一维磁流体力学激波 — 第 4 次作业*

徐均益† 余航‡ 陈宇韬§

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

中国科学技术大学物质科学研究院等离子所, 合肥 230026

摘要

研究讨论一维磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 激波问题的有限差分数值解法, 主要采用守恒形式的 Lax-Wendroff 格式，结合理论分析讨论磁声波的特性, 以及分析数值格式的计算效果。以及其他格式如隐格式和迭代法的相关尝试。

1 引言

磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 是磁流体的宏观描述，MHD 方程将流体力学，麦克斯韦方程以及洛仑兹力结合起来，是一个多元非线性方程。其对应的 MHD 模拟是太阳物理里面非常常用的手段，比如磁绳爆发模拟等等。在本次作业中，我们在上次一维气体激波管问题的基础上，添加磁流体力学方程组，对一维磁流体力学激波问题进行模拟和分析。

2 理论介绍

本次我们采用无量纲数值的守恒形式, 将磁流体力学方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

†ID: SA22214015 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

‡ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

§ID: SA22214014 Email: chenyut@mail.ustc.edu.cn

其中

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v^2+H_y^2+H_z^2+\frac{\beta p}{\gamma-1}\\ \rho v_x\\ \rho v_y\\ \rho v_z\\ H_y\\ H_z\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v_x\\ \rho v_x\left(v^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\beta p}{\rho}\right)+2(H_y^2 v_x+H_z^2 v_x-H_xH_yv_y-H_xH_zv_z)\\ \rho v_x^2+\frac{\beta}{2}p+\frac{1}{2}(H_y^2+H_z^2)\\ \rho v_xv_y-H_xH_y\\ \rho v_xv_z-H_xH_z\\ v_xH_y-v_yH_x\\ v_xH_z-v_zH_x\end{bmatrix} \tag{3}$$

这里 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$. 若取 $\rho_0=1$, $p_0=1$, $v_0=1$, $H_0=1/\sqrt{4\pi}$, 则 $\beta=2$，其中 $A=\frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式为

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{(\gamma-1)v^2-2v_x^2}{2}&\frac{\gamma-1}{2}&(3-\gamma)v_x&(1-\gamma)v_y&(1-\gamma)v_z&(2-\gamma)H_y&(2-\gamma)H_z\\ -v_xv_y&0&v_y&v_x&0&-H_x&0\\ -v_xv_z&0&v_z&0&v_x&0&-H_x\\ \frac{H_xv_y-H_yv_x}{\rho}&0&\frac{H_y}{\rho}&-\frac{H_x}{\rho}&0&v_x&0\\ H_xv_z-H_zv_x&0&\frac{H_z}{\rho}&0&-\frac{H_x}{\rho}&0&v_x\end{bmatrix} \tag{4}$$

矩阵第二行 7 个元素分别为

$$-\frac{2(H_y^2+H_z^2)v_x(1-\gamma)-2H_x(H_yv_y+H_zv_z)(1-\gamma)-pv_x\beta\gamma+v_xv^2(2-3\gamma+\gamma^2)\rho}{(1-\gamma)\rho} \tag{5a}$$

$$\gamma v_x \tag{5b}$$

$$-((-\gamma E\rho+(\gamma-2)H_y^2\rho+(\gamma-2)H_z^2\rho+3(\gamma-1)m_x^2+(\gamma-1)m_y^2+(\gamma-1)m_z^2)/\rho^2) \tag{5c}$$

$$-((2(H_xH_y\rho+(\gamma-1)m_xm_y))/\rho^2) \tag{5d}$$

$$-((2(H_xH_z\rho+(\gamma-1)m_xm_z))/\rho^2) \tag{5e}$$

$$-((2(H_xm_y+(\gamma-2)H_ym_x))/\rho) \tag{5f}$$

$$-((2(H_xm_z+(\gamma-2)H_zm_x))/\rho) \tag{5g}$$

其中 $m_x=\rho v_x, m_y=\rho v_y, m_z=\rho v_z$.

