Математические и статистические методы в психологии
Непрерывные случайные величины. (03.11)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок, Е. П. Шеремет

При решении следующих задач мы будем пользоваться следующими фактами:

1. Площадь под графиком функции плотности распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины равна 1, или более формально:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

2. Вероятность $P(A < X < B) = P(A < X < B)$ для непрерывной случайной величины X равна площади под графиком функции плотности распределения $f(x)$ этой величины на участке от A до B, или более формально:

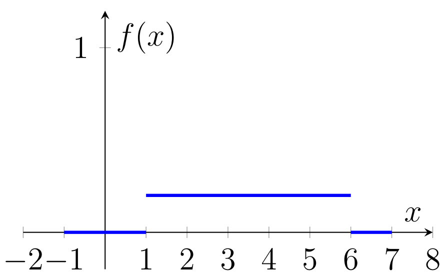
$$\int_{A}^{B} f(x)dx.$$

Задача 1. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1; 6]$.

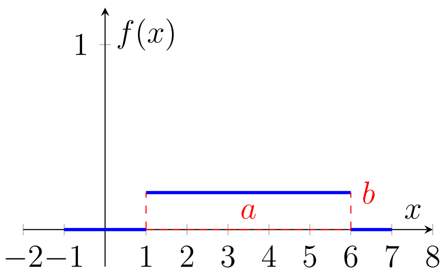
(a) Найти $f(x)$.
(b) Найти $f(0)$, $f(2)$, $f(7)$.
(c) Найти $\mathrm{P}(2 < X < 5)$.
(d) Найти $\mathrm{F}(4)$, где F – функция распределения.
(e) Найти квантиль уровня 0.35.
(f) Найти медиану, нижний и верхний квартили распределения.

Решение.

(a) График функции плотности распределения равномерной случайной величины X выглядит так:



Так как $f(x) = 0$ при значениях x меньше 1 и больше 6, вся наша работа сводится к отрезку $[1; 6]$. Площадь под графиком на этом участке – площадь прямоугольника, которая равна 1, так как нам дан график плотности.

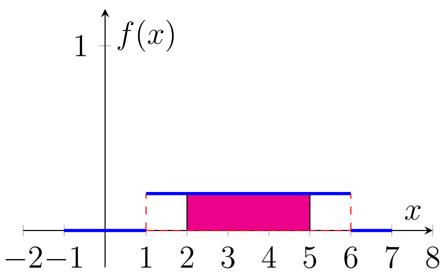


Одна сторона прямоугольника равна $a = 6 - 1 = 5$. Если $S = ab = 1$ и $a = 5$, получаем, что $b = 1/5$. Отсюда

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 1/5, 1 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0, x > 6. \end{cases}$$

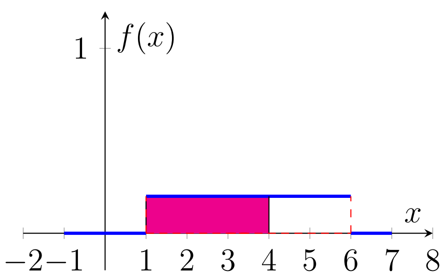
(b) На основе $f(x)$ из предыдущего пункта: $f(0) = 0$, $f(2){=}1/5$, $f(7) = 0$.

(c) $\mathrm{P}(2 < X < 5) = S_{[2,5]}$, где $S_{[2,5]}$ – площадь под графиком на участке $[2, 5]$.



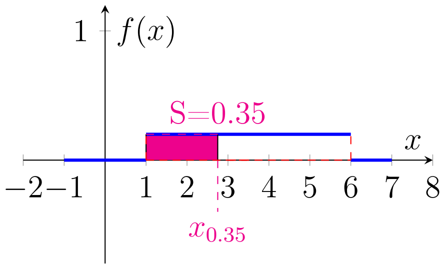
Находим площадь полученного прямоугольника $S = (5 - 2) \cdot 1/5 = 3/5$. Это и есть ответ.

(d) $\mathrm{F}(4) = \mathrm{P}(X < 4) = \mathrm{P}(1 < X < 4)$ (по определению функции распределения). По аналогии с предыдущим пунктом получаем:



$F(4) = S_{[1,4]} = 4/5$.

(e) Обозначим квантиль уровня 0.35 как $x_{0.35}$. Тогда $P(X < x_{0.35}) = 0.35$. Значит, мы должны найти такое значение x, площадь под графиком слева от которого равна 0.35.



Если мы обозначили за $x_{0.35}$ квантиль, то одна сторона прямоугольника равна $(x_{0.35} - 1)$. Вторая сторона равна $1/5$. Осталось записать уравнение, пользуясь формулой площади прямоугольника:

$$(x_{0.35} - 1) \cdot 1/5 = 0.35$$

Отсюда $x_{0.35} = 2.75$. Это и есть квантиль уровня 0.35.

