

Capítulo 4

Dependencias Funcionales – Parte 2

Cubrimiento Canónico

- **Problema 1:** dada un conjunto de DF F para un problema del mundo real, encontrar la cantidad mínima de DF dentro de F sin que se pierda expresividad.
 - Conjuntos de DF pueden tener dependencias redundantes que pueden ser inferidas a partir de otras.
 - **Ejemplo:** $A \rightarrow C$ es redundante en:

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$$

Cubrimiento Canónico

- Pero se puede hacer algo mejor que lo que pide el problema 1.
 - Una DF puede tener partes de más o atributos de más (llamados **atributos raros**), lo que implica costo adicional en su chequeo.
 - Partes de DF pueden ser redundantes:
 - **Ejemplo:** $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow CD\}$ puede simplificarse a: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow D\}$.
 - **Ejemplo:** $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, AC \rightarrow D\}$ puede simplificarse a: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow D\}$.

Cubrimiento Canónico

- Intuitivamente, un **cubrimiento canónico** de F es un conjunto “minimal” de DF equivalente a F , que no tiene DF redundantes o partes redundantes de DFs.
- Sean F y G dos conjuntos de DF. Decimos que F y G son **equivalentes** ($F \equiv G$) if and only if $F \models G$ y $G \models F$.

Cubrimiento Canónico

- Sea F un conjunto de DF y la DF $\alpha \rightarrow \beta$ en F .
 - El atributo A es **raro** in α si $A \in \alpha$
y $F \equiv (F - \{\alpha \rightarrow \beta\}) \cup \{(\alpha - A) \rightarrow \beta\}$.
 - El Atributo A is **raro** in β if $A \in \beta$
y $(F - \{\alpha \rightarrow \beta\}) \cup \{\alpha \rightarrow (\beta - A)\} \equiv F$.
- Las dos definiciones anteriores pueden ser simplificadas

Cubrimiento Canónico

- Sea F conjunto de DF y la DF $\alpha \rightarrow \beta$ en F .
 - El atributo A es raro en α si $A \in \alpha$
y $F \models (F - \{\alpha \rightarrow \beta\}) \cup \{(\alpha - A) \rightarrow \beta\}$.
 - El atributo A es raro en β si $A \in \beta$
y $(F - \{\alpha \rightarrow \beta\}) \cup \{\alpha \rightarrow (\beta - A)\} \models F$.
- La consecuencia lógica en la dirección opuesta es trivial en cada uno de los casos arriba, debido a que una DF “más fuerte” siempre implica una más débil.

Cubrimiento Canónico

- **Ejemplo:** Dado $F = \{A \rightarrow C, AB \rightarrow C\}$
 - *¿Hay algún atributo raro en F ?*

Cubrimiento Canónico

■ **Ejemplo:** Dado $F = \{A \rightarrow C, AB \rightarrow C\}$

- ¿Hay algún atributo raro en F ?
- B is raro in $AB \rightarrow C$ porque $\{A \rightarrow C, AB \rightarrow C\} \models A \rightarrow C$ (l.e. el resultado de tirar B de $AB \rightarrow C$).

■ **Ejemplo:** Dado $F = \{A \rightarrow C, AB \rightarrow CD\}$

- ¿Hay algún atributo raro en F ?

Cubrimiento Canónico

■ **Ejemplo:** Dado $F = \{A \rightarrow C, AB \rightarrow C\}$

- ¿Hay algún atributo raro en F ?
- B is raro in $AB \rightarrow C$ porque $\{A \rightarrow C, AB \rightarrow C\} \models A \rightarrow C$ (l.e. el resultado de tirar B de $AB \rightarrow C$).

■ **Ejemplo:** Dado $F = \{A \rightarrow C, AB \rightarrow CD\}$

- ¿Hay algún atributo raro en F ?
- C es raro en $AB \rightarrow CD$ debido a que $AB \rightarrow C$ puede ser inferida incluso después de borrar C .

