一维气体激波管问题 — 第 3 次作业*

郑惠南†　　高新亮‡

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

讨论一维气体激波管问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论该方程的物理解和数值解的特性, 分析流体中不同波模的物理和数值特性, 请在 **2023 年 4 月 26 日周一 8:40** 前完成并提交.

1 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

†Email: hue@ustc.edu.cn

‡Email: gaoxl@ustc.edu.cn

其中

$$
\begin{aligned}
w =& \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, & (3)\\
f(w) =& uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma-1)E + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho})\frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, & (4)\\
m =& \rho u, & (5)\\
p =& (\gamma-1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2). & (6)
\end{aligned}
$$

这里, ρ, u, p 和 E 分别是密度, 速度, 压力和总能量. 为和经典数值计算结果比较, 取文献 Harten (1983) 中的值, 即 $\gamma = 1.4$, 和

$$
W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

设计两到三种有限差分格式, 编程进行数值计算, 给出图形, 比较和讨论结果. 或者, 利用附件中的 Excel 表格, 生成别的初值条件及解, 对流体力学中的间断问题进行数值计算并作进一步的讨论.

作为参考, 这里给出三个算例, CFL 系数均取 0.5, $t = 0.14$ 时刻的数值的计算结果. 迎风格式, 261 网格的数据如图 1, TVD (Total Variation Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983), 133 网格的数据如图 2, 以及 TVD 格式, 261 网格的数据如图 3. 供大家参考.

2 格式参考

2.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程，

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{8}
$$

其 Lax-Wendroff 格式为

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} =& u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}^n(F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n(F_j^n - F_{j-1}^n)\right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

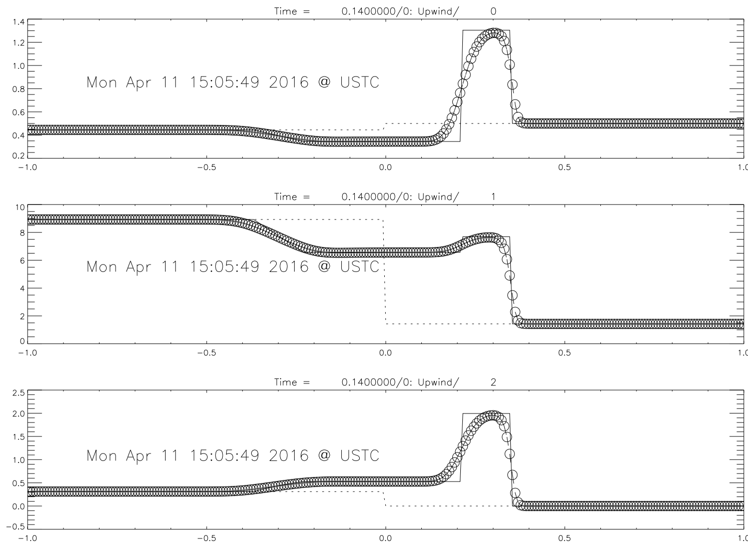

图 1: 迎风格式计算结果, 网格点数为 261. **从上到下分别是密度 ρ, 能量 E 和质量流 $m = \rho u$.** 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号 $\circ$ 标注) 是 $t = 0.14$ 时的数值结果, 实线是对应的真实解.

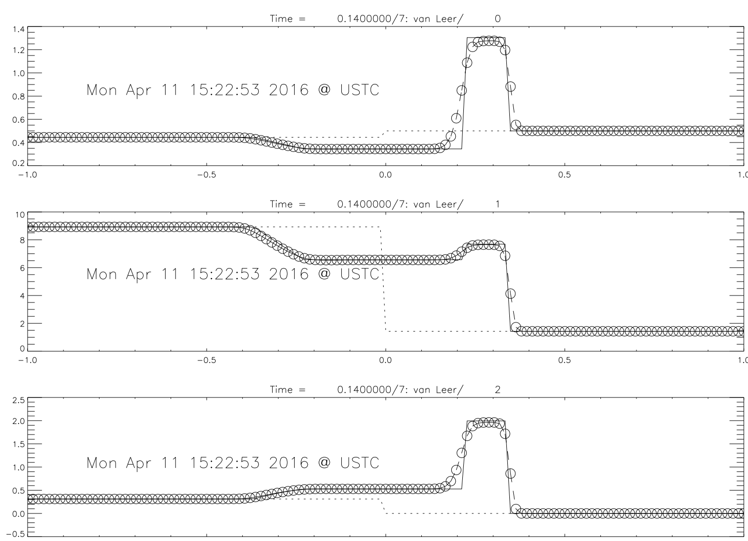

图 2: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 133. 其他标注同图 1.

