Numeros irracionales (I)

Teorema 1.1: Si $n \in \mathbb{N}$ y no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional en $\mathbb{R}$.

Demostración: Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es un racional, esto es que existen $a, b \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{n} = a/b$. Se puede obtener elevando al cuadrado y multiplicando por b en ambos lados que $nb^2 = a^2$. $\square$

Cotas superiores y cotas inferiores (II)

Definición 2.1: Sea $S \subset \mathbb{R}$. Decimos que un número $b \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si para todo $x \in S$ se cumple que $x \leq b$. En otras palabras, b acota por arriba a todos los elementos de S.

Hay dos clases de conjuntos, los que la cota superior se encuentra en el mismo conjunto y los que no.

Ejemplo 2.1: Sea $S = [0, 3] \subset \mathbb{R}$. La cota superior mínima de S es 3, y además $3 \in S$. Por lo tanto, S tiene una cota superior que pertenece al mismo conjunto; de hecho, es su máximo.

Ejemplo 2.2: Sea $T = (0, 3) \subset \mathbb{R}$. La cota superior mínima de T es también 3, pero en este caso $3 \notin T$, pues el intervalo es abierto. Así, T tiene una cota superior, pero esta no pertenece al conjunto.

Supongamos que $\alpha \in S$ es una cota superior, entonces diremos que α es el **elemento máximo** de S y lo denotamos por:

$$\max(S) = \alpha$$

Definición 2.2: Sea $S \subset \mathbb{R}$. Decimos que un número $a \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si para todo $x \in S$ se cumple que $x \geq a$. En otras palabras, a acota por abajo a todos los elementos de S.

Hay dos clases de conjuntos: aquellos cuya cota inferior pertenece al conjunto y aquellos en los que no.

Ejemplo 2.3: Sea $A = [0, 3] \subset \mathbb{R}$. La cota inferior mínima de A es 0, y además $0 \in A$. Por lo tanto, A tiene una cota inferior que pertenece al mismo conjunto; de hecho, es su **mínimo**.

Ejemplo 2.4: Sea $B = (0, 3) \subset \mathbb{R}$. La cota inferior mínima de B es también 0, pero en este caso $0 \notin B$, pues el intervalo es abierto. Así, B tiene una cota inferior, pero esta no pertenece al conjunto.

Supongamos que $\alpha \in S$ es una cota inferior de S; entonces diremos que α es el **elemento mínimo** de S, y lo denotamos por:

$$\min(S) = \alpha$$

Ejemplo 2.5: El conjunto $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ no esta acotado superiormente. Además no tiene un elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se cumpla que $x \leq \alpha$. El problema viene practicamente del término infinito, ya que no existe elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que sea superior a todo elemento de $\mathbb{R}^+$. Pero si se encuentra acotado inferiormente, una cota es 0.