Práctica 2 - Teoría de la Señal y Comunicaciones

Moisés Gautier Gómez

Ejercicios

1. Estime los coeficientes de la serie de Fourier de la función:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + (\sin(\omega_0 t))^2$$

Para ello haga uso de la siguiente identidad trigonométrica:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Utilizando MATLAB represente el espectro de magnitud y de fase. ¿Cuántas componentes en frecuencia aparece?.

Coeficientes:

$$X(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \cdot e^{j\omega nt} \, ; c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega nt} dt$$

Con T el periodo de la señal y ω la frecuencia ($\omega = \frac{2\pi}{T}$).
Sustituyendo nos quedaría:

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \cdot e^{-j\omega nt} dt$$

Utilizando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

Obtenemos:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{(1 - \cos(2\omega t))}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2}$$

Sustituyendo en la integral:

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega t) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2}) \cdot e^{-j\omega nt} dt$$

Utilizaremos las siguientes igualdades:

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
c(n) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}}{4}) \cdot e^{-jn\omega t} dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot e^{-j\omega nt} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega nt} - \frac{e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}}{4} \cdot e^{-j\omega nt} dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega nt}}{2} + \frac{e^{-j\omega t} \cdot e^{-j\omega nt}}{2} + \frac{e^{-j\omega nt}}{2} - \frac{e^{2j\omega t} \cdot e^{-j\omega nt}}{4} \\
&\quad - \frac{e^{-2j\omega t} \cdot e^{-j\omega nt}}{4} dt
\end{aligned}$$

Por lo que nos queda:

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega t(1-n)}}{2} + \frac{e^{-j\omega t(1+n)}}{2} + \frac{e^{-j\omega nt}}{2} - \frac{e^{j\omega t(2-n)}}{4} - \frac{e^{-j\omega t(2+n)}}{4} dt$$

Ahora obtenemos el valor de los coeficientes:

$$\begin{aligned}
c(0) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{j\omega t2}}{4} - \frac{e^{-j\omega t2}}{4} dt \\
&= \frac{1}{T}\Big[\frac{e^{j\omega t}}{2j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{2j\omega} + \frac{t}{2} - \frac{e^{j\omega t2}}{8j\omega} - \frac{e^{-j\omega t2}}{8j\omega}\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{T}{4} - \frac{e^{j\omega T}}{8j\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{8j\omega}\Big|_{\frac{T}{2}} \\
&\quad -\frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{T}{4} - \frac{e^{-j\omega T}}{8j\omega} + \frac{e^{j\omega T}}{8j\omega}\Big|_{-\frac{T}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{T}{4} - \frac{e^{j\omega T}}{8j\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{8j\omega} \\
&\quad -\frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{T}{4} + \frac{e^{-j\omega T}}{8j\omega} - \frac{e^{j\omega T}}{8j\omega}\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{2e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{2e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{2T}{4} - \frac{2e^{j\omega T}}{8j\omega} + \frac{2e^{-j\omega T}}{8j\omega}\Big)
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de seno y coseno:

$$\begin{aligned}
c(0) &= \frac{1}{T}\Big(\frac{2}{\omega}\big(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}\big) + \frac{2T}{4} - \frac{2}{4\omega}\big(\frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{2}{\omega}\big(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}\big) + \frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega}\big(\frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega T}{2}) + \frac{T}{2} - \frac{2}{4\omega}\sin(\omega T)\Big)
\end{aligned}$$

Fijémonos en lo siguiente:

$$\omega T = (\frac{2\pi}{T})\cdot T \rightarrow\ \omega T = 2\pi \rightarrow \sin(\omega T) = \sin(2\pi) = 0$$

$$\frac{\omega T}{2} = (\frac{2\pi}{T})\cdot(\frac{T}{2}) \rightarrow \omega T = \pi \rightarrow \sin(\omega T) = \sin(\pi) = 0$$

Por tanto:

$$c(0) = \frac{1}{T}\Big(0 - \frac{T}{2} + 0\Big) = \frac{1}{2}$$

Siguiente coeficiente:

$$\begin{aligned}
c(1) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} + \frac{e^{-2j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} - \frac{e^{j\omega t}}{4} - \frac{e^{-3j\omega t}}{4} dt \\
&= \frac{1}{T}\Big[\frac{t}{2} - \frac{e^{-2j\omega t}}{4j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j\omega} - \frac{e^{j\omega t}}{4j\omega} + \frac{e^{-3j\omega t}}{12j\omega}\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{T}{4} - \frac{e^{-j\omega t}}{4j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{4j\omega} + \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{12j\omega}\Big|_{\frac{T}{2}} \\
&\quad -\frac{-T}{4} - \frac{e^{j\omega T}}{4j\omega} - \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{4j\omega} + \frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{12j\omega}\Big|\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{2T}{4} + (\frac{e^{j\omega T}}{4j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{4j\omega}) + (\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega}) \\
&\quad -(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{4j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{4j\omega}) - (\frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{12j\omega} - \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{12j\omega})\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{T}{2} + \frac{1}{2\omega}(\frac{e^{j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-j\omega T}}{2j}) + \frac{1}{w}(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}) \\
&\quad -\frac{1}{2\omega}(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}) + \frac{1}{6\omega}(\frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{2j} - \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{2j})\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\frac{T}{2} + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega T) + \frac{1}{\omega}\sin(\frac{\omega T}{2}) + \frac{1}{2\omega}\sin(\frac{\omega T}{2}) + \frac{1}{6\omega}\sin(\frac{3\omega T}{2})\Big)
\end{aligned}$$

