一维磁流体力学激波 — 第 4 次作业*

郑惠南　　高新亮[†]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

讨论一维磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 激波问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论磁声波的特性, 分析数值格式的计算效果, 请在 **2023 年 5 月 26 日周五 08:40** 前完成并提交.

1　一维磁流体力学激波 (Jeffrey et al., 1964)

守恒型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0. \tag{1}$$

间断两侧满足关系

$$[\tilde{\lambda} U - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_1] = 0 \tag{2}$$

或者

$$\tilde{\lambda}[U] = [\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_1]. \tag{3}$$

其中 $\tilde{\lambda}$ 是间断移动的速度, $\boldsymbol{n}_1$ 为间断面的单位法向量.

对一维磁流体, 设所有的物理量只是 x 和 t 的函数,

$$U_t + F_x = 0 \tag{4}$$

*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

[†]Email: gaoxl@ustc.edu.cn

这里

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v_x\\ \frac{1}{2}\rho v^2+\rho e+p_m\\ \rho v_y\\ H_y\\ \rho v_z\\ H_z\end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v_x\\ \rho v_x^2+p^*\\ v_x\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho e+p_m\right)+v_x p^*-\frac{\mu}{4\pi}H_x\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H}\\ \rho v_y v_x-\frac{\mu}{4\pi}H_x H_y\\ H_y v_x-v_y H_x\\ \rho v_z v_x-\frac{\mu}{4\pi}H_x H_z\\ H_z v_x-v_z H_x\end{bmatrix}. \tag{6}$$

其中 ρ, p, e, $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$, 和 $\boldsymbol{H}=(H_x,H_y,H_z)$ 分别是密度, 压强, 内能, 速度, 和磁场. $p_m=\mu H^2/8\pi$ 为磁压, $p^*=p+p_m$ 为总压强. 由磁场无散条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$, H_x 是常数, 公式 (3) 因此化为

$$[\rho\tilde{v}_x]=0 \tag{7}$$

$$[\rho v_x\tilde{v}_x+p^*]=0 \tag{8}$$

$$\left[\tilde{v}_x\left(\frac{\rho}{2}v^2+\rho e+\frac{\mu}{8\pi}H^2\right)+v_x p^*-\frac{\mu}{4\pi}H_x\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H}\right]=0 \tag{9}$$

$$\left[\rho v_y\tilde{v}_x-\frac{\mu}{4\pi}H_x H_y\right]=0 \tag{10}$$

$$[\tilde{v}_x H_y-H_x v_y]=0 \tag{11}$$

$$\left[\rho v_z\tilde{v}_x-\frac{\mu}{4\pi}H_x H_z\right]=0 \tag{12}$$

$$[\tilde{v}_x H_z-H_x v_z]=0 \tag{13}$$

此处 $\tilde{v}_x$ 相对于间断流体速度的 x 分量, 即

$$\tilde{v}_x=v_x-\tilde{\lambda} \tag{14}$$

假设 $\tilde{\lambda}$ 为常数. 使用随间断运动的坐标系, 在这个坐标系中速度 $\boldsymbol{v}'=(v'_x,v'_y,v'_z)$, 磁场 $\boldsymbol{H}'=(H'_x,H'_y,H'_z)$. Galilean 变换的结果是 $\boldsymbol{H}$ 不变, 速度

由下面方程决定

$$
\begin{aligned}
v'_x =& v_x - \tilde{\lambda} = \tilde{v}_x \\
v'_y =& v_y \\
v'_z =& v_z.
\end{aligned}
$$

