

# Inferencia Estadística

Manuel Gijón Agudo

Octubre 2018 -

# Índice

<b>1. Tema 0: Introducción a la inferencia estadística</b>	<b>3</b>
1.1. bla . . . . .	3
1.2. bla . . . . .	3
1.3. Extensionof sources . . . . .	4
<b>2. Tema 1: Muestreo</b>	<b>5</b>
2.1. Definiciones . . . . .	5
2.2. Métodos de muestreo . . . . .	5
2.2.1. Muestreo aleatorio simple . . . . .	5
2.3. Distribuciones de muestreo . . . . .	5
<b>3. Tema 2: Estimación de parámetros</b>	<b>6</b>
3.1. Definiciones . . . . .	6
3.2. Propiedades de los estimadores . . . . .	7
3.3. Métodos para la obtención de estimadores . . . . .	7
3.4. Métodos de remuestreo . . . . .	7
3.5. Básicos de probabilidad . . . . .	7
3.6. Distribuciones de probabilidad básicas . . . . .	8
3.6.1. Distribuciones discretas . . . . .	8
3.6.2. Distribuciones continuas . . . . .	8
3.7. Ejercicios detallados . . . . .	8
3.8. De probabilidad e introductorios . . . . .	8
3.9. Tema 1 . . . . .	8
3.9.1. Métodos de muestreo . . . . .	8
3.9.2. Distribucinoes de muestreo . . . . .	8
3.10. Tema 2 . . . . .	8
3.10.1. Definiciones . . . . .	8
3.10.2. Propiedades de los estimadores . . . . .	8
3.10.3. Métodos para la obtención de estimadores . . . . .	8
3.10.4. Métodos de remuestreo . . . . .	8

<i>Inferencia Estadística</i>	2
3.11. Tema 3 . . . . .	8

# 1. Tema 0: Introducción a la inferencia estadística

## 1.1. bla

**Definiciones 1 y 2:** a **source** is a finite set  $\mathcal{S}$  together with a set of random variables  $(X_1, X_2, \dots)$  whose range is  $\mathcal{S}$ .

If  $P(X_n = S_i)$  only depends on  $i$  and not on  $n$  then we say the source is **stationary** and if the  $X_n$  are independent then it's **memoryless**.

Insert example here

**Definition 2:** Let  $\mathcal{T}$  be a finite set called **alphabet**. A map  $\mathfrak{C} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{U}_{n \geq 1} T^n$  is called a **code**.

If  $|T| = r$  then  $\mathfrak{C}$  is a  **$r$ -ary code**.

A code extends from  $\mathbb{S}$  to  $T \cup T^2 \cup \dots$  to  $\mathbb{S} \cup \mathbb{S}^2 \cup \dots$  to  $T \cup T^2 \cup \dots$  in obvious way.

insert example here

**Definition 3:** The **average word-length** of a code  $\mathfrak{C}$  is  $L(\mathfrak{C}) := \sum_{i=1}^n p_i l_i$  where  $l_i$  is the length of the image of the symbol of  $\mathbb{S}$ , which is emitted with probability  $p_i$ .

For now, we write  $\mathfrak{C}$  to be the image of  $\mathfrak{C}$ .

## 1.2. bla

**Definition 4:** If for any sequences  $u_1 \dots u_n = v_1 \dots v_m$  in  $\mathfrak{C}$  implies  $m = n$  and  $u_i = v_i$  for  $i = 1, \dots, n$  then we say that  $\mathfrak{C}$  is **uniquely decodeable**.

insert example here

insert example here

insert example here

Let  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$ :

- $\mathfrak{C}_n := \{\omega \in T \cup T^2 \cup \dots \mid u\omega = v \text{ for some } u \in \mathfrak{C}_{n-1}, v \in \mathfrak{C} \text{ or } u\omega = v \text{ for some } u \in \mathfrak{C}, v \in \mathfrak{C}_{n-1}\}$
- $\mathfrak{C}_\infty := \bigcup_{k \geq 1} \mathfrak{C}_k$

Since everythig is finite either  $\mathfrak{C}_m = \emptyset$  for some  $m$  and then  $\mathfrak{C}_n = \emptyset$  for  $n \geq m$  or it will be periodic and start repeating.

**Theorem 1:**  $\mathfrak{C}$  is uniquely decodeable  $\iff \mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}_\infty = \emptyset$ .

