Distribuciones de Variable Aleatoria Discreta

José Miguel González Arias, *ITCR, 201271801,* Jose Andrés Sandoval Díaz, *ITCR, 2018319279*, Alonso Azofeifa Jiménez, *ITCR,2019199079*

***Index Terms*—Función de masa de probabilidad, Distribución Geométrica, Distribución Binomial Negativa, Variable Aleatoria.**

I. Abstract

EN este documento se abarcará el análisis de la probabilidad mediante 3 distribuciones de probabilidad, El primer caso consta de una moneda ideal al cual tiene una probabilidad para que aparezca una de sus caras sea equitativa.

Mientras en el segundo caso tenemos una moneda con truco (Una cara desgastada, para reducir el peso de esta) en este caso la probabilidad de las caras no es equitativa.

Tendremos que analizar primeramente la cantidad de intentos que debemos de tirar la monera al aire para que nos salga el primer escudo por medio de la distribución geométrica y la segunda parte cuantos ensayos necesitamos para obtener 3 veces cara usando la distribución Binomial Negativa; esto lo aplicamos en ambos casos a analizar. Finalmente analizaremos los resultados obtenidos.

II. Objetivos

Maximizar la comprensión sobre el tema de Variable Aleatoria Discreta mediante la practica de ods de las distintas distrubuciones de probabilidad vistas en el curso.

III. Parte 1 - Distribución Geométrica

Para la primera parte, la meta es conocer la probabilidad para el número de veces que se debe tirar al aire la moneda antes de obtener el primer escudo.

Se selecciona la distribución geométrica, porque permite conocer la cantidad de ensayos necesarios para obtener un éxito en una serie de intentos. En este caso el éxito será encontrar el primer escudo en un lanzamiento.

III-A. Definición de variables

- k = # ensayos disponibles para buscar obtener 1 éxitos.
- f(k) = Función de masa de probabilidad (fmp).
- P = probabilidad en que salga un éxito (un escudo).

De acuerdo a la documentación del API de scipy [1], la función de masa de probailidad para la distribución geométrica, se obseva en la ecuación 1.

$$f(k) = (1-P)^{k-1} \times P \tag{1}$$

III-B. Función de masa de probabilidad para Caso #1 y buscando un solo escudo

Consecuentemente utilizando la API de scipy [1] en el programa de Python, se puede obtener el porcentaje de probabilidad del número de veces que se deberá lanzar la moneda, con el máximo de intentos que es 20. Este resultado se observa en la ecuación 2.

$$f(k) = 0{,}095 \times 10^{-3}\,\% \tag{2}$$

La figura 1 corresponde a la gráfica que muestra el porcentaje que representa si es altamente probable que se continue con los lanzamientos para obtener una cara escudo, o bien si ya la cantidad de lanzamientos ha sido suficiente, como para suponer que ya no son necesarios más intentos.

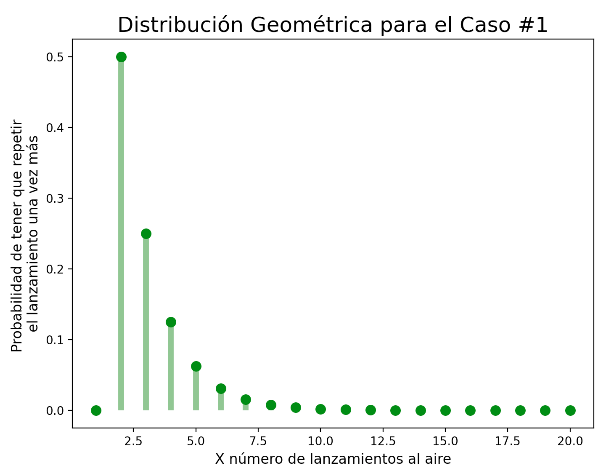

Figura 1. Gráfica de Porcentaje de número de veces que será necesario repetir el lanzamiento para lograr la meta, con la moneda sin modificar