在不造成混淆的情况下, 直接用 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 和 $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 表示 $\mathbf{v}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$. 将间断位置设为坐标原点, 即

$$x = 0.$$

定义

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2}(Q_0 + Q_1),$$

角标 0 和 1 分别表示间断两侧 (波前/上游和波后/下游) 的量. 进而可以将跃变关系 (7)-(13) 表示为

$$m[\tau] - [v_x] = 0 \tag{15}$$

$$m[v_x] + [p] + \frac{\mu}{4\pi} \langle \mathbf{H} \rangle \cdot [\mathbf{H}] = 0 \tag{16}$$

$$m[v_y] - \frac{\mu}{4\pi} H_x [H_y] = 0 \tag{17}$$

$$m \langle \tau \rangle [H_y] + \langle H_y \rangle [v_x] - H_x [v_y] = 0 \tag{18}$$

$$m[v_z] - \frac{\mu}{4\pi} H_x [H_z] = 0 \tag{19}$$

$$m \langle \tau \rangle [H_z] - H_x [v_z] = 0 \tag{20}$$

这里

$$\tau = \rho^{-1}, \tag{21}$$

$$m = \rho_1 \tilde{v}_{x1} = \rho_0 \tilde{v}_{x0}. \tag{22}$$

同时选取坐标系使得 $\langle H_z \rangle = 0$. 这样, 很容易得到关于 m (或者激波速度 $\tilde{\lambda}$) 的方程 (力学关系), 快慢磁声激波情况下为

$$(m^2 + [\tau]^{-1}[p]) \left(m^2 - \langle \tau \rangle^{-1} \frac{\mu H_x^2}{4\pi} \right) = m^2 \langle \tau \rangle^{-1} \frac{\mu}{4\pi} \langle H_y \rangle^2 \tag{23}$$

横波 (Alfven 波) 情况下为,

$$\langle \tau \rangle m^2 - \frac{\mu H_x^2}{4\pi} = 0. \tag{24}$$

能量方程 (9) 可以改写为,

$$m\left\{\left[e+\frac{\mu}{8\pi}\tau H^{2}\right]+[\tau]\left(\langle p\rangle+\frac{\mu}{8\pi}\left\langle\mathbf{H}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{2}}\right\rangle-\frac{\mu}{8\pi}H_{x}^{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\mu}{4\pi}[\tau\mathbf{H}_{\mathbf{t}}]\cdot\langle\boldsymbol{H}_{\mathbf{t}}\rangle\right\}=\mathbf{0} \tag{25}$$

此处 $\boldsymbol{H}_t$ 是横向磁场

$$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{H}-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1.$$

最后得到

$$m=0 \tag{26}$$

或

$$[e]+\langle p\rangle[\tau]=-\frac{\mu}{16\pi}[\tau][\mathbf{H}_{\mathbf{t}}]^{\mathbf{2}}. \tag{27}$$

(27) 称为广义 Rankine-Hugoniot 关系. (26) 为接触间断条件.

结合方程 (23), (24) 和 (26), 将磁流体力学间断分为快慢激波, 横向间断 (激波) 和接触间断.

不失一般性, 我们可以选取坐标系使得激波前 $H_x>0$, $H_{y0}>0$, 且假定 x 轴指向 $\boldsymbol{n}$ 的正方向, $\boldsymbol{n}$ 为激波前指向激波后的单位向量, 即流体流入的方向. 整理后, 可将快慢磁声激波关系表示为

$$\bar{\eta}=h\left\{\frac{-\frac{1}{2}\gamma h\sin\theta_0-(1-s_0)\pm\sqrt{R(h)}}{2s_0\sin\theta_0-(\gamma-1)h}\right\}, \tag{28}$$

$$\bar{Y}=\frac{\gamma}{s_0}\left\{-\frac{1}{2}h^2+h\left(\frac{\frac{1}{2}\gamma h\sin\theta_0-(1-s_0)\pm\sqrt{R(h)}}{2s_0\sin\theta_0-(\gamma-1)h}\right)\right\} \tag{29}$$

$$=\frac{\gamma}{s_0}\left\{-\frac{1}{2}h^2+h\left(\frac{\bar{\eta}/h-\sin\theta_0}{1-(\bar{\eta}/h)\sin\theta_0}\right)\right\}, \tag{30}$$