Cubrimiento Canónico

- Considere F conjunto de DFs y la DF $\alpha \rightarrow \beta$ in F .
- Para probar si un atributo $A \in \alpha$ es raro en α
 1. Computar $(\alpha - \{A\})^+$ usando las DF de F
 2. Chequear que $\beta \subseteq (\alpha - \{A\})^+$; si es cierto entonces A es raro
- Veamos que esta receta funciona:

$$\beta \subseteq (\alpha - \{A\})^+$$

$$\Rightarrow F \vdash (\alpha - \{A\}) \rightarrow \beta$$

por proposición 1

$$\Rightarrow F \vdash F - \{\alpha \rightarrow \beta\} \cup \{\alpha - \{A\} \rightarrow \beta\}$$

def. de \vdash

Cubrimiento Canónico

- Para probar si un atributo $A \in \beta$ es raro en β
 1. Computar α^+ usando solo las DF en
$$G = (F - \{\alpha \rightarrow \beta\}) \cup \{\alpha \rightarrow (\beta - A)\},$$
 2. Chequear que $A \in \alpha^+$; si es cierto, entonces A es raro.
- Veamos que esta receta funciona:

$A \in \alpha^+$ bajo G

$\Rightarrow G \vdash \alpha \rightarrow A$ def. de cierre

$\Rightarrow G \vdash \alpha \rightarrow A \wedge$

$G \vdash \alpha \rightarrow \beta - \{A\}$ def. de G

$\Rightarrow G \vdash \alpha \rightarrow \beta$ por unión

$\Rightarrow G \vdash F$ def. de G y de \vdash

Cubrimiento Canónico

- **Ejercicio:** Probar las siguientes afirmaciones usando los métodos de la filmina anterior.
 - $\{A \rightarrow C, A B \rightarrow C\}$ B raro
 - $\{A \rightarrow C, A B \rightarrow C D\}$ C raro

Cubrimiento Canónico

- Un **cubrimiento canónico** para F es un conjunto de DF F_c tal que:
 - $F \models F_c$,
 - $F_c \models F$,
 - ninguna DF en F_c contiene un atributo raro, y
 - cada lado izquierdo de una DF en F_c es único.

Cubrimiento Canónico

- Algoritmo para computar el cubrimiento canónico de F :
- $Res := F$
 - repeat**
 - Use the union rule to replace any dependencies in Res
 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$ and $\alpha_1 \rightarrow \beta_2$ with $\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \beta_2$
 - Find a DF $\alpha \rightarrow \beta$ in Res with an
extraneous attribute either in α or in β
 - If an extraneous attribute is found, delete it from $\alpha \rightarrow \beta$
 - until** Res does not change
- La regla de unión puede ser aplicable luego de que algunos atributos raros hayan sido borrados, así que tiene que ser reaplicada.
- Este algoritmo tiene el invariante: $Res \models F \wedge F \models Res$.

Cubrimiento Canónico

- **Ejercicio:** Sea el esquema $R = (A, B, C)$ con DFs:
 $\{A \rightarrow BC, B \rightarrow C, A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$
 - Encontrar recubrimiento canónico usando el algoritmo anterior.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- Sea R un esquema de relación. Un conjunto de esquemas de relación $\{R_1, \dots, R_n\}$ es una **descomposición** de R si

$$R = R_1 \cup \dots \cup R_n.$$

- **Objetivos** a lograr con una buena descomposición:
 1. Evitar datos redundantes
 - Algoritmos de normalización.
 2. Asegurar que las relaciones entre atributos están representadas.
 - Noción de descomposición de reunión sin pérdida.
 3. Facilitar el chequeo de actualizaciones por violaciones de restricciones de integridad.
 - Noción de preservación de dependencias

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- Sea R_U esquema universal. Tengo un cierto significado asociado a que una tupla pertenezca a una relación de R_U .
- Si descompongo mal a R_U puedo perder parte de ese significado.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejemplo:** Sea el esquema universal.