3 数值格式介绍

本次实验我们尝试设计多种格式: Upwind, Lax-Wendroff, TVD，实现了两支间断较小的激波的模拟，其中 Upwind 和 TVD 较为稳定。

3.1 数值实验设计

考虑下列初值问题

$$U(x,t)|_{t=0}=\begin{cases} U_L, & x<x_0 \\ U_R, & x>x_0 \end{cases} \tag{6}$$

或者

$$W(x,t)|_{t=0}=\begin{cases} W_L, & x<x_0 \\ W_R, & x>x_0 \end{cases} \tag{7}$$

的有限差分数值计算. 这里 U 的表达式由方程 (2) 给出, 具体实验时需要将 W 转化成 U，然后再代入数值程序中进行计算。

$$W=\left[\ \rho,p,v_x,v_y,v_z,H_y,H_z\ \right]^T. \tag{8}$$

上标 T 表示转置操作. 取 $\gamma=5/3$, $\mu=1$, $H_x=5$. 分别就如下初值条件设计实验

3.1.1 较弱的快激波

取 $x_0 = 0.0$, 快激波条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 2.121, 4.981, -13.27, -0.163, -0.6521, 2.572, 10.29\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{9}
$$

3.1.2 较弱的慢激波

取 $x_0 = 0.0$, 慢激波条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 2.219, 0.4442, 0.5048, 0.0961, 0.0961, 1, 1\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{10}
$$

3.1.3 一维 MHD 快激波

取 $x_0 = 0.2$, 快磁声激波的初值条件为[1]

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 3.896, 305.9, 0, -0.058, -0.226, 3.951, 15.8\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{11}
$$

3.2 一维 MHD 慢激波

同样取 $x_0 = 0.2$, 慢磁声激波的初值条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{12}
$$

4 实验结果及分析

4.1 Lax-Wendroff 格式

Lax-Wendroff 格式适用于守恒型方程

$$
\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \tag{13}
$$

[1] 根据附件 Excel 表计算得到, 和文献 Dai et al. (1994) 稍有出入.

其中差分格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}^n(F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n(F_j^n - F_{j-1}^n)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式见式 (4)．单元边界上的值可以取

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(u_{j\pm 1/2}^n), \qquad u_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \tag{15}$$

4.2 Upwind 格式

Upwind 格式既适用于守恒型方程，也适用于非守恒方程，本实验设计使用非守恒方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

差分形式为

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{n+1} =& u_{k,l}^n \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_i \sum_j \left\{\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)\lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \left[u_{j,l}^n - u_{j,l-\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)}^n\right]\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

因为分解特征值之后，其特征值的物理意义为传播的波速，所以其正负号决定了迎风格式的差分方向。

4.3 TVD 格式

TVD 格式适用于非守恒方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

TVD 全称为 *Total Variat Diminishing*，即总变差不变或减小，代表着震荡的剧烈程度减少，能保证迭代过程中不发散。其中 Minmod 为某一种 TVD 格式，也是这次实验所采用的方法。Minmod 差分形式为

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{n+1} =& u_{k,l}^n \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_i \sum_j \left\{\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)\lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \left[u_{j,l}^n - u_{j,l-\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)}^n\right]\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)\lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \left[\Delta x - \mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)\lambda_{i,l}^n R_{ki,l}^n L_{ij,l}^n \Delta t\right]\left[\sigma_{j,l}^n - \sigma_{j,l-\mathrm{sgn}(\lambda_{i,l}^n)}^n\right]\right\}, \end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\sigma_i^n = \operatorname{Minmod}\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right), \tag{20}$$

$$\operatorname{Minmod}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{if} \quad |a| < |b| \quad \text{and} \quad ab > 0 \\ b, & \text{if} \quad |a| > |b| \quad \text{and} \quad ab > 0 \\ 0, & \text{if} \quad ab \le 0. \end{cases} \tag{21}$$

我们发现由于 Lax-Wendroff 格式 (如图 1 和图 2 所示) 较 Upwind 和 TVD 格式 (如图 3 、图 4 和图 5 所示) 而言会出现振荡，TVD 较 Upwind 格式，激波模拟得要更加陡峭。

