

# 一维气体激波管问题 — 第 3 次作业\*

徐均益<sup>†</sup>

余航<sup>‡</sup>

陈宇韬<sup>§</sup>

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

中国科学技术大学物质科学研究院等离子所, 合肥 230026

## 摘要

讨论一维气体激波管问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论该方程的物理理解和数值解的特性, 分析流体中不同波模的物理和数值特性, 请在 **2023 年 4 月 26 日周一 8:40** 前完成并提交.

## 1 引言

## 2 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

---

\*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

<sup>†</sup>ID: SA22214015 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

<sup>‡</sup>ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

<sup>§</sup>ID: SA22214014 Email: chenyt@mail.ustc.edu.cn

其中

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$f(w) = uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + \frac{3-\gamma}{2} \frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \frac{m^2}{\rho}) \frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$m = \rho u, \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2} \rho u^2). \quad (6)$$

这里,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  和  $E$  分别是密度, 速度, 压力和总能量. 为和经典数值计算结果比较, 取文献 Harten (1983) 中的值, 即  $\gamma = 1.4$ , 和

$$W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \quad (7)$$

设计两到三种有限差分格式, 编程进行数值计算, 给出图形, 比较和讨论结果. 或者, 利用附件中的 Excel 表格, 生成别的初值条件及解, 对流体力学中的间断问题进行数值计算并作进一步的讨论.

作为参考, 这里给出三个算例, CFL 系数均取 0.5,  $t = 0.14$  时刻的数值的计算结果. 迎风格式, 261 网格的数据如图 2, TVD (Total Variation Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983), 133 网格的数据如图 3, 以及 TVD 格式, 261 网格的数据如图 4. 供大家参考.

## 3 格式参考

### 3.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

其 Lax-Wendroff 格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n)] \end{aligned} \quad (9)$$

