Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2. Вариант 1. ***Группы Тамбовцевой Аллы Андреевны***

Задача 1. *(2 балла)* Герой романа Ф.Кафки ходит по деревне и спрашивает прохожих, каким образом он может попасть в замок. Известно, что 10% жителей знают дорогу в замок. Какова вероятность, что в выборке из 100 прохожих будет не более 15 человек, знающих дорогу в замок?

Решение

Данная задача решается через теорему Муавра-Лапласа.

$n = 100$, $p = 0{,}1$

$E(X) = np = 10$

$D(X) = npq = 9$

$P\ (X \leq 15) = P(Z \leq \frac{15-10}{\sqrt{9}}) = P(Z \leq 1{,}67) = \Phi(1{,}67) = 0{,}9525$

Ответ: 0,95

Задача 2. *(2 балла)* Температура тела сов X описывается нормальным распределением со средним значением 40 и дисперсией 0.25. Найдите $P(39 < X < 42)$, где X – температура тела сов.

Решение

$E(X) = 40$, $D(X) = Var(X) = 0{,}25$

Внутри неравенства нам необходимо стандартизировать значения, чтобы решить задачу:

$P\ (39<X<42) = P(\frac{39-40}{\sqrt{0{,}25}} < X < \frac{42-40}{\sqrt{0{,}25}}) = P(-2 < Z < 4) = \Phi(4) - \Phi(-2) = \Phi(4) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(4) + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) = 0{,}9772$

Ответ: 0,98

Задача 3. (*2 балла*) Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение X ~ N (2, σ = 1), Y ~ N (3, σ = 4). Укажите закон распределения случайной величины Q = X − 3Y + 2. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Данная задача решается с использование свойств математического ожидания и дисперсии.

E(Q) = E(X − 3Y + 2) = E(X) – 3E(Y) + 2 = 2 – 9 + 2 = –5

D(Q) = D(X − 3Y + 2) = D(X) + (-3^2)D(Y) = 1 + 9*16 = 145

Ответ: Q ~ N (-5, 145)

Задача 4. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [−5, 5].

a) *(0.5 балла)* Укажите значение плотности распределения f(x) этой случайной величины в точке x = 1.

Если величина имеет равномерное распределение, то график функции плотности распределения будет выглядеть как прямоугольник.

У этого прямоугольника мы знаем длинную сторону, она будет равна 10 (отрезок от -5 до 5 будет иметь длину 10).
Остается найти другую сторону. Площадь под графиком на этом участке – площадь прямоугольника, которая равна 1, так как нам дан график плотности. Необходимо поделить 1 на 10, получится 0,1. Это и есть искомое значение, т.к. значение плотности будет одинаковым для всех значений.

Ответ: 0.1

b) *(0.5 балла)* Укажите значение функции распределения F(x) этой случайной величины в точке x = 2.

F(2) = P(X < 2) = P(-5 < X < 2)

(2 – (-5))*0,1 = 0,7

Ответ: 0,7

c) *(1 балл)* Найдите верхний квартиль этой случайной величины.

Короткий способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,75, или $x_{0,75}$. Он делит ¾ и ¼ отрезка между собой. Т.к. распределение равномерное, мы можем найти ¼: 10/4 = 2,5.

Далее мы вычитает 2,5 из конца отрезка, и получается $x_{0,75}$ = 5–2,5 = 2,5.

Длинный способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,75, или $x_{0,75}$. Тогда P(X<$x_{0,75}$¿=0,75. Значит, нам надо найти такое значение X, площадь под графиком слева от которого будет равно 0,75.

Получается, нам нужно найти нижнюю сторону прямоугольника, площадь которого равна 0,75, боковая сторона равно 0,1 (как мы уже узнали). Обозначим эту нижнюю сторону как $x_{0,75}$ - (-5) (т.к. нижняя сторона начинается в координате -5, $x_{0,75}$ – ее конец, а длина стороны – разница между этими двумя точками).

Осталось записать уравнение.

$(x_{0,75} + 5) * 0,1 = 0,75$

$x_{0,75} = 2,5$. Это и есть квантиль уровня 0,75.

Ответ: 2,5

Задача 5. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	–2	2
0	0.15	0.3
1	0.1	0.15
3	0	? = 0,3

а) (0.5 балла) Найдите вариацию (дисперсию) случайной величины X.

X	0	1	3
P	0.45	0.25	0.3

E(X) = 0*0.45 + 1*0.25 + 3*0.3 = 1.15
E(X^2¿= 1*0.25+ 9*0.3=2,95

D(X) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2}=2,95-1,32=1,63.
$\sigma(X)$ = 1,28

b) (1.5 балла) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Осуществляем аналогичные расчёты для Y.

Y	-2	2
P	0.25	0.75

E(У) = (-2)*0.25 + 2*0.75 = 1
E($У^2$¿=4*0,25 + 4*0,75 = 4
D(Y) = 4 – 1 = 3
$\sigma(Y)$ = 1,73

Cov(X,Y) = E(X*Y) – E(X)*E(Y)

Строим таблицу X*Y.

X*Y	0	-2	2	-6	6
P	0,45	0,1	0,15	0	0,3

E(X*Y) = -2*0,1 + 2*0,15 + 6*0,3 = 1,9
Cov(X,Y) = 1,9-1,15*1 = 0,75

Коэффициент корреляции
Cor(X,Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,75}{1,28 * 1,73}$= 0,34