$$\frac{3\omega}{2} = 3(\frac{2\pi}{T}) \cdot (\frac{T}{2}) \to \omega T = 2\pi \to \sin(\frac{3\omega T}{2}) = \sin(3\pi) = 0$$

$$c(1) = \frac{1}{2}$$

El coeficiente $-n$ lo sacamos a partir del coeficiente n, pues es su conjugado:

$$c(n)^* = c(-n)$$
$$c(-1) = \frac{1}{2}$$

Último coeficiente:

$$\begin{aligned}
c(2) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-j\omega t}}{2} + \frac{e^{-3\omega 2t}}{2} + \frac{e^{-j\omega 2t}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{e^{-4j\omega t}}{4} dt \\
&= \frac{1}{T}\Big[-\frac{e^{-j\omega t}}{2j\omega} - \frac{e^{-3j\omega t}}{6j\omega} - \frac{e^{-2j\omega t}}{4j\omega} - \frac{t}{4} + \frac{e^{-4j\omega t}}{16j\omega}\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{6j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{4j\omega} - \frac{T}{8} + \frac{e^{-2j\omega T}}{16j\omega}\Big|_{\frac{T}{2}} \\
&\quad - -\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{6j\omega} + \frac{T}{8} + \frac{e^{2j\omega T}}{16j\omega}\Big|_{-\frac{T}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{6j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{4j\omega} - \frac{T}{8} + \frac{e^{-2j\omega T}}{16j\omega} \\
&\quad + \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} + \frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{6j\omega} - \frac{T}{8} - \frac{e^{2j\omega T}}{16j\omega}\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big((\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j\omega}) + (\frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{6j\omega} - \frac{-3j\omega\frac{T}{2}}{6j\omega}) \\
&\quad + (\frac{e^{j\omega T}}{4j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{4j\omega}) - \frac{2T}{8} - (\frac{e^{2j\omega T}}{16j\omega} - \frac{e^{-2j\omega T}}{16j\omega})\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{T}{4} - \frac{1}{2\omega}(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}}{2j} - \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}) + \frac{1}{3\omega}(\frac{e^{3j\omega\frac{T}{2}}}{2j} - \frac{e^{-3j\omega\frac{T}{2}}}{2j}) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}(\frac{e^{j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-j\omega T}}{2j}) + \frac{1}{8\omega}(\frac{e^{2j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-2j\omega T}}{2j})\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{T}{4} + \frac{1}{2\omega}\sin(\frac{\omega T}{2}) + \frac{1}{3\omega}\sin(\frac{3\omega T}{2}) + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega T) + \frac{1}{8\omega}\sin(2\omega T)\Big)
\end{aligned}$$

$$c(2) = -\frac{1}{4}$$
$$c(-2) = -\frac{1}{4}$$

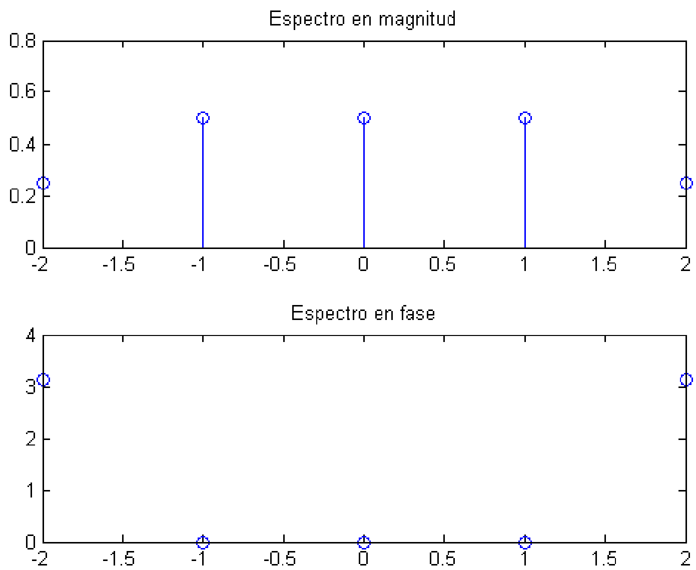
Si seguimos calculando, aparecen nada más que exponenciales, lo que implica que habrá ceros. La señal queda de la siguiente forma:

$$X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\omega t} - \frac{1}{4}e^{2i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} - \frac{1}{4}e^{-2i\omega t}$$

Utilizando MATLAB represente el espectro de magnitud y de fase. ¿Cuántas componentes en frecuencia aparecen?.