$t = 0.14$      $C = 0.5$     Lax-Wendroff

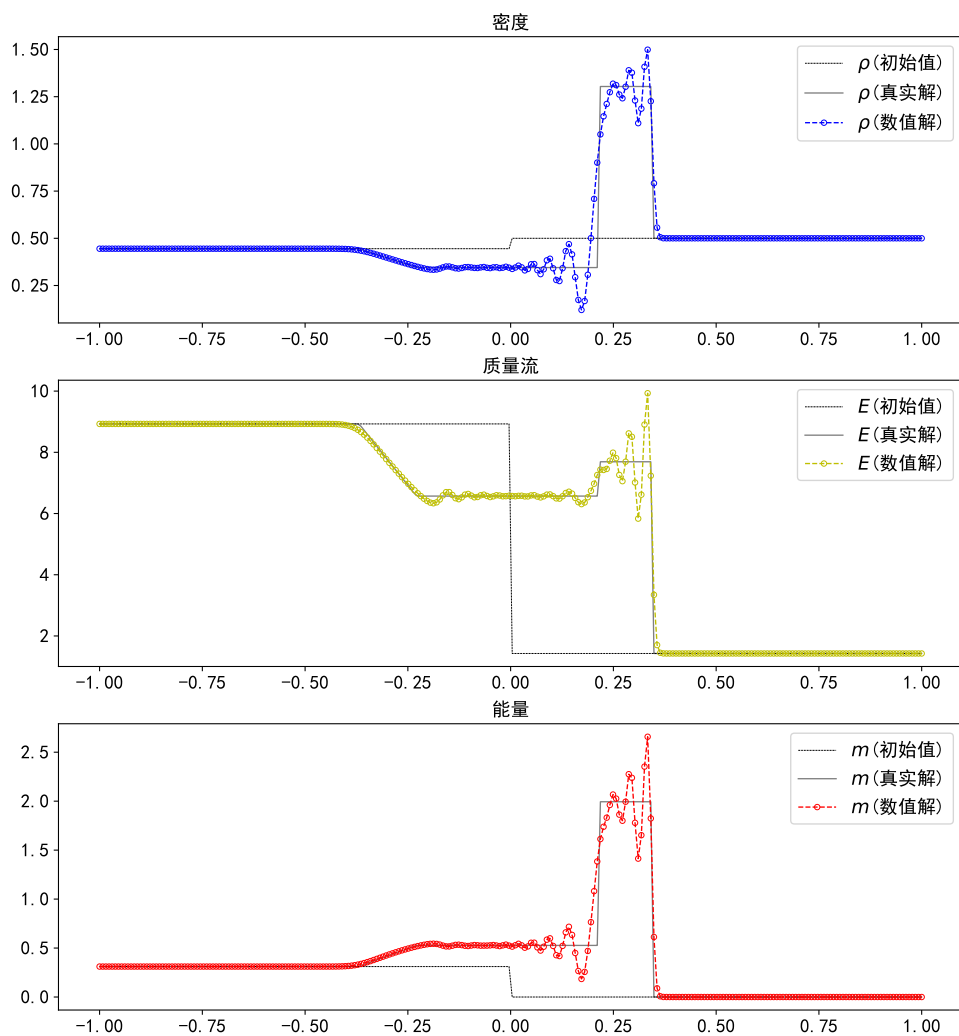


图 1: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 261. 从上到下分别是密度  $\rho$ , 能量  $E$  和质量流  $m = \rho u$ . 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号  $\circ$  标注) 是  $t = 0.14$  时的数值结果, 实线是对应的真实解.

