

行波方程和 Burgers 方程的数值计算

第 2 次作业*

徐均益[†]

余航[‡]

陈宇韬[§]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026 中国科学技术大学物质科学研究院等离子所, 合肥 230026

摘要

课程《磁流体力学的数值模拟方法》的第二次作业, 讨论一维单一变量双曲型方程, 其中包括行波方程和 *Burgers* 方程的有限差分数值解法, 结合分析讨论几种常用的差分格式的特点. 如迎风格式, *Lax-Wendroff* 格式, 已经斜率补偿的限制器模式. 行波方程与 *Burgers* 方程采用了两种不同的初始输入, 其中行波方程主要讨论在传播同样的距离条件下不同方法的耗散程度; 而 *Burgers* 方程则采用行波方程中比较好的斜率补偿限制器的方法, 对波形在传播的不同时刻进行观测, 同时与理论值进行对比分析结果.

1 引言与背景

一维单变量函数的一阶双曲型偏微分方程表示了一个波动的传播发展过程, 在线性方程的情况下, 波的形状不随时间改变, 而在非线性方程的情况下, 一个连续有限振幅的波可能发展成有间断的解, 即激波, 或者从激波 (间断) 演化为连续的解 (Whitham, 1999). 通过偏微分方程的数值计算格式, 可以分析数值解的物理特性和讨论格式的可靠性.

*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

[†]ID: SA22168021 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

[‡]ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

[§]ID: SA22214014 Email: chenyt@mail.ustc.edu.cn

2 实验方法以及对应的理论部分

2.1 行波方程的理论和方法

行波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

2.2 Burgers 方程的理论和方法

Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

3 实验结果及解释描述

3.1 行波方程数值模拟部分

考察方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

在初值条件

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 0.0, & x < -0.4, \\ 1.0 - |x + 0.3|/0.1, & -0.4 \leq x < -0.2, \\ 0.0, & -0.2 \leq x < -0.1, \\ 1.0, & -0.1 \leq x < 0.0, \\ 0.0, & x \geq 0.0 \end{cases} \quad (4)$$

下的数值解. 通过有限差分格式: 迎风格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (5)$$

Lax-Wendroff 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (7)$$

和斜率限制器

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= \frac{a\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(\Delta x - a\Delta t)\sigma_{i-1}^n \right) + \\
 &\quad \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) \left(u_i^n - \frac{1}{2}a\Delta t\sigma_i^n \right) \\
 &= u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\Delta x - a\Delta t) (\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n),
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\sigma_i^n = \minmod\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right) \tag{9}$$

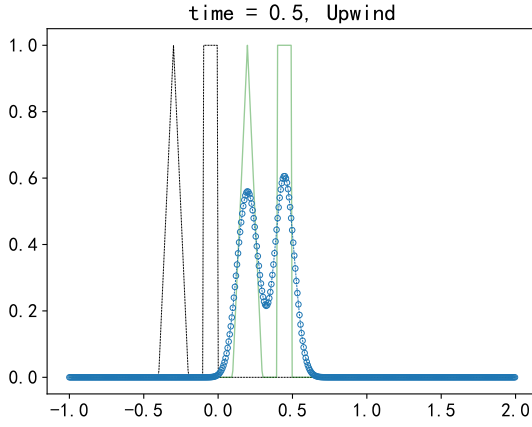
及

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0 \\ b, & \text{if } |a| > |b| \text{ and } ab > 0 \\ 0, & \text{if } ab \leq 0. \end{cases} \tag{10}$$

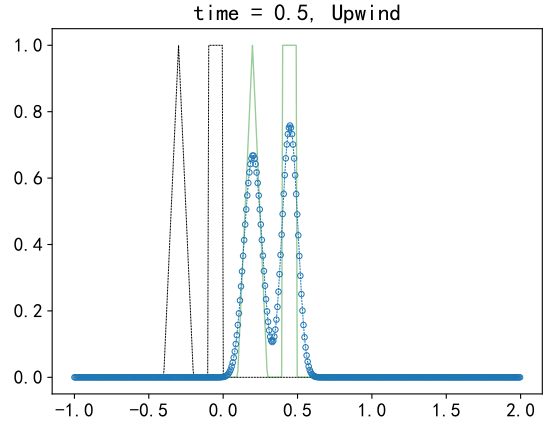
讨论该方程的物理解和差分格式数值解的特性. 要求

1. 设计和编写程序进行数值计算试验, 试验和比较不同格式, 不同网格密度, 不同时间步长的计算结果. 网格密度取 428, 对于迎风格式, 时间步长 Constant 系数 ($C = \Delta t/\Delta x$) 变化,
 - C 为 0.05 时, u 随着波的传播被逐渐抹平的情况最为严重;
 - C 为 0.5 时, u 随着波的传播被逐渐抹平;
 - C 为 0.95 时, u 随着波的传播与精确解几乎一致;
 - C 为 1.0 时数值解与精确解完全一致;
 - C 大于 1.0 时, u 的解出现严重振荡, 不再像物理解。
2. 以图形来表示数值解的发展和变化. 和解析解比较, 分析数值解在间断附近的特性, 如速度, 过渡区宽度等.
3. 试验一下不稳定差分格式 (如空间前向差分的 Euler 格式) 的数值计算过程, 说明所得到的结果.
4. 如果可能, 分析数值耗散和色散效应.

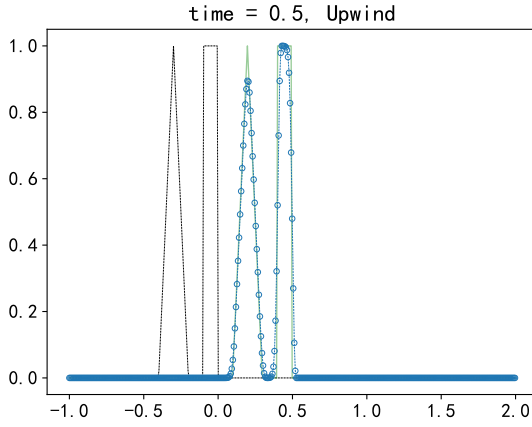
作为参考, 图 1 是方程 (1) 的不同格式, 不同 Courant 系数 ($C = \Delta t/\Delta x$), 在 $t = 0.5$ 的计算结果. 其中, 实线是精确解, 点线表示初态值, 虚线是数值计算结果, 而圆圈是具体网格 (单元) 上的数据.



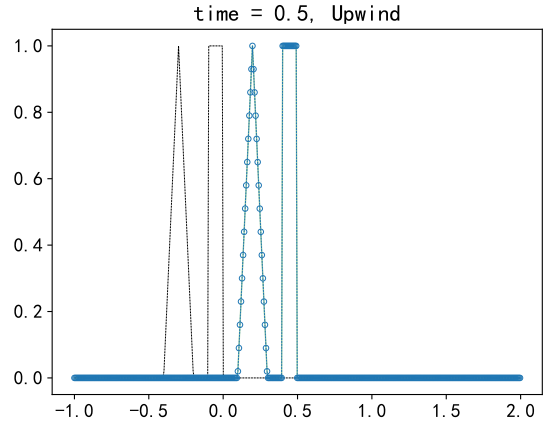
(a)



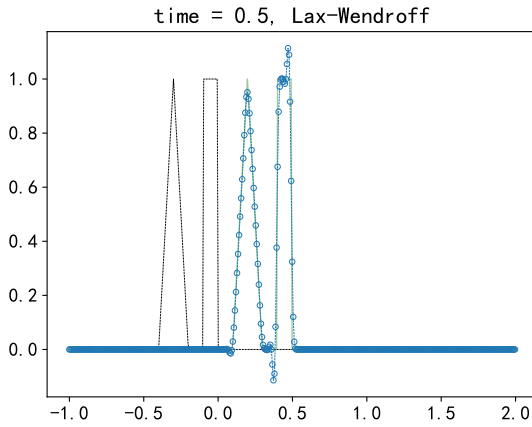
(b)



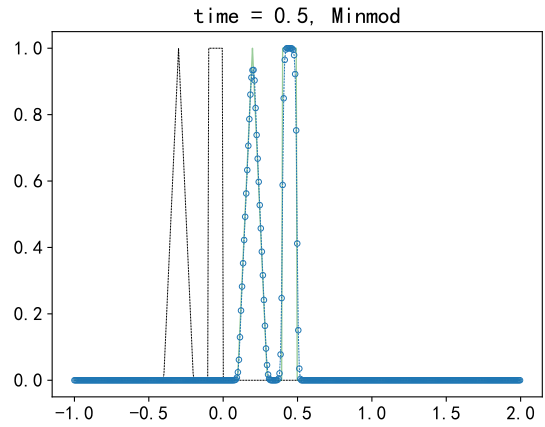
(c)



(d)



(e)



(f)

图 1: 方程 (3) 在 $t = 0.5$ 时刻的解. 其中虚线表示数值迎风格式的计算结果, 线上的圆圈表示具体网格上的数据. 同一时刻的精确解用实线表示. 作为对照, 初始时刻的值以点线表示, 坐标网格总数为 517. (a) 迎风格式, $C = 0.05$, (b) 迎风格式, $C = 0.50$, (c) 迎风格式, $C = 0.95$, (d) 迎风格式, $C = 1.0$, 此时数值解与精确解完全相同, (e) Lax-Wendroff 格式, $C = 0.95$, 注意其中出现的色散 (上冲和下冲), (f) Minmod 格式, $C = 0.95$.

3.2 Burgers 方程数值模拟部分

考察方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$u_j^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{2}(u_j^n)^2 - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n)^2 \right), \quad (12)$$

Limiters

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{2}(u_i^n)^2 - \frac{1}{2}(u_{i-1}^n)^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\Delta x - a\Delta t) (\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n) \quad (13)$$

其中

$$\sigma_i^n = \minmod \left(\frac{\frac{1}{2}(u_i^n)^2 - \frac{1}{2}(u_{i-1}^n)^2}{\Delta x}, \frac{\frac{1}{2}(u_{i+1}^n)^2 - \frac{1}{2}(u_i^n)^2}{\Delta x} \right) \quad (14)$$

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0 \\ b, & \text{if } |a| > |b| \text{ and } ab > 0 \\ 0, & \text{if } ab \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

在初值为

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1.8, & x < -0.8, \\ 1.4 + 0.4 \cos [2\pi(x + 0.8)], & -0.8 \leq x < -0.3, \\ 1.0, & -0.3 \leq x < 0.0, \\ 1.8, & x \geq 0.0 \end{cases} \quad (16)$$

时的数值解. 设计一到多个差分格式, 分析数值计算结果并进行讨论. 要求

1. 设计和编写程序进行数值计算试验.
2. 以图形来表示数值解的发展和变化.
3. 可能的话, 分析数值耗散和色散效应 (间断的宽度, 传播速度, 产生的数值解振荡等).

图 ?? 是方程 (11) 的迎风格式在时间 $t = 0.25, 0.5, 0.75$, 和 1.0 的计算结果, 其中 Courant 系数取 0.95 , 即 $\Delta t = 0.95 \frac{\Delta x}{\max(u)}$.

4 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 由数值计算结果生成的图形文件. 高新亮对整个文档结构, 规范, 文件清单进行了检查, 确认.

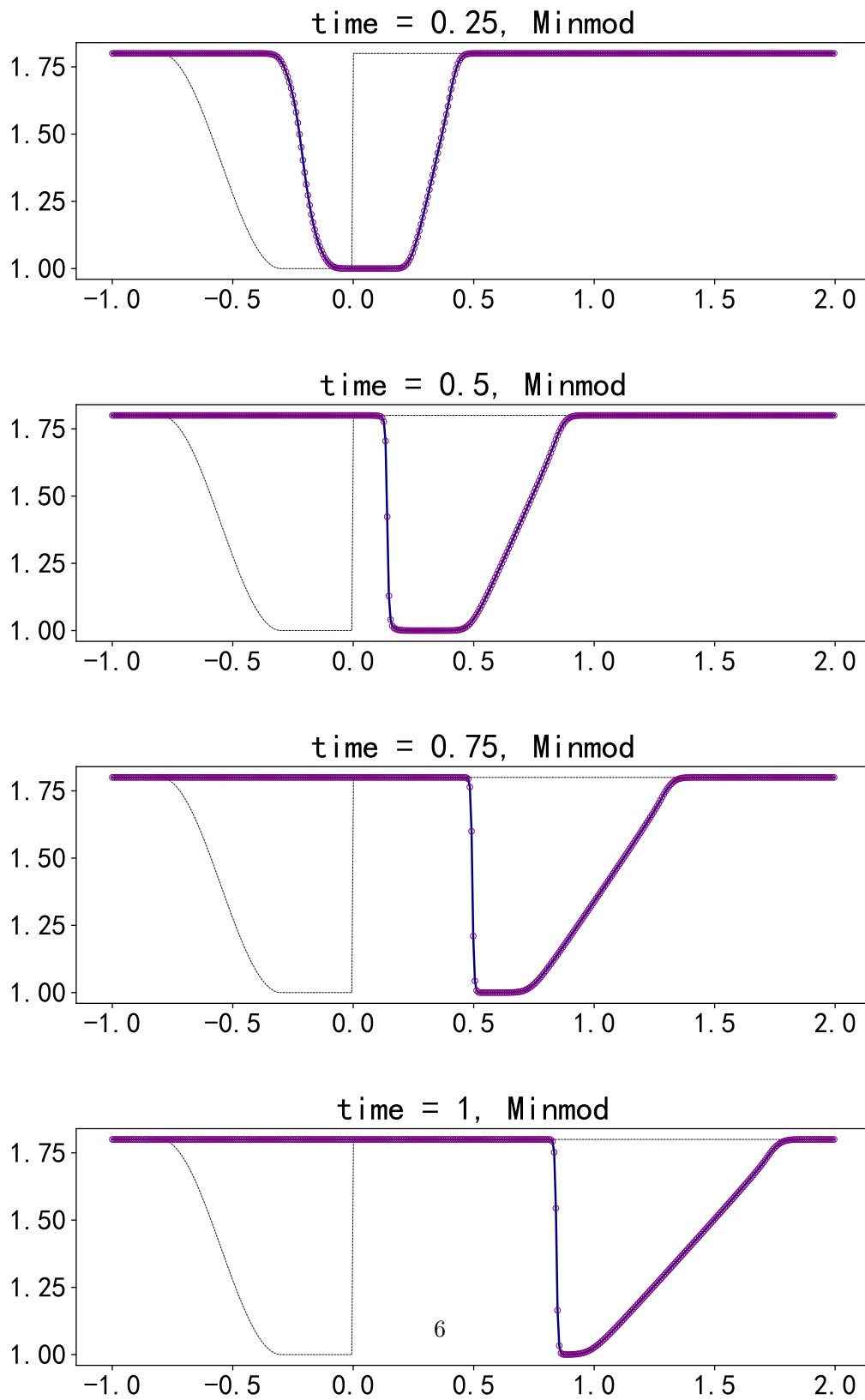


图 2: 方程 (11) 的 Minmode 格式计算结果, 采用了 428 个网格, Courant 系数 C 取为 0.2. 虚线表示数值格式的计算结果, 其中上面的圆圈表示具体的数据; 解析解用实线表示, 初始时刻的值以点线表示. (a) $t = 0.25$, (b) $t = 0.5$, (c) $t = 0.75$, (d) $t = 1.0$.

5 附件

1. assign2.tex – 本报告的 L^AT_EX 文件
2. assign2.pdf – 本报告的 PDF (Portable Document Format) 输出文件
3. References.bib – 文献文件
4. LinearW517005.eps – 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(a)
5. LinearW517050.eps – 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(b)
6. LinearW517095.eps – 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(c)
7. LinearW517100.eps – 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(d)
8. LinearWLW517095.eps – 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(e)
9. LinearWMM517095.eps - 行波方程 (3) 的数值计算结果, 对应图 1(f)
10. Burgers025.eps – Burgers 方程 (11) 的数值计算结果, 对应图 ??(a)
11. Burgers050.eps – Burgers 方程 (11) 的数值计算结果, 对应图 ??(b)
12. Burgers075.eps – Burgers 方程 (11) 的数值计算结果, 对应图 ??(c)
13. Burgers100.eps – Burgers 方程 (11) 的数值计算结果, 对应图 ??(d)

项目作业的一些要点

为了更好地帮助同学们完成项目作业, 现将一些注意的检查要点和评分标准 (括弧中的数字) 罗列如下,

- 期限 (20)
- 完整性/报告/清单/分工 (10)
- 报告源文件和 PDF 输出文件, 源程序 (10)
- 图形文件 (10): PDF 或 EPS (Encapulated PostScript) 格式文件. 鉴于对软件的熟悉程度不同, 不再要求 PDF 格式的图形文件, EPS 格式文件也可接受.
- 规范-语法 (10): 论文的写作规范, 如文献引用, 图/表, 叙述之间的逻辑关联, 等等.

- 变量公式规范 (10)
- 正确性 (10)
- 其它 (5): 结构, 概念, 表达, 排版, 等等

参考文献

Whitham, G. B. (1999). *Linear and Nonlinear Waves*. Pure and applied mathematics. Wiley, New York.