

函数/数据/图形 — 规范及第 1 次作业^{*}

郑惠南[†]

高新亮[‡]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

本课程《磁流体力学的数值模拟方法》的主要内容是介绍空间物理中数值计算的一个重要方面 – 磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 数值计算格式. 而讲授的重点和目的在于让同学们学完这门课程之后, 不仅了解和掌握空间物理和等离子体数值计算的物理知识和数学理论, 而且训练在实际的计算机应用中独立动手和实践的能力. 本文件将提出作业的具体要求和规范, 以及一些文件和版面要求, 并给出第一次作业, 请在 **2023 年 3 月 31 日周五 08:40** 前完成并提交.

1 作业提交规范

本学期所有的作业以电子文档的形式打包后发送到邮箱 gaoxl@ustc.edu.cn. 所需的硬件设施请同学们自己准备, 本课程提供一些相关软件, 其它一些常用软件可以在校园网或外网找到.

提交的文档中需对所含文件做必要的简单说明, 即列出一份打包清单, 清单 (Packing List) 可以写在一个文件中, 或者放在报告文档里. 具体的要求如下

1. 提交报告的 L^AT_EX 源文件和 PDF (Portable Document Format) 输出文件. 报告可以使用中文或英文写作. 报告要求由以下部分组成
 - (a) 作业题目
 - (b) 作者信息 – 作者, 联系方式 (Email 为佳), 及其它相关信息 (如学号, 日期等)

^{*}2023 春季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]Email: hue@ustc.edu.cn

[‡]Email: gaoxl@ustc.edu.cn

(c) 正文 – 由以下几个部分组成

- 摘要/ Abstract
- 引言/ Introduction and Objective
- 方法及过程/ Description and Procedure
- 实现, 程序/ Implementation and Method
- 讨论, 进一步工作/ Result, Discussion, Further Work
- 分工说明
- 附加材料, 文献/ Additional Remarks, References

2. 提供计算和绘图程序的源代码 (文本格式文件)

3. 提供 PDF 图形文件

4. 文件清单说明

2 使用的运算, 绘图, 报告排版软件

要求使用 julia, IDL (Interactive Data Language), Matlab, 或其他软件作为编程和图形绘制工具, \LaTeX 则作为必须的报告排版工具.

julia 是一个新的高性能动态高级编程语言. 语法和其他编程语言类似, 易于其他语言用户学习.

- 免费开源
- 核心语言非常小. 标准库用 julia 语言本身写的
- 调用许多其它成熟的高性能基础代码. 如线性代数, 随机数生成, 快速傅里叶变换, 字符串处理.
- 丰富的用于建立或描述对象的类型语法
- 高性能, 接近于静态编译型语言. 包括用户自定义类型等
- 为并行计算和分布式计算而设计
- 轻量级”绿色”协程
- 优雅的可扩展的类型转换/提升
- 支持 Unicode, 包括但不限于 UTF-8

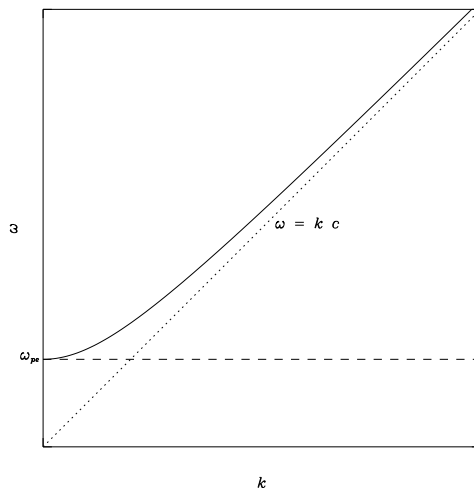


图 1: 等离子体中电磁波的色散关系, 如实线所示, 点线表示真空中电磁波的色散关系, 虚线为 $\omega = \omega_p$ 为等离子体中电磁波的截止频率.

- 可直接调用 C 函数 (不需要包装或是借助特殊的 API)
- 有类似 shell 的进程管理能力
- 有类似 Lisp 的宏以及其它元编程工具

IDL 是理论物理, 天体物理以及空间物理等多个研究领域最常使用的数据处理和计算程序. 它的特点有 (1) 数组操作, (2) 常用图形显示程序库, (3) 图形环境可选关键字, (4) 多种输出格式, 等等.