5 其他数值方法尝试与分析

这里填入其他数值方法的尝试和分析，如果周四前还填不了就把这一节给删掉

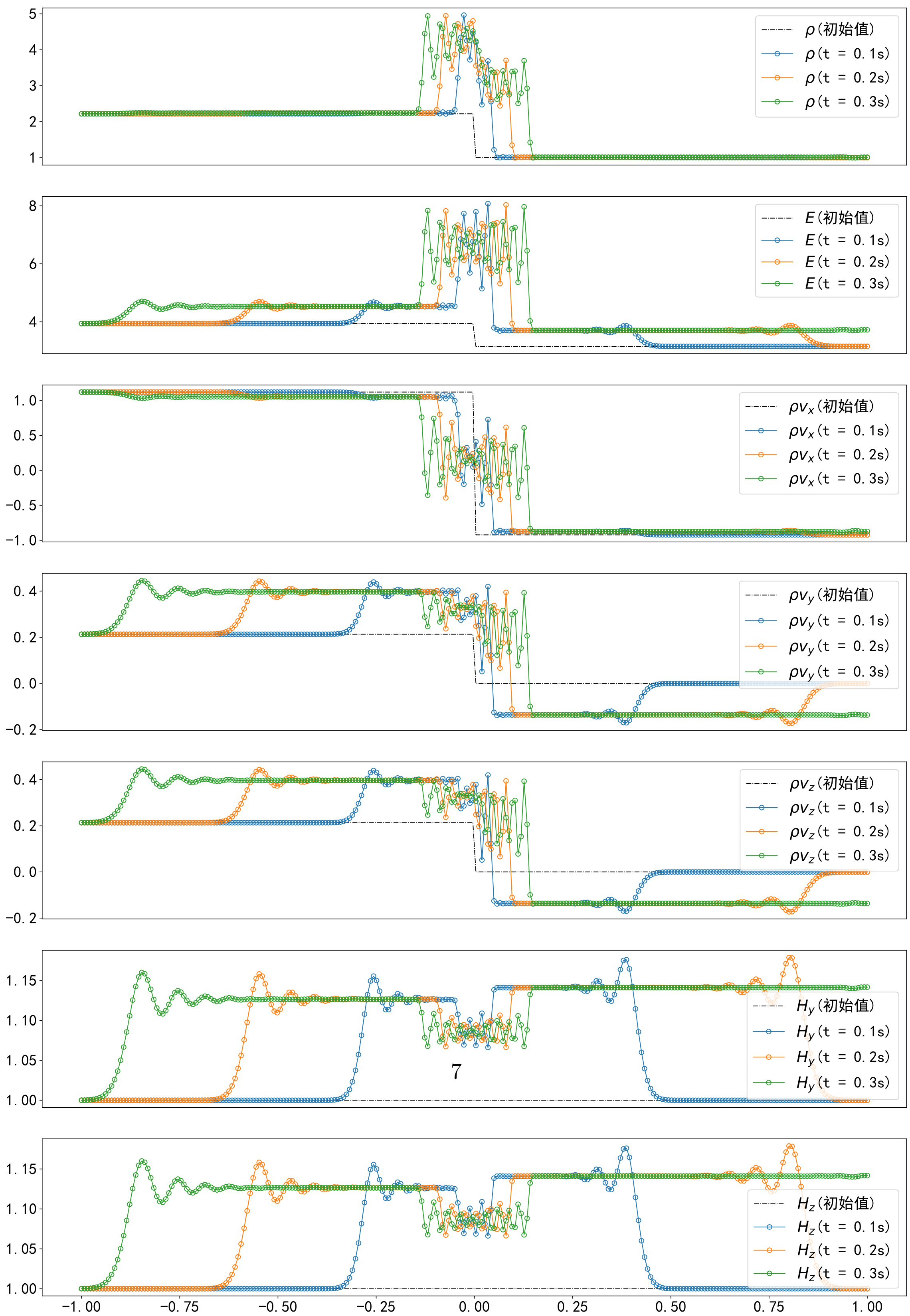
6 附件

附件及附件的说明见 appendix.txt

