C}$ consist of the following data

- a class of **objects** $\boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$
- for each $A, B \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$,there exist a set $\boldsymbol{Hom_{\mathcal{C}}(A, B)}$ of **morphisms** from A to B
- for each $A, B, C \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$,there exist a funtion s.t.

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto (g \circ f)$$

called **composition** and satisfy the following axioms

- for each $A \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$, there is an element 1_A in $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ called identity on A satisfy the idenity laws i.e. for each $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$

- for each $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C), h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, we have associativity i.e. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

我们来简单解释一下范畴的定义, 范畴的主要对象是 Object(对象) 和 morphism(态射) 以及 composition(复合), 态射类比成映射, 对象类比成 domain 与 codomain, 复合就是映射之间的复合, 而满足的那两条公理也正是映射需要满足的, 这是一种帮助我们理解范畴的方式, 但在后面的例子我们可以看到这不是完全合理的，这仅仅是一种辅助手段。当然定义完范畴后有一个非常自然的问题, 范畴究竟是什么? 如同我们学习其他数学概念之后, 例如我们知道映射实际上是一个 $A \times B$ 的特殊子集, 群是一个序对 $(G, \cdot)$ 等等。但是我们这里的范畴是什么东西呢? 在回答这个问题之前，我们先解决一些集合论上的小麻烦, 这里我们的对象构成的全体可能会非常大, 大到我们的 ZFC 公理体系下需要把他排除去 (例如所谓全体集合的“集合”[1]), 这里有这样几种处理方式, 在 *A First Course in Category* by Ana Agore 中, 它引入了另一种公理体系 NBG, 这是 ZFC 公理体系的 conservative extension(保守扩张, i.e. 所有 ZFC 中为真的 statement 在 NBG 中也为真, 在 NBG 中用 ZFC 语言写的为真的 statement 在 ZFC 中也为真), 在 NBG 中 class 是被严格定义的, 所以我们可以在 NBG 中处理范畴, 这样就没有逻辑上的错误了。但同样的在 NBG 中所有 class 的 class 又是被排除在外的, 我们又无法处理这个问题了, 但是鉴于我们只关心集合这个概念, 所以这其实不是什么问题, 至少对于现在的我来说已经够用了。第二种处理方法是李文威老师的代数学方法卷一或者是 *Categories and Sheaves* 中引入的 **Grothendieck universe**。第三种处理方式是 GTM5 中的 metacategories. 后两种我们怎么看懂, 第一种对于我来说已经够用了。

[1]在朴素集合论中会产生 Russell's Paradox 的原因是概括公理太强大了, 所以我们用分离概括模式来限制概括公理, 分离公理模式不能确定 $R = \{x \mid x \notin x\}$ 是一个集合, 换言之我们把这种形式的集合给他排除去 ZF 意义下的集合了, 同时在承认分离概括模式的意义下, 对于集合 X,$R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$, $R_X \in R_X$ 或 $R_X \notin R_X$, 为前者, 则有 $R_X \in X$ 且 $R_X \notin R_X$ 矛盾, 只能为后者, 此时 $R_X \notin X$, 我们就不能像朴素集合论中一样推出 $R_X \in R_X$ 这种矛盾了, 我们就证明了所有集合的集合是不存在的. 这里还有一个基础公理, 它将断言集合是不能包含自身的, 但其实这条公理是不能解决 Russell's Paradox(此时我们只能有 $X \notin X$, 这依然会推出 $X \in X$), 所以集合包不包括自身其实不影响 Russell's Paradox, 在有些集合理论中是允许这样的集合存在, 而有些集合理论中则不允许这样的集合存在

现在我们来回答范畴究竟是什么东西, 实际上采用 universe 的观点, 我们可以将范畴看成是一个三元序对 (与集合论的序对不同, 但是感觉上是类似的)。但是我更青睐于这种理解, 我们定义范畴只需要声明以下东西, 对象是什么, 对象之间的态射是什么, 态射之间的复合是什么, 它们要满足 identity laws 和 associativity. 只要我们说明了这几条, 那就说我们定义了一个范畴, 我们不需要关心范畴究竟是什么, 就像其实我们并不关心群是什么, 我们关心的是集合 G 和上面的运算 $\cdot$, 我们说群是一个序对更多的是为了心理上的满足。