$t = 0.14$     $C = 0.5$    Upwind

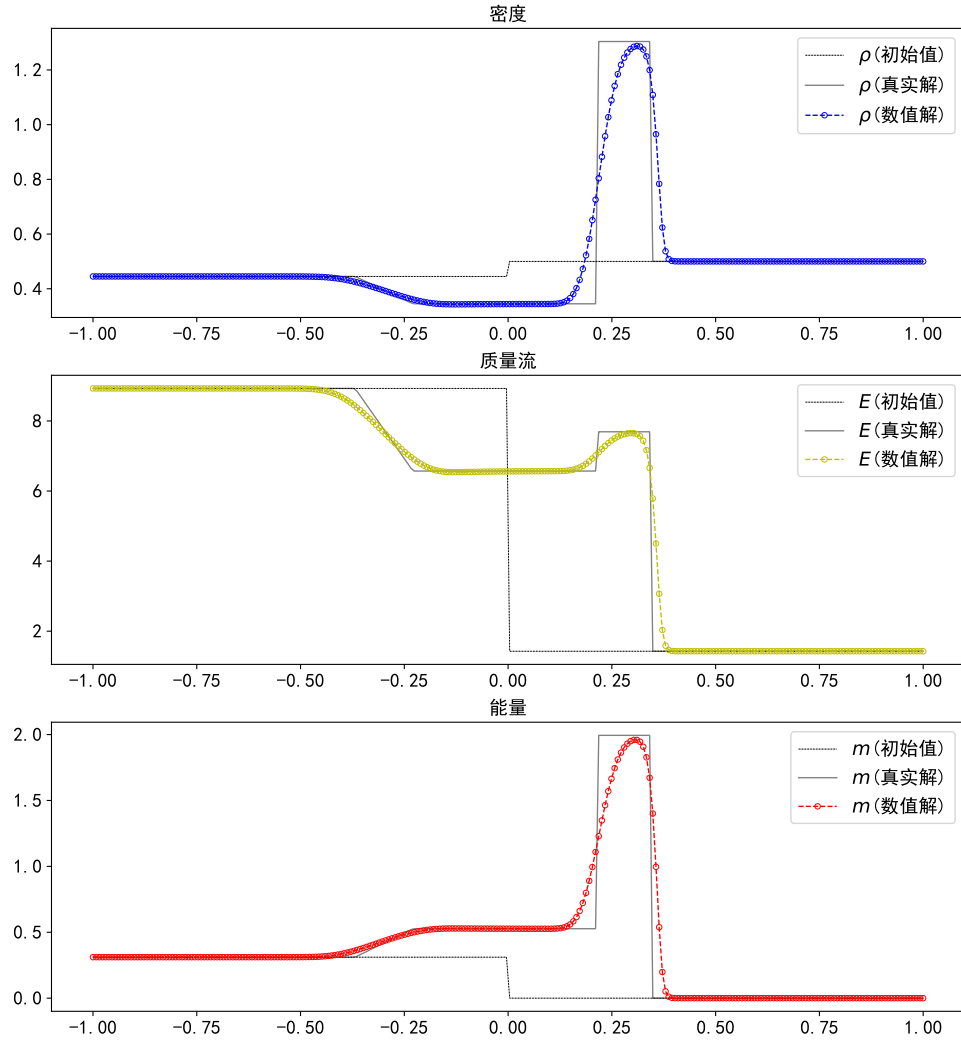


图 2: 迎风格式计算结果, 网格点数为 261. 从上到下分别是密度  $\rho$ , 能量  $E$  和质量流  $m = \rho u$ . 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号  $\circ$  标注) 是  $t = 0.14$  时的数值结果, 实线是对应的真实解.