*Préstamo = (numSucursal, ciudad, activo, numCliente,
numPréstamo, importe)*

- Lo descomponemos en:

SucursalCliente = (numSucursal, ciudad, activo, numCliente)

ClientePréstamo = (numCliente, numPréstamo, importe)

- **Evaluación de la descomposición:** Si tenemos un cliente con varios préstamos en distintas sucursales: no se puede decir el préstamo que pertenece a cada sucursal en la descomposición que tenemos.
 - Luego en la descomposición que tenemos se perdió información con relación al esquema universal.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Problema:** ¿Cómo formalizar que una descomposición no pierde información?
- **Solución 1:** Seguir el siguiente procedimiento:
 1. Escribir qué significa que una tupla pertenezca a una tabla del esquema universal, expresando todas las relaciones entre atributos relevantes.
 2. Chequear que en la descomposición se mantienen todas esas relaciones entre atributos.
- **Evaluación:** es fácil no darse cuenta de algunas relaciones entre atributos y justo la descomposición que se elige no las tiene en cuenta.
 - El ejemplo anterior justo muestra esto porque se trata de una situación muy particular (que se le puede pasar a cualquiera) que alguien esté en varias sucursales y tenga préstamos en más de una.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Solución 2:** $r(R)$, R_1 y R_2 descomposición de R , r legal (i.e. cumple restricciones de integridad). Si tiro r y en lugar de r uso $r_i = \Pi_{R_i}(r)$ ($i \in \{1,2\}$); debería poder **reconstruir** r a partir de los r_i
 - *¿Qué significa reconstruir?*

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Solución 2:** $r(R)$, R_1 y R_2 descomposición de R , r legal (i.e. cumple restricciones de integridad). Si tiro r y en lugar de r uso $r_i = \Pi_{R_i}(r)$ ($i \in \{1,2\}$); debería poder **reconstruir** r a partir de los r_i
 - *¿Qué significa reconstruir?*
 - En el ejemplo anterior el único atributo en común entre *SucursalCliente* y *ClientePréstamo* es *numCliente*. Luego a lo sumo puedo calcular el natural join de las dos.
 - Reconstruir r significa: $r = \Pi_R r_1 \bowtie r_2$
 - Se puede omitir Π_R si el esquema de $r_1 \bowtie r_2$ es R .

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- Asumimos que $r(\text{Préstamo})$ viene dada por la siguiente tabla:

r	numSucursal	ciudad	activo	numCliente	numPréstamo	importe
	Centro	Arganzuela	9000000	Santos	P17	1000
	Becenil	Aluche	400000	Santos	P93	500

- Entonces

r_1	numSucursal	ciudad	activo	numCliente
	centro	Arganzuela	9000000	Santos
	Becenil	Aluche	400000	Santos

- Y

r_2	numCliente	numPréstamo	importe
	Santos	P17	1000
	Santos	P93	500

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- Por otro lado :

$r_1 \bowtie r_2$	numSucursal	ciudad	activo	numCliente	numPréstamo	importe
	Centro	Arganzuela	9000000	Santos	P17	1000
	Centro	Arganzuela	9000000	Santos	P93	500
	Becenil	Aluche	400000	Santos	P93	500
	Becenil	Aluche	400000	Santos	P17	1000

- El ejemplo anterior muestra que al hacer $r_1 \bowtie r_2$ se pueden obtener más tuplas que en r .
 - En ese caso no puedo reconstruir r desde r_1 y r_2 .
- **Observación:** Sea $r(R)$ una relación y sea $r_i = \Pi_{R_i}(r)$ ($1 \leq i \leq n$). $\{r_1, \dots, r_n\}$ es la BD que resulta de descomponer R en $\{R_1, \dots, R_n\}$.
En general vale $r \subseteq \Pi_R r_1 \bowtie r_2 \bowtie \dots \bowtie r_n$

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Definición:** Sea C un conjunto de restricciones de integridad de la BD y R un esquema de relación. Una descomposición $\{R_1, \dots, R_n\}$ de R es una **descomposición de reunión sin pérdida** si para todas las relaciones r del esquema R que son legales bajo C se cumple que

$$r = \Pi_R r_1 \bowtie r_2 \bowtie \dots \bowtie r_n$$

- Recordar que $r_i = \Pi_{R_i}(r)$ para todo i .

