

第 1 次作业

徐均益^{*} 余航[†] 陈宇韬[‡]

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

摘要

本次作业绘制了磁流体力学波的相速度图、冷等离子体中的色散关系图、磁流体力学快慢磁声激波关系图, 了解和掌握空间物理和等离子体数值计算的物理知识和数学理论, 训练了实际的计算机应用中独立动手和实践的能力.

1 第一次作业内容

本次作业主要内容分为三小节。

1.1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfven) 波的特征速度分别为 (Jeffrey et al., 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (3)$$

其中, a 是声速, $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, p 和 ρ 是流体的压力和密度; b 是 Alfven 波速, $b^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}$. \mathbf{H} 是磁场, μ 是磁导率; θ 为传播方向和磁场所成夹角.

^{*}ID: SA22168021 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

[†]ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

[‡]ID: SA22214014 Email: chenyut@mail.ustc.edu.cn

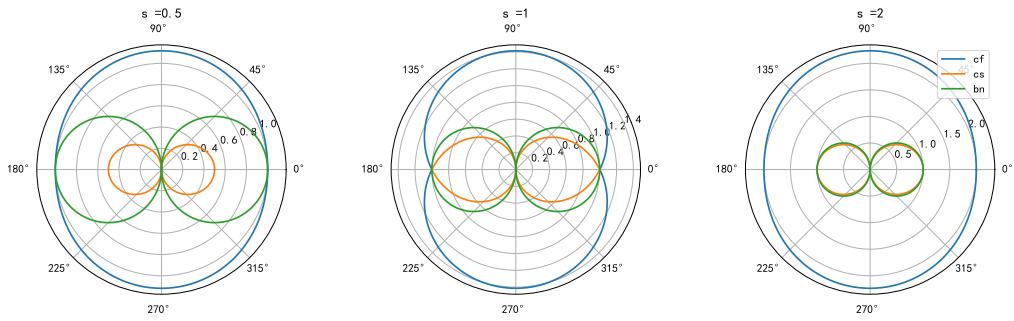


图 1: Illustration of the surface of normal speeds for (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$, and (c) $s = 2$.

1.2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [RL \sin^2 \theta + PS (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + PRL = 0 \quad (4)$$

这里 $n = kc/\omega$ 是折射率, θ 是波的传播方向和磁场的夹角,

$$\begin{aligned} S &= (R + L)/2 \\ D &= (R - L)/2 \\ R &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}} \\ L &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}} \\ P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

其中 ω_{ps} 和 ω_{cs} 分别是第 s 种类粒子的等离子体频率和回旋频率, ω_p 是整体的等离子体频率. 方程 (4) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = - \frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}.$$

其中单成分的结果化简如下:

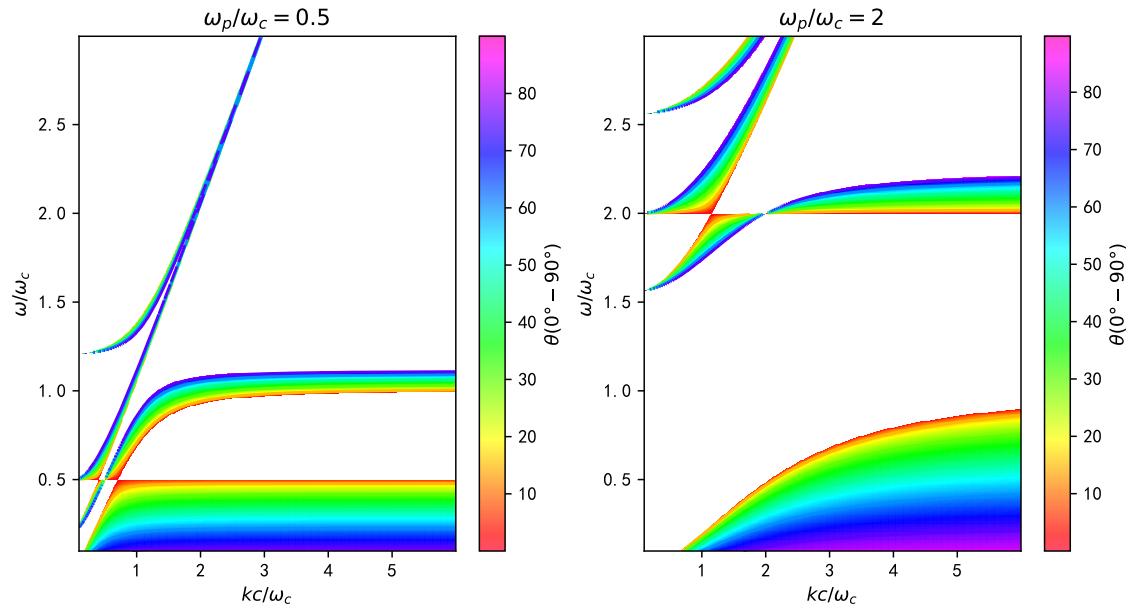


图 2: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a) $\omega_p/\omega_c = 2.0$ and (b) $\omega_p/\omega_c = 0.5$