$t = 0.14$     $C = 0.05$    TVD

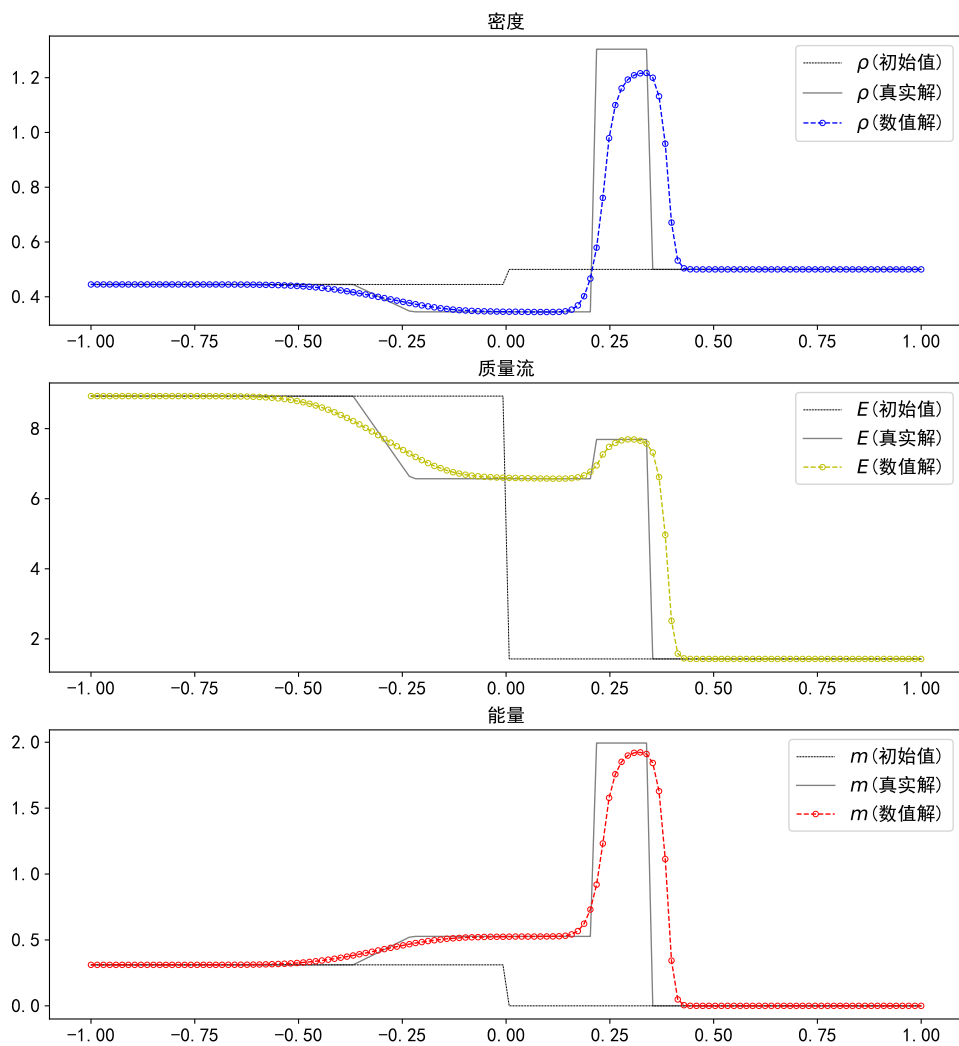


图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 133. 其他标注同图 2.

$t = 0.14$      $C = 0.05$     TVD

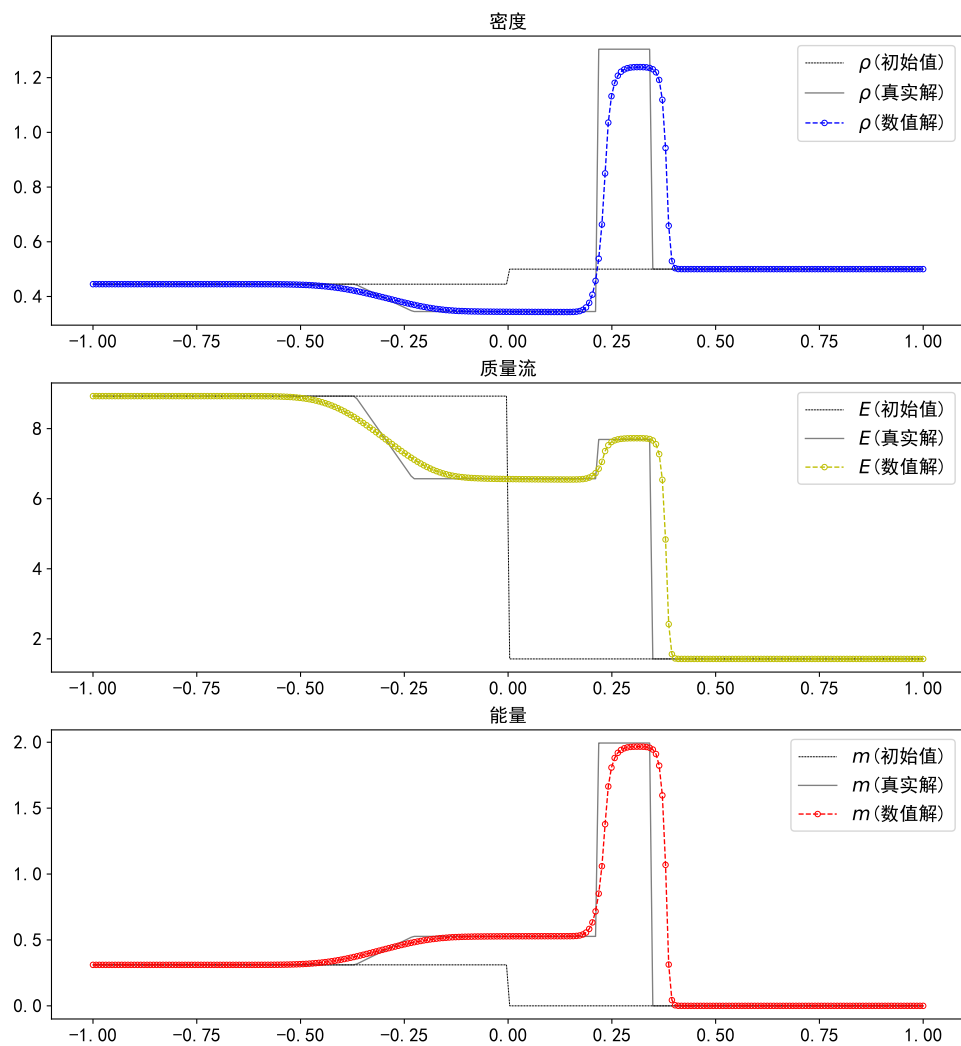


图 4: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 261. 其他标注同图 2.