III-C. Función de masa de probabilidad para Caso #2 y buscando un solo escudo

Y adicionalmente utilizando igual el código de Python, como se observa en la ecuación 3, también fue posible obtener el porcentaje de probabilidad del número de veces que se debería lanzar la moneda, que en este caso la moneda posee una variación donde el escudo aparece solamente en un $30\,\%$ de las veces.

$$f(k) = 0{,}034\,\% \tag{3}$$

En la figura 2, se observa la distribución de los porcentajes que serían necesarios para lograr la meta, sin embargo estos porcentajes se mantienen durante más intentos debido a la configuración especial que tiene la moneda en el caso #2.

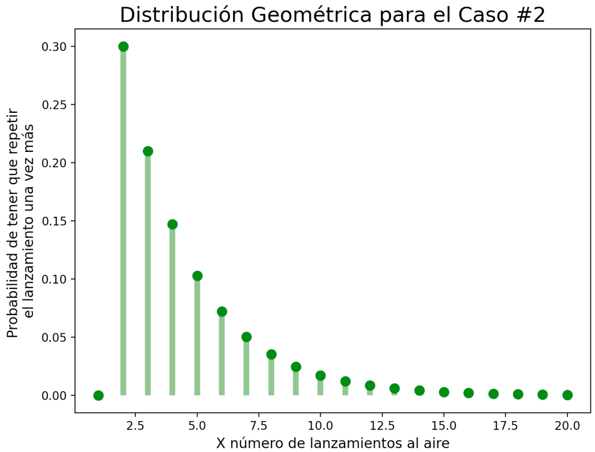

Figura 2. Gráfica de Porcentaje de número de veces que será necesario repetir el lanzamiento para lograr la meta, con la moneda modificada

IV. Parte 2 - Distribución Binomial Negativa

Para la segunda parte, la meta es conocer la probabilidad para el número de veces que se debe tirar al aire la moneda antes de obtener 3 escudos (no necesariamente seguidos).

Se selecciona la distribución binomial negativa, pues ayuda a conocer la probabilidad del número de veces que al realizar el experimento, se obtengan los casos no exitosos. Y así determinar cerca de cuántos intentos se deben realizar de manera que la probabilidad de lograr casos no exitosos sea la más baja.

IV-A. Definición de variables

- k = # ensayos disponibles para buscar obtener 3 éxitos.
- n = 3, que representa la cantidad de éxitos que se desean.
- f(k) = Función de masa de probabilidad (fmp).
- P = probabilidad en que salga un éxito (un escudo).

IV-B. Función de masa de probabilidad para Caso #1 y buscando tres veces escudo

De acuerdo con la documentación del API de scipy [2] la función de masa de probabilidad para la distribución binomial negativa se puede observar en la ecuación 4.

Ahora utilizando el programa de Python, como se observa en la ecuación 5 se obtiene que la función de masa de probabilidad de que suceda el encontrar tres escudos con una moneda que tenga un $50\,\%$ de probabilidad de éxito por cada lanzamiento es de aproximadamente $0{,}02\,\%$

$$f(k) = \binom{k+n-1}{n-1} P^n (1-P)^k \tag{4}$$

$$f(k) = 0{,}0183\,\% \tag{5}$$

Ahora bien utilizando igualmente el código de Python, se obtuvo como se observa en la figura 3, la gráfica de la función de masa de probabilidad para el caso de una distribución binomial negativa.

Para crear la figura 3, se utilizó un array de 20 intentos para tomarlo como base para el eje X y adicionalmente se obtuvo el valor de la probabilidad de fallos a la hora de lograr la meta.

En este caso la meta es lograr que de todos los intentos que se van realizando, la moneda caiga tres veces en escudo.