很显然对于任意的对象 A,1_A 是唯一的, $1_A \circ 1'_A = 1_A = 1'_A$

Remark. 在这里的定义中我们要求对象 A, B 之间的态射是一个集合而不是 proper class, 但这并不总是被要求的, 一些书籍中称满足这条性质的范畴为 **locally small**, 同时需要注意的虽然我们要求范畴的态射是集合, 但是它们一起并不一定会构成一个集合, 例子也很简单, 考虑对象类是真类的 discrete category。

下面我们来看看例子

Examples 2.1.1 (Set). 对象是全体集合, 集合 A, B 的态射是它们之间的映射, 态射之间的复合就是它们映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**集合范畴 Set**

Examples 2.1.2 (Grp). 对象是全体群, 群 G_1, G_2 的态射是它们之间的群同态, 态射之间的复合就是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**群范畴 Grp**

Examples 2.1.3 (Ring). 对象是全体 ring, ringG_1, G_2 的态射是它们之间的 ring homomorphism, 态射之间的复合就是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为 **ring 范畴 Ring**

Examples 2.1.4 ($\mathbf{Vect}_k$). 对象是域 k 上的全体线性空间, 态射是线性空间的线性映射, 态射之间的复合是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**域 k 上的线性空间范畴 $\mathbf{Vect}_k$**

Examples 2.1.5 (Top). 对象是全体拓扑空间, 态射是拓扑空间的连续映射, 态射之间的复合是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**拓扑空间范畴 Top**

这些都是非常不错的 examples, 但是范畴的内涵远不止于此, 特别是这五个例子的态射都是我们熟悉的映射, 这可能会在初学时带来对态射的不太准确的理解, 在后面的例子中我们会看到完全不像映射的态射。再次之前我们再介绍两个概念。

Definition 2.2 (source and target)**.** if $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, we call A the source and B the target of f.

Remark. source 在某些书上也叫做 domain, target 也叫做 codomain, 但是我觉得还是将它们与映射的概念做个区分会好一点, 实际上待会我们会看到将态射简单理解成映射是完全错误的。

Definition 2.3. A morphism $f : A \to B$ in a category $\mathcal{C}$ is an **isomorphism** if there exists a map $g : B \to A$ in $\mathcal{C}$ s.t. $g \circ f = 1_A$ and $f \circ g = 1_B$

Remark. isomorphism 的概念像在模仿双射 (双射与存在逆映射等价), we call A and B is isomorphic if there exists an isomorphism form A to B and write $A \cong B$, we also call g the inverse of f and write $g = f^{-1}$.

下面是一些例子

Examples 2.3.1. 考虑 **Set**, 则 isomorphism $\in$ **Set** are the bijections. 这是因为集合上的映射是双射当且仅当它可逆, 集合范畴上的 isomorphism 定义恰好是可逆映射的定义。

Examples 2.3.2. 考虑 **Grp**, 则 isomorphism $\in$ **Grp** are the isomorphisms of groups. 这是因为若群同态可逆, 则它是双射, 则为双射同态为群同构, 反之若为群同构, 则群同构的逆为群同态.

Examples 2.3.3. 考虑 **Top**, 则 isomorphism $\in$ **Top** are the homeomorphisms. 这是因为同胚映射是双射, 则它可逆, 且它的逆也是连续映射, 反之若为一个双射, 它和它的逆都是连续的则它为同胚映射。注意连续双射不一定是同胚映射, 例: $id : (\mathbb{R}, \tau_{discrete}) \to (\mathbb{R}, \tau_{metric})$

上面的范畴例子是很基本且重要的, 但是它们都比较特殊: 它们的态射基本上都在某种程度上保持了它们的特殊结构 (代数上或者拓扑上), 它们对象的元素基本是明确的. 我们再次重申：一般来说一个范畴的对象并不是集合装备上特殊的结构, 一个范畴的对象也不一定是类似集合, 一个范畴的态射也不一定相似映射

Examples 2.1.6 考虑对象为空, 态射为空, 其复合也为空的一个范畴, 我们记该范畴为 $\emptyset$.

Remark. 我个人感觉这里和集合论中空集的产生有些类似, 并不是显然的, 需要一些逻辑上的推到论证, 但是我可以理解这个, 我就不过多纠结了。

Examples 2.1.7 考虑一个对象仅为一个元素 A, 态射仅有 1_A, 复合仅有 $1_A \circ 1_A = 1_A$, 我们记该范畴为 $\mathbf{1}$

Examples 2.1.8 考虑对象为两个元素 A, B, 态射为 $f : A \to B$, 1_A, 1_B, 复合如何定义是显然的.