El espectro de magnitud lo representaremos calculando el módulo de los coeficientes, con la función abs (para calcular el valor absoluto). Los módulos de los coeficientes son su propio valor, pues son números reales. El espectro de fase lo calcularemos con la función $angle$, dado que todos nuestro coeficientes son cero, pues no existe parte imaginaria.

```
coeficientes = [−1/4,1/2,1/2,1/2,−1/4];
x = −2:2;

 %Ahora nos centramos en representar el espectro en ...
    magnitud y fase

subplot(211);
stem(x,abs(coeficientes));
title('Espectro en magnitud');
xlabel = ('Frecuencia');

subplot(212);
stem(x,angle(coeficientes));
title('Espectro en fase');
xlabel = ('Frecuencia');
```



Aparecen 5 componentes en frecuencia: $0, \omega, -\omega, 2\omega, -2\omega$

2. Determinar y representar los coeficientes de la serie de Fourier de un tren de impulsos.

Para calcular los coeficientes aplicamos la fórmula de la serie de Fourier.

$X(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \cdot e^{j\omega nt}$ $\qquad$ $c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega nt} dt$

$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\delta(t-kT) \cdot e^{-j\omega nt} dt$

Si nos damos cuenta, solo tenemos un impulso, ya que integramos entre $\frac{-T}{2}$ y $\frac{T}{2}$,

$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\delta(t) \cdot e^{-j\omega nt} dt = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j\omega nt} dt$

Según las propiedades de la función delta: $\int \delta(t-t_o) \cdot x(t) dt = x(t_0)$

Por tanto: $\int \delta(t) \cdot x(t) dt = x(0)$

Sustituyendo:

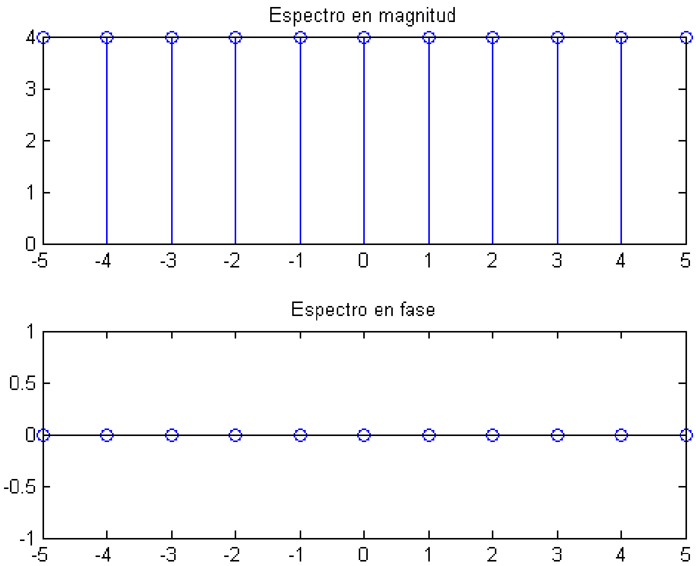
$$c(n) = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j\omega nt} dt = \frac{A}{T} e^{-j\omega 0t} = \frac{A}{T}$$

La serie de Fourier nos queda con todos los coeficientes iguales:

$$X(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{T} \cdot e^{j\omega nt} = \frac{A}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega nt}$$

Para la representación mediante MATLAB he seleccionado un tren de impulsos de periodo 5 y amplitud 5.

```
coeficientes = ones(11,1)*25/(2*pi);
x = -5:5;

%Ahora nos centramos en representar el espectro en ...
    magnitud y fase

subplot(211)
stem(x,abs(coeficientes));
title('Espectro en magnitud');
xlabel = ('Frecuencia');

subplot(212);
stem(x,angle(coeficientes));
title('Espectro en fase');
xlabel = ('Frecuencia');
```



3. Realice una función MATLAB que determine y represente el espectro de magnitud de un tren periódico de pulsos cuadrado de amplitud A, anchura d y periodo T.

   Un impulso cuadrado se representa con la siguiente expresión matemática:

$$\prod(t) = \begin{cases} 1 & \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

   Un tren de impulsos cuadrados, de amplitud A, periodo T y de anchura d, podemos representarlo como:

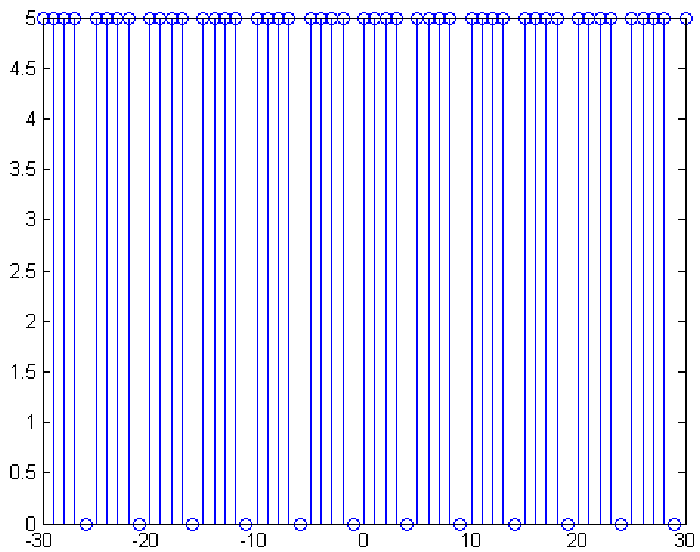
$$x(t) = \begin{cases} A & kT \leq t \leq kT + d \\ 0 & |t| > kT + d \end{cases}$$

```
function [x,y] = trenImpulsos (amp,anch,p,ini,fin)

if(fin < ini)
    error ('El fin del intervalo debe ser mayor que ...
        el inicio');
end

y=zeros(fin−ini,1);
for i=ini:fin
```

```
    if(mod(i,p)==0) | (mod(i,p)≤anch)
        y(i-ini+1)=1;
    end
end
y = amp*y;
x=ini:fin;
```

