

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultad de Matemáticas y Estadística
Grado en Matemáticas
Trabajo de Final de Grado

Modelos matemáticos de la disonancia

Manuel Gijón Agudo

Director: Xavier Gràcia Sabaté
Departamento de Matemáticas

10 Julio 2017

- 1 El sonido y su percepción
- 2 Consonancia y disonancia
 - El fenómeno de la disonancia
 - Helmholtz
 - Plomp y Levelt
- 3 Estudio de las curvas de disonancia
 - El modelo propuesto por Sethares
 - Una generalización de los resultados de Sethares
- 4 Conclusiones

El sonido y su percepción

El estudio del sonido debe hacerse desde dos puntos de vista: el *físico*, es un fenómeno medible y perfectamente cuantificable y el *perceptivo*, las sensaciones que este produce en la persona que lo escucha y que conforman una experiencia subjetiva.

En los elementos que utilizamos para estudiar el sonido también estarán presentes estos dos enfoques.

El sonido y su percepción

Elementos en el estudio del sonido

Elementos físicos

- Intensidad
- Espectro
- Frecuencia

El sonido y su percepción

Elementos en el estudio del sonido

Elementos físicos

- Intensidad
- Espectro
- Frecuencia

Elementos perceptivos

- Sonoridad
- Timbre
- Altura

Consonancia y disonancia

Disonancia

Disonancia

- ① Sonido desagradable.
- ② Falta de la conformidad o proporción que naturalmente debe tener algo.
- ③ Mús. Acorde no consonante.
- ① loc. verb. Parecer extraño y fuera de razón. [RAE]

Consonancia y disonancia

Interferencia entre ondas

La forma de interacción más simple entre dos sonidos es la *interferencia*. Se produce cuando ambas tienen la misma frecuencia. Esta puede ser tanto constructiva como destructiva dependiendo de la fase de las ondas implicadas.

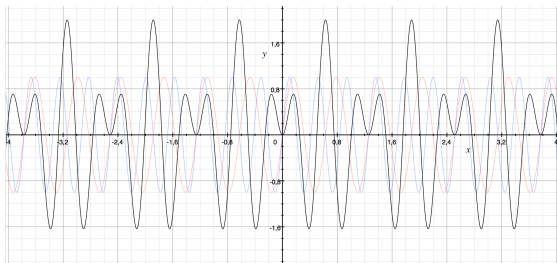


Figure: Interacción entre ondas con ondas de misma frecuencia, 10 Hz y una diferencia de fase de $\frac{\pi}{4}$

Consonancia y disonancia

Hemlhotz

La teoría de Hemlhotz es conocida como la teoría de los batidos. Esta dice que para dos ondas superponiéndose, en determinadas ocasiones puede producirse una cierta espereza que es interpretada como disonancia.

Supongamos que tenemos dos ondas de frecuencias respectivas μ_1, μ_2 , por ejemplo $\sin(2\pi\mu_1 t)$ y $\sin(2\pi\mu_2 t)$, su superposición vendría dada por:

$$\sin(2\pi\mu_1 t) + \sin(2\pi\mu_2 t) = 2 \sin\left(2\pi \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} t\right)$$

Consonancia y disonancia

Helmholtz

- Si la diferencia entre μ_1 y μ_2 es muy pequeña, se percibe como una onda de frecuencia $\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ cuya amplitud varía con una frecuencia $\Delta\mu = |\mu_1 - \mu_2|$. En este caso se oirán los batidos.
- Si la diferencia es mayor, se producirá aspereza.

Consonancia y disonancia

R.Plomp y W.J.M.Levelt: el experimento

En 1965, con la idea de estudiar la consonancia de tonos complejos, Reinier Plomp y Willem J.M. Levelt llevaron a cabo el siguiente experimento [PL]:

- Escogieron sujetos sin formación musical.
- Se emitieron tonos puros en frecuencias controladas.
- Se pedía a los sujetos que, haciendo uso de una escala determinada, valorasen el grado de disonancia (lo desagradable que les resultaban) los sonidos que estaban escuchando.

Consonancia y disonancia

R.Plomp y W.J.M.Level: el experimento

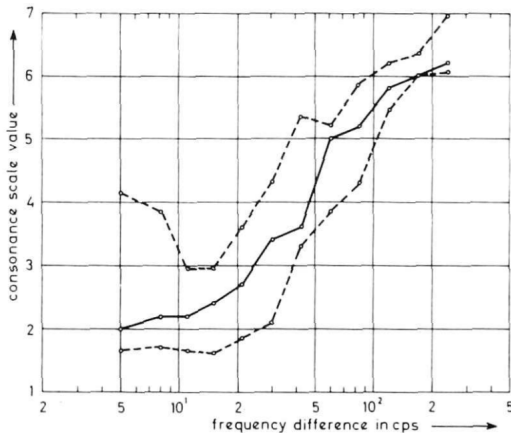


Figure: Gráfica original del experimento de Plomp y Levelt [PL].