$\bar{\eta}$, η. h, $\bar{Y}$, θ_0, s_0 和 R 的定义如下,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} &= \frac{[\rho]}{\rho_0}, \qquad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_0} = 1 + \bar{\eta} \\
h &= \frac{[H_y]}{H_0}, \qquad H_j = \sqrt{H_x^2 + H_{yj}^2} \qquad (j = 0, 1) \\
\bar{Y} &= \frac{[p]}{p_0}, \qquad Y = \frac{p_1}{p_0} = 1 + \bar{Y} \\
s_j &= \frac{\gamma p_j}{(\mu/4\pi) H_j^2} \qquad (j = 0, 1) \\
\sin\theta_j &= \frac{H_{yj}}{H_j}, \qquad 0^\circ < \theta_j < 90^\circ \qquad (j = 0, 1) \\
R(h) &= h^2 [\frac{1}{4}\gamma^2 \sin^2\theta_0 - (\gamma - 1)] + h \sin\theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \\
&\quad + 4 s_0 \sin^2\theta_0 + (1 - s_0)^2.
\end{aligned} \tag{31}$$

此外

$$\frac{\tilde{v}_{x1}}{b_{x1}} = \eta^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{v}_{x0}}{b_{x0}} = \frac{1}{[1 - (\bar{\eta}/h)\sin\theta_0]^{1/2}} \tag{32}$$

从而可以直接求得激波速度 $\tilde{\lambda}$ $(= v_{x0} - \tilde{v}_{x0})$.

$[v_y]$ 表示为

$$\frac{[v_y]}{b_{x1}} = \frac{b_{x1} h}{\tilde{v}_{x1} \cos\theta_0} = \frac{h}{\cos\theta_0} \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}}{h}\right) \sin\theta_0\right]^{1/2}. \tag{33}$$

给定 h 和激波前状态, 我们可以确定激波速度以及激波后的态. 用 v_n, $\tilde{v}_n$ 和 H_n 取代 v_x, $\tilde{v}_x$ 和 H_x, 可以得到不依赖于 x 轴选择的一般形式. 对于 (1 型) 快磁声激波和慢激波, 激波上下游的关系式如下文所述.

1.1 1 型快激波

$$h_f = \frac{[H_y]}{H_0} \tag{34}$$

$$s_0 \geq 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\sin^2\theta_0, \quad 0 < h_f \leq \hat{\hat{h}}_f \quad \left(\hat{\hat{h}}_f = \frac{2}{\gamma - 1}\sin\theta_0\right) \tag{35}$$

$$\bar{\eta}_f = h_f \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\gamma h_f \sin\theta_0 - (1 - s_0) + \sqrt{R(h_f)}}{2s_0\sin\theta_0 - (\gamma - 1)h_f} \right\},$$

$$\bar{\eta}_{f\,\max} = \frac{2}{\gamma - 1} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_f &= \frac{\gamma}{s_0}\left\{ -\frac{1}{2}h_f^2 + h_f \frac{-\frac{1}{2}\gamma h_f\sin\theta_0 - (1 - s_0) + \sqrt{R(h_f)}}{2s_0\sin\theta_0 - (\gamma - 1)h_f} \right\}, \\ &= \frac{\gamma}{s_0}\left\{ -\frac{1}{2}h_f^2 + h_f \frac{(\bar{\eta}_f/h_f) - \sin\theta_0}{1 - (\bar{\eta}_f/h_f)\sin\theta_0} \right\}, \quad \bar{Y}_{f\,\max} = \infty \end{aligned} \tag{37}$$

$$\frac{\tilde{v}^f_{n1}}{b^f_{n1}} = \eta_f^{-1/2}\frac{\tilde{v}^f_{n0}}{b^f_{n0}} = \frac{1}{[1 - (\bar{\eta}_f/h_f)\sin\theta_0]^{1/2}} \tag{38}$$