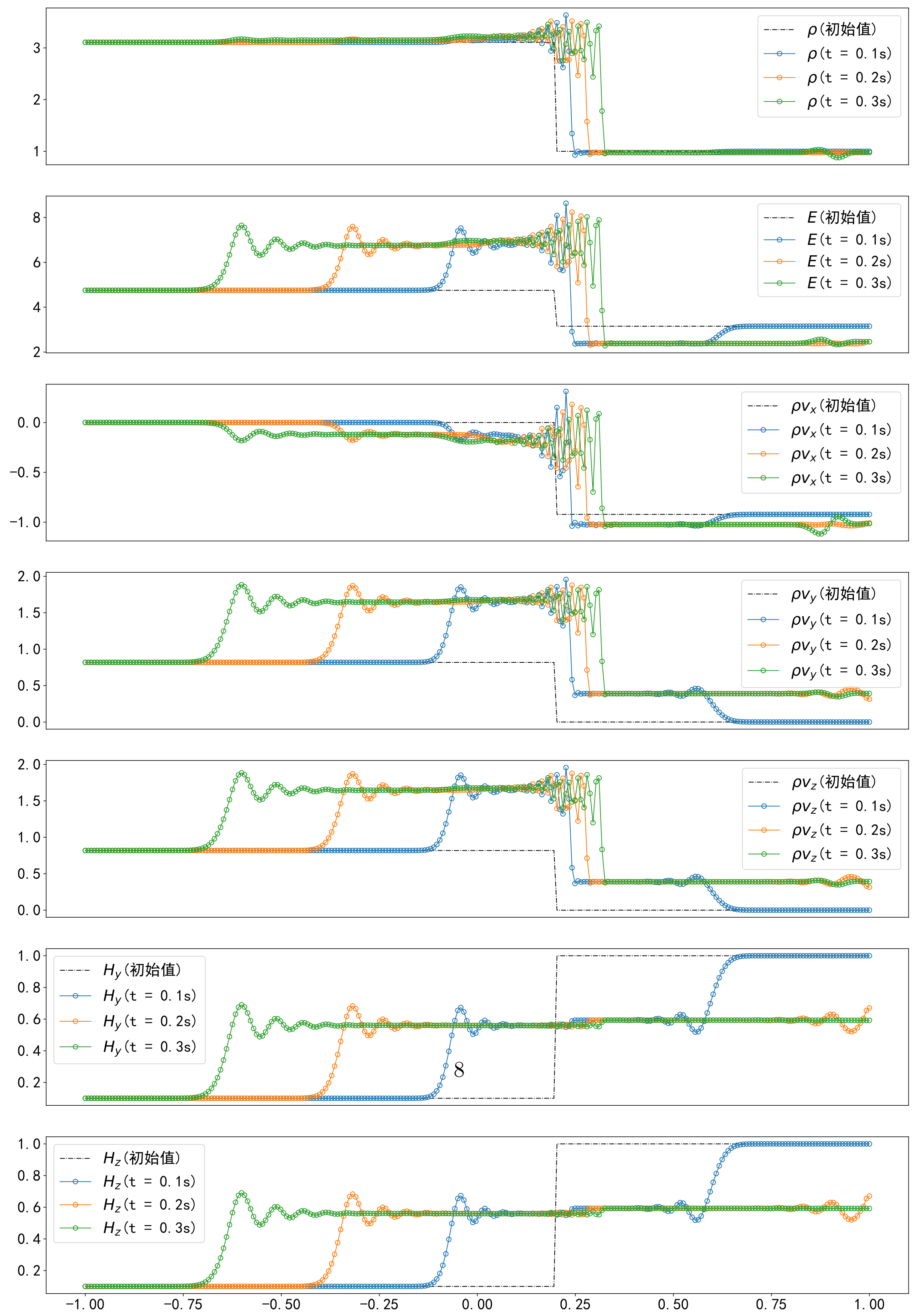
参考文献

DAI W, WOODWARD P R, 1994. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. J. Comput. Phys., 115: 485-514.