Examples 2.1.9 考虑一个态射仅为 identity 的范畴, 我们称这种范畴是 **discrete category**

Examples 2.1.10 不是所有的范畴的对象都是非常"大"的, 比方说上面我们就提到了一个仅含一个对象的范畴, 更一般的我们称一个范畴是 **small** 的, 如果它的对象类仅为一个集合而不是真类 (proper class)(且它是 locally small 的, 在我们的定义中所有范畴都被认为是 locally small 的, 这条可以被忽略)。虽然 locally small 的范畴的态射集的全体不一定是集合, 但是加强为 small 后, 态射集的全体就是集合了。这是因为 **the union of set-many sets is a set, a small category has set-many mrophisms**. $\bigcup\limits_{A,B\in\mathbf{Ob}(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Note that for locally small categories, having set-many objects and having set-many morphisms in total are equivalent.Proof of left$\Rightarrow$ right we posted above, and notice that each objects correspondent at least one morphism which is identity, thus we have left $\Leftarrow$ right.

Remark. 这几个例子作为抽象的范畴出现可以很好的论证我们所说的范畴的对象不一定类似集合, 态射也不一定相似集合, 实际上我们完全可以把 A 当成是真类, 至于这个态射我们也完全可以认为是 A 自身或者是其他什么有定义的数学概念, 态射实际上就是一个抽象的东西, 并不是映射, 我们可以举一个这样的例子, 考虑 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, \}$, 我们完全可以将 f 定义成 $\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 7)\}$ 这种东西, 他完全不是一个映射。

下面这个例子是我们理解群的又一种观点。同时将进一步作证态射并非映射

Examples 2.1.10 一个仅有一个对象且上面的态射都是 isomorphism 的范畴的态射集连同上复合运算将构成一个群, 反之一个群实际上就是一个仅有一个对象且上面的态射都是 isomorphism 的范畴的态射集连同上复合运算。考虑这样一个范畴 $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, 考虑态射集 $Hom_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(A, A)$ 连同上复合运算, 这将构成

一个群 (复合的结合律保证则将是一个半群, 1_A 的存在将保证这是一个幺半群, isomorphism 将保证这是一个群) 反之, 我们考虑群 $(G, \cdot)$, 考虑对象为 A 的, 上面的态射就为每个群元素, 态射的复合定义为群的乘法 $\cdot$, 那么该态射集连同上复合恰为该群 $(G, \cdot)$。

Remark. 首先, 从范畴的观点来看, 这是一种新的角度理解群, 它实际上就是某种范畴的态射集连同上上面的复合, 另一方面, 这给我们提供了理解某种范畴的方法, 这种范畴实际上完全可以理解成群 (由于只有一个对象, 所以描述该范畴的时候我们只需要考虑怎么描述上面的态射和复合就行了, 即某种群); 再者, 我们看看范畴上的态射其实是某种群元, 而群元当然可以不是映射, 它实际上可以是任何数学概念, 这更加佐证了态射不是映射。后面我们会提到范畴的等价, 我们可以将该断言用等价的语言描述: the category of groups is equivalent to the category of (small) one-object categories in which every map is an isomorphism. In philosophy, 群是一个包含某种对象的某些对称操作的结构, 对称操作就是你可以逆着回来保持不变的操作, 对于一个对象 X, 上面的可逆态射就是这样一种操作, 所以将群理解成这种特殊的范畴在直觉上是非常合理的。

上面群的例子我们需要考虑逆 (相应的我们需要考虑 isomorphism), 现在我们考虑不要求逆的结构 (monoid).

Examples 2.1.11 一个仅有一个对象的范畴, 它上面的范畴连同上复合运算将构成幺半群, 反之一个幺半群就是一个仅有一个对象的范畴的态射集连同上复合运算。论证和上面的群是几乎一样的。

不仅仅是代数结构, 序结构也可以从范畴的角度来理解.

