

函数/数据/图形—规范及第 1 次作业 *

徐均益[†] 余航[‡] 陈宇韬[§]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

本课程《磁流体力学的数值模拟方法》的主要内容是介绍空间物理中数值计算的一个重要方面 – 磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 数值计算格式. 而讲授的重点和目的在于让同学们学完这本课程之后, 不仅了解和掌握空间物理和等离子体数值计算的物理知识和数学理论, 而且训练在实际的计算机应用中独立动手和实践的能力. 本文件将提出作业的具体要求和规范, 以及一些文件和版面要求, 并给出第一次作业, 请在 **2023 年 3 月 31 日周五 08:40** 前完成并提交.

1 第一次作业内容

请选择下面三小节中的一个或多个完成第 1 次作业. 或者, 同学们从与自己专业方向相关的课程, 正在参加的课题中, 等等, 自由选择函数/方程完成这次作业.

1.1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfven) 波的特征速度分别为 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (3)$$

*2023 春季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]Email: jywu@mail.ustc.edu.cn

[‡]Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

[§]Email: chenyut@mail.ustc.edu.cn

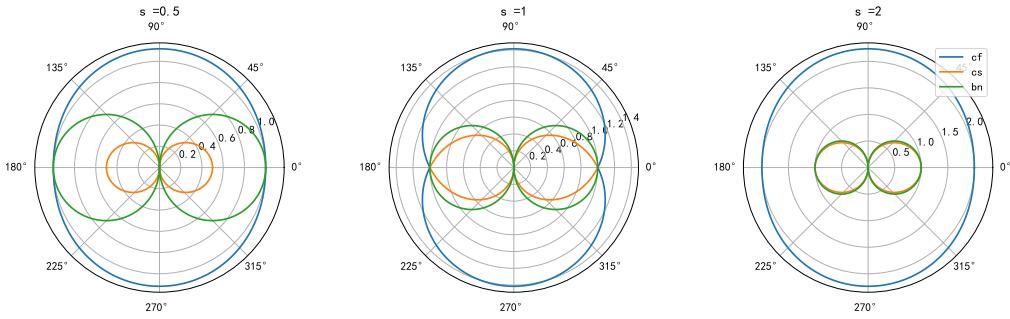


图 1: Illustration of the surface of normal speeds for (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$, and (c) $s = 2$.

其中, a 是声速, $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, p 和 ρ 是流体的压力和密度; b 是 Alfvén 波速, $b^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}$. \mathbf{H} 是磁场, μ 是磁导率; θ 为传播方向和磁场所成夹角.

1.2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [R L \sin^2 \theta + P S (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + P R L = 0 \quad (4)$$

这里 $n = kc/\omega$ 是折射率, θ 是波的传播方向和磁场的夹角,

$$\begin{aligned} S &= (R + L)/2 \\ D &= (R - L)/2 \\ R &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}} \\ L &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}} \\ P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

其中 ω_{ps} 和 ω_{cs} 分别是第 s 种类粒子的等离子体频率和回旋频率, ω_p 是整体的等离子体频率. 方程 (4) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = - \frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(S n^2 - R L)(n^2 - P)}.$$

其中单成分的结果可以参考图 2, 进行分析和比较.

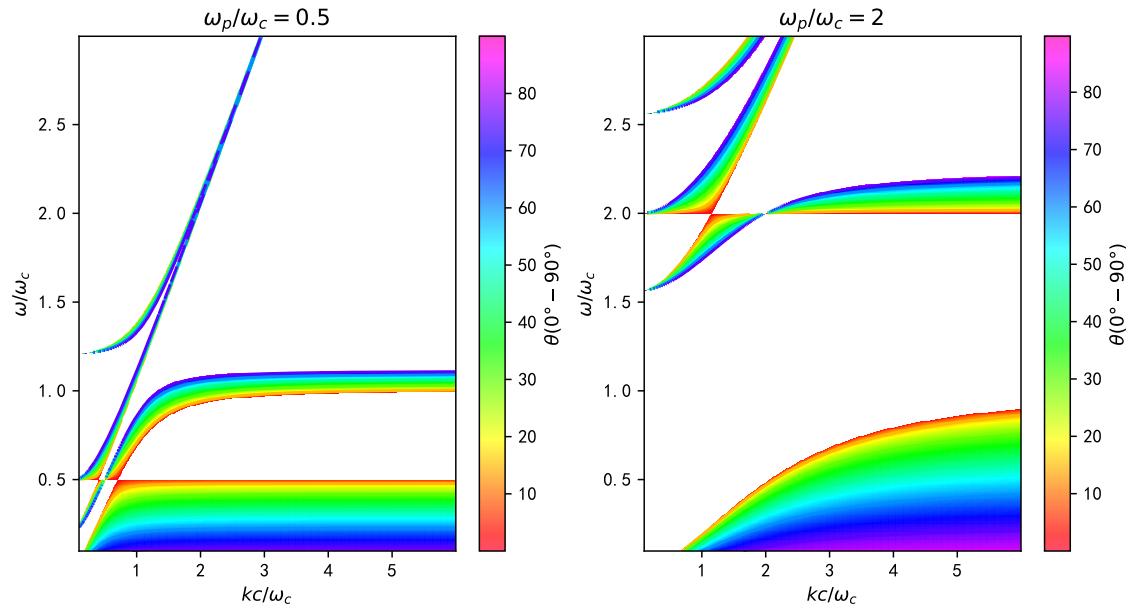


图 2: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a) $\omega_p/\omega_c = 2.0$ and (b) $\omega_p/\omega_c = 0.5$