t = 0.3   C = 0.1   Lax-Wendroff



t = 0.3　C = 0.1　Lax-Wendroff



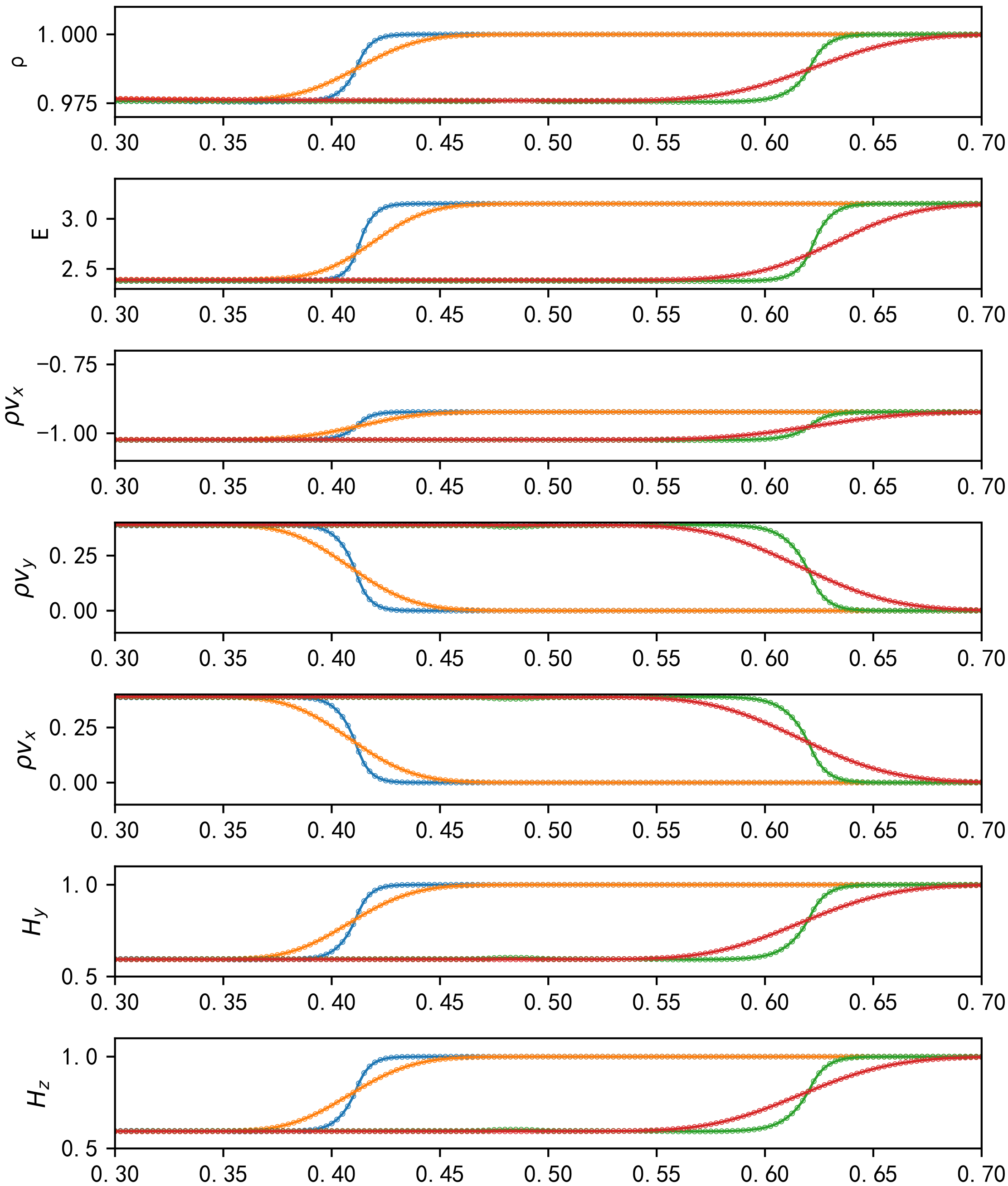


图 3: 使用 Upwind 和 TVD 格式计算较弱的慢激波，取 $x_0 = 0.0$, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度** ρ**, 能量** E **，质量流** $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ **和磁场** H_y, H_z。

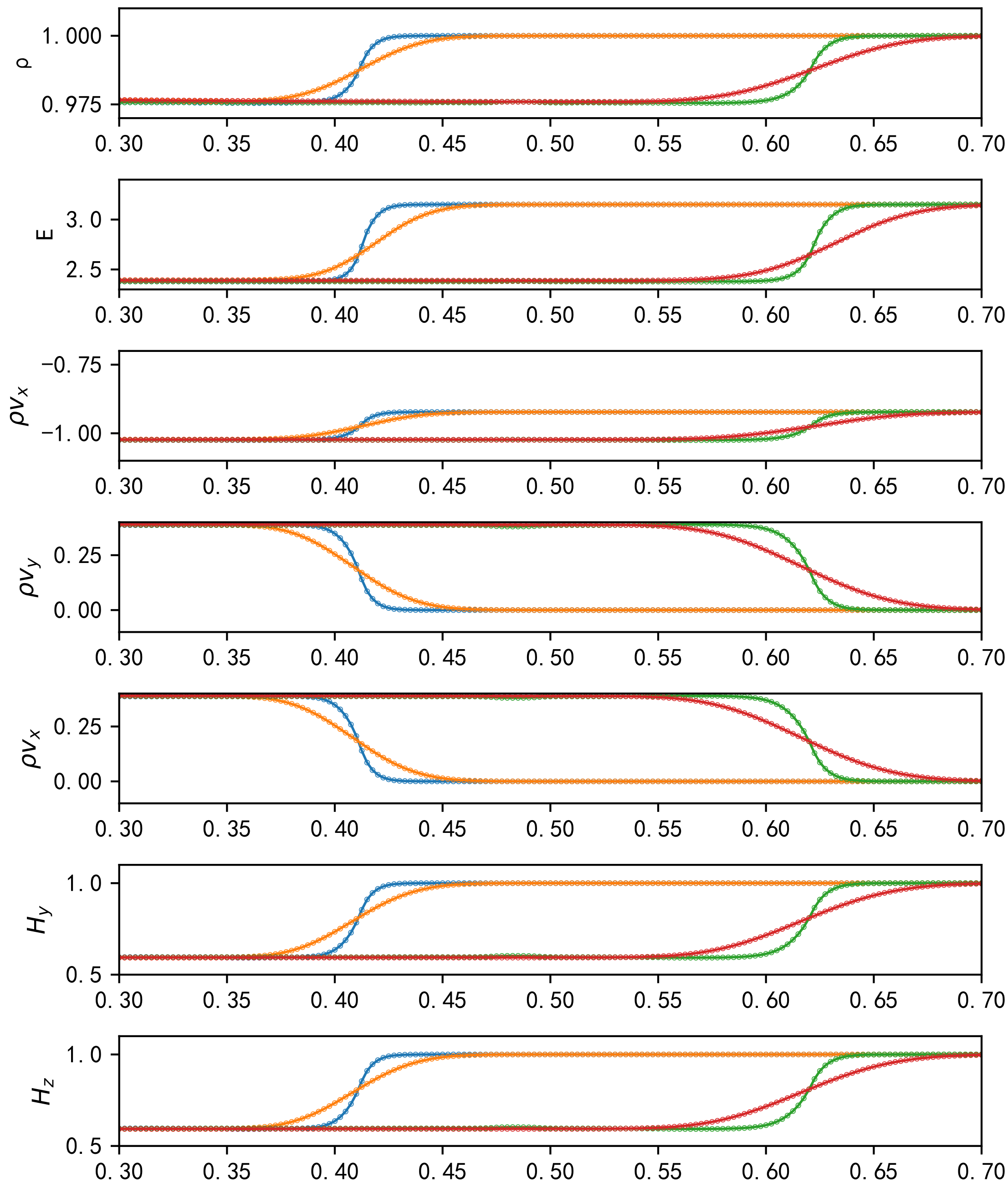


图 4: 使用 Upwind 和 TVD 格式计算较弱的慢激波，取 $x_0 = 0.2$, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度** ρ**, 能量** E **，质量流** $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ **和磁场** H_y, H_z。