其中  $A = \frac{\partial F}{\partial u}$ ,  $A$  的表达式见第 4 节. 单元边界上的值可以取

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(u_{j\pm 1/2}^n), \quad u_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \quad (10)$$

### 3.2 非守恒性 Upwind 格式

式 (1) 的非守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

其中

$$U = [u_j] = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad A = A_{ij} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \quad (12)$$

矩阵  $A$  的特征值为  $u - a$ ,  $u$ ,  $u + a$  ( $a^2 = \gamma p/\rho$ ), 对应的左右特征向量矩阵为  $L$  和  $R$  写为

$$L = [L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\rho a & 1 \\ a^2 & 0 & -1 \\ 0 & \rho a & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ -\frac{1}{2\rho a} & 0 & \frac{1}{2\rho a} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

波模分解的方程为

$$\sum_j \left\{ L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \quad (15)$$

其中

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} u - a \\ u \\ u + a \end{bmatrix} \quad (16)$$

在变换回原变量方程的形式, 即

$$\sum_i \sum_j \left\{ R_{ki} L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + R_{ki} \lambda_i L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \quad (17)$$

并利用  $\sum_i R_{ki} L_{ij} = \delta_{kj}$ , 我们有

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_i \sum_j \left\{ R_{ki} \lambda_i L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0, \quad (18)$$

迎风格式为

$$u_{k,l}^{n+1} = u_{k,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_i \sum_j \left\{ \text{sgn}(\lambda_{i,l}^n) \lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \left[ u_{j,l}^n - u_{j,l-\text{sgn}(\lambda_{i,l}^n)}^n \right] \right\} \quad (19)$$

其中下角标  $l$  对应于空间格点位置, 其他下角标对应于分量.

## 4 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下  $A$  的表达式

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma \frac{u}{\rho} E & \gamma \frac{1}{\rho} E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

左右特征向量

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\gamma - 1}{2c^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u \left( u + \frac{2c}{\gamma - 1} \right) & - \left( u + \frac{c}{\gamma - 1} \right) & 1 \\ 2(H - u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u \left( u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) & - \left( u - \frac{c}{\gamma - 1} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2,$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

## 5 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 数值计算结果生成的图形文件. 高新亮对整个文档结构, 规范, 文件清单进行了检查, 确认.



## 6 附件

1. assign3.tex–本报告 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文件.
2. assign3.pdf–本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件
4. GasUpwind261.eps–迎风格式计算结果, 261 网格.
5. GasvanLeer133.eps–van Leer TVD 格式计算结果, 133 网格.
6. GasvanLeer261.eps–van Leer TVD 格式计算结果, 261 网格.
7. Hydrodynamics.xlsx–相关问题 Excel 计算表格, 深绿色单元为输入, 可以变更, 供大家参考. 其中
  - (a) Riemann 表格中, B2 为  $\gamma$  值, B4–B6 和 E4–E6 分别是左侧和右侧的密度, 质量流及能量的初值. A25–A26 迭代用值, A24 为 A25 和 A26 的平均值. 22 行复制 24 行的值. 当 G24, 即 G22 值为零时, 得到此 Riemann 问题的解. N3 为时间值, 密度, 质量流及能量图形的坐标初值和对应比例分别由 N4–N6 和 O4–O6 调节.
  - (b) Hydrodynamics 表格为对应守恒型方程的矩阵特征值, 左右特征向量, 变量在各个波模的分解, 等等. 这些可以用于检查后续高精度格式计算的一些中间结果是否正确.

## 参考文献

- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.
- van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.