令 $x = kc/\omega_c$, $y = \omega/\omega_c$, $\lambda = \omega_p/\omega_c$ 可得

$$n = \frac{x}{y} \quad (5)$$

$$R = 1 - \frac{\lambda^2}{y^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} \quad (6)$$

$$L = 1 - \frac{\lambda^2}{y^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{y}} \quad (7)$$

$$P = 1 - \frac{\lambda^2}{y^2} \quad (8)$$

将以上三式带入式 (5) 并用 Mathematica 化简

```

n = x / y;
R = 1 - (λ/y)^2 (1 + 1/y);
L = 1 - (λ/y)^2 (1 - 1/y);
P = 1 - (λ/y)^2;

s = (R + L)/2 // Simplify;
d = (R - L)/2 // Simplify;
-P (n^2 - R) (n^2 - L)
-((y^2 - λ^2) (y (-λ^2 + y^2 - y) - x^2 (y - 1))
  (y (-λ^2 + y^2 + y) - x^2 (y + 1))) /
  (s n^2 - R L) (n^2 - P) // Simplify // TraditionalForm

```

可以参考图 2, 进行分析和比较.

1.3 磁流体力学快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey et al., 1964), 用磁场增量 h_f ($h_f \geq 0$) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (9)$$

和 h_f 的函数关系. B , C , 和 R_X 由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (10)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (11)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (12)$$

其中 θ_0 为波传播方向和磁场方向的夹角 ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$), $\gamma = 5/3$ 是多方指数. 讨论两种情况, 即 B 在 C 的零点

$$\hat{B} \equiv B(\hat{h}_f) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin^2 \theta_0 - (1 - s_0),$$

大于等于和小于零的情况, 此处 \hat{h}_f 是 $C = 0$ 的根

$$\hat{h}_f = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (13)$$

具体表现为 s_0 的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (14)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (15)$$

而 \hat{h}_f 是 $R_X = 0$ 的根,

$$\begin{aligned} \hat{h}_f &= \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} \left\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

编程思路大致思路为, 通过公式计算得到 \hat{h}_f 和 \hat{h}_f 之后, 分别在 $(0, \hat{h}_f), (0, \hat{h}_f)$ 之间画出各个符合要求的函数线。可以看到渐近线 \hat{h}_f 与 \hat{h}_f 处的连续接触点均符合预期。我们选取了三个角度, 分别是 $\theta = 7.5^\circ$, $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$ 三个角度, 可以看到不同的角度对应发生的不同变化。

2 分工说明

徐均益给出了作业一的程序 (python 代码) 和作图, 在和余航讨论后获得了作业二的思路, 完成了作业二的公式的归一化, 给出了作业二的程序 (julia 代码) 和作图, 完成了作业一和作

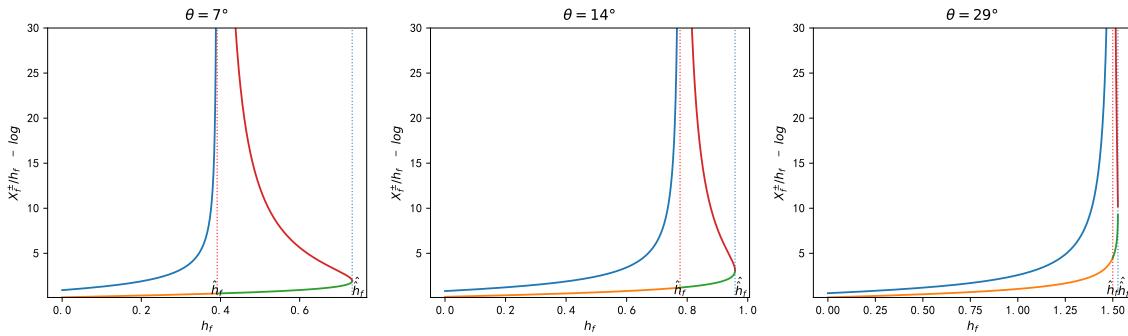


图 3: Fast shock relation.

业二的 L^AT_EX 编写。余航给出了作业二的程序 (python 代码), 并优化了徐均益关于作业二的作图, 并负责了作业三的程序和作图以及 L^AT_EX 编写。陈宇韬参与了讨论并给出了 L^AT_EX 的修改意见。

3 附件

1. main.tex–本报告 L^AT_EX 文件
2. main.pdf–本报告 PDF 输出文件
3. figures/problem1.pdf–图 1 的 PDF 图形文件, 由 code/problem1.py 绘制
4. code/第二题公式推导.nb 是用 Mathematica 做的第二题公式推导
5. figures/problem2.pdf–图 2 的 PDF 图形文件, 用 code/problem2.jl 和 code/problem2b.py 两种语言均可绘制相同的图像
6. code/problem2_roots.jl 试图用解方程手段求解第二题
7. figures/problem3_norm.pdf–图 3 的 PDF 图形文件, 由 code/problem3.py 绘制
8. References.bib – 文献文件
9. 点击[Git 仓库](#)可查看本次的作业的全部文件

参考文献

JEFFREY A, TANIUTI T. Mathematics in science and engineering - a series of monographs and textbooks: volume 9 non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics[M]. New York / London: Academic Press, 1964.

DIVER D A. A plasma formulary for physics, technology and astrophysics[M]. 1st ed. [S.l.]: Wiley VCH, 2001.