Examples 2.1.12 preorder 是把偏序集删去反对称性的二元关系 (i.e. $\forall x \in X, x \leq x$ and $\forall x, y, z \in X, x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$) 考虑 preorder set$(X, \leq)$, 考虑以 X 中元素为对象, $\forall A, B \in X$ 至多存在一个态射, 态射 $f : A \to B$ 当且仅当 $A \leq B$, 复合运算 $f : A \to B$,$g : B \to C$, 则 $g \circ f = z : A \to C$, 则 1_A 是存在的, 结合律是满足的, 所以 preorder set 确实可以看成是一个特别的范畴。

看完了这么多例子, 我们来引入下一个概念, 我们知道一个范畴上的态射 $f : A \to B$, 是指 A 指向 B 的, 我们考虑将它反转, 即 $f^{op} : B \to A$, 这种想法使我们引入这样的定义。

Definition 2.4. 对于一个 category $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, 考虑范畴 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{op}$ 使得 $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}}^{op}) = \mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}}), \forall A, B \in Ob, Hom_{\boldsymbol{\mathcal{C}}^{op}}(B, A) = Hom_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(A, B), f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$(for

$f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B,A)$, we denote f^{op}), $1_A(\in \mathcal{C}^{op}) = 1_A(\in \mathcal{C})$, 满足结合律, 我们称 $\mathcal{C}^{op}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 dual category。

乍一看, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B,A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ 似乎 doesn't make sense, $f : A \to B, f$ 又怎么可能会从 B 又到 A 呢? 会有这种困惑还是因为先入为主对映射的感觉用在了理解态射上了, 我们再次重申: 态射不是映射, 你将它理解成抽象的元素而不是映射就不会有这种感觉了, 例如在群或者幺半群那里, 那里的态射我们不久理解成了一个个抽象的群元素吗? 好了我们现在将 f 理解成抽象的元素能够帮助我们理解这两个态射集相等, 但是现在 f 既能是 $f : A \to B$, 也能是 $f : B \to A$, 这未免有点奇怪。这里的关键点是: 虽然我们的 source 和 target 是根据态射 f 来定义的, 但是他其实不是 f 的固有性质, 而是更类似于范畴的性质。简单来说就是同一个 f 可以有不同的 target 和 source, 这一点其实可以从定义中看出, 我们的态射本质上就是一个抽象的元素, 我们可以指定 A, B 之间的态射是 f, 也可以指定 C, D 之间的态射是 f, 再次重申 f 不是一个映射, 只要你满足范畴的公理, f 是什么都无所谓。

实际上这个定义中后两条关于 identity 和 associativity 是冗余的。$(f^{op} \circ g^{op}) \circ h^{op} = (g \circ f)^{op} \circ h^{op} = (h \circ (g \circ f))^{op} = ((h \circ g) \circ f)^{op} = f^{op} \circ (h \circ g)^{op} = f^{op} \circ (g^{op} \circ h^{op})$.
$1_A \circ f^{op} = (f \circ 1_A)^{op} = f^{op} = f^{op} \circ 1_B$ 显然每个范畴都存在对偶范畴, 再引入范畴的等价后我们会说明每个范畴的对偶范畴在等价的意义下是唯一的。

Remark (principle of duality). 简单来说对偶范畴是调转了箭头, 我们对每个定义, 定理和证明都可以这样调转箭头, 从而得到一个与之对偶的定义, 定理, 证明, 我们会在后面见到例子。

Definition 2.5. 给定范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, 考虑这样一个范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 其对象是 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$, 其态射 $Hom((A,B),(A',B')) = Hom(A,A') \times Hom(B,B')$ 我们将在下面的练习中写出它的复合和 identity.

Exercises

2.1 Find three examples of categories not mentioned above.
Solution: 1.R 是一个 ring, 考虑全体 $R-module$, 态射是 $module-homomorphism$, 复合是映射的复合. 2. 考虑全体度量空间, 态射是保测映射, 复合是映射的复合. 3. 考虑全体域, 态射是域同态, 复合是映射的复合.
2.2 Show that a map in a category can have at most one inverse.

Solution: Already posted above.

2.3 Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. There is only one sensible way to define composition and identities in product category of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, write it down.

