

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۳-۱. معادله مرتبه دوم خطی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

معادله همگن $\Rightarrow f(x) = 0$

معادله ناهمگن $\Rightarrow f(x) \neq 0$

برای یک معادله همگن داریم:

۱- هرگاه y_1 یک جواب معادله باشد، در این صورت $C_1 y_1$ نیز یک جواب برای این معادله است.

۲- هرگاه y_1 و y_2 جواب‌های معادله باشند، در این صورت ترکیب خطی این جواب‌ها یعنی $C_1 y_1 + C_2 y_2$ نیز یک جواب برای این معادله است.

شرط اینکه $c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی باشد اینست که y_1 و y_2 مستقل (مستقلاً) باشند.

❖ نکته: دو تابع y_1 و y_2 که $y_2 \neq 0$ ، مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\frac{y_1}{y_2}$ ثابت نباشد.

مقدار ثابت $k \neq \frac{y_1}{y_2}$

رونسکین توابع $(n-1)$ بار مشتق پذیر، y_n, \dots, y_1, y_1 عبارت است از:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

فرض می کنیم توابع y_1, y_2, \dots, y_n بر بازه I $(n-1)$ بار مشتق پذیر باشند:

الف) اگر W در هیچ نقطه‌ای از I صفر نشود آن گاه این توابع مستقل خطی هستند.

ب) اگر این توابع بر I وابسته خطی باشند، آن گاه W در هر نقطه از I برابر صفر است.

$$\text{مستقل} \quad \begin{vmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{استقلال ندارند} \quad \begin{vmatrix} u & 4u \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

۳-۲. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$y = e^{tn}$$

$$\Rightarrow e^{tn} (t^2 + at + b) = 0$$

$$(t^2 + at + b) = 0 \quad \text{معادله معشر}$$

ریشه ها را پیدا کرده در جواب می گذاریم

$$t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R} \Leftarrow \Delta > 0 \quad \text{--- 1}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{بعضی}} e^{t_1 x}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{بعضی}} e^{t_2 x}$$

$$\frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x} \neq 0 \quad \text{همواره} \Rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$3 \text{ و } -1$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

$$y'' - 4y = 0$$

± 2

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y'' - 2y' = 0$$

0 و 2

$$\Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x}$$

$$t(t-1)(t+1)(t+2) = 0$$

معادله معسر یک معادله دیفرانسیل

$$c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x}$$

تا وقتی که n ریشه حقیقی متمایز داریم جواب به صورت بالا معادله می شود

المميز t : $\Delta = 0$: 2

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$$

المميز $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

مثال ۱۵-۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

ا) بنویسد

حل. معادله معسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا پیدا می کنیم

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r - 3)^2 = 0 \Rightarrow r = 3 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$$

$$q \neq 0, \quad p \pm iq \quad \Delta \text{عنه : 3}$$

$$\begin{aligned} & \text{الحل الأول} \quad c_1 \alpha e^{(p+iq)n} \\ & + \text{الحل الثاني} \quad c_2 \alpha e^{(p-iq)n} \end{aligned} \rightarrow = e^{pn} (c_1 \cos qn + i c_1 \sin qn)$$

$$= e^{pn} (c_2 \cos qn - i c_2 \sin qn)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\Rightarrow y = e^{pn} (A \cos qn + B \sin qn)$$

$$A = c_1 + c_2$$

$$A = c_1 + c_2$$

$$i \times (B = i(c_1 - c_2))$$

$$-i \times (B = i(c_1 - c_2))$$

$$\frac{1}{2} (A + iB) = c_2$$

$$\frac{1}{2} (A - iB) = c_1$$

$$(۹) \quad y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx)$$

پلا سوال ۱۱-۳. جواب عمومی معادله، دینفراسیل

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

را بنویسند

حل. ابتدا معادله، بطور زیر شکل می دهیم

$$t^2 + 2t + 10 = 0$$

چون ریشه های معادله، بطور زیر پیدا می کنیم

$$t = -1 \pm \sqrt{1-10} \quad , \quad t_1 = -1 + 3i \quad , \quad t_2 = -1 - 3i$$

$$p = -1 \quad , \quad q = 3$$

و جواب عمومی معادله، زیر می باشد

$$y = e^{-x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$(۲) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

تذکره. با انتخاب سمبول

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت (۲)، به فرم زیر نوشته می شود

$$(۸) \quad (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

عبارت داخل پرانتز (۸) را با $F(D)$ نمایش می دهیم و معادله را معمولاً بصورت

$$F(D) y = 0 \text{ می نویسیم و آنرا ابراتور * دیفرانسیل خطی مرتبه } n \text{ ام می نامیم.}$$

مثال ۳. ۲۸. جواب عمومی معادله* دیفرانسیل

$$D(D-1)(D+3)y=0$$

را بنویسید .

حل . با توجه به $F(D)$ ، ریشه های معادله* مفسر ،

$$t_1=0, t_2=1, t_3=-3$$

می باشد و جواب عمومی به فرم زیر است :

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-3x}$$

معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن:

$$y'' + f_1(u)y' + f_2(u)y = f(u)$$

$$y'' + ay' + by = f(u)$$

معادله با ضرایب ثابت

بنابراین حل یک معادله دیفرانسیل غیر همگن ابتدا باید یک جواب عمومی y_h برای قسمت همگن بدست آوریم و سپس یک جواب خصوصی y_p برای قسمت غیر همگن تعیین کنیم مجموع دو جواب $(y = y_h + y_p)$ جواب عمومی معادله غیر همگن خواهد شد.

برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن از روش های زیر استفاده می کنیم:

(۱) روش ضرایب نامعین

(۲) روش عملگرهای معکوس

(۳) روش تغییر پارامترها

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5$

$m=0$ درجه صفر، ضریب ثابتی از درجه صفر

$$y_p = A x^0 = A$$

در معادله $0 - 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5x$

$$y_p = Ax + B$$

در معادله $0 - 2A + 3Ax + 3B = 5x$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases}$$

مثال ۳. ۳۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - y' = 2x \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن منابخر را پیدا می‌کنیم

$$y'' - y' = 0$$

$$t^2 - t = 0 \Rightarrow t = 0, 1$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^x$$

$$y_p = x(Ax + B)$$

حال اگر مشتق اول و مشتق دوم (۳) را در (۱) جایگذاری کنیم، داریم

$$2A - 2Ax - B = 2x$$

و A و B از حل دستگاه زیر پیدا می‌شوند

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = -2$$

$$y_p = x(-x - 2)$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

مثال ۳.۳۹. فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' = x^3 + 1$$

را بنویسید.

حل. با توجه به اینکه صفر، دوبار، ریشه معادلهٔ مقبر معادلهٔ همگی متناظر می باشد.

$$y_p = x^3 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

$$f(n) = e^{P(n)} M(n) \quad \text{اگر } 2:$$

m تعداد ریشه‌های P معادله مشخصه (یک ریشه را می‌توان n بار داشت)
 P ریشه: 2 ریشه: 1 ریشه: 3

$$\text{مثال: } y'' - 2y' - 3y = 5e^{2x}$$

$m=2 \Rightarrow 1$ ریشه معادله مشخصه 3 و -1

$$y_p = A e^{2x}$$

$$A - 2A - 3A = 5 \Rightarrow A = -4$$

مثال ۲.۴۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$$

و

$$y_h = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

چون $p=2$ ، دو بار ریشه معادله می‌باشد، پس باید y_p را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$y = A x^2 e^{2x}$$

و برای تعیین

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2 + 3)e^{-x} + 4x$$

حل. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ مفسر معادلهٔ همگن مساطر را پیدا می‌کنیم

$$t^4 + 2t^3 + t^2 = 0$$

$$t^2(t+1)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0, t_3 = t_4 = -1$$

$$y_{p_1} = x^2 (Ax + B)$$

$$y_{p_2} = x^2 e^{-x} (Cx^2 + Dx + E)$$

$$y_p = x^2 (Ax + B) + x^2 e^{-x} (Cx^2 + Dx + E)$$

$$f(u) = M(u) \cos qu + N(u) \sin qu : 3$$

$$y_p = x^m (R(u) \cos qu + S(u) \sin qu)$$

m : تعداد ریشه های $+iq$ معادله مقسوم

R و S دو چند جمله ای از درجه n و n بزرگترین درجه M و N است

حل $y'' + 4y = x \cos 2x + 7 \sin 3x$

$\pm 2i$

$+2i$

$+3i$

$$y_{P_1} = x \left((Ax+B) \cos 2x + (A_1x+B_1) \sin 2x \right)$$

$$y_{P_2} = A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$$

مسئله ۳. ۴۵. فقط مخرج جواب خصوصی معادله، دیفرانسیل

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x$$

را بیابید.

حل. با توجه به سؤال ۳. ۴۴. ریشه های معادله، $\pm 2i$ می باشد. و چون $+2i$ یک بار ریشه معادله، معبر است بنابراین y_p معبر زیر می باشد.

$$y_p = x [(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x]$$

$$f(n) = e^{p_n} (M(n) \cos qn + N(n) \sin qn) \quad 4$$

$$y_p = x^m e^{p_n} (R(n) \cos qn + S(n) \sin qn)$$

• m تعداد، \tilde{p} و \tilde{q} های $p + iq$ معادله معین

مثال ۳. ۴۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x} \sin x \quad (1)$$

را بنویسد.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم

$$t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm i$$

و

$$y_h = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

و با توجه به (۱۱)

$$y_p = x e^{2x} [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$$

مثال ۳. ۵۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' + y' = x^2 + 6 \sin 2x + x e^{3x} \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگی را می نویسیم

$$t^3 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = i, t_3 = -i$$

و

$$y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

اول جواب خصوصی

$$y_{p_1} = x (A x^2 + B x + C)$$

$$y_{p_2} = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x$$

$$y_{p_3} = e^{3x} (A_2 x + B_2)$$

مثال ۳. ۴۹. فقط فرم جواب خصوصی معادله " دیفرانسیل

$$D(D^2 - 2D + 2)^3(D^2 + 9)(D + 1)^4 y = x^2 + x \sin x + 3e^{-x} \\ + 1 + x^2 e^x \cos x + 5 \cos 3x$$

را بنویسید .