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- *¿Puede ser necesario hacer la reconstrucción del r ?*
 - Podría haber restricciones de integridad que requieran reconstruir el r para poder chequearlas.
 - **Ejemplo:** aserción que diga que todo cliente no tenga más de un préstamo por sucursal.
 - r lo cumple, pero $r_1 \bowtie r_2$ no.
 - A veces necesito poder reconstruir r porque hay consultas que necesitan de r .

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejemplo:** En el ejemplo de las tablas anterior consideramos la consulta: “Hallar todas las sucursales con préstamos menores a 1000 euros”.
 - Aplicar esta consulta a r da diferente que aplicar la misma a $r_1 \bowtie r_2$.
 - En el primer caso da *Becenil* y en el segundo da *Centro y Becenil*.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Proposición 2:** Una descomposición de R en R_1 y R_2 es de reunión sin pérdida si y solo si al menos una de las siguientes DF está en F^+ :
 - $R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1$
 - $R_1 \cap R_2 \rightarrow R_2$

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- La prueba se hace para el caso donde $R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1 \in F^+$. La prueba del otro caso es similar y por eso se omite.
- Sea r legal. Probaremos que $r \supseteq \Pi_R (\Pi_{R_1}(r) \bowtie \Pi_{R_2}(r))$.

$$t \in \Pi_R (\Pi_{R_1}(r) \bowtie \Pi_{R_2}(r))$$

$$(\Rightarrow) t_1[R_1] = t[R_1] \wedge t_2[R_2] = t[R_2]$$

para algún $t_1, t_2 \in r$

$$(\Rightarrow) t_2[R_2] = t[R_2] \wedge t_1[R_1] = t[R_1] \wedge$$

$$t_2[R_1 \cap R_2] = t_1[R_1 \cap R_2] \wedge t_1, t_2 \in r$$

$$(\Rightarrow) t_2[R_2] = t[R_2] \wedge t_2[R_1] = t_1[R_1] \wedge$$

$$t_1[R_1] = t[R_1] \wedge t_2 \in r$$

$F \models R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1$

y r legal bajo F

$$(\Rightarrow) t_2[R_2] = t[R_2] \wedge t_2[R_1] = t[R_1] \wedge t_2 \in r$$

$$(\Rightarrow) t_2[R] = t[R] \wedge t_2 \in r$$

$$R = R_1 \cup R_2$$

$$(\Rightarrow) t = t_2 \wedge t_2 \in r$$

$$(\Rightarrow) t \in r$$

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejercicio:** Si considero la descomposición de *Préstamo* en:
 - *Sucursal* = (*numSucursal*, *ciudad*, *activo*)
 - *InfoPréstamo* = (*numSucursal*, *numCliente*, *numPréstamo*, *importe*)
 - ¿Se puede recuperar $r(\text{Préstamo})$ legal a partir de $r_1(\text{Sucursal})$ y $r_2(\text{InfoPréstamo})$?

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejercicio:** Si considero la descomposición de *Préstamo* en:
 - *Sucursal* = (*numSucursal*, *ciudad*, *activo*)
 - *InfoPréstamo* = (*numSucursal*, *numCliente*, *numPréstamo*, *importe*)
 - ¿Se puede recuperar $r(\text{Préstamo})$ legal a partir de $r_1(\text{Sucursal})$ y $r_2(\text{InfoPréstamo})$?
 - Notar que para *Sucursal*, se tiene la DF:
$$\text{numSucursal} \rightarrow \text{ciudad}, \text{activo}$$
 - Obviamente que $\text{numSucursal} \rightarrow \text{ciudad}, \text{activo}, \text{numSucursal}$

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejercicio:** Sea $R = (A, B, C)$ esquema con DFs:
$$F = (A \rightarrow B, B \rightarrow C) .$$
 - Sea $R_1 = (A, B)$, $R_2 = (B, C)$ descomposición de R .
 - Probar que esa es una descomposición de reunión sin pérdida.