课程要求提交的图形文件格式为 PDF 格式, 不再用 PS/EPS (Postscript / Encapsulated Postscript) 格式. 因此, 如果程序图形文件的输出形式为 PS/EPS, 请将其转换为 PDF 格式.¹ PS 是一种以 ASCII 码方式组成的后缀式描述语言格式. PS/EPS 和 PDF 格式一样, 作为电子文件的一种规范被科学工作者们广泛使用. 使用 PDF 或 PS/EPS 图形格式可以保证线形图 (大部分计算和数据表示的图形方式) 不会失真. 这里给出一个简单的 IDL 实例程序来说明, 见附件图形文件和图 1, 图 1 描述了电磁波在等离子体中的传播特性 (Diver, 2001),

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (1)$$

¹一般的 PDF 阅读器都能打开 PS/EPS 文件. Foxit PDF 编辑器是一个例外, 也可能是没有设置对.

其中 ω_p 是等离子体频率, c 是光速. 图 1 中的实线表示了上式的色散关系. 可以看到, 等离子体中的电磁波的截止频率为等离子体频率 ω_p , 在高频部分波的行为和真空中的电磁波一样. IDL 详细的语法可以查阅其使用说明和联机帮助. 在源程序文件中, 我们将对显现图形的程序段中主要的语句进行详细的解释. 程序中有一些简单的注释供大家参考.

另外的实现方式是用 FORTRAN, C/C++ 或其他程序设计语言来完成函数的计算并将所得到的数据存放在一个文件中, 然后是用 julia 等相关绘图软件读入数据而生成图形. 鉴于本课程作业的计算量不大, 建议都用 julia, 或其他集成运算和绘图功能的软件进行计算编程.

考虑到版本兼容性和运行环境问题, 要求将 L^AT_EX 原文件及其生成的 PDF 文件同时提交, 以便用 PDF 阅读器直接检查最终结果, 并可以参考原文件做进一步的检查和处理.

本报告使用 L^AT_EX 进行排版, 源文件附于本报告的附件清单中.

3 第一次作业内容

请选择下面三小节中的一个或多个完成第 1 次作业. 或者, 同学们从与自己专业方向相关的课程, 正在参加的课题中, 等等, 自由选择函数/方程完成这次作业.

3.1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfven) 波的特征速度分别为 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (4)$$

其中, a 是声速, $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, p 和 ρ 是流体的压力和密度; b 是 Alfven 波速, $b^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}$. \mathbf{H} 是磁场, μ 是磁导率; θ 为传播方向和磁场所成夹角.

熟悉所使用的作业工具和相应软件, 将以上公式中 c_f , c_s , b_n 和 θ 的关系用图形表示 (极坐标形式), 比较和分析图形曲线中所含的物理概念和参数的特性. 结果要求能将所有的物理特性或者典型情况涵盖. 可以参考图 2 或文献 Jeffrey and Taniuti (1964) 中已有的图形.

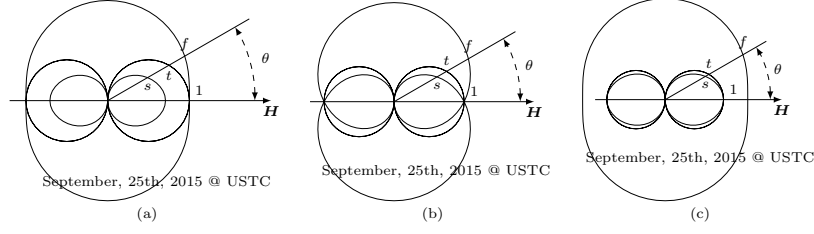


图 2: Illustration of the surface of normal speeds for (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$, and (c) $s = 2$.

3.2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [RL \sin^2 \theta + PS (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + PRL = 0 \quad (5)$$

这里 $n = kc/\omega$ 是折射率, θ 是波的传播方向和磁场的夹角,

$$S = (R + L)/2$$

$$D = (R - L)/2$$

$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}}$$

$$L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}}$$

$$P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

其中 ω_{ps} 和 ω_{cs} 分别是第 s 种类粒子的等离子体频率和回旋频率, ω_p 是整体的等离子体频率. 方程 (5) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}.$$

其中单成分的结果可以参考图 3, 进行分析和比较.

