

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

STATISTINIS MODELIAVIMAS
Praktinės užduoties Nr. **1—11** ataskaita

Užduotį atliko: **Matas Gaulia**
Duomenų mokslas 2 kursas, 2 grupė

2021.05.12

Užduotis 1—11

1. Sugeneruokite pseudoatsitiktinių skaičių sekas tiesiniu kongruentiniu metodu su maksimaliu periodu, kai modulis $m = 1264$ ir $m = 729$. Daugiklius a parinkite taip, kad galingumai būtų didžiausi. Prieauglio c parinkimui naudokitės gretimų narių koreliacija (teoriniai testai).
2. Gautas sekas patikrinkite su dviem testais. Pirma su intervalų testu. Imkite intervalą $[3/4, 1)$. Kitą testą pasirinkite patys.
3. Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičių seką sumodeliuokite du atsitiktinius dydžius, vieną pasiskirsčiusį pagal geometrinį skirstinį su parametru $p = 0.1$, o kitą parinkite patys.
4. Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičių seką ir parinkdami tankius (tolygiai pasiskirsčiusio intervale $[0, 2]$ atsitiktinio dydžio ir kitą savo nuožiūra) suskaičiuokite integralą:

$$\int_0^2 \frac{x + x^5}{1 + x} dx$$

5. Sugeneruokite Markovo grandinę, kurią pavaizdavus grafu gautume tokias viršūnių ir biraunų aibes:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), \}$$

Iš vienos viršūnės į kitą kaimyninę viršūnę pereinama su lygiomis tikimybėmis, priklausomai nuo kaimyninių viršūnių skaičiaus

Turinys

1 uždutis.....	4
Pirma seka:.....	4
Pirmos sekos kriterijai:.....	4
Skaičiaus a parinkimo kriterijai:	4
Skaičiaus c parinkimo kriterijai:	4
Pirmos sekos parametrai:	4
Pirmos sekos generavimas:.....	5
Antra seka:	6
Antra sekos kriterijai:	6
Skaičiaus a parinkimo kriterijai:	6
Skaičiaus c parinkimo kriterijai:	6
Antros sekos parametrai:.....	6
Antros sekos generavimas:	7
2 uždutis.....	8
Intervalų testas:	8
Skaitmenų testas:.....	9
3 uždutis.....	11
Geometrinis skirstinys:.....	11
Puasono skirstinys:.....	12
4 uždutis.....	13
Pirmas tankis:.....	13
Antras tankis:	13
5 uždutis.....	14

1 užduotis

Sugeneruokite pseudoatsitiktinių skaičių sekas tiesiniu kongruentiniu metodu su maksimaliu periodu, kai modulis $m = 1264$ ir $m = 729$. Daugiklius a parinkite taip, kad galingumai būtų didžiausi. Prieauglio c parinkimui naudokitės gretimų narių koreliacija (teoriniai testai).

Pirma seka:

Pirma seka turi būti sugeneruota su $m = 1264$.

Pirmos sekos kriterijai:

Skaičiaus a parinkimo kriterijai:

- Turi būti mažesnis už 1264
- $A-1$ turi dalintis iš visų pirminių m daugiklių ($1264 = 2^4 \cdot 79$)
- $A-1$ turi dalintis iš 4, jei m dalinasi iš 4. (Šiuo atveju tiesa, nes $1264/4 = 316$)

Skaičiaus c parinkimo kriterijai:

- $\text{DBD}(c, m) = \text{DBD}(c, 1264)$ turi būti lygu 1
- $c < m$
- $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{3}$

Pirmos sekos parametrai:

Galimi $a = [317, 633, 949]$

Didžiausias įmanomas galingumas yra 2 ir taip sutapo kad visi galimi a yra galingumo 2

Ir $316^2 \bmod m = 0$, ir $632^2 \bmod m = 0$, ir $948^2 \bmod m = 0$

Tad iš šių trijų skaičių renkuosi didžiausią (949) nes a didėjant seka tampa labiau atsitiktinė

Renkuosi $a = 949$:

- $949 < 1264$
- tada $a - 1 = 948$:
 - $948 / 2 = 474$
 - $948 / 79 = 12$
- $948 / 4 = 237$

Renkuosi $c = 631$:

- apskaičiuoju $\text{DBD}(631, 1264)$ su jau parašyta Python funkcija $\text{gcd}()$ iš bibliotekos “math”:

```
In [2]: from math import gcd
        gcd(631,1264)

Out[2]: 1
```

- $631 < 1264$
- $\frac{c}{m} = \frac{631}{1264} = 0.499$, labai arti 0.5, tad c parinktas tinkamai

Pirmą sekos narį ir pirmoje, ir antroje sekose imsiu 0.

Pirmajai sekai rasti tokie parametrai:

- $m = 1264$
- $a = 949$
- $c = 631$
- $X_0 = 0$

Pirmos sekos generavimas:

Generuoju seką su Python funkcija LCG (Linear Congruential Generator), funkcijos kodas parodytas priede:

```
In [4]: pirma = LCG(seed = 0, a = 949, c = 631, m = 1264)
        print(pirma)

[631, 314, 313, 628, 1259, 942, 941, 1256, 623, 306, 305, 620, 1251, 934, 933, 1248, 615, 298, 297, 612, 1243, 926, 925, 1240,
607, 290, 289, 604, 1235, 918, 917, 1232, 599, 282, 281, 596, 1227, 910, 909, 1224, 591, 274, 273, 588, 1219, 902, 901, 1216, 5
83, 266, 265, 580, 1211, 894, 893, 1208, 575, 258, 257, 572, 1203, 886, 885, 1200, 567, 250, 249, 564, 1195, 878, 877, 1192, 55
9, 242, 241, 556, 1187, 870, 869, 1184, 551, 234, 233, 548, 1179, 862, 861, 1176, 543, 226, 225, 540, 1171, 854, 853, 1168, 53
5, 218, 217, 532, 1163, 846, 845, 1160, 527, 210, 209, 524, 1155, 838, 837, 1152, 519, 202, 201, 516, 1147, 830, 829, 1144, 51
1, 194, 193, 508, 1139, 822, 821, 1136, 503, 186, 185, 500, 1131, 814, 813, 1128, 495, 178, 177, 492, 1123, 806, 805, 1120, 48
7, 170, 169, 484, 1115, 798, 797, 1112, 479, 162, 161, 476, 1107, 790, 789, 1104, 471, 154, 153, 468, 1099, 782, 781, 1096, 46
3, 146, 145, 460, 1091, 774, 773, 1088, 455, 138, 137, 452, 1083, 766, 765, 1080, 447, 130, 129, 444, 1075, 758, 757, 1072, 43
9, 122, 121, 436, 1067, 750, 749, 1064, 431, 114, 113, 428, 1059, 742, 741, 1056, 423, 106, 105, 420, 1051, 734, 733, 1048, 41
5, 98, 97, 412, 1043, 726, 725, 1040, 407, 90, 89, 404, 1035, 718, 717, 1032, 399, 82, 81, 396, 1027, 710, 709, 1024, 391, 74,
73, 388, 1019, 702, 701, 1016, 383, 66, 65, 380, 1011, 694, 693, 1008, 375, 58, 57, 372, 1003, 686, 685, 1000, 367, 50, 49, 36
4, 995, 678, 677, 992, 359, 42, 41, 356, 987, 670, 669, 984, 351, 34, 33, 348, 979, 662, 661, 976, 343, 26, 25, 340, 971, 654,
653, 968, 335, 18, 17, 332, 963, 646, 645, 960, 327, 10, 9, 324, 955, 638, 637, 952, 319, 2, 1, 316, 947, 630, 629, 944, 311, 1
258, 1257, 308, 939, 622, 621, 936, 303, 1250, 1249, 300, 931, 614, 613, 928, 295, 1242, 1241, 292, 923, 606, 605, 920, 287, 12
34, 1233, 284, 915, 598, 597, 912, 279, 1226, 1225, 276, 907, 590, 589, 904, 271, 1218, 1217, 268, 899, 582, 581, 896, 263, 121
0, 1209, 260, 891, 574, 573, 888, 255, 1202, 1201, 252, 883, 566, 565, 880, 247, 1194, 1193, 244, 875, 558, 557, 872, 239, 118
6, 1185, 236, 867, 550, 549, 864, 231, 1178, 1177, 228, 859, 542, 541, 856, 223, 1170, 1169, 220, 851, 534, 533, 848, 215, 116
2, 1161, 212, 843, 526, 525, 840, 207, 1154, 1153, 204, 835, 518, 517, 832, 199, 1146, 1145, 196, 827, 510, 509, 824, 191, 113
8, 1137, 188, 819, 502, 501, 816, 183, 1130, 1129, 180, 811, 494, 493, 808, 175, 1122, 1121, 172, 803, 486, 485, 800, 167, 111
4, 1113, 164, 795, 478, 477, 792, 159, 1106, 1105, 156, 787, 470, 469, 784, 151, 1098, 1097, 148, 779, 462, 461, 776, 143, 109
0, 1089, 140, 771, 454, 453, 768, 135, 1082, 1081, 132, 763, 446, 445, 760, 127, 1074, 1073, 124, 755, 438, 437, 752, 119, 106
6, 1065, 116, 747, 430, 429, 744, 111, 1058, 1057, 108, 739, 422, 421, 736, 103, 1050, 1049, 100, 731, 414, 413, 728, 95, 1042,
1041, 92, 723, 406, 405, 720, 87, 1034, 1033, 84, 715, 398, 397, 712, 79, 1026, 1025, 76, 707, 390, 389, 704, 71, 1018, 1017, 6
8, 699, 382, 381, 696, 63, 1010, 1009, 60, 691, 374, 373, 688, 55, 1002, 1001, 52, 683, 366, 365, 680, 47, 994, 993, 44, 675, 3
58, 357, 672, 39, 986, 985, 36, 667, 350, 349, 664, 31, 978, 977, 28, 659, 342, 341, 656, 23, 970, 969, 20, 651, 334, 333, 648,
15, 962, 961, 12, 643, 326, 325, 640, 7, 954, 953, 4, 635, 318, 317, 632, 1263, 946, 945, 1260, 627, 310, 309, 624, 1255, 938,
937, 1252, 619, 308, 301, 616, 1247, 930, 929, 1244, 611, 294, 293, 608, 1239, 922, 921, 1236, 603, 286, 285, 600, 1231, 914, 9
13, 1228, 595, 278, 277, 592, 1223, 906, 905, 1220, 587, 270, 269, 584, 1215, 898, 897, 1212, 579, 262, 261, 576, 1207, 890, 88
9, 1204, 571, 254, 253, 568, 1199, 882, 881, 1196, 563, 246, 245, 560, 1191, 874, 873, 1188, 555, 238, 237, 552, 1183, 866, 86
5, 1180, 547, 230, 229, 544, 1175, 858, 857, 1172, 539, 222, 221, 536, 1167, 850, 849, 1164, 531, 214, 213, 528, 1159, 842, 84
1, 1156, 523, 206, 205, 520, 1151, 834, 833, 1148, 515, 198, 197, 512, 1143, 826, 825, 1140, 507, 190, 189, 504, 1135, 818, 81
7, 1132, 499, 182, 181, 496, 1127, 810, 809, 1124, 491, 174, 173, 488, 1119, 802, 801, 1116, 483, 166, 165, 480, 1111, 794, 79
3, 1108, 475, 158, 157, 472, 1103, 786, 785, 1100, 467, 150, 149, 464, 1095, 778, 777, 1092, 459, 142, 141, 456, 1087, 770, 76
9, 1084, 451, 134, 133, 448, 1079, 762, 761, 1076, 443, 126, 125, 440, 1071, 754, 753, 1068, 435, 118, 117, 432, 1063, 746, 74
5, 1060, 427, 110, 109, 424, 1055, 738, 737, 1052, 419, 102, 101, 416, 1047, 730, 729, 1044, 411, 94, 93, 408, 1039, 722, 721,
1036, 403, 86, 85, 400, 1031, 714, 713, 1028, 395, 78, 77, 392, 1023, 706, 705, 1020, 387, 70, 69, 384, 1015, 698, 697, 1012, 3
79, 62, 61, 376, 1007, 690, 689, 1004, 371, 54, 53, 368, 999, 682, 681, 996, 363, 46, 45, 360, 991, 674, 673, 988, 355, 38, 37,
352, 983, 666, 665, 980, 347, 30, 29, 344, 975, 658, 657, 972, 339, 22, 21, 336, 967, 650, 649, 964, 331, 14, 13, 328, 959, 64
2, 641, 956, 323, 6, 5, 320, 951, 634, 633, 948, 315, 1262, 1261, 312, 943, 626, 625, 940, 307, 1254, 1253, 304, 935, 618, 617,
932, 299, 1246, 1245, 296, 927, 610, 609, 924, 291, 1238, 1237, 288, 919, 602, 601, 916, 283, 1230, 1229, 280, 911, 594, 593, 9
08, 275, 1222, 1221, 272, 903, 586, 585, 900, 267, 1214, 1213, 264, 895, 578, 577, 892, 259, 1206, 1205, 256, 887, 570, 569, 88
4, 251, 1198, 1197, 248, 879, 562, 561, 876, 243, 1190, 1189, 240, 871, 554, 553, 868, 235, 1182, 1181, 232, 863, 546, 545, 86
0, 227, 1174, 1173, 224, 855, 538, 537, 852, 219, 1166, 1165, 216, 847, 530, 529, 844, 211, 1158, 1157, 208, 839, 522, 521, 83
6, 203, 1150, 1149, 200, 831, 514, 513, 828, 195, 1142, 1141, 192, 823, 506, 505, 820, 187, 1134, 1133, 184, 815, 498, 497, 81
2, 179, 1126, 1125, 176, 807, 490, 489, 804, 171, 1118, 1117, 168, 799, 482, 481, 796, 163, 1110, 1109, 160, 791, 474, 473, 78
8, 155, 1102, 1101, 152, 783, 466, 465, 780, 147, 1094, 1093, 144, 775, 458, 457, 772, 139, 1086, 1085, 136, 767, 450, 449, 76
4, 131, 1078, 1077, 128, 759, 442, 441, 756, 123, 1070, 1069, 120, 751, 434, 433, 748, 115, 1062, 1061, 112, 743, 426, 425, 74
0, 107, 1054, 1053, 104, 735, 418, 417, 732, 99, 1046, 1045, 96, 727, 410, 409, 724, 91, 1038, 1037, 88, 719, 402, 401, 716, 8
3, 1030, 1029, 80, 711, 394, 393, 708, 75, 1022, 1021, 72, 703, 386, 385, 700, 67, 1014, 1013, 64, 695, 378, 377, 692, 59, 100
6, 1005, 56, 687, 370, 369, 684, 51, 998, 997, 48, 679, 362, 361, 676, 43, 990, 989, 40, 671, 354, 353, 668, 35, 982, 981, 32,
663, 346, 345, 660, 27, 974, 973, 24, 655, 338, 337, 652, 19, 966, 965, 16, 647, 330, 329, 644, 11, 958, 957, 8, 639, 322, 321,
636, 3, 950, 949, 0]
```

Antra seka:

Antra sekos kriterijai:

Skaičiaus a parinkimo kriterijai:

- Turi būti mažesnis už 729
- $a - 1$ turi dalintis iš visų pirminių 729 daugiklių ($729 = 3^6$)
- $a - 1$ turi dalintis iš 4, jei 729 dalinasi iš 4. (Šiuo atveju netiesa, nes $729/4 = 182.25$)

Skaičiaus c parinkimo kriterijai:

- $\text{DBD}(c, m) = \text{DBD}(c, 729)$ turi būti lygu 1
- $c < m$
- $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{3}$

Antros sekos parametrai:

Galimi a yra visi skaičiai iki 729, kurie išreiškiami $3i + 1$, tokių skaičių yra 242.

Maksimalus galingumas $s = 6$.

Tokie galimi a:

4, 7, 13, 16, 22, 25, 31, 34, 40, 43, 49, 52, 58, 61, 67, 70, 76, 79, 85, 88, 94, 97, 103, 106, 112, 115, 121, 124, 130, 133, 139, 142, 148, 151, 157, 160, 166, 169, 175, 178, 184, 187, 193, 196, 202, 205, 211, 214, 220, 223, 229, 232, 238, 241, 247, 250, 256, 259, 265, 268, 274, 277, 283, 286, 292, 295, 301, 304, 310, 313, 319, 322, 328, 331, 337, 340, 346, 349, 355, 358, 364, 367, 373, 376, 382, 385, 391, 394, 400, 403, 409, 412, 418, 421, 427, 430, 436, 439, 445, 448, 454, 457, 463, 466, 472, 475, 481, 484, 490, 493, 499, 502, 508, 511, 517, 520, 526, 529, 535, 538, 544, 547, 553, 556, 562, 565, 571, 574, 580, 583, 589, 592, 598, 601, 607, 610, 616, 619, 625, 628, 634, 637, 643, 646, 652, 655, 661, 664, 670, 673, 679, 682, 688, 691, 697, 700, 706, 709, 715, 718, 724, 727

Iš galimų a imu kuo didesni.

Renkuosi a = 727:

- $727 < 729$
- $a - 1 = 726$, $726/3 = 242$

Renkuosi c = 365:

- apskaičiuoju $\text{DBD}(365, 729)$ taip pat kaip ir pirmoje sekoje:

```
In [3]: from math import gcd
        gcd(365, 729)

Out[3]: 1
```

- $365 < 729$
- $\frac{c}{m} = \frac{365}{729} = 0.5007$, vel labai arti 0.5, tad c parinktas gerai.

Antrajai sekai rasti tokie parametrai:

- $m = 729$
- $a = 727$
- $c = 365$
- $X_0 = 0$

Antros sekos generavimas:

```
antra = LCG(seed = 0, a = 727, c = 365, m = 729)
print(antra)
```

[365, 364, 366, 362, 370, 354, 386, 322, 450, 194, 706, 411, 272, 550, 723, 377, 340, 414, 266, 562, 699, 425, 244, 606, 611, 601, 621, 581, 661, 501, 92, 181, 3, 359, 376, 342, 410, 274, 546, 2, 361, 372, 350, 394, 306, 482, 130, 105, 155, 55, 255, 584, 655, 513, 68, 229, 636, 551, 721, 381, 332, 430, 234, 626, 571, 681, 461, 172, 21, 323, 448, 198, 698, 427, 240, 614, 595, 633, 557, 709, 405, 284, 526, 42, 281, 532, 30, 305, 484, 126, 113, 139, 87, 191, 712, 399, 296, 502, 90, 185, 724, 375, 344, 406, 282, 530, 34, 297, 500, 94, 177, 11, 343, 408, 278, 538, 18, 329, 436, 222, 650, 523, 48, 269, 556, 711, 401, 292, 510, 74, 217, 660, 503, 88, 189, 716, 391, 312, 470, 154, 57, 251, 592, 639, 545, 4, 357, 380, 334, 426, 242, 610, 603, 617, 589, 645, 533, 28, 309, 476, 142, 81, 203, 688, 447, 200, 694, 435, 224, 646, 531, 32, 301, 492, 110, 145, 75, 215, 664, 495, 104, 157, 51, 263, 568, 687, 449, 196, 702, 419, 256, 582, 659, 505, 84, 197, 700, 423, 248, 598, 627, 569, 685, 453, 188, 718, 387, 320, 454, 186, 722, 379, 336, 422, 250, 594, 635, 553, 717, 389, 316, 462, 170, 25, 315, 464, 166, 33, 299, 496, 102, 161, 43, 279, 536, 22, 321, 452, 190, 714, 395, 304, 486, 122, 121, 123, 119, 127, 111, 143, 79, 207, 680, 463, 168, 29, 307, 480, 134, 97, 171, 23, 319, 456, 182, 1, 363, 368, 358, 378, 338, 418, 258, 578, 667, 489, 116, 133, 99, 167, 31, 303, 488, 118, 129, 107, 151, 63, 239, 616, 591, 641, 541, 12, 341, 412, 270, 554, 715, 393, 308, 478, 138, 89, 187, 720, 383, 328, 438, 218, 658, 507, 80, 205, 684, 455, 184, 726, 371, 352, 390, 314, 466, 162, 41, 283, 528, 38, 289, 516, 62, 241, 612, 599, 625, 573, 677, 469, 156, 53, 259, 576, 671, 481, 132, 101, 163, 39, 287, 520, 54, 257, 580, 663, 497, 100, 165, 35, 295, 504, 86, 193, 708, 407, 280, 534, 26, 313, 468, 158, 49, 267, 560, 703, 417, 260, 574, 675, 473, 148, 69, 227, 640, 543, 8, 349, 396, 302, 490, 114, 137, 91, 183, 728, 367, 360, 374, 346, 402, 290, 514, 66, 233, 628, 567, 689, 445, 204, 686, 451, 192, 710, 403, 288, 518, 58, 249, 596, 631, 561, 701, 421, 252, 590, 643, 537, 20, 325, 444, 206, 682, 459, 176, 13, 339, 416, 262, 570, 683, 457, 180, 5, 355, 384, 326, 442, 210, 674, 475, 144, 77, 211, 672, 479, 136, 93, 179, 7, 351, 392, 310, 474, 146, 73, 219, 656, 511, 72, 221, 652, 519, 56, 253, 588, 647, 529, 36, 293, 508, 78, 209, 676, 471, 152, 61, 243, 608, 607, 609, 605, 613, 597, 629, 565, 693, 437, 220, 654, 515, 64, 237, 620, 583, 657, 509, 76, 213, 668, 487, 120, 125, 115, 135, 95, 175, 15, 335, 424, 246, 602, 619, 585, 653, 517, 60, 245, 604, 615, 593, 637, 549, 725, 373, 348, 398, 298, 498, 98, 169, 27, 311, 472, 150, 65, 235, 624, 575, 673, 477, 140, 85, 195, 704, 415, 264, 566, 691, 441, 212, 670, 483, 128, 109, 147, 71, 223, 648, 527, 40, 285, 524, 46, 273, 548, 727, 369, 356, 382, 330, 434, 226, 642, 539, 16, 333, 428, 238, 618, 587, 649, 525, 44, 277, 540, 14, 337, 420, 254, 586, 651, 521, 52, 261, 572, 679, 465, 164, 37, 291, 512, 70, 225, 644, 535, 24, 317, 460, 174, 17, 331, 432, 230, 634, 555, 713, 397, 300, 494, 106, 153, 59, 247, 600, 623, 577, 669, 485, 124, 117, 131, 103, 159, 47, 271, 552, 719, 385, 324, 446, 202, 690, 443, 208, 678, 467, 160, 45, 275, 544, 6, 353, 388, 318, 458, 178, 9, 347, 400, 294, 506, 82, 201, 692, 439, 216, 662, 499, 96, 173, 19, 327, 440, 214, 666, 491, 112, 141, 83, 199, 696, 431, 232, 630, 563, 697, 429, 236, 622, 579, 665, 493, 108, 149, 67, 231, 632, 559, 705, 413, 268, 558, 707, 409, 276, 542, 10, 345, 404, 286, 522, 50, 265, 564, 695, 433, 228, 638, 547, 0]

2 užduotis

Gautas sekas patikrinkite su dviem testais. Pirmą su intervalų testu. Imkite intervalą $[3/4, 1)$. Kitą testą pasirinkite patys.

Intervalų testas:

Kadangi $\alpha = 0.75$, o $\beta = 1$, $p = \beta - \alpha = 1 - 0.75 = 0.25$

Tada turime tikimybes:

$$p_i = P(\text{intervalo ilgis} = i) = p(1-p)^i, 0 \leq i \leq t, \\ p_{>i} = P(\text{intervalo ilgis} > t) = (1-p)^{t+1}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0.25 * 0.75^0 = 0.25 \\ p_1 &= 0.25 * 0.75^1 = 0.1875 \\ p_2 &= 0.25 * 0.75^2 = 0.140625 \\ p_3 &= 0.25 * 0.75^3 = 0.10546875 \\ p_4 &= 0.25 * 0.75^4 = 0.0791015625 \\ p_{>4} &= 0.75^5 = 0.2373046875 \end{aligned}$$

Chi-Kvadrato formulė :

$$\chi^2 = \sum \frac{(o - e)^2}{e}$$

Kur o – stebėta reikšmė, e – tikėtasi reikšmė (expected)

Šiuo atveju tai atitinkamai bus intervalų dažniai

Pasirenku $t = 4$. $r = t+2 = 4+2 = 6$

Reikšmingumo lygis: 0.05

Laisvės laipsniai: 5

Kritinė reikšmė: 11.070

Pirma seka:

$n = 316$, $p = 0.25$

$\{ '0': 79, '1': 1, '2': 79, '3': 0, '4': 78, '>4': 79 \}$

P_i : $[0.25, 0.1875, 0.140625, 0.10546875, 0.0791015625, 0.2373046875]$

Tikimasi tokių dažnių: $[79.0, 59.25, 44.4375, 33.328125, 24.99609375, 74.98828125]$

Laisvės laipsniai: 5

Chi-Kvadrato kriterijus: $\text{Power_divergenceResult}(\text{statistic}=230.08569047246965, \text{pvalue}=1.0252518096810503e-47)$

Išvada: Matome, kad $230.085 > 11.070$, hipotezė kad pirmoji seka pasiskirsčiui tolygiai, galime atmesti, tą antrina ir labai maža p reikšmė.

Dabar antroji seka, t, reikšmingumo lygmuo tokie patys:

```
Antra seka:
n = 182, p = 0.25
{'0': 91, '1': 0, '2': 23, '3': 11, '4': 11, '>4': 46}
Pi: [0.25, 0.1875, 0.140625, 0.10546875, 0.0791015625, 0.2373046875]
Tikimasi tokių dažnių: [45.5, 34.125, 25.59375, 19.1953125, 14.396484375, 43.189453125]
Laisvės laipsniai: 5
Chi-Kvadrato kriterijus: Power_divergenceResult(statistic=84.37100348211459, pvalue=1.0198276906110155e-16)
```

Išvada: $84.37 > 11.070$, hipotezę kad antroji seka pasiskirsčiui tolygiai, galime atmesti, tą parodo ir labai maža p reikšmė

Skaitmenų testas:

Naudosiu antrąjį skaitmenų testą.

$$P(\text{skaitmens } s \text{ pasirodymas}) = \frac{1}{10}, s = 0, 1, \dots, 9$$

Pradžioje seką paverčiu į seką tarp 0 ir 1 (padalinu iš m).

Tuomet imu 5 skaičius po kablelio, jei tiek nėra, pridedu reikiama kiekį 0.

Tuomet gaunu seką tarp 0 ir 9, kurioje teoriškai kiekvienas skaitmuo turėtų būti pasiskirstęs vienodai (hipotezė tokia)

Tuomet skaičiuoju chi-kvadrato kriterijų su anksčiau naudota formule, kur tikėtasis dažnis kiekvieno skaitmens yra $n \cdot 0.1$

Reikšmingumo lygis: 0.05

Laisvės laipsniai: 9

Kritinė reikšmė: 16.919

Pirma seka:

```
Pirma seka:
SortedDict({0: 639, 1: 636, 2: 633, 3: 636, 4: 624, 5: 639, 6: 636, 7: 633, 8: 636, 9: 608})
n = m*5 = 1264 * 5 = 6320
Pi: [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]
Tikimasi tokių dažnių: [632, 632, 632, 632, 632, 632, 632, 632, 632, 632]
Chi-Kvadrato kriterijus: Power_divergenceResult(statistic=1.2721518987341773, pvalue=0.9985106386952636)
```

Išvada: $1.27 < 16.919$, tad hipotezės, kad pirmą seka pasiskirsčiusi tolygiai, negalime atmesti

Antra seka:

```
Antra seka:
SortedDict({0: 427, 1: 424, 2: 420, 3: 423, 4: 417, 5: 396, 6: 296, 7: 291, 8: 283, 9: 268})
n = m*5 = 729 * 5 = 3645
Pi: [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]
Tikimasi tokių dažnių: [364, 364, 364, 364, 364, 364, 364, 364, 364, 364]
Chi-Kvadrato kriterijus: Power_divergenceResult(statistic=120.18956043956042, pvalue=1.2219567176506306e-21)
```

Išvada: $120.19 > 16.919$, tad hipotezę, kad antra seka pasiskirsčiusi tolygiai, galime atmesti

Rezultatai:

Intervalų testas parodė, kad antroji seka yra geresnė (kriterijus mažesnis),

O skaitmenų testas parodė atvirkščiai: pirmoji seka yra geresnė.

Kadangi intervalų testą laikau kaip tikslesniu, toliau užduotyse naudosisiu **antrą** seką

3 užduotis

Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičių seką sumodeliuokite du atsitiktinius dydžius, vieną pasiskirsčiusį pagal geometrinį skirstinį su parametru $p = 0.1$, o kitą parinkite patys.

Geometrinis skirstinys:

Pradžioje paversiu savo seką kad būtų tarp 0 ir 1 padalindamas seką iš $m = 729$
Kad gaučiau geometrinį skirstinį naudosisi tokią formulę:

$$N = \left\lceil \frac{\ln U}{\ln(1 - p)} \right\rceil$$

Kadangi $\ln(0)$ nėra apibrėžtas, sugeneruotų skaičių kiekis bus $m - 1 = 728$

Turiu $p = 0.1$, tai $1 - p = 0.9$, o $\ln(1 - p) = -0.10536051565$

Su $p = 0.1$, teoriškai vidurkis bus $1/p = 1/0.1 = 10$

Generuoju:

```
In [275]: geom = generuoti_geometrinį(p = 0.1, seka = antra, m = 729)
print(geom)
print("\nTeorinis vidurkis: ", 1/0.1)
print("Gautas vidurkis: ", mean(geom))
```

```
[7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 5, 13, 1, 6, 10, 3, 1, 7, 8, 6, 10, 3, 1, 6, 11, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 4, 20, 14, 53, 7, 7, 8, 6, 10, 3, 5
6, 7, 7, 7, 6, 9, 4, 17, 19, 15, 25, 10, 3, 2, 4, 23, 11, 2, 3, 1, 7, 8, 6, 11, 2, 3, 1, 5, 14, 34, 8, 5, 13, 1, 6, 11, 2, 2,
2, 3, 1, 6, 9, 4, 28, 10, 3, 31, 9, 4, 17, 18, 16, 21, 13, 1, 6, 9, 4, 20, 14, 1, 7, 8, 6, 10, 4, 30, 9, 4, 20, 14, 40, 8, 6, 1
0, 3, 36, 8, 5, 12, 2, 4, 26, 10, 3, 1, 6, 9, 4, 22, 12, 1, 4, 21, 13, 1, 6, 9, 5, 15, 25, 11, 2, 2, 3, 50, 7, 7, 8, 6, 11, 2,
2, 2, 3, 2, 3, 31, 9, 5, 16, 21, 13, 1, 5, 13, 1, 5, 12, 2, 4, 30, 9, 4, 18, 16, 22, 12, 1, 4, 19, 15, 26, 10, 3, 1, 5, 13, 1,
6, 10, 3, 1, 4, 21, 13, 1, 6, 11, 2, 2, 3, 1, 5, 13, 1, 7, 8, 5, 13, 1, 7, 8, 6, 11, 2, 2, 3, 1, 6, 8, 5, 14, 33, 8, 5, 15, 30,
9, 4, 19, 15, 27, 10, 3, 34, 8, 5, 13, 1, 6, 9, 4, 17, 18, 17, 18, 17, 18, 16, 22, 12, 1, 5, 14, 31, 9, 4, 17, 20, 14, 33, 8,
5, 14, 63, 7, 7, 7, 7, 8, 6, 10, 3, 1, 4, 18, 17, 19, 14, 30, 9, 4, 18, 17, 19, 15, 24, 11, 2, 2, 2, 3, 39, 8, 6, 10, 3, 1, 6,
9, 5, 16, 20, 13, 1, 7, 8, 5, 12, 1, 4, 21, 13, 1, 5, 14, 1, 7, 7, 6, 8, 5, 15, 28, 9, 4, 29, 9, 4, 24, 11, 2, 2, 2, 3, 1, 5, 1
5, 25, 10, 3, 1, 4, 17, 19, 15, 28, 9, 4, 25, 10, 3, 1, 4, 19, 15, 29, 9, 4, 21, 13, 1, 6, 10, 3, 32, 9, 5, 15, 26, 10, 3, 1,
6, 10, 3, 1, 5, 16, 23, 12, 2, 3, 43, 7, 6, 9, 4, 18, 16, 20, 14, 1, 7, 7, 7, 8, 6, 9, 4, 23, 11, 2, 3, 1, 5, 13, 1, 5, 13, 1,
6, 9, 4, 25, 11, 2, 2, 3, 1, 6, 11, 3, 2, 3, 35, 8, 5, 12, 1, 5, 14, 39, 8, 6, 10, 3, 1, 5, 14, 48, 7, 7, 8, 5, 12, 1, 5, 16, 2
2, 12, 1, 4, 16, 20, 14, 45, 7, 6, 9, 5, 16, 22, 12, 2, 4, 22, 12, 2, 4, 25, 11, 3, 2, 4, 29, 9, 4, 22, 12, 1, 5, 15, 24, 11,
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 5, 12, 2, 4, 24, 11, 2, 3, 1, 4, 22, 12, 1, 4, 18, 17, 18, 17, 20, 14, 37, 8, 6, 11, 2, 2, 3, 2, 4,
24, 11, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 7, 8, 6, 9, 4, 20, 14, 32, 9, 5, 16, 23, 11, 2, 3, 1, 5, 16, 21, 13, 1, 6, 10, 3, 1, 5, 12, 1, 4, 17,
19, 16, 23, 12, 2, 4, 28, 9, 4, 27, 10, 3, 1, 7, 7, 7, 8, 5, 12, 2, 3, 37, 8, 6, 11, 2, 3, 2, 4, 27, 10, 3, 38, 8, 6, 11, 3, 2,
4, 26, 10, 3, 1, 5, 15, 29, 9, 4, 23, 12, 2, 3, 33, 8, 5, 14, 36, 8, 5, 11, 2, 3, 1, 6, 9, 4, 19, 15, 24, 11, 2, 2, 3, 1, 4, 1
7, 18, 17, 19, 15, 27, 10, 3, 1, 7, 8, 5, 13, 1, 5, 12, 1, 5, 15, 27, 10, 3, 46, 7, 6, 8, 5, 14, 42, 8, 6, 9, 4, 21, 13, 1, 5,
12, 1, 4, 20, 14, 35, 8, 5, 12, 1, 4, 18, 16, 21, 13, 1, 5, 11, 2, 3, 1, 6, 11, 2, 3, 1, 4, 19, 16, 23, 11, 2, 3, 1, 6, 10, 3,
1, 6, 10, 3, 41, 8, 6, 9, 4, 26, 10, 3, 1, 5, 12, 2, 3]
```

```
Teorinis vidurkis: 10.0
Gautas vidurkis: 9.958791208791208
```

Sugeneravau 728 skaičius.

Gautas vidurkis labia arti teorinio vidurkio.

Puasono skirstinys:

Pasirinkau puasono su vidurkiu 0.5

$$P(N = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

vadinama Puasono vardu ir sakoma, kad atsitiktinis dydis N yra psiskirstęs pagal Puasono dėsnį su vidurkiu μ .

Mano U skirstinys bus mano antroji seka padalinta iš m, tada gausiu seką kuri bus tarp 0 ir 1.

Sąlygos:

- Jei $U_1 < p$, tai $N = 0$
- Jei $U_1 \geq p$, imu U_1
 - Jei $U_1 * U_2 < p$, tai $N = 1$
- Jei $U_1 \geq p$ ir $U_1 * U_2 \geq p$,
imu dar vieną skaičių U_{n+1} (ir dar jei reikia)
 - Jei $U_1 * U_2 * \dots * U_{n+1} < p$, tai $N = n$

Generuoju:

```
In [238]: from statistics import mean
poisson = generuoti_puasono(avg = 0.5, seka = antra, m = 729)
print(poisson)
print("\nVidurkis = ", mean(poisson))
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 3,
0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
2, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2,
0, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1,
0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 1,
0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 0,
1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0,
0, 2, 2, 3, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 2,
0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0,
0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0,
0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 2]
```

```
Vidurkis = 0.49079754601226994
```

Sugeneravau 489 skaičius

Kaip matome gautas vidurkis labai arti teorinio vidurkio (0.5)

4 užduotis

Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičių seką ir parinkdami tankius (tolygiai pasiskirsčiusio intervale $[0, 2]$ atsitiktinio dydžio ir kitą savo nuožiūra) suskaičiuokite integralą:

$$I = \int_0^2 \frac{x + x^5}{1 + x} dx$$

Su internetine skaičiuokle šis integralas lygus **4.87**

Kad galėčiau naudoti savo antrąją seką kaip tolygiai pasiskirsčiusį dydį, turiu kiekvieną skaičių padalinti iš $m = 729$

```
In [281]: useka = [i/729 for i in antra]
          N = 729
```

Pirmas tankis:

Pirmas tankis bus $p_{\varepsilon 1}(x) = \frac{1}{2}$; $\int_0^2 \frac{1}{2} dx = 1$, tada $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2} dx = \frac{\varepsilon}{2}$

Jei U yra tolygiai pasiskirsęs intervale $(0,1)$, tada $\frac{\varepsilon}{2} = U$, tai $\varepsilon = 2U$

Tada galime skaičiuoti integralą $I \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1 + \varepsilon_j} \right) \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1 + \varepsilon_j}$

```
In [287]: suma_1 = 0
          epsilon_1 = [2*u for u in useka]
          for i in epsilon_1:
              if i!= 0:
                  suma_1+= (2/N)*(i+i**5)/(1+i)
          print(suma_1)
```

4.853909617063339

Su pirmu tankiu gauname, kad integralas lygus apytiksliai **4.85**

Antras tankis:

Antras tankis bus $p_{\varepsilon 2}(x) = \frac{x^3}{4}$; $\int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = 1$, tada $\int_0^{\varepsilon} \frac{x^3}{4} dx = \frac{\varepsilon^4}{16}$

Jei U yra tolygiai pasiskirsęs intervale $(0,1)$, tada $\frac{\varepsilon^4}{16} = U$, tai $\varepsilon = 2^4 \sqrt{U}$

Tada galime skaičiuoti integralą $I \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1 + \varepsilon_j} \right) \cdot \frac{4}{\varepsilon_j^3} = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{\varepsilon_j^3 (1 + \varepsilon_j)}$

```
In [288]: suma_2 = 0
          epsilon_2 = [2*(u**(1/4)) for u in useka]
          for i in epsilon_2:
              if i!= 0:
                  suma_2+= (4/N)*(i+i**5)/((1+i)*(i**3))
          print(suma_2)
```

4.820724891201739

Su antru tankiu gauname, kad integralas lygus apytiksliai **4.82**

Geresnis tankis yra pirmasis, nes artimesnis tikrajai integralo reikšmei

5 užduotis

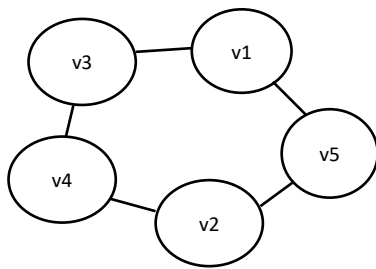
Sugeneruokite Markovo grandinę, kurią pavaizdavus grafu gautume tokias viršūnių ir biraunų aibes:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4),\}$$

Iš vienos viršūnės į kitą kaimyninę viršūnę pereinama su lygiomis tikimybėmis, priklausomai nuo kaimyninių viršūnių skaičiaus

Grafą pavaizdavus jis atrodo taip:



Pradžiai įsivedu kintamuosius

```
In [1]: import numpy as np
nodes = ["v1", "v2", "v3", "v4", "v5"]
edges = [("v1", "v3"), ("v1", "v5"), ("v2", "v4"), ("v2", "v5"), ("v3", "v4")]
n = len(nodes)
m = len(edges)
```

Susiskaičiuoju kiek kiekviena viršūnė turi kaimyninių viršūnių:

```
In [2]: nodes_neighbours = {}
for node in nodes:
    nodes_neighbours[node] = 0
    for edge in edges:
        if edge[0] == node or edge[1] == node:
            nodes_neighbours[node] += 1

print("Kaimynių viršūnių kiekiai", nodes_neighbours)

Kaimynių viršūnių kiekiai {'v1': 2, 'v2': 2, 'v3': 2, 'v4': 2, 'v5': 2}
```

Turėdamas kaimyninių viršūnių skaičių, galiu skaičiuoti tikimybę pereiti į kiekvieną viršūnę:

```
In [3]: p_nodes_neighbours = {node: (1/nodes_neighbours[node]) for node in nodes}
print("Tikimybės pereiti į viršūnes", p_nodes_neighbours)

Tikimybės pereiti į viršūnes {'v1': 0.5, 'v2': 0.5, 'v3': 0.5, 'v4': 0.5, 'v5': 0.5}
```

Pavaizduosiu perėjimų matricą:

```
In [298]: matrix = np.zeros((n, n))

for i in range(n):
    for j in range(n):
        if (nodes[i], nodes[j]) in edges:
            matrix[i][j] = p_nodes_neighbours[nodes[i]]
            matrix[j][i] = p_nodes_neighbours[nodes[j]]

print("Perėjimų matrica: \n", matrix)

Perėjimų matrica:
[[0.  0.  0.5 0.  0.5]
 [0.  0.  0.  0.5 0.5]
 [0.5 0.  0.  0.5 0. ]
 [0.  0.5 0.5 0.  0. ]
 [0.5 0.5 0.  0.  0. ]]
```

Simuliacija vyks taip:

Paleisio ciklą kur p bus mano sekos skaičius padalintas iš $m = 729$

- Esu 1 būsenoj
 - $p < 0.5$
 - Pereinu į 3 būseną
 - $p > 0.5$
 - Pereinu į 5 būseną
- Esu 2 būsenoj
 - $p < 0.5$
 - Pereinu į 4 būseną
 - $p > 0.5$
 - Pereinu į 5 būseną
- Esu 3 būsenoj
 - $p < 0.5$
 - Pereinu į 1 būseną
 - $p > 0.5$
 - Pereinu į 4 būseną
- Esu 4 būsenoj
 - $p < 0.5$
 - Pereinu į 2 būseną
 - $p > 0.5$
 - Pereinu į 3 būseną
- Esu 5 būsenoj
 - $p < 0.5$
 - Pereinu į 1 būseną
 - $p > 0.5$
 - Pereinu į 2 būseną

Generuosiu penkis kartus vis pasirinkdamas kitą startinę būseną.

Pradedu nuo v1

```
one = random_walk(seka = antra, start = 1, m = 729 )
print(one)
SortedDict(dict(Counter(one)))
```

```
[1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3,
4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5,
1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5,
2, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3,
4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3,
1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3,
1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 4,
2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3,
4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3,
4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1,
5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 4,
3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2,
5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 1,
5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 1,
3, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1,
3, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3,
1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4]
```

```
SortedDict({1: 141, 2: 152, 3: 137, 4: 151, 5: 149})
```

Pradedu nuo v2

```
two = random_walk(seka = antra, start = 2, m = 729)
print(two)
SortedDict(dict(Counter(two)))
```

[illegible]

```
SortedDict({1: 140, 2: 153, 3: 137, 4: 151, 5: 149})
```

Pradedu nuo v3

```
three = random_walk(seka = antra, start = 3, m = 729 )
print(three)
SortedDict(dict(Counter(three)))
```

[3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3,
4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3,
1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5,
2, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3,
4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3,
1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3,
1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 3, 4,
2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 3,
4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5,
2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3,
4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 1,
5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 4,
3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2,
5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 1,
5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 1,
3, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1,
3, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3,
1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 4]

```
SortedDict({1: 139, 2: 153, 3: 138, 4: 152, 5: 148})
```

Pradedu nuo v4

```
four = random_walk(seka = antra, start = 4, m = 729 )
print(four)
SortedDict(dict(Counter(four)))
```

[illegible]

```
SortedDict({1: 140, 2: 152, 3: 138, 4: 152, 5: 148})
```


Pradedu nuo v5

```
five = random_walk(seka = antra, start = 5, m = 729 )  
print(five)  
SortedDict(dict(Counter(five)))
```

```
[5, 2, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3,  
4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5,  
1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5,  
2, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3,  
4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3,  
1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3,  
1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 3, 4,  
2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 3,  
4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5,  
2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3,  
4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1,  
5, 1, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 4,  
3, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2,  
5, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 5, 1,  
5, 2, 5, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 1,  
3, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 5, 1,  
3, 4, 3, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 3,  
1, 5, 1, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 5, 2, 4]
```

```
SortedDict({1: 139, 2: 153, 3: 138, 4: 152, 5: 148})
```

Matome kad pakeitus startinę būseną labai nežymiai kinta būsenų aplankymo dažniai.

Kodas:

In[1]:

```
from collections import Counter
from sortedcontainers import SortedDict
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from statistics import mean
from scipy.stats import chisquare
```

```
def uzpildyti_nulius(counts):
    app = {}
    for idx in range(min(counts), max(counts) + 1):
        val = counts.get(idx)
        if val == None:
            val = 0
        app[idx] = val
    return SortedDict(dict(app))
```

```
def LCG(seed, a, c, m):
    numbers = []
    for i in range(m):
        seed = (a * seed + c) % m
        numbers.append(seed)
```

```
    return numbers
```

```
def intervalu_testas(seq, m, a = 0.75, b = 1, t = 4):
    seq = [i/m for i in seq]
    intervals = []
    temp = []
    for num in seq:
        if num >= a and num <= b:
            temp.append(num)
            intervals.append(temp)
            temp = []
        else:
            temp.append(num)

    interval_lengths = [len(i)-1 for i in intervals]
    counts = SortedDict(dict(Counter(interval_lengths)))
    counts = uzpildyti_nulius(counts)
    n = sum(counts.values())
```

```
p = b-a
```

```
counts = {str(key): value for key, value in counts.items()}
```

```
print("n = ",n," p = ",p)
```

```
counts[">" + str(t)] = 0
```

```
topop = []
```

```
for key, value in counts.items():
```

```
    if key != ">" + str(t) and int(key) > t:
```

```
        counts[">" + str(t)] += value
```

```
        topop.append(key)
```

```
for key in topop:
```

```
    counts.pop(key, None)
```

```
print(counts)
```

```
pi = []
```

```
p = 0.25
```

```
n = sum(counts.values())
```

```
for key in counts:
```

```
    if key == ">" + str(t):
```

```
        pi.append((1-p)**int(t+1))
```

```
    else:
```

```
        pi.append(p*((1-p)**int(key)))
```

```
print("Pi: ", pi)
```

```
pi = [i*n for i in pi]
```

```
print("Tikimasi tokių dažnių: ", pi)
```

```
print("Laisvės laipsniai: ", t+1)
```

```
print("Chi-Kvadrato kriterijus: ", chisquare(list(counts.values()),f_exp = pi))
```

```
def skaitmenu_testas(seka, m):
```

```
    counts = {0:0,1:0,2:0,3:0,4:0,5:0,6:0,7:0,8:0,9:0}
```

```
    seka = [i/1264 for i in seka]
```

```
    seka = [str(i).split(".")[1] for i in seka]
```

```
    firsth = [i+"0"*(5-len(i)) for i in seka if len(i)<5]
```

```
    secondh = [i for i in seka if len(i)>=5]
```

```
    seka = firsth + secondh
```

```
    seka = [i[:5] for i in seka]
```

```
    counts = []
```

```
    for i in seka:
```

```
        for letter in i:
```

```
            counts.append(int(letter))
```

```
    #print(counts)
```

```
    counts = Counter(counts)
```

```
    counts = SortedDict(dict(Counter(counts)))
```

```
print(counts)
```

```
n = sum(counts.values())
```

```
pi = [1/10] * 10
```

```
print("n = m*5 = ", m, "*5 = ", n)
```

```
print("Pi: ", pi)
```

```
pi = [int(round(i*n,0)) for i in pi]
```

```
print("Tikimasi tokių dažnių: ", pi)
```

```
print("Chi-Kvadrato kriterijus: ", chisquare(list(counts.values()),f_exp = pi))
```

```
def generuoti_puasono(avg, seka, m):
```

```
    useka = [i/m for i in seka]
```

```
    p = math.exp(-avg)
```

```
    temp = []
```

```
    rez = []
```

```
    for i in useka:
```

```
        temp.append(i)
```

```
        if np.prod(temp) < p:
```

```
            rez.append(len(temp) - 1)
```

```
            temp = []
```

```
    return rez
```

```
def generuoti_geometrini(p, seka, m):
```

```
    useka = [i/729 for i in seka]
```

```
    geom = []
```

```
    for i in useka:
```

```
        if i != 0:
```

```
            geom.append(math.ceil(np.log(i)/np.log(0.9)))
```

```
    return geom
```

```
# In[2]:
```

```
from math import gcd
```

```
gcd(631,1264)
```

```
# In[3]:
```

```
from math import gcd
```

```
gcd(365,729)
```

```
# ## 1 užduotis
```

```
# In[4]:
```

```
pirma = LCG(seed = 0, a = 949, c = 631, m = 1264)
print(pirma)
```

```
# In[5]:
```

```
antra = LCG(seed = 0, a = 727, c = 365, m = 729)
print(antra)
```

```
# ## 2 užduotis
```

```
# In[6]:
```

```
print("Pirma seka:")
intervalu_testas(pirma, m = 1264, t = 4)
```

```
print("\n\nAntra seka:")
intervalu_testas(antra, m = 729, t = 4)
```

```
# In[7]:
```

```
print("Pirma seka:")
skaitmenu_testas(pirma, m = 1264)
```

```
print("\n\nAntra seka:")
skaitmenu_testas(antra, m = 729)
```

```
# ## 3 užduotis
```

```
# In[8]:
```

```
geom = generuoti_geometrini(p = 0.1, seka = antra, m = 729)
print(geom)
print("\nTeorinis vidurkis: ", 1/0.1)
print("Gautas vidurkis: ", mean(geom))
```

```
# In[9]:
```

```
poisson = generuoti_puasono(avg = 0.5, seka = antra, m = 729)
print(poisson)
print("\nVidurkis = ", mean(poisson))
```

```
### 4 užduotis
```

```
# In[10]:
```

```
useka = [i/729 for i in antra]
N = 729
```

```
# In[11]:
```

```
suma_1 = 0
epsilon_1 = [2*u for u in useka]
for i in epsilon_1:
    if i!= 0:
        suma_1+=(2/N)*(i+i**5)/(1+i)
print(suma_1)
```

```
# In[12]:
```

```
suma_2 = 0
epsilon_2 = [2*(u**(1/4)) for u in useka]
for i in epsilon_2:
    if i!= 0:
        suma_2+=(4/N)*(i+i**5)/((1+i)*(i**3))
print(suma_2)
```

```
### 5 užduotis
```

```
# In[13]:
```

```
nodes = ["v1","v2","v3","v4","v5"]
```

```
edges = [("v1","v3"),("v1","v5"),("v2","v4"),("v2","v5"),("v3","v4")]
n = len(nodes)
m = len(edges)
```

```
# In[14]:
```

```
nodes_neighbours = {}
for node in nodes:
    nodes_neighbours[node] = 0
    for edge in edges:
        if edge[0] == node or edge[1] == node:
            nodes_neighbours[node] += 1

print("Kaimynių viršūnių kiekiai", nodes_neighbours)
```

```
# In[15]:
```

```
p_nodes_neighbours = {node: (1/nodes_neighbours[node]) for node in nodes}
print("Tikimybės pereiti į viršūnes", p_nodes_neighbours)
```

```
# In[16]:
```

```
matrix = np.zeros((n, n))

for i in range(n):
    for j in range(n):
        if (nodes[i], nodes[j]) in edges:
            matrix[i][j] = p_nodes_neighbours[nodes[i]]
            matrix[j][i] = p_nodes_neighbours[nodes[j]]

print("Perėjimų matrica: \n", matrix)
```

```
# In[17]:
```

```
def random_walk(seka, start, m):
    uantra = [i/m for i in antra]
    state = start
    states = []
    states.append(state)
```

```
for p in uantra:
    if state == 1:
        if p < 0.5:
            state = 3
            states.append(state)
            continue
        if p > 0.5:
            state = 5
            states.append(state)
            continue
    if state == 2:
        if p < 0.5:
            state = 4
            states.append(state)
            continue
        if p > 0.5:
            state = 5
            states.append(state)
            continue
    if state == 3:
        if p < 0.5:
            state = 1
            states.append(state)
            continue
        if p > 0.5:
            state = 4
            states.append(state)
            continue
    if state == 4:
        if p < 0.5:
            state = 2
            states.append(state)
            continue
        if p > 0.5:
            state = 3
            states.append(state)
            continue
    if state == 5:
        if p < 0.5:
            state = 1
            states.append(state)
            continue
        if p > 0.5:
            state = 2
            states.append(state)
            continue
return states
```


In[18]:

```
one = random_walk(seka = antra, start = 1, m = 729 )  
print(one)  
SortedDict(dict(Counter(one)))
```

In[19]:

```
two = random_walk(seka = antra, start = 2, m = 729 )  
print(two)  
SortedDict(dict(Counter(two)))
```

In[20]:

```
three = random_walk(seka = antra, start = 3, m = 729 )  
print(three)  
SortedDict(dict(Counter(three)))
```

In[21]:

```
four = random_walk(seka = antra, start = 4, m = 729 )  
print(four)  
SortedDict(dict(Counter(four)))
```

In[22]:

```
five = random_walk(seka = antra, start = 5, m = 729 )  
print(five)  
SortedDict(dict(Counter(five)))
```