Solution:

Composition: $Hom((A',B'),(C,D))\times Hom((A,B),(A',B')) \to Hom((A,B),(C,D))$
$((f',g'),(f,g)) \mapsto (f'\circ f, g'\circ g)$

identity in $Hom((A,B),(A,B))$ is $(1_A, 1_B)$

3 what is functor

Definition 3.1. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. A **functor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consists of following data

- a function
$$Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$$
written as $A \mapsto F(A)$

- for each $A, A' \in \mathcal{C}$, a funtion
$$Hom_{\mathcal{C}}(A,A') \to Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(A'))$$
written as $f \mapsto F(f)$,

satisfying the following axioms:

- $F(f'\circ f) = F(f')\circ F(f)$ whenever $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ in $\mathcal{C}$;
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ whenever $A \in \mathcal{C}$

简单来说, 为了定义函子我们只需要说明两点 1. 对象类到对象类的映射, 我们知道对象可能会构成一个真类, 所以这里的映射并不完全是我们处理集合上的映射那样, 但是可以完全把它当成集合上的映射来理解, 其中有一些非常基础性集合论的工作, 细节我完全不知道, 我们现在只需要知道这里的映射可以完全当成集合上的映射来理解, (domain 的元素有且仅有一个 image 在 codomain 中), 2. 态射集到态射集的映射, 它们需要满足 identity 映过去是相应的 identity, 态射的复合映过去是态射的像的复合。函子其实有点像范畴上的同态, 他把幺元映成幺元, 保持态射集上的运算.

Examples 3.1.1. 考虑对象类为全体 small category(这是类, 他不会比所有集合组成的类更大了, 因为将 small category 理解成三元对 $(OB, HOM, \circ)$ 恰为一个集合), 态射为范畴之间的函子, 我们需要定义函子之间的复合:

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$, 考虑 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{E}) : A \mapsto F(A) \mapsto G(F(A))$

$Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{E}}(G(F(A)), G(F(A'))) : f \mapsto F(f) \mapsto G(F(f))$ 不难验证这满足两条函子的公理, 我们称这个函子为 F, G 的复合, 记为 $G \circ F$. 当然我们还得说明这里的态射是一个集合, 也就是从 small category $\mathcal{C}$ 到 small category $\mathcal{D}$ 的函子的全体构成一个集合而不是真类. 首先, 一个函子其实也是一个二元对 (function between class of objects, functions between all set of morphism), 从 class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ 到 class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ 的 function 全体构成一个 class(a function is a subclass of class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}}) \times \mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$, all subclass of class is a class just as set(I guess), so all functions form a class), and all set functions between two sets form a set, union of class-many classes is classed just as set(I guess), so $\bigcup_{A, A' \in Ob(\mathcal{C})} \{somefunctionsfromHom_{\mathcal{C}}(A, A')toHom_{\mathcal{D}}(F(A), F(A'))\}$ is a class. 一个函子可被认为是这两个类的积的子类. 或者说所有态射集到态射集的函数可以被认为是 class $Mor(\mathcal{C})$ 到 class $Mor(\mathcal{D})$ 的所有函数构成的类的子类, 即 $(\mathbf{Ob}(\mathcal{C})^{\mathbf{Ob}(\mathcal{D})} \times Mor(\mathcal{C})^{Mor(\mathcal{D})})$ 的子类, 注意到我们这里是 small category, 这意味着所有对象和所有态射都将构成集合, 所以这是集合的子集, 也就是态射之间的函子将构成集合. identity 这样一个函子, 它把对象映成自己, 把所有的态射也映成自己, associativity 是显然的。这样一个范畴我们记为 **CAT**.

我们通过几个例子来感受一下 **forgetful functor(遗忘函子)**

Examples 3.1.2. 考虑范畴 **Grp** 和 **Set**, 考虑对象类之间的映射: 群 G 首先也是一个集合, 记为 $U(G)$, $F(G) = U(G)$, 即把群 G 映为其对应的集合, 群同态 f 也是一个集合间的映射, 所以可以考虑 $F(f) = f$, 即把群之间的群同态映为其作为集合的映射, 在这样的定义下两条公理显然满足, 这样我们就定义了一个从 **Grp** 到 **Set** 的函子, 这个函子" 遗忘" 了群的结构, 让群变成了集合, " 遗忘" 了群同态的保结构性, 让群同态变成了简单的映射。

Examples 3.1.3. 考虑范畴 **Ring** 和 **Set**, 将 ring$R$ 映为其对应的集合, 将 $ringhomomorphism$ 映为简单的映射. 这定义了 **Ring** 到 **Set** 的函子, 遗忘了 ring structure, 其他代数结构例如 field or vector space 都可以这样定义, 遗忘集合上面的代数结构来变成简单的集合, 遗忘保持结构的映射变成平凡