*proof:* Insert proof here

insert example here

insert example here

insert example here

**Definition 5:** A code is a **prefix-code** if no codeword is prefix of another (ie.  $\mathfrak{C}_1 = \emptyset$ ).

A prefix code is uniquely decodeable.

**Theorem 2: (Kraft's inequality)**  $\exists$   $r$ -ary prefix code with word lengths  $l_1, l_2, \dots, l_q \iff$

$$\sum_{i=1}^q r^{-l_i} \leq 1$$

*proof:* Insert proof here

insert example here

**Theorem 3: (McMillan's inequality)**  $\exists$   $r$ -ary uniquely decodeable code with word lengths  $l_1, l_2, \dots, l_q \iff$

$$\sum_{i=1}^q r^{-l_i} \leq 1$$

*proof:* Insert proof here

### 1.3. Extension of sources

## **2. Tema 1: Muestreo**

### **2.1. Definiciones**

### **2.2. Métodos de muestreo**

#### **2.2.1. Muestreo aleatorio simple**

### **2.3. Distribuciones de muestreo**

### 3. Tema 2: Estimación de parámetros

#### 3.1. Definiciones

##### Definiciones:

- Sean  $X_1, \dots, X_n$  una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que  $X \sim f(x; \theta)$   $\theta \in \Theta$ .
- Definimos la **estimación puntual** el parámetro  $\theta$  como el proceso de seleccionar un estadístico<sup>1</sup>  $T$  que mejor estima el valor del parámetro para esa población.
- Llamaremos a este estadístico  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  que utilizamos para estimar  $\theta$  un **estimador**.

##### Observaciones:

- Los estimadores son variables aleatorias.
- Usaremos sus propiedades estadísticas para estudiar su calidad y comparar entre ellos varios estimadores.
- Siempre tendremos un error en la estimación, nuestro objetivo será minimizarlo.

**Definición:** Decimos que un estimador  $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$  para el parámetro  $\theta$  es **consistente** cuando  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$$

**Teorema:** si  $T_n$  es una secuencia de estimadores tales que  $E(T_n) \longleftrightarrow \theta$  y  $V(T_n) \longleftrightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $T_n$  es consistente para el parámetro  $\theta$ .

##### Definiciones:

- Definimos la **desviación** de un estimador  $T$  como:

$$bias(T) = E(T) - \theta$$

- Sea  $T$  un estimador para  $\theta$ . Decimos que el estimador es **no desviado** si  $\forall \theta \in \Theta$ :

$$E(T) = \theta$$

En caso contrario decimos que es **desviado**. Es obvio que en este caso  $bias(T) \neq 0$ .a

Para introducir el siguiente concepto usaremos un ejemplo concreto. Sean  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una variable tal que  $E(X) = \mu$  y  $V(X) = \sigma^2$ . Probar que:

$$E(\overline{X_n}) = \mu$$

---

<sup>1</sup>**Estadístico:** es una función medible que tiene como espacio de salida  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra estadística de valores.

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

ENCONTRAR ESTA MIERDA Y CONTINUAR A PARTIR DE AQUÍ, MUHAHH-HAHHHAHHHAHHHA

### 3.2. Propiedades de los estimadores

### 3.3. Métodos para la obtención de estimadores

### 3.4. Métodos de remuestreo

---

## Apéndice

### 3.5. Básicos de probabilidad

Caso discreto Probability density function:

Caso continuo



### **3.6. Distribuciones de probabilidad básicas**

#### **3.6.1. Distribuciones discretas**

#### **3.6.2. Distribuciones continuas**

### **3.7. Ejercicios detallados**

### **3.8. De probabilidad e introductorios**

### **3.9. Tema 1**

#### **3.9.1. Métodos de muestreo**

#### **3.9.2. Distribuciones de muestreo**

### **3.10. Tema 2**

#### **3.10.1. Definiciones**

#### **3.10.2. Propiedades de los estimadores**

#### **3.10.3. Métodos para la obtención de estimadores**

---

Encontrar un estadístico suficiente por el método de la máxima verosimilitud para  $\theta$  para la distribución con la siguiente función de densidad bajo las condiciones  $\theta > 0$  y  $0 < x < 1$ :

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}$$

---

#### **3.10.4. Métodos de remuestreo**

### **3.11. Tema 3**