1.3 磁流体力学快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey and Taniuti, 1964), 用磁场增量 h_f ($h_f \geq 0$) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (5)$$

和 h_f 的函数关系. B , C , 和 R_X 由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (6)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (7)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (8)$$

其中 θ_0 为波传播方向和磁场方向的夹角 ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$), $\gamma = 5/3$ 是多方指数. 讨论两种情况, 即 B 在 C 的零点

$$\hat{B} \equiv B(\hat{h}_f) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin^2 \theta_0 - (1 - s_0),$$

大于等于和小于零的情况, 此处 \hat{h}_f 是 $C = 0$ 的根

$$\hat{h}_f = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (9)$$

具体表现为 s_0 的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (11)$$

而 \hat{h}_f 是 $R_X = 0$ 的根,

$$\begin{aligned} \hat{h}_f &= \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} \left\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

编程思路大致思路为, 通过公式计算得到 \hat{h}_f 和 \hat{h}_f 之后, 分别在 $(0, \hat{h}_f)$, $(0, \hat{h}_f)$ 之间画出各个符合要求的函数线。可以看到渐近线 \hat{h}_f 与 \hat{h}_f 处的连续接触点均符合预期。我们选取了三个角度, 分别是 $\theta = 7.5^\circ$, $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$ 三个角度, 可以看到不同的角度对应发生的不同变化。

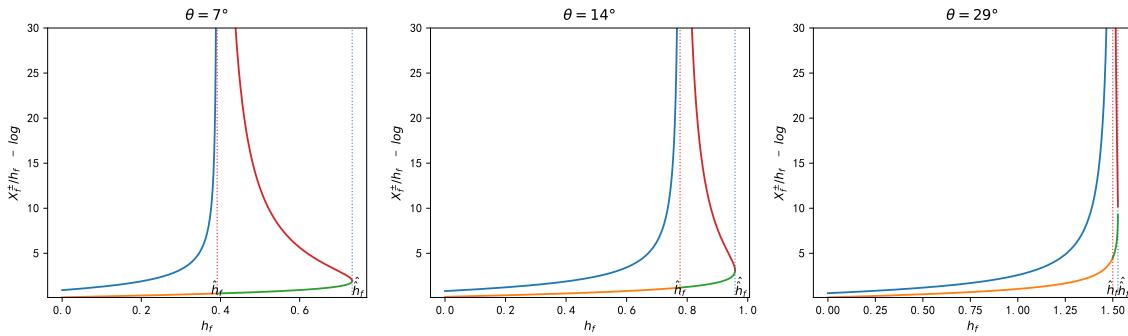


图 3: Fast shock relation.

2 参考文献

本作业主要参考助教所提供的教材内容。

3 分工说明

余航主要负责了作业三的程序和作图部分。

4 附件

1. assign1.tex—本报告 L^AT_EX 文件
2. assign1.pdf—本报告 PDF 输出文件
3. Friedrich.pdf—图 1 的 PDF 图形文件, 由 IDL 生成的数据, 再使用 L^AT_EX 的绘图宏包生成
4. coldp_2_0.pdf—图 2 的 PDF 图形文件之一 (a), 由 IDL 程序生成的 PS 格式图形文件做边界调整而成再转换而成. 原图的默认边界是坐标轴 (含坐标其他元素, 刻度, 标题等等) 围起来的区域. 因为角度的注释跑到边界外面了, 直接插进来这一部分不能全部显示出来. 后面的处理类似. 也可以这样做, 在本文件开始的部分使用了宏包

```
\usepackage{epstopdf}
```

这样包含图形时可以直接使用 EPS 格式文件, 在 \LaTeX — 实际上是 PDFLaTeX (XeLaTeX) — 编译后生成的是 PDF 文件, 其中的 EPS 图形通过前面所提的宏包转换, 会有 PDF 格式的中间临时文件. 用这些 PDF 文件替换掉 EPS 文件即可.

5. coldp_0_5.pdf—图 2 的 PDF 图形文件之一 (b), 处理方式同前.
6. FShock.pdf—图 3 的 PDF 图形文件, 由 IDL 生成并使用 \LaTeX 加注其中的公式生成, 并调整了边界 (EPS 文件头)
7. References.bib – 文献文件

参考文献

Diver, D. A. (2001). *A plasma formulary for physics, technology and astrophysics*. Wiley VCH, 1st edition.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.