Descomposiciones de Reunión sin Pérdida

- **Ejercicio:** ¿Sea $R = (A, B)$, $R_1 = (A)$, $R_2 = (B)$, será esa una descomposición de reunión sin pérdida?
- **Ejercicio:** Sean $R = (A, B, C, D)$, $F = \{A \rightarrow BC, D \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ y $Q = \{(A, B), (A, C), (B, D)\}$ una descomposición de R . ¿es Q de reunión sin pérdida? Justifique su respuesta.

Preservación de Dependencias

- Uno de los objetivos a lograr con una buena descomposición del esquema universal es el **chequeo económico de las DF**.
- Chequear algunas DF obligan a construir reuniones naturales de tablas y luego chequearlas.
 - Esto suele ser muy costoso.
 - A uno le gustaría que no haya que calcular reuniones naturales para chequear DF.

Preservación de Dependencias

- **Problema:** ¿Cuáles son las DF que se pueden chequear económicamente?
- **Proposición 3:** R_1, \dots, R_n , descomposición de R , F conjunto de DFs, $r(R)$ legal, $\alpha, \beta \subseteq R_i$, entonces: $\alpha \rightarrow \beta$ se cumple en $\prod_{R_i}(r)$ si y solo si $\alpha \rightarrow \beta$ se cumple en r .
- **Respuesta:** dependencias con atributos en miembros de la descomposición se pueden chequear económicamente.
 - No hace falta calcular reuniones naturales para su chequeo.
 - Se las caracteriza en la definición abajo.

Preservación de Dependencias

- ¿Cómo formalizar las DF que se pueden chequear económicamente?
- **Definición:** Sea F un conjunto de DF del esquema R y R_1, R_2, \dots, R_n , una descomposición de R . La **restricción** de F a R_i se denota F_i y es el conjunto de todas las DF de F^+ que incluyen solo atributos de R_i . Formalmente:

$$F_i = \{\alpha \rightarrow \beta \in F^+ : \alpha, \beta \subseteq R_i\}.$$

- **Meta:** se debería tener un conjunto de DFs representativas del problema del mundo real que se chequeen en las tablas de la BD.
- ¿Cómo formalizar esta meta?

Preservación de Dependencias

- **Solución:** Sea $F' = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$. Se dice que las descomposiciones donde se cumple $F'^+ = F^+$ son **descomposiciones que conservan las dependencias**.
 - Si para todo i , F_i se cumple en $\Pi_{R_i}(r)$, entonces F se cumple en r .
- **Nota:** para cada F_i se puede calcular un recubrimiento canónico y la unión de todos esos recubrimientos canónicos será el conjunto de dependencias a usar que son chequeables eficientemente.

Preservación de Dependencias

- **Observación:** Si se puede comprobar cada miembro de F en alguna de las relaciones de la descomposición, entonces la descomposición trivialmente preserva las dependencias.
- **Ejercicio:** Sea $R = (A, B, C)$ con conjunto de DFs $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, y sea la descomposición de R :

$$R_1 = (A, B), R_2 = (B, C) .$$

¿Esta descomposición preserva las dependencias?

Preservación de Dependencias

- Hay casos en los que a pesar que una descomposición preserva las dependencias hay un miembro de F que no puede verificarse en ninguna de las tablas de la BD.

Preservación de Dependencias

- Para la comprobación de la conservación de las dependencias se usa el siguiente método: Se aplica el siguiente procedimiento a cada DF $\alpha \rightarrow \beta \in F$:
 - $result = \alpha$
 - while** (changes to $result$) **do**
 - for each** R_i in the decomposition
 - $t = (result \cap R_i)^+ \cap R_i$
 - $result = result \cup t$
 - Si $result$ contiene todos los atributos en β , entonces la DF $\alpha \rightarrow \beta$ es preservada.