的映射。

但是 forgetful functor 不会遗忘掉所有的结构, 我们会在下面的例子看到这一点。

Examples 3.1.4. Consider **Ab**(i.e. category of abelian groups). 考虑 **Ring** 到 **Ab** 的函子如下: 注意到 ring 始终是一个 abelian group, 我们把 ring 映成其自身, 但是我们选择性的遗忘 multipication operater, 即将 ring homomorphism 映为其相应的 group homomorphism, 这样我们遗忘掉了 ring 的部分结构 (乘法部分), 让他变成了 abelian group. 我们还可以考虑 **Ring** 到 **Monoid** 的函子: 通过遗忘加法 ring R, 在乘法下构成 monoid。

我们也可以让 category 不遗忘掉它的结构, 而遗忘掉它的某些性质

Examples 3.1.5. 考虑 **Ab** 到 **Grp**, 将 abelian group 映成 group, 将 homomorphism of abelian group 映成 homomorphism of group.

Remark. In common parlance, the term 'forgetful functor' has no precise definition, being simply used whenvever a functor is obviously defined by forgetting something.

下一个例子是 **free functor(自由函子)**.Free functors are in some sense dual to forgetful functors.

Examples 3.1.6. 给定集合 X, 总可以构造 free group.[2] $F(X)$. 考虑从 **Set** 到 **FrGrp** 的函子如下: 将集合 X 映到 $F(X)$, 将 $f : X \to Y$ 映到 $F(f)$:

[2]让我们用一种比较基础的方法去严格定义这个概念, 抛去 strings, empty word or word and something like this. 考虑 X, 记 $T = X \times \{0,1\}$, 记 $(x,0) \in T$ 为 x, 记 $(x,1) \in T$ 为 x^{-1}. 记 $\pi_0 : T \to X$ 和 $\pi_1 : T \to \{0,1\}$ 为两个分量的投影映射. 若 $n \in \mathbb{N}$, 记 $[n] = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$, 定义映射 $w : [n] \to T$, 称它为 T 上一个长度为 n 的 word, 我们称一个 word 是 reduced, 如果对于所有的 $i < n-1$,$\pi_0(w(i)) = \pi_0(w(i+1)) \Rightarrow \pi_1(w(i)) = \pi_1(w(i+1))$(这一条是在说与 x 相邻的不会是 x^{-1}). 给定一个 word$w : [n] \to T$, 我们称另一个 word $w' : [n-2] \to T$ 是 one-step reduction of w, 如果存在 $i < n-1$ s.t. $\pi_0(w(i)) = \pi_0(w(i+1))$ 且 $\pi_1(w(i)) \neq \pi_1(w(i+1))$, 定义 $w'(j) = \begin{cases} w(j) & if\ j < i \\ w(j+2) & if\ j \geq i \end{cases}$ (相当于有相邻的 x 与 x^{-1} 我们就消去它们). 考虑 W 是所有 word 构成的集合, 我们称 wordw' 是 word$w$ 的 reduction, 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 以及 function$v : [n] \to W$ 使得 $v(0) = w, v(n-1) = w'$, 对每个 $i < n-1$,$v(i+1)$ 都是 $v(i)$ 的 one-step reduction. 可以证明, 对于每个 word$w$, 都存在它的唯一的 reduced word, 记为 $r(w)$. 最后我们来定义所谓乘法, 给定两个 word$w : [n] \to T; w' : [m] \to T$, 定义它们之间的乘法 $w * w' : [n+m] \to T$ by $(w * w')(i) = \begin{cases} w(i) & if i < n \\ w'(i-n) & if i \geq n \end{cases}$ 现在记 $F(X)$ 为 T 上的所有的 reduced words, 定义 $F(X)$ 上的乘法为 $(w, w') \mapsto r(w * w')$, 可以证明 $(F(X), \cdot)$ 为一个群, 我们称该群为 X 上的自由群

$F(X) \to F(Y)$(将 $F(X)$ 里的 word$w$ 映为如下 word$w'(i) := f(w(i))$), 容易验证这将构成一个函子, 这就是一个自由函子。

Examples 3.1.7. 考虑 **Set** 到交换环范畴 **CRing** 的函子: