VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

STATISTINIS MODELIAVIMAS

Praktinės užduoties Nr. **1—11** ataskaita

Užduotį atliko: **Matas Gaulia**
Duomenų mokslas 2 kursas, 2 grupė

2021.05.12

Užduotis 1—11

1. Sugeneruokite pseudoatsitiktinių skaičių sekas tiesiniu kongruentiniu metodu su maksimaliu periodu, kai modulis m = 1264 ir m = 729. Daugiklius a parinkite taip, kad galingumai b utų didžiausi. Prieauglio c parinkimui naudokitės gretimų narių koreliacija (teoriniai testai).
2. Gautas sekas patikrinkite su dviem testais. Pirma su intervalų testu. Imkite intervalą [3/4, 1). Kitą testą pasirinkite patys.
3. Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičų seką sumodeliuokite du atsitiktinius dydžius, vieną pasiskirsčiusį pagal geometrinį skirstinį su parametru p = 0.1, o kitą parinkite patys.
4. Naudodami sugeneruotį geresniąją pseudoatsitiktiniu skaičiu seka ir parinkdami tankius (tolygiai pasiskirsčiusio intervale [0, 2] atsitiktinio dydžio ir kitį savo nuožiura) suskaičiuokite integralą:
$$\int_0^2 \frac{x + x^5}{1 + x} dx$$
5. Sugeneruokite Markovo grandinę, kurią pavaizdavus grafu gautume tokias viršūnių ir biraunų aibes:
$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4),\}$$
Iš vienos viršūnės į kitą kaimyninę viršūnę pereinama su lygiomis tikimybėmis, priklausomai nuo kaimyninių viršūnių skaičiaus

Turinys

1 užduotis

Sugeneruokite pseudoatsitiktinių skaičių sekas tiesiniu kongruentiniu metodu su maksimaliu periodu, kai modulis m = 1264 ir m = 729. Daugiklius a parinkite taip, kad galingumai būtų didžiausi. Prieauglio c parinkimui naudokitės gretimų narių koreliacija (teoriniai testai).

Pirma seka:

Pirma seka turi būti sugeneruota su m = 1264.

Pirmos sekos kriterijai:

Skaičiaus a parinkimo kriterijai:

- Turi būti mažesnis už 1264
- A-1 turi dalintis iš visų pirminių m daugiklių (1264 = $2^4 \cdot 79$)
- A-1 turi dalintis iš 4 , jei m dalinasi iš 4. (Šiuo atveju tiesa, nes 1264/4 = 316)

Skaičiaus c parinkimo kriterijai:

- DBD(c,m) = DBD(c, 1264) turi būti lygu 1
- $c < m$
- $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$

Pirmos sekos parametrai:

Renkuosi a = 949:

- $949 < 1264$
- tada $a - 1 = 948$:
  - $948 / 2 = 474$
  - $948 / 79 = 12$
- $948 / 4 = 237$

Renkuosi c = 631:

- apskaičiuoju DBD(631, 1264) su jau parašyta Python funkcija gcd() iš bibliotekos “math“:

```
In [2]: from math import gcd
        gcd(631,1264)

Out[2]: 1
```

- $631 < 1264$
- $\frac{c}{m} = \frac{631}{1264} = 0.499$, labai arti 0.5, tad c parinktas tinkamai

Pirmą sekos narį ir pirmoje, ir antroje sekose imsiu 0.
Pirmąjai sekai rasti tokie parametrai:

- $m = 1264$
- $a = 949$
- $c = 631$
- $X_0 = 0$

Pirmos sekos generavimas:

Generuoju seką su Python funkcija LCG (Linear Congruential Generator), funkcijos kodas parodytas priede:

```
In [4]: pirma = LCG(seed = 0, a = 949, c = 631, m = 1264)
        print(pirma)

[631, 314, 313, 628, 1259, 942, 941, 1256, 623, 306, 305, 620, 1251, 934, 933, 1248, 615, 298, 297, 612, 1243, 926, 925, 1240,
607, 290, 289, 604, 1235, 918, 917, 1232, 599, 282, 281, 596, 1227, 910, 909, 1224, 591, 274, 273, 588, 1219, 902, 901, 1216, 5
83, 266, 265, 580, 1211, 894, 893, 1208, 575, 258, 257, 572, 1203, 886, 885, 1200, 567, 250, 249, 564, 1195, 878, 877, 1192, 55
9, 242, 241, 556, 1187, 870, 869, 1184, 551, 234, 233, 548, 1179, 862, 861, 1176, 543, 226, 225, 540, 1171, 854, 853, 1168, 53
5, 218, 217, 532, 1163, 846, 845, 1160, 527, 210, 209, 524, 1155, 838, 837, 1152, 519, 202, 201, 516, 1147, 830, 829, 1144, 51
1, 194, 193, 508, 1139, 822, 821, 1136, 503, 186, 185, 500, 1131, 814, 813, 1128, 495, 178, 177, 492, 1123, 806, 805, 1120, 48
7, 170, 169, 484, 1115, 798, 797, 1112, 479, 162, 161, 476, 1107, 790, 789, 1104, 471, 154, 153, 468, 1099, 782, 781, 1096, 46
3, 146, 145, 460, 1091, 774, 773, 1088, 455, 138, 137, 452, 1083, 766, 765, 1080, 447, 130, 129, 444, 1075, 758, 757, 1072, 43
9, 122, 121, 436, 1067, 750, 749, 1064, 431, 114, 113, 428, 1059, 742, 741, 1056, 423, 106, 105, 420, 1051, 734, 733, 1048, 41
5, 98, 97, 412, 1043, 726, 725, 1040, 407, 90, 89, 404, 1035, 718, 717, 1032, 399, 82, 81, 396, 1027, 710, 709, 1024, 391, 74,
73, 388, 1019, 702, 701, 1016, 383, 66, 65, 380, 1011, 694, 693, 1008, 375, 58, 57, 372, 1003, 686, 685, 1000, 367, 50, 49, 36
4, 995, 678, 677, 992, 359, 42, 41, 356, 987, 670, 669, 984, 351, 34, 33, 348, 979, 662, 661, 976, 343, 26, 25, 340, 971, 654,
653, 968, 335, 18, 17, 332, 963, 646, 645, 960, 327, 10, 9, 324, 955, 638, 637, 952, 319, 2, 1, 316, 947, 630, 629, 944, 311, 1
258, 1257, 308, 939, 622, 621, 936, 303, 1250, 1249, 300, 931, 614, 613, 928, 295, 1242, 1241, 292, 923, 606, 605, 920, 287, 12
34, 1233, 284, 915, 598, 597, 912, 279, 1226, 1225, 276, 907, 590, 589, 904, 271, 1218, 1217, 268, 899, 582, 581, 896, 263, 121
0, 1209, 260, 891, 574, 573, 888, 255, 1202, 1201, 252, 883, 566, 565, 880, 247, 1194, 1193, 244, 875, 558, 557, 872, 239, 118
6, 1185, 236, 867, 550, 549, 864, 231, 1178, 1177, 228, 859, 542, 541, 856, 223, 1170, 1169, 220, 851, 534, 533, 848, 215, 116
2, 1161, 212, 843, 526, 525, 840, 207, 1154, 1153, 204, 835, 518, 517, 832, 199, 1146, 1145, 196, 827, 510, 509, 824, 191, 113
8, 1137, 188, 819, 502, 501, 816, 183, 1130, 1129, 180, 811, 494, 493, 808, 175, 1122, 1121, 172, 803, 486, 485, 800, 167, 111
4, 1113, 164, 795, 478, 477, 792, 159, 1106, 1105, 156, 787, 470, 469, 784, 151, 1098, 1097, 148, 779, 462, 461, 776, 143, 109
0, 1089, 140, 771, 454, 453, 768, 135, 1082, 1081, 132, 763, 446, 445, 760, 127, 1074, 1073, 124, 755, 438, 437, 752, 119, 106
6, 1065, 116, 747, 430, 429, 744, 111, 1058, 1057, 108, 739, 422, 421, 736, 103, 1050, 1049, 100, 731, 414, 413, 728, 95, 1042,
1041, 92, 723, 406, 405, 720, 87, 1034, 1033, 84, 715, 398, 397, 712, 79, 1026, 1025, 76, 707, 390, 389, 704, 71, 1018, 1017, 6
8, 699, 382, 381, 696, 63, 1010, 1009, 60, 691, 374, 373, 688, 55, 1002, 1001, 52, 683, 366, 365, 680, 47, 994, 993, 44, 675, 3
58, 357, 672, 39, 986, 985, 36, 667, 350, 349, 664, 31, 978, 977, 28, 659, 342, 341, 656, 23, 970, 969, 20, 651, 334, 333, 648,
15, 962, 961, 12, 643, 326, 325, 640, 7, 954, 953, 4, 635, 318, 317, 632, 1263, 946, 945, 1260, 627, 310, 309, 624, 1255, 938,
937, 1252, 619, 302, 301, 616, 1247, 930, 929, 1244, 611, 294, 293, 608, 1239, 922, 921, 1236, 603, 286, 285, 600, 1231, 914, 9
13, 1228, 595, 278, 277, 592, 1223, 906, 905, 1220, 587, 270, 269, 584, 1215, 898, 897, 1212, 579, 262, 261, 576, 1207, 890, 88
9, 1204, 571, 254, 253, 568, 1199, 882, 881, 1196, 563, 246, 245, 560, 1191, 874, 873, 1188, 555, 238, 237, 552, 1183, 866, 86
5, 1180, 547, 230, 229, 544, 1175, 858, 857, 1172, 539, 222, 221, 536, 1167, 850, 849, 1164, 531, 214, 213, 528, 1159, 842, 84
1, 1156, 523, 206, 205, 520, 1151, 834, 833, 1148, 515, 198, 197, 512, 1143, 826, 825, 1140, 507, 190, 189, 504, 1135, 818, 81
7, 1132, 499, 182, 181, 496, 1127, 810, 809, 1124, 491, 174, 173, 488, 1119, 802, 801, 1116, 483, 166, 165, 480, 1111, 794, 79
3, 1108, 475, 158, 157, 472, 1103, 786, 785, 1100, 467, 150, 149, 464, 1095, 778, 777, 1092, 459, 142, 141, 456, 1087, 770, 76
9, 1084, 451, 134, 133, 448, 1079, 762, 761, 1076, 443, 126, 125, 440, 1071, 754, 753, 1068, 435, 118, 117, 432, 1063, 746, 74
5, 1060, 427, 110, 109, 424, 1055, 738, 737, 1052, 419, 102, 101, 416, 1047, 730, 729, 1044, 411, 94, 93, 408, 1039, 722, 721,
1036, 403, 86, 85, 400, 1031, 714, 713, 1028, 395, 78, 77, 392, 1023, 706, 705, 1020, 387, 70, 69, 384, 1015, 698, 697, 1012, 3
79, 62, 61, 376, 1007, 690, 689, 1004, 371, 54, 53, 368, 999, 682, 681, 996, 363, 46, 45, 360, 991, 674, 673, 988, 355, 38, 37,
352, 983, 666, 665, 980, 347, 30, 29, 344, 975, 658, 657, 972, 339, 22, 21, 336, 967, 650, 649, 964, 331, 14, 13, 328, 959, 64
2, 641, 956, 323, 6, 5, 320, 951, 634, 633, 948, 315, 1262, 1261, 312, 943, 626, 625, 940, 307, 1254, 1253, 304, 935, 618, 617,
932, 299, 1246, 1245, 296, 927, 610, 609, 924, 291, 1238, 1237, 288, 919, 602, 601, 916, 283, 1230, 1229, 280, 911, 594, 593, 9
08, 275, 1222, 1221, 272, 903, 586, 585, 900, 267, 1214, 1213, 264, 895, 578, 577, 892, 259, 1206, 1205, 256, 887, 570, 569, 88
4, 251, 1198, 1197, 248, 879, 562, 561, 876, 243, 1190, 1189, 240, 871, 554, 553, 868, 235, 1182, 1181, 232, 863, 546, 545, 86
0, 227, 1174, 1173, 224, 855, 538, 537, 852, 219, 1166, 1165, 216, 847, 530, 529, 844, 211, 1158, 1157, 208, 839, 522, 521, 83
6, 203, 1150, 1149, 200, 831, 514, 513, 828, 195, 1142, 1141, 192, 823, 506, 505, 820, 187, 1134, 1133, 184, 815, 498, 497, 81
2, 179, 1126, 1125, 176, 807, 490, 489, 804, 171, 1118, 1117, 168, 799, 482, 481, 796, 163, 1110, 1109, 160, 791, 474, 473, 78
8, 155, 1102, 1101, 152, 783, 466, 465, 780, 147, 1094, 1093, 144, 775, 458, 457, 772, 139, 1086, 1085, 136, 767, 450, 449, 76
4, 131, 1078, 1077, 128, 759, 442, 441, 756, 123, 1070, 1069, 120, 751, 434, 433, 748, 115, 1062, 1061, 112, 743, 426, 425, 74
0, 107, 1054, 1053, 104, 735, 418, 417, 732, 99, 1046, 1045, 96, 727, 410, 409, 724, 91, 1038, 1037, 88, 719, 402, 401, 716, 8
3, 1030, 1029, 80, 711, 394, 393, 708, 75, 1022, 1021, 72, 703, 386, 385, 700, 67, 1014, 1013, 64, 695, 378, 377, 692, 59, 100
6, 1005, 56, 687, 370, 369, 684, 51, 998, 997, 48, 679, 362, 361, 676, 43, 990, 989, 40, 671, 354, 353, 668, 35, 982, 981, 32,
663, 346, 345, 660, 27, 974, 973, 24, 655, 338, 337, 652, 19, 966, 965, 16, 647, 330, 329, 644, 11, 958, 957, 8, 639, 322, 321,
636, 3, 950, 949, 0]
```

Antra seka:

Antra sekos kriterijai:

Skaičiaus a parinkimo kriterijai:

- Turi būti mažesnis už 729
- $a-1$ turi dalintis iš visų pirminių 729 daugiklių (729 = 3^6)
- $a-1$ turi dalintis iš 4 , jei 729 dalinasi iš 4. (Šiuo atveju netiesa, nes 729/4 = 182.25)

Skaičiaus c parinkimo kriterijai:

- DBD(c,m) = DBD(c, 729) turi būti lygu 1
- $c < m$
- $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$

Antros sekos parametrai:

Renkuosi a = 181:

- $181 < 729$
- $a-1 = 180,\ 180/3 = 60$

Renkuosi c = 365:

- apskaičiuoju DBD(365, 729) taip pat kaip ir pirmoje sekoje:

```
In [3]: from math import gcd
        gcd(365,729)

Out[3]: 1
```

- $365 < 729$
- $\frac{c}{m} = \frac{365}{729} = 0.5007$, vel labai arti 0.5, tad c parinktas gerai.

Antrąjai sekai rasti tokie parametrai:

- $m = 729$
- $a = 181$
- $c = 365$
- $X_0 = 0$

Antros sekos generavimas:

In [5]:
```
antra = LCG(seed = 0, a = 181, c = 365, m = 729)
print(antra)
```

```
[365, 91, 69, 461, 700, 219, 638, 661, 450, 167, 703, 33, 506, 97, 426, 197, 301, 171, 698, 586, 726, 551, 223, 633, 485, 670,
621, 500, 469, 690, 596, 349, 111, 44, 310, 342, 302, 352, 654, 641, 475, 318, 332, 679, 63, 104, 235, 618, 686, 601, 525, 620,
319, 513, 635, 118, 582, 2, 727, 3, 179, 688, 234, 437, 1, 546, 47, 124, 210, 467, 328, 684, 239, 613, 510, 92, 250, 417, 26, 6
97, 405, 41, 496, 474, 137, 376, 624, 314, 337, 126, 572, 379, 438, 182, 502, 102, 602, 706, 576, 374, 262, 402, 227, 628, 309,
161, 346, 297, 176, 145, 366, 272, 25, 516, 449, 715, 18, 707, 28, 330, 317, 151, 723, 8, 355, 468, 509, 640, 294, 362, 277, 20
1, 296, 724, 189, 311, 523, 258, 407, 403, 408, 584, 364, 639, 113, 406, 222, 452, 529, 615, 143, 4, 360, 644, 289, 186, 497, 6
55, 93, 431, 373, 81, 446, 172, 150, 542, 52, 300, 719, 13, 531, 248, 55, 114, 587, 178, 507, 278, 382, 252, 50, 667, 78, 632,
304, 714, 566, 22, 702, 581, 550, 42, 677, 430, 192, 125, 391, 423, 383, 433, 6, 722, 556, 399, 413, 31, 144, 185, 316, 699, 3
8, 682, 606, 701, 400, 594, 716, 199, 663, 83, 79, 84, 260, 40, 315, 518, 82, 627, 128, 205, 291, 548, 409, 36, 320, 694, 591,
173, 331, 498, 107, 49, 486, 122, 577, 555, 218, 457, 705, 395, 418, 207, 653, 460, 519, 263, 583, 183, 683, 58, 657, 455, 343,
483, 308, 709, 390, 242, 427, 378, 257, 226, 447, 353, 106, 597, 530, 67, 99, 59, 109, 411, 398, 232, 75, 89, 436, 549, 590, 72
1, 375, 443, 358, 282, 377, 76, 270, 392, 604, 339, 488, 484, 489, 665, 445, 720, 194, 487, 303, 533, 610, 696, 224, 85, 441, 7
25, 370, 267, 578, 7, 174, 512, 454, 162, 527, 253, 231, 623, 133, 381, 71, 94, 612, 329, 136, 195, 668, 259, 588, 359, 463, 33
3, 131, 19, 159, 713, 385, 66, 647, 103, 54, 662, 631, 123, 29, 511, 273, 206, 472, 504, 464, 514, 87, 74, 637, 480, 494, 112,
225, 266, 397, 51, 119, 34, 687, 53, 481, 675, 68, 280, 15, 164, 160, 165, 341, 121, 396, 599, 163, 708, 209, 286, 372, 629, 49
0, 117, 401, 46, 672, 254, 412, 579, 188, 130, 567, 203, 658, 636, 299, 538, 57, 476, 499, 288, 5, 541, 600, 344, 664, 264, 35,
139, 9, 536, 424, 564, 389, 61, 471, 323, 508, 459, 338, 307, 528, 434, 187, 678, 611, 148, 180, 140, 190, 492, 479, 313, 156,
170, 517, 630, 671, 73, 456, 524, 439, 363, 458, 157, 351, 473, 685, 420, 569, 565, 570, 17, 526, 72, 275, 568, 384, 614, 691,
48, 305, 166, 522, 77, 451, 348, 659, 88, 255, 593, 535, 243, 608, 334, 312, 704, 214, 462, 152, 175, 693, 410, 217, 276, 20, 3
40, 669, 440, 544, 414, 212, 100, 240, 65, 466, 147, 728, 184, 135, 14, 712, 204, 110, 592, 354, 287, 553, 585, 545, 595, 168,
155, 718, 561, 575, 193, 306, 347, 478, 132, 200, 115, 39, 134, 562, 27, 149, 361, 96, 245, 241, 246, 422, 202, 477, 680, 244,
60, 290, 367, 453, 710, 571, 198, 482, 127, 24, 335, 493, 660, 269, 211, 648, 284, 10, 717, 380, 619, 138, 557, 580, 369, 86, 6
22, 681, 425, 16, 345, 116, 220, 90, 617, 505, 645, 470, 142, 552, 404, 589, 540, 419, 388, 609, 515, 268, 30, 692, 229, 261, 2
21, 271, 573, 560, 394, 237, 251, 598, 711, 23, 154, 537, 605, 520, 444, 539, 238, 432, 554, 37, 501, 650, 646, 651, 98, 607, 1
53, 356, 649, 465, 695, 43, 129, 386, 247, 603, 158, 532, 429, 11, 169, 336, 674, 616, 324, 689, 415, 393, 56, 295, 543, 233, 2
56, 45, 491, 298, 357, 101, 421, 21, 521, 625, 495, 293, 181, 321, 146, 547, 228, 80, 265, 216, 95, 64, 285, 191, 673, 435, 36
8, 634, 666, 626, 676, 249, 236, 70, 642, 656, 274, 387, 428, 559, 213, 281, 196, 120, 215, 643, 108, 230, 442, 177, 326, 322,
327, 503, 283, 558, 32, 325, 141, 371, 448, 534, 62, 652, 279, 563, 208, 105, 416, 574, 12, 350, 292, 0]
```

2 užduotis

Gautas sekas patikrinkite su dviem testais. Pirma su intervalų testu. Imkite intervalą [3/4, 1). Kitą testą pasirinkite patys.

Intervalų testas:

Kad patestuočiau abi sekas su interval testu, pasirašiau tam funkciją, kuri priima 3 būtinus argumentus: seką sąrašo pavidalu, m skaičių, t skaičių. Abiejoms sekoms testuoti rinkausi t = 4.

```
In [6]: print("Pirma seka:")
        intervalu_testas(pirma,m = 1264, t = 4)

        print("Antra seka:")
        intervalu_testas(antra,m = 729, t = 4)

        Pirma seka:
        Intervalų testas:  230.09
        Antra seka:
        Intervalų testas:  0.46
```

Labai gerai matosi, kad antroji seka yra žymiai geresnė pagal intervalų testą.

Skaitmenų testas:

Skaitmenų testui taip pat pasirašiau funkciją, kuri priima vieną argumentą – seką sąrašo pavidalu.

```
In [7]: print("Pirma seka:")
        skaitmenu_testas(pirma)

        print("Antra seka:")
        skaitmenu_testas(antra)

        Pirma seka:
        Skaitmenu testas: 311.63
        Antra seka:
        Skaitmenu testas: 110.55
```

Iš skaitmenų testo matyti taip pat, kad antroji seka yra žymiai geresnė už pirmąją, tad ją naudosiu 3 ir 4 užduotyse.

3 užduotis

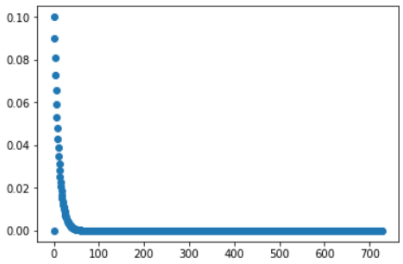
Naudodami sugeneruotą geresniąją pseudoatsitiktinių skaičų seką sumodeliuokite du atsitiktinius dydžius, vieną pasiskirsčiusį pagal geometrinį skirstinį su parametru p = 0.1, o kitą parinkite patys.

Geometrinis skirstinys:

Kad sugeneruočiau geometrinį a.d., naudojau Python biblioteką “scipy“, funkciją geom.pmf()

```
In [8]: from scipy.stats import geom
        geom_pd = geom.pmf(antra, p = 0.1)
        plt.plot(antra, geom_pd, 'o')

Out[8]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x759390>]
```

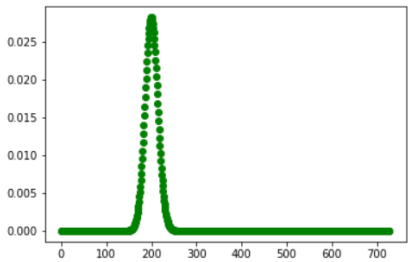


Puasono skirstinys:

Kitą a.d. pasirinkau puasono su $\lambda = 200$, vėl naudojau biblioteką “scipy“, funkciją poisson.pmf()

```
In [9]: from scipy.stats import poisson
        pos = poisson.pmf(antra, 200)
        plt.plot(antra, pos, 'o', color = "green")

Out[9]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x19dcd1d0>]
```



4 užduotis

Naudodami sugeneruotį geresniąją pseudoatsitiktiniu skaičiu seka ir parinkdami tankius (tolygiai pasiskirsčiusio intervale [0, 2] atsitiktinio dydžio ir kitį savo nuožiura) suskaičiuokite integralą:

$$I = \int_0^2 \frac{x + x^5}{1 + x} dx$$

Generuosiu tolygų atsitiktinį dydi tarp [0,1] su python paketu “numpy“, funkcija numpy.random.uniform(0,1,N)

Kad būtų galima atkartoti atsakymus, nustačiau atsitiktinių skaičių seką su np.random.seed(69420)

```
In [10]: np.random.seed(69420)
         N = len(antra)
         uni = np.random.uniform(0,1,N)
```

Pirmas tankis:

Pirmas tankis bus $p_{\varepsilon 1}(x) = \frac{1}{2}$; $\int_0^2 \frac{1}{2} dx = 1, tada \int_0^\varepsilon \frac{1}{2} dx = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{\varepsilon}{2} = U, tai\ \varepsilon = 2U$$

Galime skaičiuoti integralą $I \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1+\varepsilon_j}\right) \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1+\varepsilon_j}$

```
In [11]: suma_1 = 0
         epsilon_1 = [2*u for u in uni]
         for i in epsilon_1:
             suma_1+=(2/N)*(i+i**5)/(1+i)
         print(suma_1)

         4.612236451187102
```

Su pirmiu tankiu gauname, kad integralas lygus apytiksliai **4.61**

Antras tankis:

Antras tankis bus $p_{\varepsilon 2}(x) = \frac{x^3}{4}$; $\int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = 1, tada \int_0^\varepsilon \frac{x^3}{4} dx = \frac{\varepsilon^4}{16}$

$$\frac{\varepsilon^4}{16} = U, tai\ \varepsilon = 2\sqrt[4]{U}$$

Galime skaičiuoti integralą $I \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{1+\varepsilon_j}\right) \cdot \frac{4}{\varepsilon_j^3} = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_j^5}{\varepsilon_j^3(1+\varepsilon_j)}$

```
In [12]: suma_2 = 0
         epsilon_2 = [2*(u**(1/4)) for u in uni]
         for i in epsilon_2:
             suma_2+=(4/N)*(i+i**5)/((1+i)*(i**3))
         print(suma_2)

         4.876908512535559
```

Su antru tankiu gauname, kad integralas lygus apytiksliai **4.88**

Geresnis tankis yra antrasis, nes artimesnis

5 užduotis

Sugeneruokite Markovo grandinę, kurią pavaizdavus grafu gautume tokias viršūnių ir biraunų aibes:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4),\}$$

Iš vienos viršūnės į kitą kaimyninę viršūnę pereinama su lygiomis tikimybėmis, priklausomai nuo kaimyninių viršūnių skaičiaus

Pradžiai įsivedu kintamuosius

In [1]:
```
import numpy as np
nodes = ["v1","v2","v3","v4","v5"]
edges = [("v1","v3"),("v1","v5"),("v2","v4"),("v2","v5"),("v3","v4")]
n = len(nodes)
m = len(edges)
```

Susiskaičiuoju kiek kiekviena viršūnė turi kaimyninių viršūnių:

In [2]:
```
nodes_neighbours = {}
for node in nodes:
    nodes_neighbours[node] = 0
    for edge in edges:
        if edge[0] == node or edge[1] == node:
            nodes_neighbours[node]+=1

print("Kaimynių viršūnių kiekiai",nodes_neighbours)
```

```
Kaimynių viršūnių kiekiai {'v1': 2, 'v2': 2, 'v3': 2, 'v4': 2, 'v5': 2}
```

Turėdamas kaimyninių viršūnių skaičių, galiu skaičiuoti tikimybę pereiti į kiekvieną viršūnę:

In [3]:
```
p_nodes_neighbours = {node:(1/nodes_neighbours[node]) for node in nodes}
print("Tikimybės pereiti į viršūnes",p_nodes_neighbours)
```

```
Tikimybės pereiti į viršūnes {'v1': 0.5, 'v2': 0.5, 'v3': 0.5, 'v4': 0.5, 'v5': 0.5}
```

Tuomet sudarinėju perėjimų matricą:

In [4]:
```
matrix = np.zeros((n, n))
print(matrix)

for i in range(n):
    for j in range(n):
        if (nodes[i],nodes[j]) in edges:
            matrix[i][j] = p_nodes_neighbours[nodes[i]]
            matrix[j][i] = p_nodes_neighbours[nodes[j]]

print("Perėjimų matrica: \n",matrix)
```

```
[[0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]]
Perėjimų matrica:
 [[0.  0.  0.5 0.  0.5]
 [0.  0.  0.  0.5 0.5]
 [0.5 0.  0.  0.5 0. ]
 [0.  0.5 0.5 0.  0. ]
 [0.5 0.5 0.  0.  0. ]]
```

Turėdamas perėjimų matricą galiu simuliuoti „vaikščiojimą“ po markovo grandinę, t.y. generuoti būsenas.

Apsirašau funkciją simulate_mc(), kuri generuos būsenas, ir 2 papildomas funkcijas:
get_next_state() – davus tikimybes pereiti į kaimynes, suranda ateinančią būseną
get_state() – davus indeksą, suranda viršūnės pavadinimą

In [17]:
```
import random
import collections

def get_next_state(super_position_state):
    weight_precision = 1000
    weight_sum = sum(super_position_state)
    weighted_state = map(lambda e: e * weight_precision / weight_sum, super_position_state)

    state_list = []
    i = 0
    for item in weighted_state:
        state_list += [ i ] * int(item)
        i += 1

    new_state = [0.] * len(super_position_state)
    new_state[random.choice(state_list)] = 1.0;

    return new_state

def get_state(state_vector):
    index = [i for i, e in enumerate(state_vector) if e != 0]
    return 'v' + str(index[0])


def simulate_mc(transition_matrix, start, n):
    state_vector = np.zeros(len(matrix))
    state_vector[start-1] = 1.0

    super_position_state = np.dot(state_vector, transition_matrix)

    state_vector = get_next_state(super_position_state)

    result = []
    for i in range(n):
        super_position_state = np.dot(state_vector, transition_matrix)
        state_vector = get_next_state(super_position_state)
        result.append(int(get_state(state_vector)[1]))

    result = collections.Counter(result)

    counts = {nodes[key] : value for key, value in result.items()}
    normalized = { nodes[key] : value/n for key, value in result.items()}
    print("start = ", start)
    print("    ",dict(sorted(counts.items())))
    print("    ",dict(sorted(normalized.items())))
```

Generuoju markovo grandinę 5 kartus, vis priskirdamas skirtingą pradinę būseną.

In [18]:
```
print("Generavimas:")
simulate_mc(matrix, start = 1, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 2, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 3, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 4, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 5, n = 1000000)
```

```
Generavimas:
start =  1
     {'v1': 199832, 'v2': 199972, 'v3': 200350, 'v4': 200640, 'v5': 199206}
     {'v1': 0.199832, 'v2': 0.199972, 'v3': 0.20035, 'v4': 0.20064, 'v5': 0.199206}
start =  2
     {'v1': 199750, 'v2': 200440, 'v3': 199634, 'v4': 200055, 'v5': 200121}
     {'v1': 0.19975, 'v2': 0.20044, 'v3': 0.199634, 'v4': 0.200055, 'v5': 0.200121}
start =  3
     {'v1': 200469, 'v2': 199509, 'v3': 200321, 'v4': 199700, 'v5': 200001}
     {'v1': 0.200469, 'v2': 0.199509, 'v3': 0.200321, 'v4': 0.1997, 'v5': 0.200001}
start =  4
     {'v1': 200138, 'v2': 200240, 'v3': 200029, 'v4': 199840, 'v5': 199753}
     {'v1': 0.200138, 'v2': 0.20024, 'v3': 0.200029, 'v4': 0.19984, 'v5': 0.199753}
start =  5
     {'v1': 200437, 'v2': 198975, 'v3': 200992, 'v4': 200392, 'v5': 199204}
     {'v1': 0.200437, 'v2': 0.198975, 'v3': 0.200992, 'v4': 0.200392, 'v5': 0.199204}
```

Išvada

Antra sugeneruota seka yra geresnė pagal intervalų ir skaitmenų testus.
Skaičiuojant duotą integralą 4 užduotyje, nustačiau, kad geresnis rezultatas gaunamas naudojant antrą tankį.