Para la representación del tren de impulsos he escogido un tren de amplitud 5, anchura 3 y periodo 5, para el intervalo $[-30, 30]$:

```
[x,y] = trenImpulsos(5,3,5,-30,30);
stem(x,y);
```

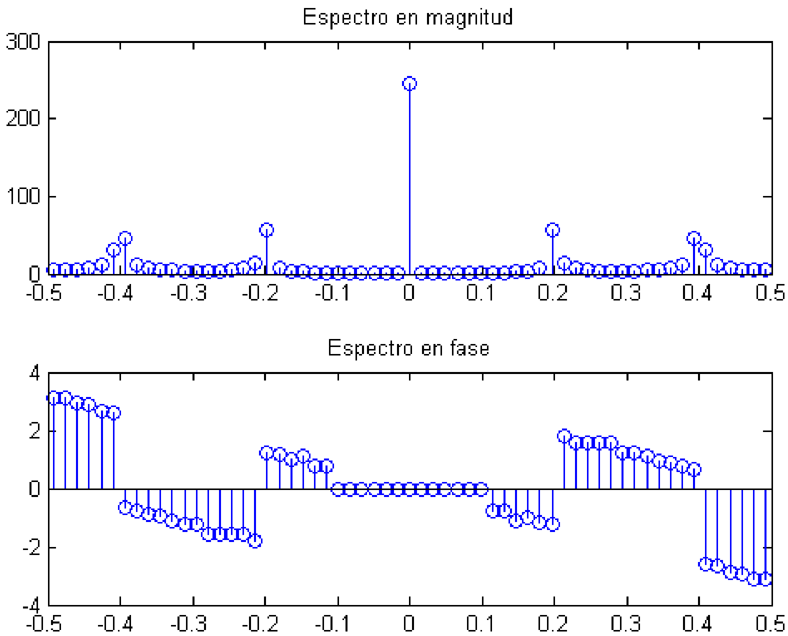


Ahora calculo los coeficientes correspondientes a la serie de esta señal y su representación:

```
function y = Fourier(n,f)

%n muestras para emplear en nuestra transformada.
%f, frecuencia de muestro de cada muestra.

y = fix(fft(n));

dim = length(y);
```

```
%length busca el numero de elementos a lo largo de la ...
    dimension
% mas grande de una matriz.

%Ordenamos los coeficientes (0 como valor central).
m = floor(dim/2);

%floor nos permite asignar el entero mas proximo
% o menor, al valor tomado
% como parametro de entrada.

y2=[y(m+2:dim);y(1:m+1)];

%Cambiamos la dimension de la matriz para que
% en la representacion sea simetrica.

if(mod(dim,2) == 0)
    y2 = y2(1:dim-1);
    dim = dim - 1;
end

%mod devuelve el resto de la division entre sus dos
% operandos.

x = (-floor(dim/2):floor(dim/2))*(f/dim);

%Ahora nos centramos en representar el espectro en ...
    magnitud y fase

subplot(211)
stem(x,abs(y2));
title('Espectro en magnitud');
xlabel = ('Frecuencia');

subplot(212);
stem(x,angle(y2));
title('Espectro en fase');
xlabel = ('Frecuencia');
```

```
X = Fourier(y,1);
```



4. Partiendo de la expresión de la sinusoide de tiempo continuo, escriba una función MATLAB que obtenga muestras de $s(t)$ para crear con ellas una función de tiempo discreto de longitud finita. Esta función requiere seis entradas: tres para los parámetros de la señal, dos para los tiempos de comienzo y final de muestreo y uno para la frecuencia de muestreo (en hercios). Para la función que corresponde a la señal de tiempo continuo definida, considere que las unidades de comienzo y final son segundos y no los índices de las muestras. Realice la representación de la señal resultante para tres frecuencias de muestreo distintas.

   La expresión de la sinusoide de tiempo continuo es la siguiente:

$$s(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$$

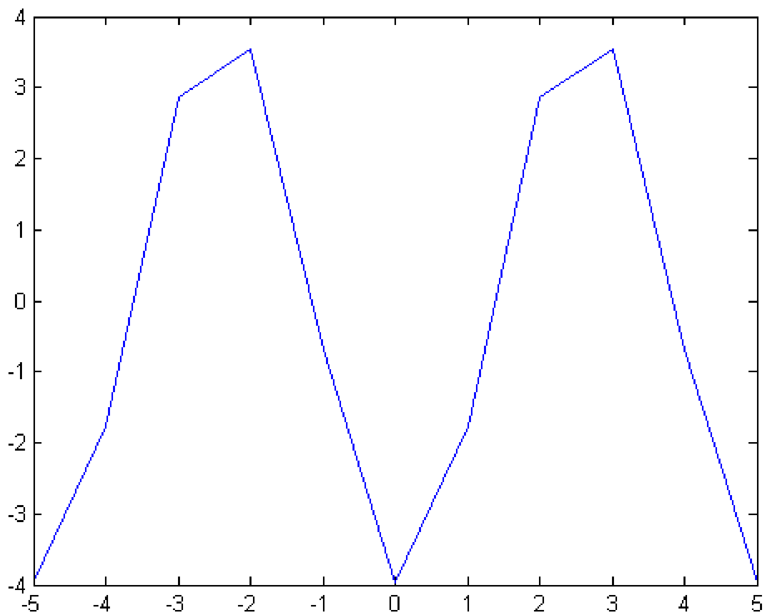
   Así pues vamos a definir una función en MATLAB para la expresión anteriormente citada:

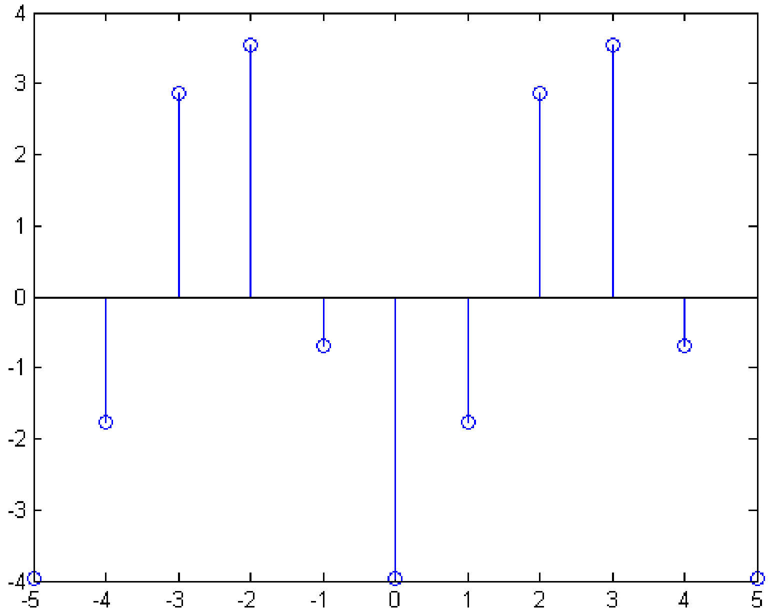
```
function [x,y] = sinusoide(a,t,f,inicio,fin)

if(fin ≤ inicio)
    error('El fin del intervalo debe ser mayor que el ...
        inicio');
```

```
end
if(t≤0)
    error ('El periodo debe ser positivo');
end

y = inicio:fin;

x = a*cos(2*pi*y/t + f);

figure(1);
stem(y,x);

figure(2);
plot(y,x);
```

Ahora haremos una representación gráfica de la función para unos valores de amplitud 4, periodo 5 con un rango de valores entre $[-5, 5]$:

```
[x,y] = sinusoide(4,5,3,-5,5);
```





La frecuencia máxima para esta función es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T} \approx 1{,}25Hz$$

Y ahora usando el teorema de muestreo definimos la siguiente función en MATLAB:

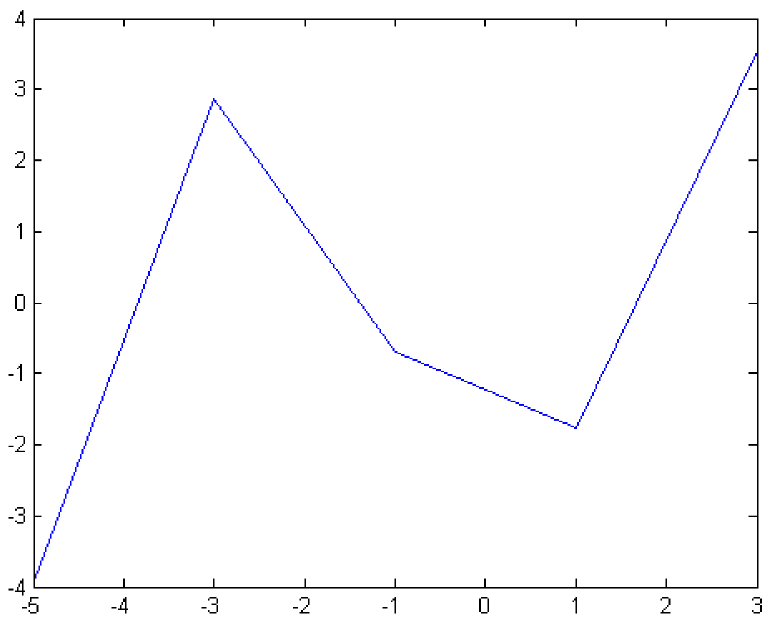
```
function [x,y] = muestreo(a,t,f,inicio,fin,fm)

if(fin ≤ inicio)
    error('El fin del intervalo debe ser mayor que el ...
        inicio');
end

if(t≤0)
    error('El periodo debe ser positivo');
end

y = inicio:1/fm:fin−1/fm;
x = a * cos(2 * pi * y/t + f);
x = x(:);

figure(1)
```