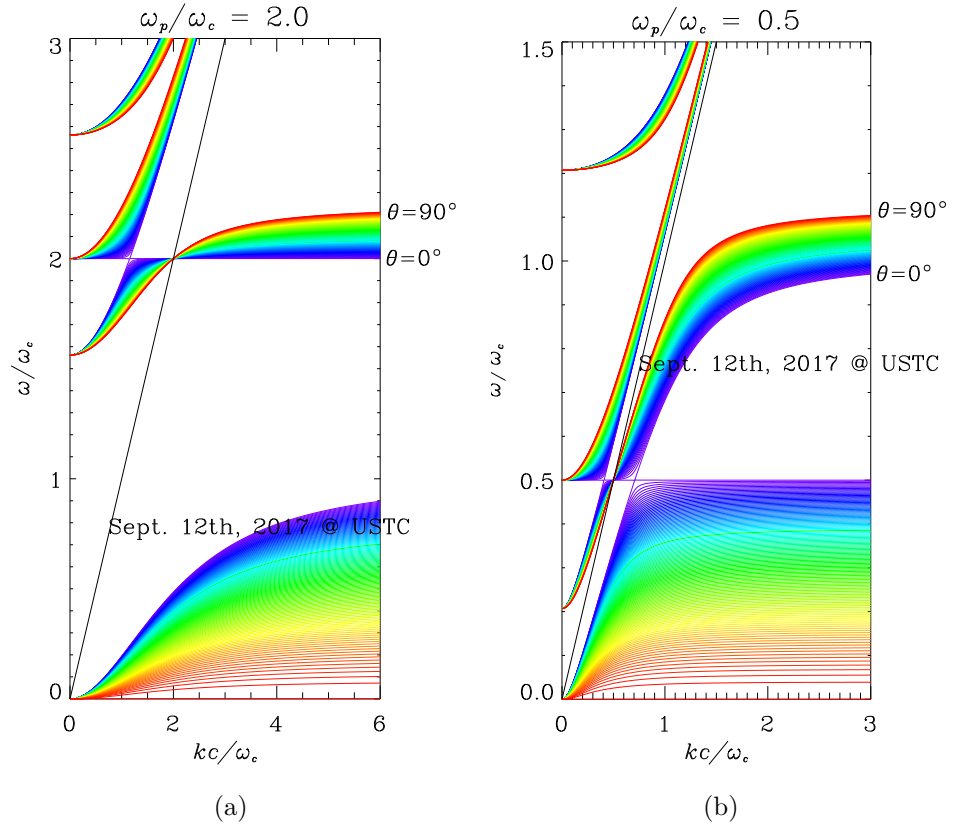


图 3: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a) $\omega_p/\omega_e = 2.0$ and (b) $\omega_p/\omega_e = 0.5$

3.3 磁流体力学快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey and Taniuti, 1964), 用磁场增量 h_f ($h_f \geq 0$) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (6)$$

和 h_f 的函数关系. B , C , 和 R_X 由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (7)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (8)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (9)$$

其中 θ_0 为波传播方向和磁场方向的夹角 ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$), $\gamma = 5/3$ 是多方指数. 讨论两种情况, 即 B 在 C 的零点

$$\hat{B} \equiv B(\hat{h}_f) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin^2 \theta_0 - (1 - s_0),$$

大于等于和小于零的情况, 此处 \hat{h}_f 是 $C = 0$ 的根

$$\hat{h}_f = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (10)$$

具体表现为 s_0 的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (11)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (12)$$

而 $\hat{\hat{h}}_f$ 是 $R_X = 0$ 的根,

$$\begin{aligned} \hat{\hat{h}}_f = \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} \Big\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \\ + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \Big\}. \end{aligned} \quad (13)$$

将关系 (6) 用图形表示 (可取 θ_0 的某个典型值进行分析, 如 $\theta_0 = 15^\circ$), 并参考图 4 或文献 (Jeffrey and Taniuti, 1964, 第 229 页中的图形), 以进行比较.