Preservación de Dependencias

- Aplicamos la prueba a todas las DF de F para chequear si una decomposición preserva las dependencias.
- Este procedimiento toma tiempo polinomial, en lugar del tiempo exponencial requerido para computar F^+ y $(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n)^+$

Preservación de Dependencias

- Sea $\alpha \rightarrow \beta \in F$. $F' \vdash \alpha \rightarrow \beta$ si y solo si $\beta \subseteq \alpha_{F'}^+$.
 - Si probamos que el algoritmo anterior computa $\alpha_{F'}^+$, entonces la receta anterior es correcta.
- Probaremos que el algoritmo anterior se obtiene luego de aplicar transformaciones correctas al algoritmo que calcula $\alpha_{F'}^+$.

Preservación de Dependencias

El algoritmo que calcula α^+ respecto de F' es:

```
res :=  $\alpha$ ;  
while cambios en  $|res$  do  
  for each  $\beta \rightarrow \gamma$  en  $F'$  do  
    if  $\beta \subseteq res$  then  $res := res \cup \gamma$   
  od  
od
```

Usando que $F' = F_1 \cup \dots \cup F_n$ el algoritmo anterior es equivalente al siguiente:

Preservación de Dependencias

```
res :=  $\alpha$ ;  
while cambios en res do  
  for each  $i = 1$  to  $n$  do  
    for each  $\beta \rightarrow \gamma$  en  $F_i$  do  
      if  $\beta \subseteq res$  then  $res := res \cup \gamma$   
    od  
  od  
od
```

Observamos que en el algoritmo anterior el for de más adentro calcula

$$\cup \{ \gamma \mid \beta \rightarrow \gamma \in F_i \wedge \beta \subseteq res \} \text{ .}$$

Luego el algoritmo anterior es equivalente a:

Preservación de Dependencias

```
res :=  $\alpha$ ;  
while cambios en res do  
  for each  $i := 1$  to  $n$  do  
     $t := \cup \{ \gamma \mid \beta \rightarrow \gamma \in F_i \wedge \beta \subseteq res \}$   
     $res := res \cup t$   
  od  
od  
od
```

Si probamos que

$$\cup \{ \gamma \mid \beta \rightarrow \gamma \in F_i \wedge \beta \subseteq res \} = (res \cap R_i)^+ \cap R_i .$$

entonces estamos listos.

Preservación de Dependencias

Ahora probamos la primera inclusión (\subseteq).

$$\beta \rightarrow \gamma \in F_i \wedge \beta \subseteq res$$

$$\Rightarrow \beta = \beta \cap R_i \subseteq res \cap R_i \wedge \beta \rightarrow \gamma \in F_i$$

$$\Rightarrow \beta^+ \subseteq (res \cap R_i)^+ \wedge F \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad + \text{ es monótona}$$

$$\Rightarrow \gamma \subseteq \beta^+ \subseteq (res \cap R_i)^+ \quad \text{proposición 1}$$

Ahora probamos la otra inclusión.

$$A \in (res \cap R_i)^+ \cap R_i$$

$$\Rightarrow A \in (res \cap R_i)^+ \wedge A \in R_i$$

$$\Rightarrow F \vdash (res \cap R_i) \rightarrow A \wedge A \in R_i \quad \text{proposición 1}$$

$$\Rightarrow (res \cap R_i) \rightarrow A \in F^+ \wedge A \in R_i \quad \text{def. de cierre}$$

$$\Rightarrow (res \cap R_i) \rightarrow A \in F_i \wedge res \cap R_i \subseteq res \quad \text{def. de } F_i$$

$$\Rightarrow A \in \cup\{\gamma \mid \beta \rightarrow \gamma \in F_i \wedge \beta \subseteq res\} \quad \text{teoría de conjuntos}$$

Preservación de Dependencias

- **Ejercicio:** Sea $R = (A, B, C)$ con conjunto de DFs $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, y sea la descomposición de R :

$$R_1 = (A, B), R_2 = (A, C) .$$

- ¿Será que esa descomposición conserva las dependencias?
 - Resolver primero usando definición de preservación de dependencias.
 - Resolver luego usando el algoritmo anterior.