$$\frac{[v^f_n]}{b^f_{n1}} = -\bar{\eta}_f \frac{\tilde{v}^f_{n1}}{b^f_{n1}} = -\frac{\bar{\eta}}{[1 - (\bar{\eta}_f/h_f)\sin\theta_0]^{1/2}} \tag{39}$$

$$\frac{[v^f_y]}{b^f_{n1}} = \frac{b^f_{n1}}{\tilde{v}^f_{n1}}\frac{h_f}{\cos\theta_0} = \frac{h_f}{\cos\theta_0}\left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}_f}{h_f}\right)\sin\theta_0\right]^{1/2} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} R(h_f) = h_f^2 \left[\frac{1}{4}\gamma^2\sin^2\theta_0 - (\gamma - 1)\right] + h_f\sin\theta_0(2 - \gamma)(1 + s_0) \\ + 4s_0\sin^2\theta_0 + (1 - s_0)^2 \end{aligned} \tag{41}$$

1.2 慢激波

$$h_s = -\frac{[H_y]}{H_0}, \quad 0 \le h_s \le \sin\theta_0 \quad (0 < \theta_0 < 90^\circ) \tag{42}$$

$$\bar{\eta}_s = h_s \left\{ \frac{(1-s_0) - \frac{1}{2}\gamma h_s \sin\theta_0 + \sqrt{R^+(h_s)}}{(\gamma-1)h_s + 2s_0 \sin\theta_0} \right\} \tag{43}$$

$$\bar{Y}_s = \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{h_s^2}{2} + h_s \left[\frac{(1-s_0) + \frac{1}{2}\gamma h_s \sin\theta_0 + \sqrt{R^+(h_s)}}{(\gamma-1)h_s + 2\sin\theta_0} \right] \right\} \tag{44}$$

$$\frac{\tilde{v}_{n1}^s}{b_{n1}^s} = \frac{1}{\eta_s^{1/2}} \frac{\tilde{v}_{n0}^s}{b_{n0}^s} = \frac{1}{[1 + (\bar{\eta}_s/h_s)\sin\theta_0]^{1/2}} \tag{45}$$

$$\frac{[v_n^s]}{b_{n1}^s} = -\bar{\eta}_s \frac{\tilde{v}_{n1}^s}{b_{n1}^s} = -\frac{\bar{\eta}_s}{[1 + (\bar{\eta}_s/h_s)\sin\theta_0]^{1/2}} \tag{46}$$

$$\frac{[v_y^s]}{b_{n1}^s} = -\frac{b_{n1}^s}{\tilde{v}_{n1}^s} \frac{h_s}{\cos\theta_0} = -\frac{h_s}{\cos\theta_0}[1 + (\bar{\eta}_s/h_s)\sin\theta_0]^{1/2} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} R^+(h_s) = {} & h_s^2[\frac{1}{4}\gamma^2 \sin^2\theta_0 - (\gamma-1)] - h_s \sin\theta_0 (2-\gamma)(1+s_0) \\ & + 4s_0 \sin^2\theta_0 + (1-s_0)^2 \end{aligned} \tag{48}$$

2 数值实验

考虑下列初值问题

$$U(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} U_L, & x < x_0 \\ U_R, & x > x_0 \end{cases} \tag{49}$$

或者

$$W(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < x_0 \\ W_R, & x > x_0 \end{cases} \tag{50}$$

的有限差分数值计算. 这里 U 的表达式由方程 (5) 给出, 而

$$W = \begin{bmatrix} \rho, p, v_x, v_y, v_z, H_y, H_z \end{bmatrix}^T. \tag{51}$$

上标 T 表示转置操作. 取 $\gamma = 5/3$, $\mu = 1$, $H_x = 5$. 分别就下面两种初值条件, 设计有限差分格式进行数值求解并作图讨论结果.

2.1 较弱的快慢激波

取 $x_0 = 0.0$, 快激波条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 2.121, 4.981, -13.27, -0.163, -0.6521, 2.572, 10.29\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{52}
$$

慢激波条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 2.219, 0.4442, 0.5048, 0.0961, 0.0961, 1, 1\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{53}
$$

其中快激波的计算结果如图 1 所示.

2.2 一维 MHD 快激波 (Mach 数为 10)(Dai et al., 1994)

取 $x_0 = 0.2$, 快磁声激波的初值条件为[1]

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 3.896, 305.9, 0, -0.058, -0.226, 3.951, 15.8\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{54}
$$

作为参考, 使用 TVD (Total Variance Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 的数值计算结果如图 2 所示.

2.3 一维 MHD 慢激波 (Mach 数为 3.5)(Dai et al., 1994)

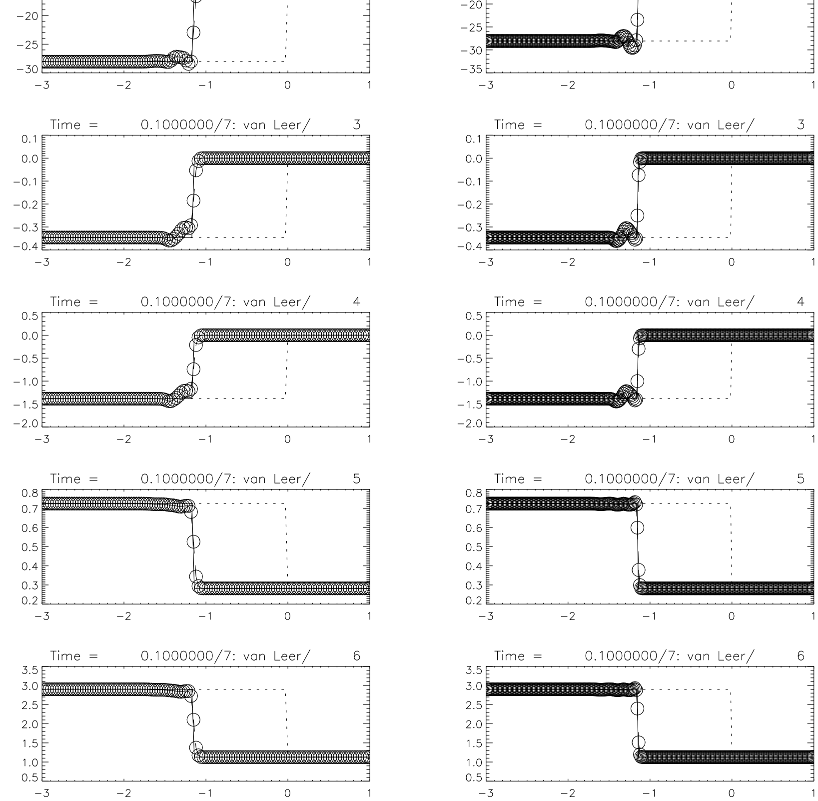
同样取 $x_0 = 0.2$, 慢磁声激波的初值条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{55}
$$

作为参考, 使用 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 的数值计算结果如图 3 所示.

附件 Excel 表给出用激波关系计算的上下游变量值. 表 Dai1994 为依据文献 Dai et al. (1994) 给出的初值, 表 FnS 是简单地复制表 Dai1994 并改变

[1]根据附件 Excel 表计算得到, 和文献 Dai et al. (1994) 稍有出入.



(a) (b)

图 1: 初值条件 (52) 情况下的快激波在 $t = 0.1$ 时的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 计算结果. 从上到下数据为无量纲形式的密度, 能量, 质量流和磁场垂直分量. (a) 网格数为 133; (b) 网格数为 261.

