

Контрольная работа 2, вариант 3

**Задача 1.** Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X/Y	2	4
0	0,25	0,2
1	0	0,25
4	0,1	? = 0,2

а) Найдите стандартное отклонение случайной величины Y.

Для начала найдем пропущенное значение в таблице. Это будет 0,2

Исходя из таблицы, распределение случайной величины Y будет выглядеть следующим образом:

Y	2	4
P	0,35	0,65

Y <sup>2</sup>	4	16
P	0,35	0,65

$$E(Y) = 2 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,65 = 3,3$$

$$E(Y^2) = 4 \cdot 0,35 + 16 \cdot 0,65 = 11,8$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 11,8 - 10,89 = 0,91$$

$$\text{Std}(Y) = 0,954$$

**Ответ: 0,954**

б) Найдите корреляцию  $\text{Cor}(X, Y)$ .

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{std}(x) \cdot \text{std}(y)}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X, Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

1.

X	0	1	4
P	0,45	0,25	0,3

X <sup>2</sup>	0	1	16
P	0,45	0,25	0,3

$$E(X) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,3 = 1,45$$

$$E(X^2) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,25 + 16 \cdot 0,3 = 5,05$$

$$D(X) = 5,05 - 2,1025 = 2,9475$$

$$\text{Std}(X) = 1,716$$

2. Строим ряд распределения величины  $X*Y$

По таблице совместного распределения находим значения этой величины: 0, 2, 4, 8, 16

$X*Y$	0	2	4	8	16
P	0,45	0	0,25	0,1	0,2

$$E(X*Y) = 0*0,45 + 2*0 + 4*0,25 + 8*0,1 + 16*0,2 = 5$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(X,Y) - E(X)*E(Y) = 5 - 1,45*3,3 = 0,215$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{std}(x)*\text{std}(y)} = \frac{0,215}{1,716*0,954} = 0,131$$

**Ответ: 0,131**

**Задача 2.** Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-7, 3]$ .

а) Укажите значение плотности распределения  $f(x)$  этой случайной величины в точке  $x = 0$ .

Т.к. величина имеет равномерное распределение, график функции будет выглядеть как прямоугольник.

Мы можем найти его длинную сторону: это отрезок от -7 до 3, соответственно он имеет длину 10.

Площадь под графиком функции плотности будет равна 1, соответственно площадь нашего прямоугольника будет равна 1. Тогда, мы можем найти вторую сторону фигуры, так как мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Следовательно, вторая сторона равна  $1/10 = 0,1$ . Это и есть значение плотности распределения  $f(x)$ , так как значение плотности будет одинаковым для всех значений

**Ответ:  $f(0) = 0,1$**

б) Укажите значение функции распределения  $F(x)$  этой случайной величины в точке  $x = 2$ .

$$F(2) = P(x < 2) = P(-7 < x < 2) = (2 - (-7)) * 0,1 = 0,9$$

**Ответ: 0,9**

в) Найдите квантиль уровня 0.2 этой случайной величины.

$$(x_{0,2} - (-7)) * 0,1 = 0,2$$

$$x_{0,2} + 7 = 2$$

$$x_{0,2} = -5$$

**Ответ:  $x_{0,2} = -5$**

**Задача 3.** Число книг по психологии, которые студенты первого курса успевают прочитать в течение учебного года, описывается нормальным законом распределения со средним значением 8 и стандартным отклонением 2. Найдите вероятность того, что число книг по психологии, прочитанных случайно выбранным студентом, будет больше 6 и меньше 8.

$$X \sim N(8, \sigma = 2)$$

$$P(6 < X < 8) - ?$$

Для начала нужно провести стандартизацию значений:

$$Z_1 = \frac{6-8}{2} = -1$$

$$Z_2 = \frac{8-8}{2} = 0$$

$$P(6 < X < 8) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1)) = 0,5 - (1 - 0,8413) = 0,3413$$

**Ответ:  $P(6 < X < 8) = 0,3413$**

**Задача 4.** Известно, что  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение  $X \sim N(-2, \sigma^2 = 9)$ ,  $Y \sim N(-3, \sigma^2 = 4)$ . Укажите закон распределения случайной величины  $Q = X + 4Y - 3$ . Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

$$E(Q) = E(X + 4Y - 3) = E(X) + 4E(Y) - 3 = -2 + 4(-3) - 3 = -17$$

$$D(Q) = D(X + 4Y - 3) = D(X) + 16D(Y) - 0 = 9 + 16 \cdot 4 = 73$$

**Ответ:  $Q \sim N(-17, \sigma^2 = 73)$**

**Задача 5.** По результатам опроса, проведенного агенством «НЕ В(ОПРОС)», известно, что 30% респондентов считает, что СМИ освещают ситуацию в экономике объективно. Найдите вероятность того, что в выборке объема 1000 человек окажется от 275 до 315 человек, которые считают, что СМИ освещают ситуацию в экономике объективно.

Исходя из условия, вероятность удачного исхода  $p=0,3$ , а  $n=1000$

Задача решается с использованием теоремы Муавра-Лапласа:

$$p=0,3, n=1000, q = 1 - p = 0,7$$

$$E(X) = n \cdot p = 300$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 210$$

$$P(275 < X < 315) = P\left(\frac{275-300}{\sqrt{210}} < Z < \frac{315-300}{\sqrt{210}}\right) = P(-1,72 < Z < 1,03) = \Phi(1,03) - \Phi(-1,72) = \Phi(1,03) - (1 - \Phi(1,72)) = 0,8485 - (1 - 0,9573) = 0,8058$$

**Ответ:  $P(275 < X < 315) = 0,8058$**