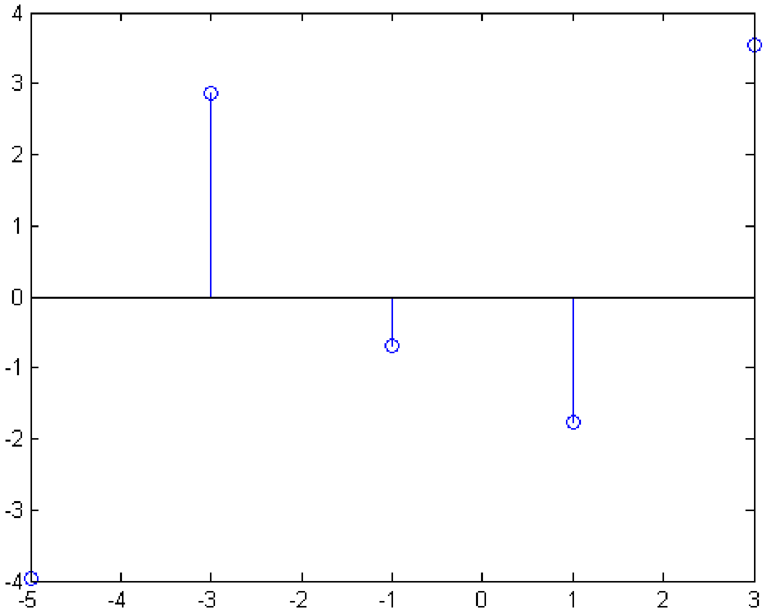
```
stem(y,x);

figure(2);
plot(y,x);
```

Usamos dicha función para distintas frecuencias de muestreo (para fs = 0,5; 1,25; 3,00):

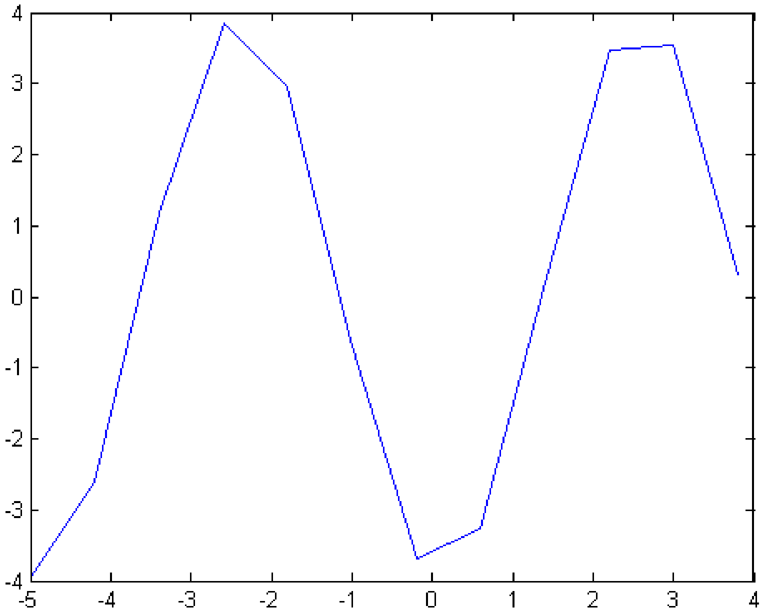
```
[x1,y1] = muestreo(4,5,3,−5,5,0.5);
pause
%Empleo el pause para poder ejecutar un muestreo ...
    detras de otro y
% asi poder mostrar todas las graficas correspondientes
[x2,y2] = muestreo(4,5,3,−5,5,1.25);
pause
[x3,y3] = muestreo(4,5,3,−5,5,3);
pause
close all
```