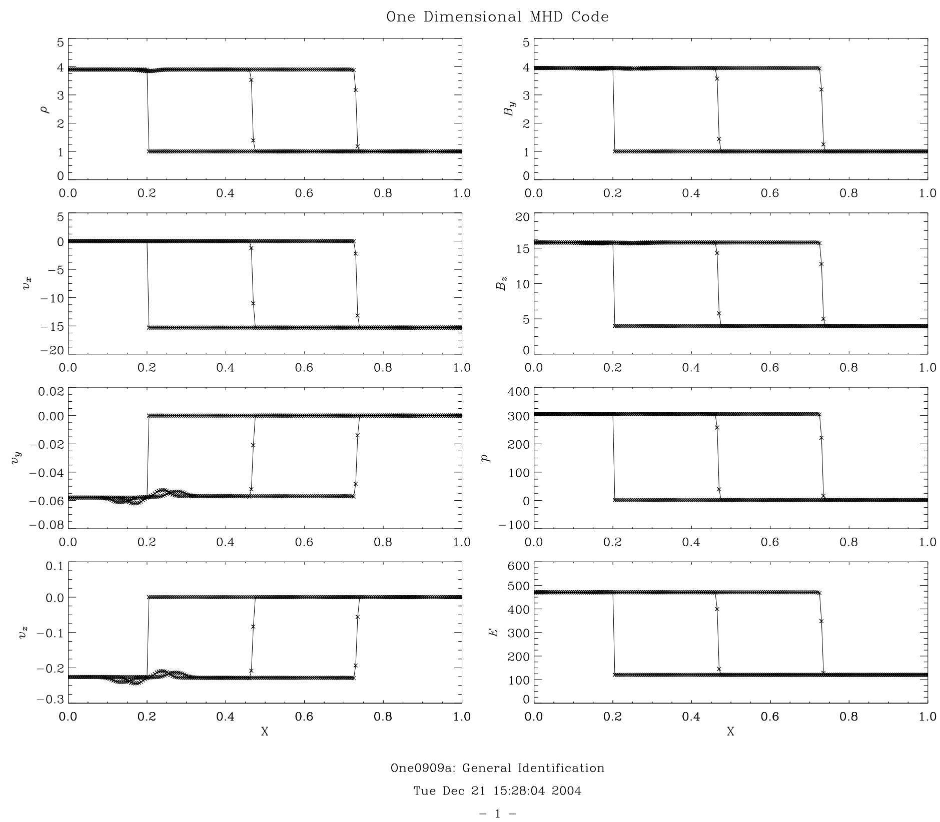


图 2: 初值条件 (54) 情况下快激波的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 对应于 $t = 0$, 0.05 和 0.1 时的计算结果.