Consonancia y disonancia

R.Plomp y W.J.M.Level: resultados

Resultados del experimento

- El máximo de disonancia se produce a una distancia que no es fija, varía con la frecuencia siendo a una distancia aproximada de $\frac{1}{4}$ del ancho de banda crítica para esa frecuencia.
- A partir de ese punto, la consonancia aumenta, siendo el intervalo consonante a una distancia de ancho de banda crítica.

Estudio de las curvas de disonancia

El modelo de Sethares

La siguiente definición es adecuada para el modelo que nos ocupa, más adelante la completaremos.

Definición 1: dominaremos *función de disonancia* a una función $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ que se adapta a nuestros datos, devolviéndonos la disonancia entre dos frecuencias.

En ocasiones, nos será más útil tener esta función como una función $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para ello nos serviremos de una función que nos convierta dos frecuencias en un solo valor. Sethares utiliza la siguiente:

$$x_{i,j} := \frac{|f_i - f_j|}{\min(f_i, f_j)}$$

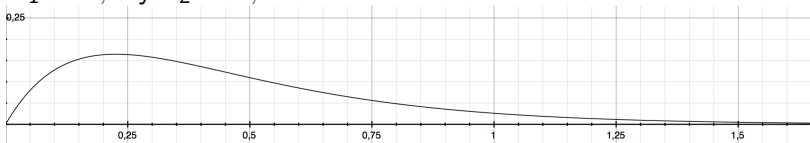
Estudio de las curvas de disonancia

El modelo de Sethares

La función de disonancia utilizada por el autor para parametrizar los resultados de Plomp-Levelt tiene, si tomamos las amplitudes iguales y con valor 1, la siguiente expresión:

$$d(x) := e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x}$$

con $b_1 = 3,5$ y $b_2 = 5,75$.



Estudio de las curvas de disonancia

Algunas definiciones

Definición 2: Llamaremos *timbre* o *espectro* \mathfrak{F} a una colección de N frecuencias $f_1 < f_2 < \dots < f_N$ con sus respectivas amplitudes. En nuestro caso todas serán iguales, simplificaremos la notación.

$$\mathfrak{F} := \{(f_i, l_i) : i = 1, 2, \dots, N\} = \{f_i : i = 1, 2, \dots, N\}$$

Definición 3: Denominaremos *espectro armónico* a aquel espectro cuyas parciales son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

$$\mathfrak{F}_A := \{(f_i, l_i) : f_i = i f_{\text{fundamental}}, i = 1, 2, \dots, N\}$$

Estudio de las curvas de disonancia

Algunas definiciones

Definición 4: Definimos la *disonancia intrínseca del espectro* \mathfrak{F} como:

$$D_{\mathfrak{F}} := \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N d(f_i, f_j)$$

Definición 5: Denominaremos *curva de disonancia generada por el espectro* \mathfrak{F} a la siguiente función:

$$D_{\mathfrak{F}}(\alpha) := D_{\mathfrak{F}} + D_{\alpha\mathfrak{F}} + \sum_i^N \sum_j^N d(f_i, \alpha f_j)$$

siendo $\alpha\mathfrak{F} = \{\alpha f_i : \forall f_i \in \mathfrak{F}\}$.

Estudio de las curvas de disonancia

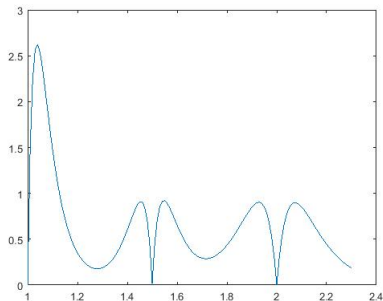
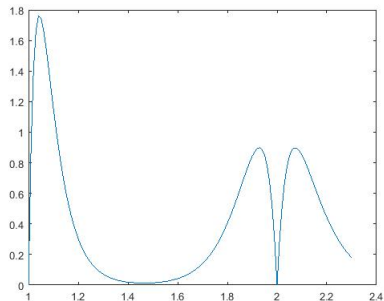
Hipótesis sobre el modelo

Hipótesis

- La suma total de la disonancia de un tono complejo es la suma de las disonancias parciales.
- Ambos espectros tendrán espectros en los que las parciales se distribuyen de la misma manera, es decir, un espectro será un múltiplo del otro.
- En estos espectros, para todas las parciales la amplitud será igual y la tomaremos con valor 1.

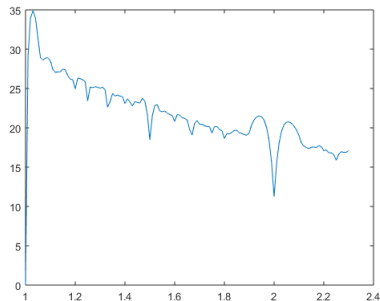
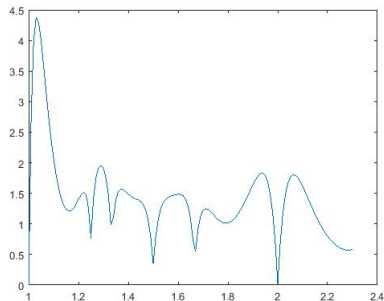
Estudio de las curvas de disonancia

Ejemplos: espectros armónicos con 2 y 3 parciales



Estudio de las curvas de disonancia

Ejemplos: espectros armónicos con 5 y 20 parciales



Estudio de las curvas de disonancia

Dos resultados sobre el modelo de Sethares

Los siguientes son resultados sobre el modelo utilizado por Sethares:

$$d(x) := e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x}$$

Resultado 1

$d^{(n)}(nx^*) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $x^* \approx 0,22064$.

Idea de la demostración: Observamos que $d \in \mathcal{C}^\infty$. Hallamos la expresión general de la derivada. Igualamos a cero y despejamos.

Estudio de las curvas de disonancia

Dos resultados sobre el modelo de Sethares

Resultado 2

- 1 $d^{(n)}$ si n es par alcanza su máximo en $(n+1)x^*$ y además $d^{(n)}((n+1)x^*) > 0$.
- 2 $d^{(n)}$ si n es impar alcanza su mínimo en $(n+1)x^*$ y además $d^{(n)}((n+1)x^*) < 0$.

Idea de la demostración: Teniendo presente el resultado anterior lo único que resta demostrar es que la alternancia entre máximos y mínimos se sucede de la forma indicada. Nos fijamos en que $d'(x) > 0$ en $(0, x^*)$ y $d'(x) < 0$ a partir de ese punto. Observemos que se irá produciendo alternancia entre las regiones positivas y negativas.

Estudio de las curvas de disonancia

Versión general de las curvas de disonancia

La siguiente es una definición más general de la función de disonancia.

Una *función de disonancia* $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple:

- 1 $d \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$.
- 2 $d(x) \geq qx$ con $q \geq 0$ en un entorno de 0.
- 3 $d'(x) \geq -M$, $\forall x \in (0, +\infty)$ con $M > 0$.
- 4 d creciente en $[0, x^*)$, es decir, $d'(x) > 0$ para $x \in [0, x^*)$.
- 5 d decreciente en $(x^*, +\infty)$, es decir, $d'(x) < 0$ para $x \in (x^*, +\infty)$.
- 6 La función tiene un máximo absoluto en x^* .
- 7 $\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = 0$ y también $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0$

Notemos que en el modelo de Sethares $q \approx 2,25$ y $M \approx 2,33 \cdot 10^{-3}$.

Estudio de las curvas de disonancia

Resultado sobre el unísono como mínimo

A diferencia de Sethares, la función que utilizaremos para obtener un valor que introducir en la función de disonancia a partir de dos parciales será:

$$x_{i,j} := \frac{|f_i - f_j|}{C \min(f_i, f_j)}$$

Que, ajustando el valor de la constante C a las frecuencias implicadas, nos dará la distancia medida en anchos de banda críticos entre las parciales. Una buena aproximación es tomar $C = 0,17$. En nuestro caso, dejaremos fijas las parciales y para cada pareja nuestra variable será la razón α , nos quedará por tanto:

$$x_{i,j}(\alpha) := \frac{|f_i - \alpha f_j|}{C \min(f_i, \alpha f_j)}$$

Estudio de las curvas de disonancia

Resultado sobre el unísono como mínimo

Teorema: el unísono como mínimo de la disonancia

Sea d una función de disonancia. Sea $\mathfrak{F} = \{f_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ un timbre con N parciales, todas ellas de amplitud 1. Entonces $\alpha = 1$ es un mínimo de la curva de disonancia.

Idea de la demostración: No podemos derivar, luego para comprobar que tenemos un mínimo deberemos comprobar que, en torno al punto que nos interesa el cambio en la función es positivo sea cual sea el espectro. Las condiciones (2) y (3) de la definición de función de disonancia nos permitirán controlar estas variaciones, teniendo en cuenta que siempre las disonancias intrínsecas serán constantes.





Conclusiones

- Hemos estudiado un modelo más general que para la curva de disonancia que el propuesto por Sethares basándose en los trabajos de Plomp y Levelt.
- Para este, hemos probado un teorema que garantiza que para un espectro sin límite en el número de parciales, el unísono será un mínimo de la curva de disonancia.
- Además, hemos establecido dos resultados que nos caracterizan más aún el modelo de Sethares.

Para el futuro, quedan como posibles trabajos:

- Extender los resultados a espectros con amplitudes variables.
- Generalizar el modelo a dimensiones mayores, las denominadas superficies de disonancia.

Bibliografía

-  D. J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2008.
-  R. Plomp y W. M. Levelt “Total Consonance and Critical Bandwidth” *Institute for Perception TVO-TNO*, Soeslerberg, Netherlands (1965)
-  W. Sethares, *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, 2nd ed, Springer, 2005.
-  W. A. Sethares “Adaptative tunings for musical scales”, *J. Acoustic Society of America* **96** (July, 1994)