Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2. Вариант 2. ***Группы Тамбовцевой Аллы Андреевны***

Задача 1. *(2 балла*) Совет по жилищно-коммунальному хозяйству государства Флатландия рассматривает законопроект об обязательном строительстве пятиугольных домов. Известно, что 70% членов Совета выступают за строительство таких домов. Какова вероятность того, что в выборке из 200 членов Совета будет не менее 150 человек, одобряющих законопроект?

Решение

Данная задача решается через теорему Муавра-Лапласа.

n = 200, p = 0,7

E(X) = np = 140

D(X) = npq = 42

P $(150 \leq X \leq 200) = P\left(\frac{150-140}{\sqrt{42}} \leq Z \leq \frac{200-140}{\sqrt{42}}\right) = P\left(\frac{10}{6{,}5} \leq Z \leq \frac{60}{6{,}5}\right) = \Phi(9) – \Phi(1{,}54) = 1-\Phi(1{,}54) = 0{,}0618$

Ответ: 0,0618

Задача 2. (2 балла) Температура тела слонов X описывается нормальным распределением со средним значением 36 и стандартным отклонением 0.5. Найдите P(35 < X < 38), где X – температура тела слонов.

Решение

E(X) = 36, D(X) = Var(X) = 0,5*0,5=0,25

Внутри неравенства нам необходимо стандартизировать значения, чтобы решить задачу:

P $(35<X<38) = P\left(\frac{35-36}{\sqrt{0{,}25}} < X < \frac{38-36}{\sqrt{0{,}25}}\right) = P(-2 < Z < 4) = \Phi(4) – \Phi(-2) = \Phi(4) – (1–\Phi(2)) = \Phi(4) + \Phi(2) – 1 = \Phi(2) = 0{,}9772$

Ответ: 0,98

Задача 3. (2 балла) Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $X \sim N(2, \sigma^2 = 1)$, $Y \sim N(-3, \sigma^2 = 4)$. Укажите закон распределения случайной величины $Q = -X + 2Y + 1$. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Данная задача решается с использование свойств математического ожидания и дисперсии.

$E(Q) = E(-X + 2Y + 1) = -E(X) + 2E(Y) + 1 = -2 - 6 + 1 = -7$

$D(Q) = D(-X + 2Y + 1) = (-1^2)D(X) + (2^2)D(Y) = 1 + 4*4 = 17$

Ответ: $Q \sim N(-7, 17)$

Задача 4. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-6, 4]$.

a) (0.5 балла) Укажите значение плотности распределения f(x) этой случайной величины в точке x = 0.

Если величина имеет равномерное распределение, то график функции плотности распределения будет выглядеть как прямоугольник.

У этого прямоугольника мы знаем длинную сторону, она будет равна 10 (отрезок от -6 до 4 будет иметь длину 10).
Остается найти другую сторону. Площадь под графиком на этом участке – площадь прямоугольника, которая равна 1, так как нам дан график плотности. Необходимо поделить 1 на 10, получится 0,1. Это и есть искомое значение, т.к. значение плотности будет одинаковым для всех значений.
Ответ: 0,1

b) (0.5 балла) Укажите значение функции распределения F(x) этой случайной величины в точке x = 1.

$F(2) = P(X < 1) = P(-6 < X < 1)$

$(1 - (-6))*0{,}1 = 0{,}7$

Ответ: 0,7

c) (1 балл) Найдите нижний квартиль этой случайной величины.

Короткий способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,25, или $x_{0,25}$. Он делит ¼ и ¾ отрезка между собой. Т.к. распределение равномерное, мы можем найти ¼: 10/4 = 2,5.

Далее мы прибавляем 2,5 к началу отрезка, и получается $x_{0,25}$ = -6 + 2,5 = –3,5.

Длинный способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,25, или $x_{0,25}$.Тогда P(X<$x_{0,25}$¿=0,25. Значит, нам надо найти такое значение X, площадь под графиком слева от которого будет равно 0,25.

Получается, нам нужно найти нижнюю сторону прямоугольника, площадь которого равна 0,25, боковая сторона равно 0,1 (как мы уже узнали). Обозначим эту нижнюю сторону как $x_{0,25}$ - (-6) (т.к. нижняя сторона начинается в координате -6, $x_{0,25}$ – ее конец, а длина стороны – разница между этими двумя точками).

Осталось записать уравнение.

($x_{0,25}$ +6)*0,1 = 0,25

$x_{0,25}$ = –3,5. Это и есть квантиль уровня 0,25.

Ответ: –3,5.

Задача 5. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	−1	1
0	0.4	0.3
1	0	0.1
4	0.1	? = 0.1

a) (0.5 балла) Найдите вариацию (дисперсию) случайной величины X.

Находим закон распределения X.

X	0	1	4
P	0.7	0.1	0.2

E(X) = 0*0.7 + 1*0.1 + 4*0.2 = 0,9
E(X^2¿=1*0,1 + 16*0,2 = 3,3
D(X) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2}= 3,3 – 0,81 = 2,49
$\sigma(X)$ = 1,6

Ответ: 2,49

b) (1.5 балла) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Выполняем аналогичные расчеты для Y.

Y	-1	1
P	0.5	0.5

E(У) = (-1)*0.5 + 1*0.5 = 0
E($У^2$¿ = 1*0,5 + 1*05 = 1
D(У) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2} = 1–0=1
$\sigma(Y)$ = 1

Cov(X,Y) = E(X*Y) – E(X)*E(Y)

Строим таблицу X*Y.

X*Y	0	-1	1	-4	4
P	0,7	0	0,1	0,1	0,1

E(X*Y) = 0,1 – 0,4 + 0,4 = 0,1

Cov(X,Y) = 0,1 – 0,9*0 = 0,1

Cor(X,Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,1}{1,6*1} =$ 0,0625

Ответ: 0,6