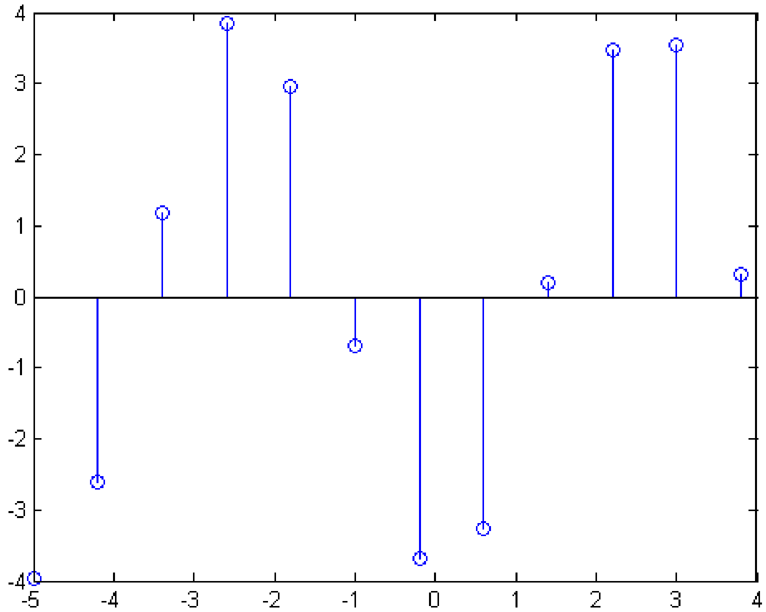
$$fs = 0,5$$



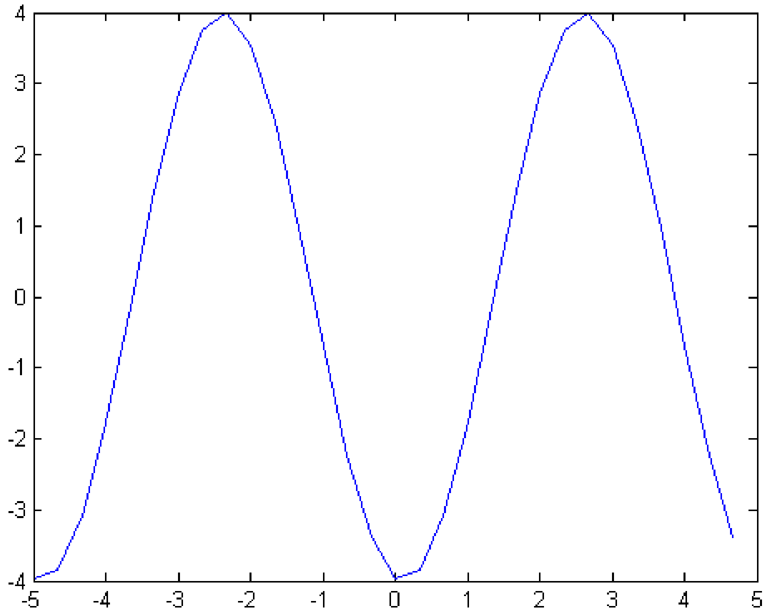


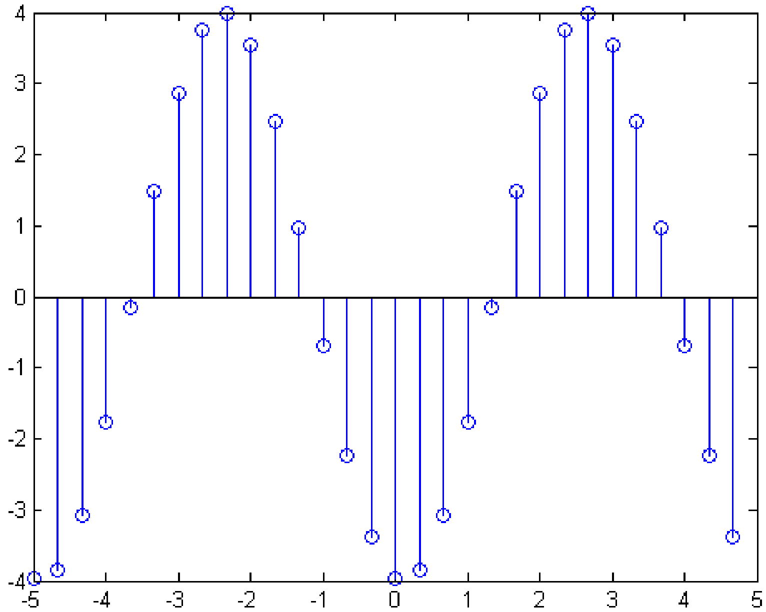
$$fs = 1,25$$





$$fs = 3,00$$



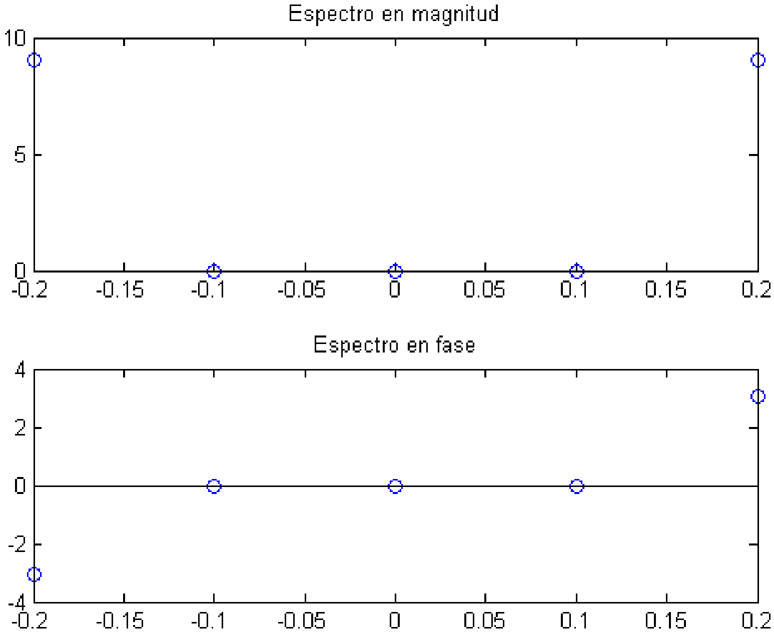


5. Obtenga y represente gráficamente el espectro de módulo de las señales muestreadas generadas en el apartado anterior. Discuta los resultados obtenidos.