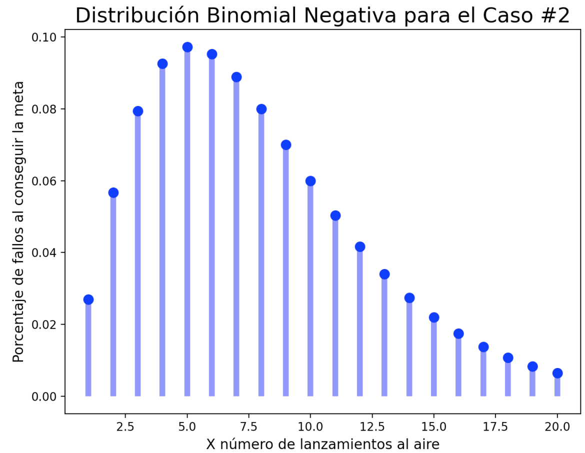

Figura 3. Gráfica de Porcentaje de fallos antes de lograr la meta, con respecto a la cantidad máxima de intentos disponibles, para el Caso #1

IV-C. Función de masa de probabilidad para Caso #2 y buscando tres veces escudo

Al igual que se realizó en el Caso #1, se utiliza la ecuación número 4, pero ahora con el ajuste en la variable P, donde ahora el valor será $P = 0{,}3$, debido a que en el caso #2 solamente existe un $30\,\%$ de probabilidad de que la moneda caiga del lado del escudo.

Es por esto que utilizando el programa en Python, como se observa en la ecuación 6, se obtiene que la función de masa d eprobabilidad de que suceda el encontrar tres escudos con una moneda modificada, la cual solamente tiene un $30\,\%$ de probabilida de éxito que salga la cara de escudo por cada lanzamiento es de aproximadamente

$$f(k) = 0{,}00184 \times 10^{-3}\,\% \tag{6}$$

Para el caso #2, igualmente utilizando el código de python y el array ordenado de 20 lanzamientos independientes, se graficó como se observa en la figura 4, donde en cada lanzamiento, la moneda solamente tiene un $30\,\%$ de probabilidad de mostrar escudo en su cara.

V. Análisis de los datos

V-A. Análisis de Parte #1

Como se puede observar en la ecuación 2 y 3, existe una diferencia grande entre la probabilidad tener que repetir el experimento para obtener un escudo en la cara de la moneda. En la ecuación 3, el valor de $0{,}034\,\%$ es mucho mayor al valor de la ecuación 2, debido a que la moneda ha sido modificada en favor de la cara de corona, por lo que la posibilidad de que al hacer cada lanzamiento, la cara de escudo no se vea reflejada en el resultado.

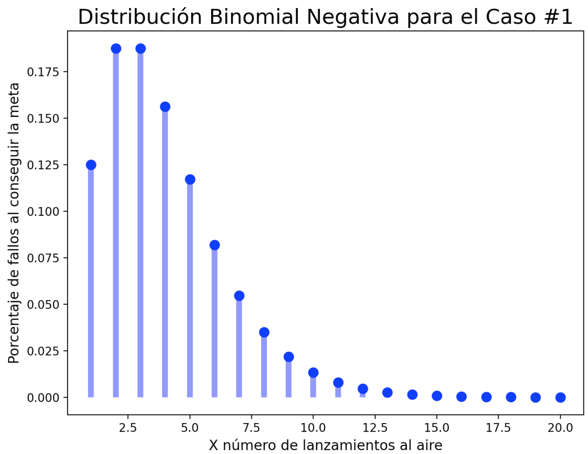

Figura 4. Gráfica de Porcentaje de fallos antes de lograr la meta, con respecto a la cantidad máxima de intentos disponibles, para el Caso #2

Este fenómeno también se puede observar en la figura 1, donde la gráfica que indica cuán probable es que se necesite repetir el lanzamiento, para lograr obtener la meta deseada. Se observa como al iniciar los lanzamientos, en el primer lanzamiento casi se puede obtener un 50 % de acierto, por lo que al siguiente lanzamiento, la probabilidad de que sean necesarios más lanzamientos baja considerablemente.

