Teoría Bayesiana
Nota 0004

M.H. Alberto

07/02/2026

Resumen. Estas notas abordan la construcción de la teoría Bayesiana.

Índice

1. Introducción

Al estudiar probabilidades, es importante reconocer que algunos eventos dentro de un mismo espacio muestral Ω pueden ocurrir sin influir en la probabilidad del otro. Es decir, existen situaciones en las que la ocurrencia de un evento no modifica la manera de cuantificar la probabilidad del segundo. Estos casos se conocen como eventos independientes, y en la siguiente definición los describiremos formalmente, junto con varios ejemplos para ilustrar cómo funcionan.

Definición 1.1. Sean A y B dos eventos de Ω, entonces decimos que son **independientes** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Esto significa que que ocurra A no afecta la probabilidad de que ocurra B, y viceversa.

Ejemplo 1.2. Consideremos el experimento de lanzar dos monedas justas. El espacio muestral está dado por todos los posibles resultados de las dos monedas:

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Definimos el evento $A = \{HH, HT\}$ como el conjunto donde la primera moneda sale cara por otro lado definimos a $B = \{HH, TH\}$ como el conjunto donde la segunda moneda sale cara. La probabilidad de que ambos eventos ocurran simultáneamente, es decir, que la primera moneda salga cara y la segunda también, es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Esto confirma que los eventos A y B son independientes, ya que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

Ejemplo 1.3. Supongamos que lanzamos un dado justo de seis caras. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Consideremos al conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ como el conjunto donde el dado sale un número par, y por el otro lado consideremos al conjunto $B = \{5, 6\}$ al conjunto donde el dado sale un número mayor que 4.

Las probabilidades individuales son:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

El evento que representa que ambos ocurran simultáneamente es:

$$A \cap B = \{6\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Y verificamos la independencia:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Definición 1.4. Sea Ω el espacio muestral, definamos $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$, entonces decimos que son independientes si cumplen que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_\alpha).$$

En todo caso tenemos que si no cumplen la igualdad anterior, entonces son **dependientes**.

Sea Ω un espacio muestral con un número finito de eventos $(A_i)_{i \in I}$ con $I = \{1, 2, ..., n\}$, un conjunto de eventos i.i.d.[1], es decir:

$$\mathbb{P}(A_i) = p, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

Definimos el evento compuesto

$$F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Por independencia, se tiene:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = p^n.$$

Ahora, si queremos cálcular la probabilidad de que almenos un evento suceda procederemos a definir:

[1]i..i.d. Significa independientes e idénticamente distribuidos

$$B^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \quad \text{(ninguno ocurre)} .$$

Por independencia:

$$\mathbb{P}(B^c) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c) = \prod_{i=1}^{n} (1-p) = (1-p)^n.$$

Finalmente, por la regla del complemento:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - (1-p)^n.$$

Ejemplo 1.5. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda justa 10 veces consecutivas. Sea $(A_i)_{i=1}^{10}$ el conjunto de eventos donde

$$A_i = \text{sale cruz en el i-ésimo lanzamiento} .$$

Definimos el evento

$$B = \bigcup_{i=1}^{10} A_i^c \quad \text{(al menos una cara aparece)} .$$

Para calcular $\mathbb{P}(B)$, es más sencillo trabajar con el evento complementario

$$B^c = \bigcap_{i=1}^{10} A_i \quad \text{(ninguna cara, todas cruz)} .$$

Por la regla del complemento:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c).$$

Como los lanzamientos son independientes, la probabilidad de que todas las tiradas sean cruz se obtiene multiplicando las probabilidades individuales:

$$\mathbb{P}(B^c) = \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.999.$$