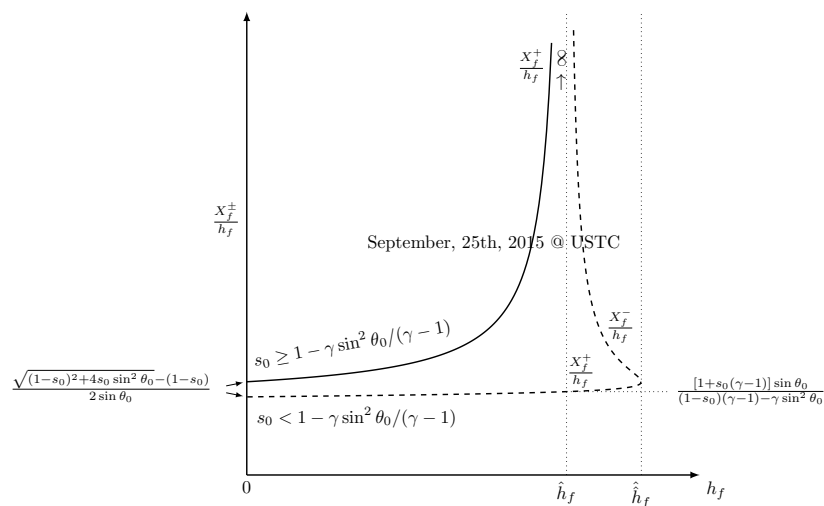


图 4: Fast shock relation.

3.4 其他函数

同学们也可以选其他自己感兴趣或 (专业) 相关的函数进行编程和作图. 说明函数的来源, 可能包含的物理性质, 及其中的一些结果和讨论.

4 交叉参考

交叉参考和文献引用也可以参考 \LaTeX 相关文档, 关于公式, 图/表的引用, 直接参考本文文档. 关于文献, 这里有两种做法, 一是用 BibTeX , 文献管理单独用一个文件, 可以注意到, 文献数据库附件文件里的文献还包含了这个作业里面没有引用的文献. \LaTeX 通过 BibTeX 编译时会自动过滤掉, 只将引用的文献列进来. 例如

```
\bibliographystyle{unsrt}
\bibliography{References}
```

这里文献文件是 “References.bib”, 采用 “unsrt” 格式引用和排版. 本报告采用这个办法. 另一种是直接

```
\begin{bibliography}
...
\end{bibliography}
```


请大家看这个报告源文件中见被注释掉的部分. 本文件的这一部分实际上是通过 BibTeX 生成的 *.bbl (此处为 Assign1.bbl) 后粘贴过来的, 这也是一般期刊最后稿件的要求, 因为提交的文件不需要你们自己的整个文献数据库.

5 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 程序和图形文件. 高新亮对整个文档, 文件清单进行了检查, 确认.

6 附件

1. assign1.tex—本报告 L^AT_EX 文件
2. assign1.pdf—本报告 PDF 输出文件
3. assign1.pro—文中图 1 例子所用的 IDL 计算和图形绘制程序
4. plot1.pdf—图 1 的 PDF 图形文件, 由 IDL 程序生成的 PS 格式图形文件转换而来
5. Friedrich.pdf—图 2 的 PDF 图形文件, 由 IDL 生成的数据, 再使用 L^AT_EX 的绘图宏包生成
6. coldp_2_0.pdf—图 3 的 PDF 图形文件之一 (a), 由 IDL 程序生成的 PS 格式图形文件做边界调整而成再转换而成. 原图的默认边界是坐标轴 (含坐标其他元素, 刻度, 标题等等) 围起来的区域. 因为角度的注释跑到边界外面了, 直接插进来这一部分不能全部显示出来. 后面的处理类似. 也可以这样做, 在本文件开始的部分使用了宏包

```
\usepackage{epstopdf}
```

这样包含图形时可以直接使用 EPS 格式文件, 在 L^AT_EX—实际上是 PDF_LA_TE_X (XeLaTeX)—编译后生成的是 PDF 文件, 其中的 EPS 图形通过前面所提的宏包转换, 会有 PDF 格式的中间临时文件. 用这些 PDF 文件替换掉 EPS 文件即可.

7. coldp_0_5.pdf—图 3 的 PDF 图形文件之一 (b), 处理方式同前.
8. FShock.pdf—图 4 的 PDF 图形文件, 由 IDL 生成并使用 L^AT_EX 加注其中的公式生成, 并调整了边界 (EPS 文件头)

参考文献

- Diver, D. A. (2001). *A plasma formulary for physics, technology and astrophysics*. Wiley VCH, 1st edition.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.