Así mismo en la figura 2, se observa como en el primer lanzamiento, la probabilidad de llegar a la meta es del 30 %, como se esperaba por las características físicas de la moneda. Se observa como cuesta que la probabilidad de que sea necesario repetir el experimento va decreciendo a una velocidad menor que la figura 2

V-B. *Análisis de Parte #2*

Como se puede observar en la ecuación 6, que corresponde al Caso #2, la probabilidad de lograr la meta final del experimento se vuelve mucho más baja, esto debido que a diferencia de la ecuación 5, en el caso #2 solamente se tiene un 30 % de posibilidad de acierto para encontrar un escudo al lanzar la moneda.

Adicionalmente como se observa en la figura 3, que corresponde al caso #1, es normal ver probabilidades de fallo cercano a los primeros intentos, debido a que si como mínimo se necesitan 3 escudos, con una cantidad de lanzamientos menores a 3, es imposible poder lograr la meta. Y como se observa la probabilidad de fallar en el intento de lograr la meta se vuelve mucho más baja conforme se realizan más lanzamientos.

En contra posición de la figura 4, donde se puede observar que la probabilidad de la cantidad de fallos no decrece tan rápido, por el factor físico de la moneda que influye en la probabilidad de obtener escudo en un lanzamiento. Es interesante como no solamente no decrece tan rápido, sino que el momento en que menos cantidad de fallos presentes, se da cuando hay mucho mayor cantidad de lanzamientos realizados, por ejemplo la línea de referencia horizontal entre el 0.04 y 0.05, en el caso de la figura 3, se alcanza cercano a los 8 intentos, mientras que el punto del 0.04 en la figura 4, se alcanza hasta asi los 12 intentos.

V-C. *Análisis de diferencia entre Parte #1 y Parte #2*

Como se observa en la figura 1 y en la figura 3, que corresponden al estudio de ambos casos #1, pero con diferentes metas, es mucho más probable obtener en la meta considerando las condiciones de la Parte #1, debido a que es solamente es necesario conseguir 1 escudo. Se nota como la figura 1 muestra que en el primer intento hay un 50 % de probabilidad de necesitar repetir el intento, en otras palabras, un 50 % de probabilidad de obtener el escudo en el primer intento.

Por su contrario como se observa en la figura 3, a la hora de llegar a los tres lanzamientos, todavía la probabilidad es sumamente alta de tener fallos y no lograr los tres escudos. Es por esto que se puede afirmar que es más probable lograr la meta de la Parte #1 al buscar obtener 1 escudo en 1 lanzamiento.

V-D. *Análisis en caso de un juego de azar con moneda de truco*

Como se puede observar en la figura 1, en el primer lanzamiento se tiene un 50 % de probabilidad de obtener escudo en la cara de la moneda. Es por esto que comparando con la figura 4 aproximadamente en el lanzamiento número 11 se obtiene un porcentaje de 50 % de probabilidad de que se haya fallado en obtener los tres escudos en los tiros anteriores, por lo tanto al llegar a este lanzamiento se obtiene el mismo porcentaje de acierto que con una moneda como la del caso #1.

VI. CONCLUSIÓN

- Respecto a la parte 2, como se observa en las figuras 3 y 4, el porcentaje de acierto de un éxito por cada intento influye directamente en la esperanza de lograr la meta deseada de tres escudos.
- Es más probable lograr la meta de conseguir 1 escudo en 1 intento, que 3 escudos en los primeros 3 intentos.
- Luego del lanzamiento 11, se puede decir que se tiene una probabilidad similar, de obtener la meta de la Parte #2 del problema, que la obtener la meta de la Parte #1.

REFERENCIAS

[1] The SciPy Community. *scipy.stats.nbinom*. Available at https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.geom.html.

[2] The SciPy Community. *scipy.stats.nbinom*. Available at https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.nbinom.html.