Priedas

```
# coding: utf-8

# In[1]:


from collections import Counter
from sortedcontainers import SortedDict
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def uzpildyti_nulius(counts):
    app = {}
    for idx in range(min(counts), max(counts) + 1):
        val = counts.get(idx)
        if val == None:
            val = 0
        app[idx] = val
    return SortedDict(dict(app))

def LCG(seed, a, c, m):
    numbers = []
    for i in range(m):
        seed = (a * seed + c) % m
        numbers.append(seed)

    return numbers

def intervalu_testas(seq, m, a = 0.75, b = 1, t = 4):
    seq = [i/m for i in seq]
    intervals = []
    temp = []
    for num in seq:
        if num >= a and num <=b:
            temp.append(num)
            intervals.append(temp)
            temp = []
        else:
            temp.append(num)

    interval_lengths = [len(i)-1 for i in intervals]
    counts = SortedDict(dict(Counter(interval_lengths)))
    counts = uzpildyti_nulius(counts)
    n = sum(counts.values())
    p = b-a
    chisq = 0
    for key, value in counts.items():

        if key <= t:
            chisq += ((value - n * (p * (1-p)**key ) )**2) / (n * (p * (1-p)**key
```

```
))
        else:
            abovet = 0
            for key in counts.keys():
                if key > t:
                    abovet += counts[key]
            chisq += ((abovet - n * ((1-p)**(t+1) ) )**2) / (n * ((1-p)**(t+1) ))
            break
    print("Intervalų testas: ",round(chisq,2))

def skaitmenu_testas(seka):
    counts = {0:0,1:0,2:0,3:0,4:0,5:0,6:0,7:0,8:0,9:0}
    for i in [str(num) for num in seka]:
        for char in i:
            counts[int(char)]+=1
    suma = sum(counts.values())
    result = 0
    for val in counts.values():
        result += ((val - suma/10)**2)/(suma/10)
    print("Skaitmenu testas:", round(result,2))


# In[ ]:




# In[2]:


from math import gcd
gcd(631,1264)


# In[3]:


from math import gcd
gcd(365,729)


# In[4]:


pirma = LCG(seed = 0, a = 949, c = 631, m = 1264)
print(pirma)


# In[5]:


antra = LCG(seed = 0, a = 181, c = 365, m = 729)
print(antra)


# In[6]:


print("Pirma seka:")
intervalu_testas(pirma,m = 1264, t = 4)
```

```
print("Antra seka:")
intervalu_testas(antra,m = 729, t = 4)
```

```
# In[7]:
```

```
print("Pirma seka:")
skaitmenu_testas(pirma)

print("Antra seka:")
skaitmenu_testas(antra)
```

```
# In[8]:
```

```
from scipy.stats import geom

geom_pd = geom.pmf(antra, p = 0.1)
plt.plot(antra, geom_pd, 'o')
```

```
# In[9]:
```

```
from scipy.stats import poisson
pos = poisson.pmf(antra, 200)
plt.plot(antra, pos, 'o', color = "green")
```

```
# In[10]:
```

```
np.random.seed(69420)
N = len(antra)
uni = np.random.uniform(0,1,N)
```

```
# In[11]:
```

```
suma_1 = 0
epsilon_1 = [2*u for u in uni]
for i in epsilon_1:
    suma_1+=(2/N)*(i+i**5)/(1+i)
print(suma_1)
```

```
# In[12]:
```

```
suma_2 = 0
epsilon_2 = [2*(u**(1/4)) for u in uni]
for i in epsilon_2:
    suma_2+=(4/N)*(i+i**5)/((1+i)*(i**3))
print(suma_2)
```

```
# In[13]:
```

```
nodes = ["v1","v2","v3","v4","v5"]
edges = [("v1","v3"),("v1","v5"),("v2","v4"),("v2","v5"),("v3","v4")]
n = len(nodes)
m = len(edges)


# In[14]:


nodes_neighbours = {}
for node in nodes:
    nodes_neighbours[node] = 0
    for edge in edges:
        if edge[0] == node or edge[1] == node:
            nodes_neighbours[node]+=1

print("Kaimynių viršūnių kiekiai",nodes_neighbours)


# In[15]:


p_nodes_neighbours = {node:(1/nodes_neighbours[node]) for node in nodes}
print("Tikimybės pereiti į viršūnes",p_nodes_neighbours)


# In[16]:


matrix = np.zeros((n, n))
print(matrix)

for i in range(n):
    for j in range(n):
        if (nodes[i],nodes[j]) in edges:
            matrix[i][j] = p_nodes_neighbours[nodes[i]]
            matrix[j][i] = p_nodes_neighbours[nodes[j]]

print("Perėjimų matrica: \n",matrix)


# In[17]:


import random
import collections

def get_next_state(super_position_state):
    weight_precision = 1000
    weight_sum = sum(super_position_state)
    weighted_state = map(lambda e: e * weight_precision / weight_sum,
super_position_state)

    state_list = []
    i = 0
    for item in weighted_state:
        state_list += [ i ] * int(item)
        i += 1
```

```
    new_state = [0.] * len(super_position_state)
    new_state[random.choice(state_list)] = 1.0;

    return new_state

def get_state(state_vector):
    index = [i for i, e in enumerate(state_vector) if e != 0]
    return 'v' + str(index[0])


def simulate_mc(transition_matrix, start, n):
    state_vector = np.zeros(len(matrix))
    state_vector[start-1] = 1.0

    super_position_state = np.dot(state_vector, transition_matrix)

    state_vector = get_next_state(super_position_state)

    result = []
    for i in range(n):
        super_position_state = np.dot(state_vector, transition_matrix)
        state_vector = get_next_state(super_position_state)
        result.append(int(get_state(state_vector)[1]))

    result = collections.Counter(result)

    counts = {nodes[key] : value for key, value in result.items()}
    normalized = { nodes[key] : value/n for key, value in result.items()}
    print("start = ", start)
    print("    ",dict(sorted(counts.items())))
    print("    ",dict(sorted(normalized.items())))


# In[18]:


print("Generavimas:")
simulate_mc(matrix, start = 1, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 2, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 3, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 4, n = 1000000)
simulate_mc(matrix, start = 5, n = 1000000)
```