Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2, вариант 4

Задача 1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [−9, 9].

а) Укажите **значение плотности распределения f(x)** этой случайной величины в точке x = 1.

Т.к. величина имеет равномерное распределение, график функции будет выглядеть как прямоугольник.

Мы можем найти его длинную сторону: это отрезок от -9 до 9, соответственно он имеет длину 18.

Площадь под графиком функции плотности будет равна 1, соответственно площадь нашего прямоугольника будет равна 1. Тогда, мы можем найти вторую сторону фигуры, так как мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Следовательно, вторая сторона равна 1/18. Это и есть значение плотности распределения f(x), так как значение плотности будет одинаковым для всех значений

b) Укажите **значение функции распределения F(x)** этой случайной величины в точке x = 3.

$F(3) = P(x<3) = P(-9<x<3) = (3 – (-9))*1/18 \approx 0,66$

c) Найдите **квантиль уровня 0.8** этой случайной величины.

$0,8 = (x_{0,8} – (-9))*1/18$

$14,4 = x_{0,8} + 9$

$x_{0,8} = 5,4$

Задача 2. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	**3**	**5**
-1	0,2	0
0	0	0,25
3	0,15	? = 0,4

а) Найдите стандартное отклонение случайной величины X.

X	**-1**	**0**	**3**
P	0,2	0,25	0,55

X^2	**0**	**1**	**9**
P	0,25	0,2	0,55

$E(X) = -1*0,2 + 0*0,25 + 3*0,55 = 1,45$

$E(X^2) = 0 + 1*0,2 + 9*0,55 = 5,15$

$D(X) = 5,15 – 2,1025 = 3,0475$

$Std(X) = 1,75$

Ответ: Std(X) = 1,75

b) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Y	**3**	**5**
P	0,35	0,65

Y	**9**	**25**
P	0,35	0,65

E(Y) = 3*0,35 + 5*0,65 = 4,3

$E(Y^2)$ = 9*0,35 + 25*0,65 = 19,4

D(Y) = 19,4 – 18,49 = 0,91

Std(Y) = 0,954

Далее построим ряд распределения для величины X*Y. По таблице совместного распределения находим значения этой величины: -5, -3, 0, 9, 15

X*Y	**-5**	**-3**	**0**	**9**	**15**
P	0	0,2	0,25	0,15	0,4

E(X*Y) = 0 + -3*0,2 + 0 + 9*0,15 + 15*0,4 = 6,75

Cov(X,Y) = = E(X,Y) – E(X)*E(Y) = 6,75 – 1,45*4,3 = 0,515

Cor(X, Y) = $\boldsymbol{\frac{Cov(X,Y)}{std(x)*std(y)} = \frac{0{,}515}{1{,}75*0{,}954}}$**= 0,3084**

Ответ: Cor(X, Y) = 0,3084

<u>**Задача 3.**</u> **Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение X ∼ N(−1, σ = 9), Y ∼ N(3, σ = 4). Укажите закон распределения случайной величины Q = X − 3Y − 1. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.**

E(Q) = E(X – 3Y – 1) = E(X) – 3*E(Y) – 1 = -1 – 3*3 – 1 = -11

D(Q) = D(X – 3Y – 1) = D(X) + 9*D(Y) – 0 = 81 + 9*16 = 225

Ответ: Q~ N(-11, $\boldsymbol{\sigma^2}$ **= 225)**

Задача 4. Анна выяснила, что процент студентов, которые посещают все пары в течение учебного года, имеет нормальное распределение со средним значением 50 и стандартным отклонением 10. Найдите вероятность, посещающих все пары, примет значение больше 62, но меньше 72.

P(62<X<72) = ?

Сначала нужно стандартизировать значения:

$Z_1 = \frac{62-50}{10}$ = 1,2

$Z_2 = \frac{72-50}{10}$ = 2,2

$P(62<X<72) = P(1,2<Z<2,2) = \Phi(2,2) - \Phi(1,2) = 0,9861 - 0,8849 = 0,1012$

Ответ: $P(62<X<72) = 0,1012$

<u>Задача 5.</u> Представители Контроля Чести и Права обсуждают, одобрить или не одобрить решение исследователя Мвена Маса уехать на остров Забвения после неудачного эксперимента. Известно, что 40% представителей Контроля готовы проголосовать за решение Мвена Маса уехать. Найдите вероятность того, что в выборке из 100 представителей Контроля за отъезд исследователя выскажутся более 50 членов Контроля Чести и Права.

Исходя из условия задачи:

$p = 0,4$ - вероятность успешного исхода

$q = 1 - 0,4 = 0,6$ – вероятность неудачи

$n = 100$

$P(50<X<100) = ?$

Задача решается через теорему Муавра-Лапласа:

$E(X) = n*p = 40$

$D(X) = n*p*q = 24$

$P(50<X<100) = P(\frac{50-40}{\sqrt{24}} < Z < \frac{100-40}{\sqrt{24}}) = P(2,04<Z<12,25) = P(Z>2,04) = 1 - \Phi(2,04) = 1 - 0,9793 = 0,0207$

Ответ: 0,0207