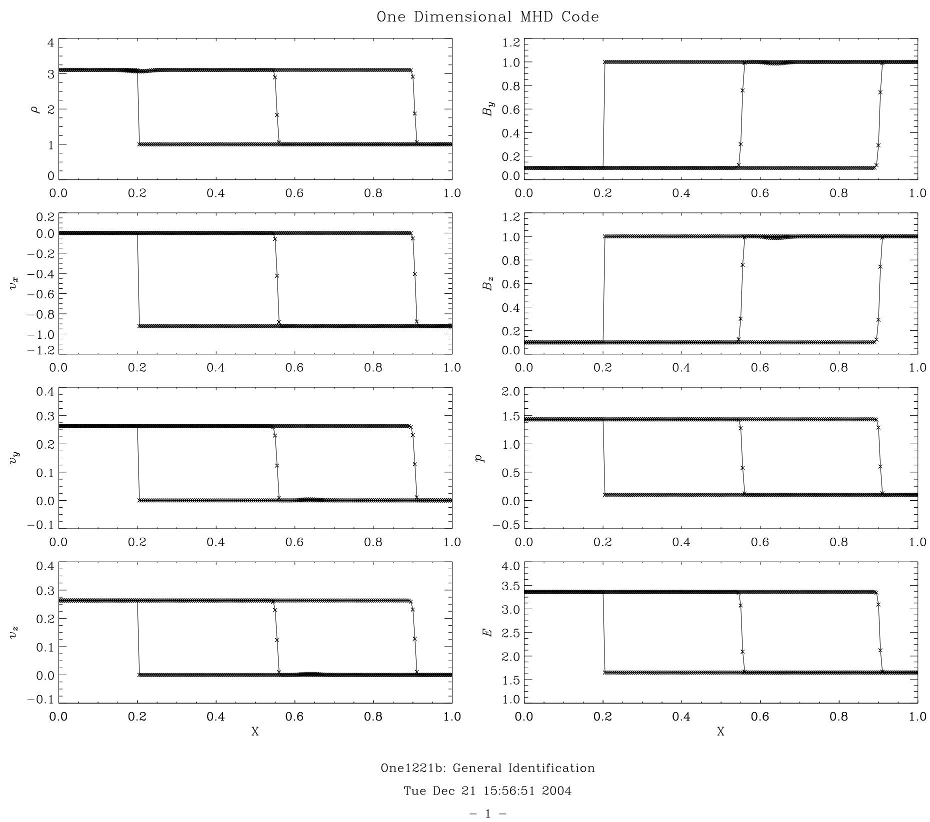


图 3: 初值条件 (55) 情况下慢激波的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 对应于 $t = 0$, 0.8 和 1.6 时计算结果.

单元 D2, N2 得到的另一组初值, 此时红色部分的数据没有用处. 其中, B-D, F-H 列为快激波数据, L-M, P-R 列为慢激波数据. 蓝色区域为输入, 红色数据为文献 Dai et al. (1994) 中的数据 (可能有误), B-D 和 L-M 为 Gauss 单位制数值, F-H, P-R 为无量纲单位数值 (具体方程和说明见第 4 节), C28, G28 为快激波速度 (正方向定义为上游指向下游, 负值表示从下游指向上游, 即向右传播), M28, Q28 为慢激波速度 (负值同样表示下游向上游传播).

后面两个激波较强, 特别是快激波, 如果觉得数值计算上有困难, 可以只完成前面较弱激波的计算.

3 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 数值计算结果生成的图形文件. 高新亮对整个文档结构, 规范, 文件清单进行了检查, 确认.

4 无量纲守恒形式方程

如果要使用无量纲数值, 可以将磁流体力学方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{56}$$

其中

$$U=\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^2+H_y^2+H_z^2+\frac{\beta p}{\gamma-1} \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \tag{57}$$

$$F=\begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x\left(v^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\beta p}{\rho}\right)+2(H_y^2 v_x+H_z^2 v_x-H_x H_y v_y-H_x H_z v_z) \\ \rho v_x^2+\frac{\beta}{2}p+\frac{1}{2}(H_y^2+H_z^2) \\ \rho v_x v_y-H_x H_y \\ \rho v_x v_z-H_x H_z \\ v_x H_y-v_y H_x \\ v_x H_z-v_z H_x \end{bmatrix} \tag{58}$$

这里 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$. 若取 $\rho_0=1$, $p_0=1$, $v_0=1$, $H_0=1/\sqrt{4\pi}$, 则 $\beta=2$.

5 附件

1. assign4.tex–本报告 LaTeX 源文件
2. assign4.pdf–本报告 PDF (Portable Document Format) 输出文件
3. References.bib – 文献文件
4. WFast077.eps–初值条件 (52) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 133 网格, 对应图 1 (a)
5. WFast261.eps–初值条件 (52) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 261 网格, 对应图 1 (b)
6. FShockNum.eps–初值条件 (54) 情况下 (快磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 2
7. SShockNum.eps–初值条件 (55) 情况下 (慢磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 3

8. MHDShock.xlsx – 快慢激波两侧态分析的 EXCEL 表格文件

参考文献

DAI W, WOODWARD P R, 1994. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. J. Comput. Phys., 115: 485-514.

HARTEN A, 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J. Comput. Phys., 49: 357.

JEFFREY A, TANIUTI T, 1964. Mathematics in science and engineering - a series of monographs and textbooks: Vol. 9 non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics[M]. New York / London: Academic Press.

VAN LEER B, 1974. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme [J/OL]. Journal of Computational Physics, 14: 361-370. DOI: 10.1016/0021-9991(74)90019-9.