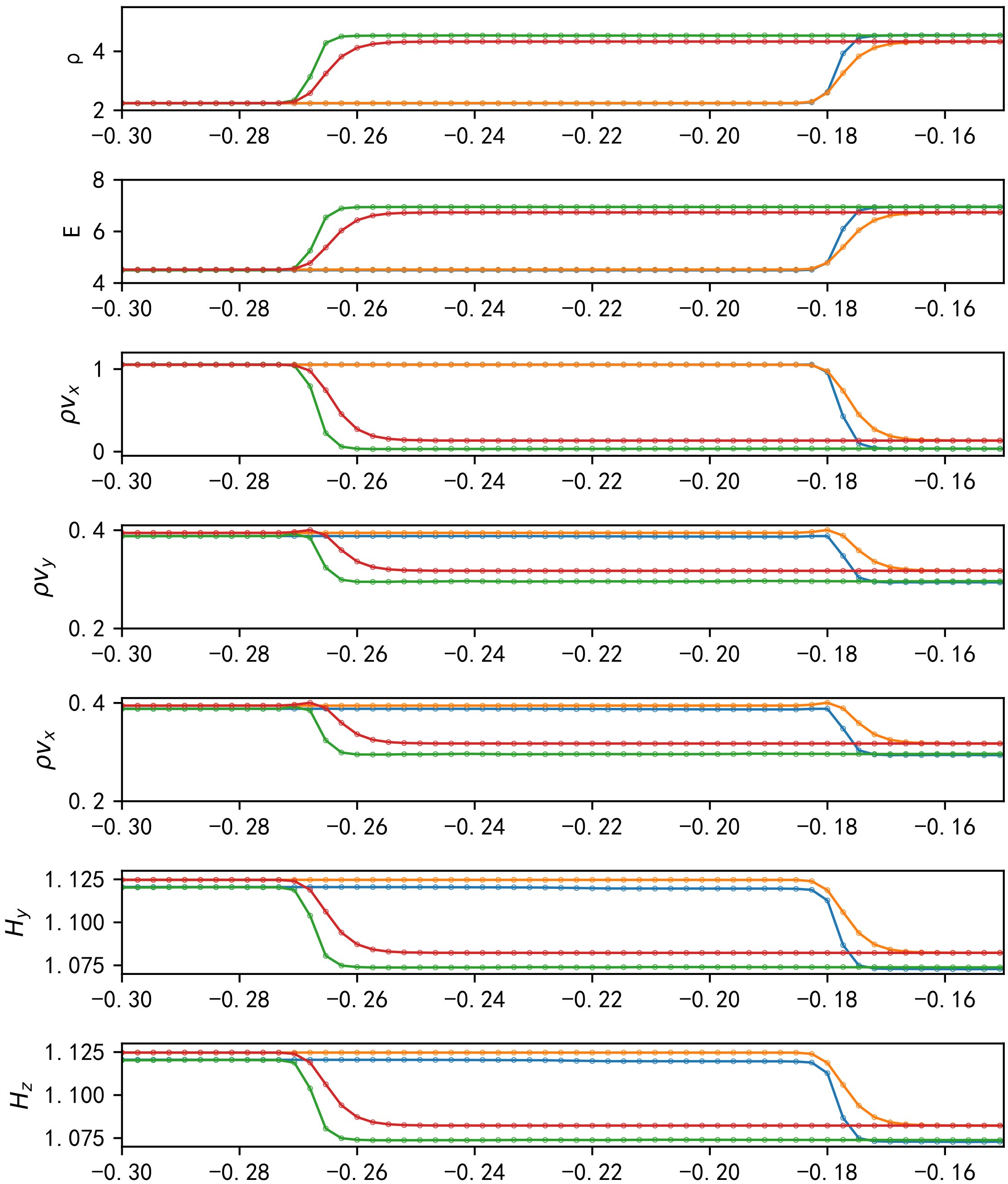


图 5: 使用 Upwind 和 TVD 格式计算较弱的慢激波，取 $x_0 = 0.0$, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度** ρ**，能量** E **，质量流** $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ **和磁场** H_y, H_z。