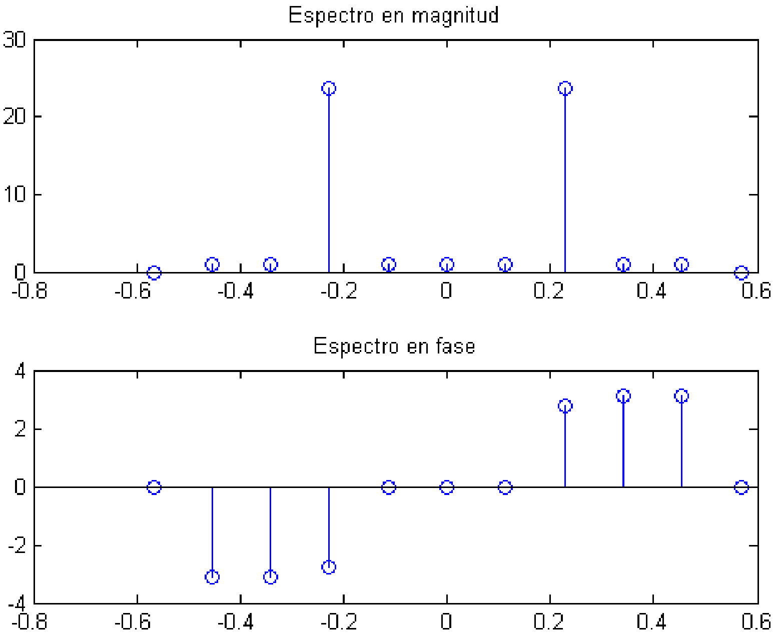
   Ahora lo que tenemos que aplicar es la función de Fourier sobre nuestro vector resultante del muestreo para ver el espectro de la señal resultante en magnitud y en fase. Seleccionamos en el mismo orden las señales generadas anteriormente, es decir, $fs = 0,5; 1,25; 3,00$:

```
[x1,y1] = muestreo(4,5,3,−5,5,0.5);
close(1);
%Con la funcion close cierro la ventana emergente de ...
    la figura
% que se muestra en la funcion muestreo y solo dejo
% la que nos da como resultado en el calculo de Fourier
Fourier(x1,0.5);
pause
[x2,y2] = muestreo(4,5,3,−5,5,1.25);
close(1);
Fourier(x2,1.25);
pause
[x3,y3] = muestreo(4,5,3,−5,5,3);
close(1);
Fourier(x3,3);
```

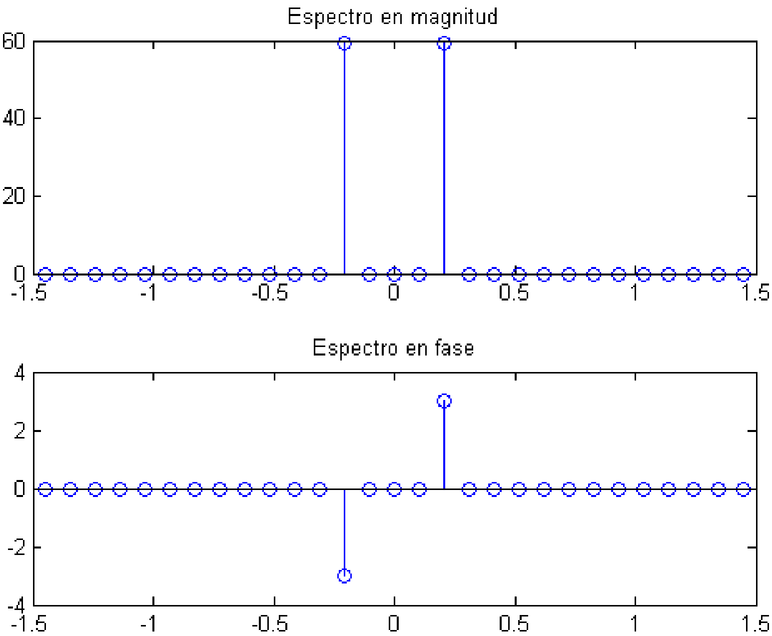
$$fs = 0,5$$


Espectro en magnitud
10
5
0
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
Espectro en fase
4
2
0
-2
-4
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2

$$fs = 1,25$$


Espectro en magnitud
30
20
10
0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
Espectro en fase
4
2
0
-2
-4
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

$fs = 3,00$



La mínima frecuencia (teórica) de muestreo f, necesaria para conseguir recuperar la señal original se conoce como frecuencia de Nyquist (f_N), y es igual al doble de la frecuencia máxima (f) que contenga la señal a muestrear: $f_N = 2f$. Por lo tanto, para realizar el muestreo de forma correcta se debe cumplir lo que se conoce como criterio de Nyquist: $f_S^3 f_N$, es decir: $f_S^3 2f$.

La señal original es un coseno de frecuencia $f = 1,25Hz$ y primero se muestreó a $f_S = 0,5Hz$. No se cumple el criterio presentado antes porque $f_s < f_N$, donde recordemos que $f_N = 2 \cdot f = 2 \cdot 1,25 = 2,5Hz$ que es inferior a $f_s = 0,5$. De ahí que no consigamos recuperar la señal original sino otra de menor frecuencia. Esta señal recuperada debe cumplir el criterio de Nyquist, por lo que su frecuencia f debe ser tal que $2f \leq f_s$. Dado que la frecuencia de muestreo era $f_s = 0,5Hz$ resulta $f \leq 0,25Hz$.

Si aumentamos la frecuencia de muestreo a $f_s = 3Hz$, ahora sí se cumple el criterio de Nyquist porqué $f_s^3 f_N$, esto es, 3^3 $2,5$, por lo que el muestreo se realiza de forma correcta y podemos recuperar la señal original.

Finalmente, en el caso en el que $f_s = f_N$, las muestras coinciden exactamente en los mínimos y máximos de la señal, de forma que no perdemos información sobre ésta.