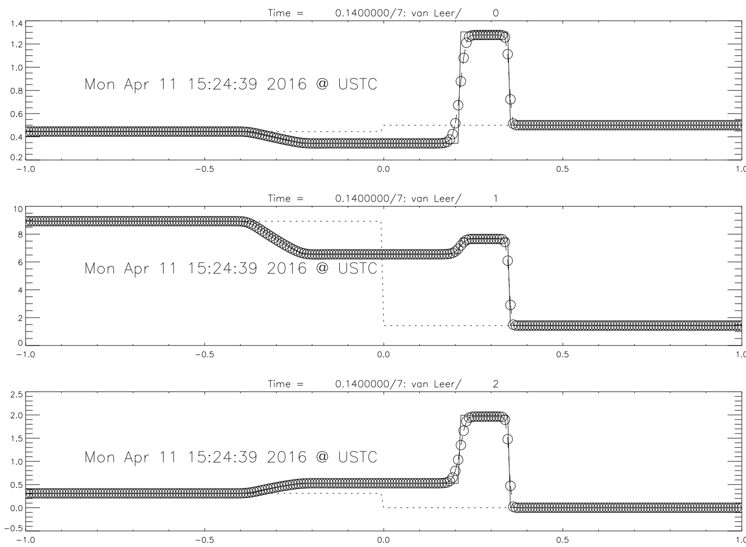

图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 261. 其他标注同图 1.

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式见第 3 节. 单元边界上的值可以取

$$A^n_{j\pm 1/2} = A(u^n_{j\pm 1/2}), \qquad u^n_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(u^n_j + u^n_{j\pm 1}) \tag{10}$$

2.2 非守恒性 Upwind 格式

式 (1) 的非守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

其中

$$U = [u_j] = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \qquad A = A_{ij} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \tag{12}$$

矩阵 A 的特征值为 $u-a$, u, $u+a$ $(a^2=\gamma p/\rho)$, 对应的左右特征向量矩阵为 L 和 R 写为

$$L=[L_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & -\rho a & 1 \\ a^2 & 0 & -1 \\ 0 & \rho a & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$R=[R_{ij}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ -\frac{1}{2\rho a} & 0 & \frac{1}{2\rho a} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

波模分解的方程为

$$\sum_j \left\{ L_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i L_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \tag{15}$$

其中

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} u-a \\ u \\ u+a \end{bmatrix} \tag{16}$$

在变换回原变量方程的形式, 即

$$\sum_i \sum_j \left\{ R_{ki} L_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + R_{ki}\lambda_i L_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \tag{17}$$

并利用 $\sum_i R_{ki}L_{ij}=\delta_{kj}$, 我们有

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_i \sum_j \left\{ R_{ki}\lambda_i L_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \tag{18}$$

迎风格式为

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{n+1} =& u_{k,l}^n \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_i \sum_j \left\{ \mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)\lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \left[u_{j,l}^n - u_{j,l-\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)}^n \right] \right\} \end{aligned} \tag{19}$$

其中下角标 l 对应于空间格点位置, 其他下角标对应于分量.

3 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下 A 的表达式

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & -(\gamma-3)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma\frac{u}{\rho}E & \gamma\frac{1}{\rho}E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

左右特征向量

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\gamma-1}{2c^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}u\left(u+\frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u+\frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \\ 2(H-u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u\left(u-\frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u-\frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$H = \frac{E+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2,$$
$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}.$$

4 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 数值计算结果生成的图形文件. 高新亮对整个文档结构, 规范, 文件清单进行了检查, 确认.

5 附件

1. assign3.tex–本报告 LaTeX 文件.
2. assign3.pdf–本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件
4. GasUpwind261.eps–迎风格式计算结果, 261 网格.
5. GasvanLeer133.eps–van Leer TVD 格式计算结果, 133 网格.

6. GasvanLeer261.eps–van Leer TVD 格式计算结果, 261 网格.

7. Hydrodynamics.xlsx–相关问题 Excel 计算表格, 深绿色单元为输入, 可以变更, 供大家参考. 其中

   (a) Riemann 表格中, B2 为 γ 值, B4–B6 和 E4–E6 分别是左侧和右侧的密度, 质量流及能量的初值. A25–A26 迭代用值, A24 为 A25 和 A26 的平均值. 22 行复制 24 行的值. 当 G24, 即 G22 值为零时, 得到此 Riemann 问题的解. N3 为时间值, 密度, 质量流及能量图形的坐标初值和对应比例分别由 N4–N6 和 O4–O6 调节.

   (b) Hydrodynamics 表格为对应守恒型方程的矩阵特征值, 左右特征向量, 变量在各个波模的分解, 等等. 这些可以用于检查后续高精度格式计算的一些中间结果是否正确.

参考文献

Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.

van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.