(f) Медиана распределения – квантиль уровня 0.5 – делит площадь под графиком плотности на две равные части. В нашем случае это просто середина отрезка $[1, 6]$. Найдем ее:

$$\text{Me} = x_{0.5} = \frac{1+6}{2} = 3.5.$$

Нижний квартиль – квантиль уровня 0.25, значение, слева от которого сосредоточены 25% значений случайной величины. То есть, площадь под графиком функции плотности слева от этого значения равна 0.25. В случае равномерного распределения все просто – можно увидеть, что это середина отрезка слева от медианы. Найдем ее:

$$x_{0.25} = \frac{1+3.5}{2} = 2.25.$$

Верхний квартиль – квантиль уровня 0.75, значение, слева от которого сосредоточены 75% значений случайной величины. То есть, площадь под графиком функции плотности слева от этого значения равна 0.75. В случае равномерного распределения все просто – можно увидеть, что это середина отрезка справа от медианы. Найдем ее:

$$x_{0.75} = \frac{3.5+6}{2} = 4.75.$$

Если не хочется решать задачу чисто геометрически, можно решать ее по аналогии с предыдущим пунктом, то есть решить следующие уравнения

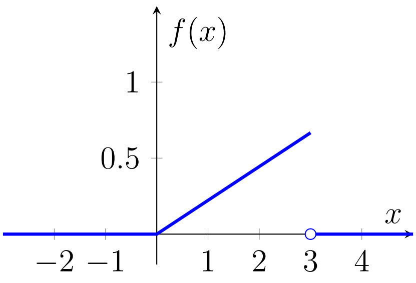
$$(x_{0.5} - 1) \cdot 1/5 = 0.5$$

$$(x_{0.25} - 1) \cdot 1/5 = 0.25$$

$$(x_{0.75} - 1) \cdot 1/5 = 0.75$$

для медианы, нижнего и верхнего квартиля соответственно.

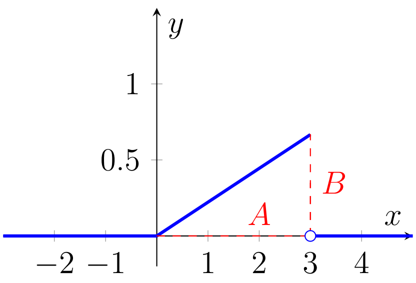
Задача 2. Функция $f(x)$ – функция плотности вероятности. Ее график выглядит следующим образом:



(a) Найдите $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$.
(b) Найдите медиану распределения.

Решение.

(a) Судя по графику, $f(-1) = 0$ и $f(4) = 0$. Чтобы найти $f(2)$, нужно найти уравнение прямой. Но перед этим найдем значение $f(3)$, оно нам понадобится.
График $f(x)$ на участке $[0, 3]$ образует с осью Ox угол, и на этом участке мы можем достроить график до треугольника.



Получаем прямоугольный треугольник. Его площадь равна 1 (следует из свойств функции плотности). Из геометрии нам известно, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2}AB.$$

По графику видно, что $A = 3$. Воспользовавшись формулой площади, получаем:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot B.$$

Отсюда $B = \frac{2}{3}$. А ведь B – это и есть значение функции плотности в точке 3. Получаем $f(3) = 2/3$. Теперь вернемся к прямой.

Прямая задается так:

$$f(x) = kx + b,$$

где b – это значение y, при котором прямая пересекает ось Oy, а k – коэффициент наклона, показывающий, насколько увеличивается y при увеличении x на 1. Видно, что $b = 0$, так как прямая проходит через точку $(0, 0)$. Найдем k. Для этого поделим прирост y на прирост x (то есть катет B на катет A на графике):

$$2/3 : 3 = \frac{2}{9}.$$

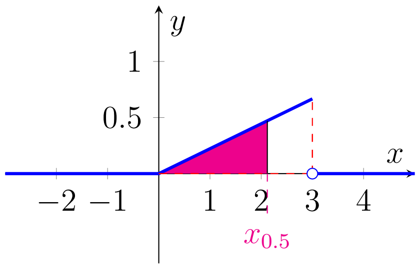
Получили уравнение прямой, то есть

$$f(x) = \frac{2}{9}x.$$

Можем найти

$$f(2) = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}.$$

(b) Находим медиану.
Первый способ. Воспользуемся тем же способом, что и в предыдущей задаче. Площадь под графиком плотности слева от медианы равна 0.5.



Один катет треугольника равен $(x_{0.5} - 0) = x_{0.5}$. Второй катет треугольника равен $f(x_{0.5}) = \frac{2}{9}x_{0.5}$. Подставим катеты в формулу площади треугольника:

$$\frac{1}{2} \cdot x_{0.5} \cdot \frac{2}{9}x_{0.5} = 0.5$$

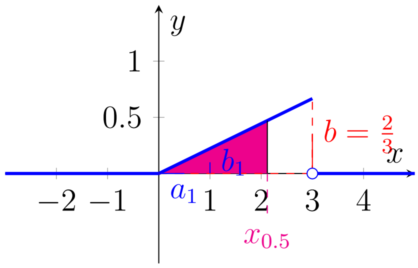
Найдем $x_{0.5}$.

$$x_{0.5}^2 = \frac{9}{2}$$

$$x_{0.5} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Нам подходит только положительное значение (по графику), поэтому медиана равна $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Второй способ. Эту задачу мы могли бы решить другим способом – воспользоваться подобием треугольников. В данном случае у нас есть два треугольника: большой (с площадью S равной 1) и маленький фиолетовый (с площадью S_1 равной 0.5).



Эти два треугольника подобны по двум углам. Следовательно, соотношение их сторон, которые лежат напротив равных углов, одинаково:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}.$$

Но у подобных треугольников есть еще полезное свойство:

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{a_1}{a})^2 = (\frac{b_1}{b})^2.$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, квадрату отношения сторон. Площади треугольников нам известны, мы знаем, что отношение площадей такое:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2}.$$

То есть $k^2 = \frac{1}{2}$ и $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, чтобы найти медиану $x_{0.5}$, нам нужно уменьшить сторону большого треугольника в $\sqrt{2}$ раз. Получим $x_{0.5} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.