

一维磁流体力学激波 — 第 4 次作业^{*}

徐均益[†]

余航[‡]

陈宇韬[§]

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

中国科学技术大学物质科学研究院等离子所, 合肥 230026

摘要

研究讨论一维磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 激波问题的有限差分数值解法, 主要采用守恒形式的 *Lax-Wendroff* 格式, 结合理论分析讨论磁声波的特性, 以及分析数值格式的计算效果。以及其他格式如隐格式和迭代法的相关尝试。

1 引言

磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 是磁流体的宏观描述, MHD 方程将流体力学, 麦克斯韦方程以及洛伦兹力结合起来, 是一个多元非线性方程。其对应的 MHD 模拟是太阳物理里面非常常用的手段, 比如磁绳爆发模拟等等。在本次作业中, 我们在上次一维气体激波管问题的基础上, 添加磁流体力学方程组, 对一维磁流体力学激波问题进行模拟和分析。

2 理论介绍

本次我们采用无量纲数值的守恒形式, 将磁流体力学方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

^{*}2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

[†]ID: SA22214015 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

[‡]ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

[§]ID: SA22214014 Email: chenyt@mail.ustc.edu.cn

其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^2 + H_y^2 + H_z^2 + \frac{\beta p}{\gamma-1} \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x \left(v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\beta p}{\rho} \right) + 2(H_y^2 v_x + H_z^2 v_x - H_x H_y v_y - H_x H_z v_z) \\ \rho v_x^2 + \frac{\beta}{2} p + \frac{1}{2} (H_y^2 + H_z^2) \\ \rho v_x v_y - H_x H_y \\ \rho v_x v_z - H_x H_z \\ v_x H_y - v_y H_x \\ v_x H_z - v_z H_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. 若取 $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, $v_0 = 1$, $H_0 = 1/\sqrt{4\pi}$, 则 $\beta = 2$.

3 数值格式介绍

本次实验我们尝试设计多种格式, 但是经调试, 只有 *Lax-Wendroff* 格式可以维持住慢激波的形状, 其他格式以及快激波等都没能完全实现。

3.1 *Lax-Wendroff* 格式

Lax-Wendroff 格式适用于守恒型方程

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

其中差分格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n)] \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\gamma-1)v^2-2v_x^2}{2} & \frac{\gamma-1}{2} & (3-\gamma)v_x & (1-\gamma)v_y & (1-\gamma)v_z & (2-\gamma)H_y & (2-\gamma)H_z \\ -v_x v_y & 0 & v_y & v_x & 0 & -H_x & 0 \\ -v_x v_z & 0 & v_z & 0 & v_x & 0 & -H_x \\ \frac{H_x v_y - H_y v_x}{\rho} & 0 & \frac{H_y}{\rho} & -\frac{H_x}{\rho} & 0 & v_x & 0 \\ H_x v_z - H_z v_x & 0 & \frac{H_z}{\rho} & 0 & -\frac{H_x}{\rho} & 0 & v_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

矩阵第二行 7 个元素分别为

$$-\frac{2(H_y^2 + H_z^2)v_x(1-\gamma) - 2H_x(H_y v_y + H_z v_z)(1-\gamma) - p v_x \beta \gamma + v_x v^2(2-3\gamma+\gamma^2)\rho}{(1-\gamma)\rho} \quad (7a)$$

$$\gamma v_x \quad (7b)$$

$$-((-\gamma E \rho + (\gamma-2)H_y^2 \rho + (\gamma-2)H_z^2 \rho + 3(\gamma-1)m_x^2 + (\gamma-1)m_y^2 + (\gamma-1)m_z^2)/\rho^2) \quad (7c)$$

$$-((2(H_x H_y \rho + (\gamma-1)m_x m_y))/\rho^2) \quad (7d)$$

$$-((2(H_x H_z \rho + (\gamma-1)m_x m_z))/\rho^2) \quad (7e)$$

$$-((2(H_x m_y + (\gamma-2)H_y m_x))/\rho) \quad (7f)$$

$$-((2(H_x m_z + (\gamma-2)H_z m_x))/\rho) \quad (7g)$$

其中 $m_x = \rho v_x, m_y = \rho v_y, m_z = \rho v_z$. 单元边界上的值可以取

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(u_{j\pm 1/2}^n), \quad u_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \quad (8)$$

3.2 数值实验设计

考虑下列初值问题

$$U(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} U_L, & x < x_0 \\ U_R, & x > x_0 \end{cases} \quad (9)$$

或者

$$W(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < x_0 \\ W_R, & x > x_0 \end{cases} \quad (10)$$

的有限差分数值计算. 这里 U 的表达式由方程 (2) 给出, 具体实验时需要将 W 转化成 U , 然后再代入数值程序中进行计算。

$$W = \left[\rho, p, v_x, v_y, v_z, H_y, H_z \right]^T. \quad (11)$$

上标 T 表示转置操作. 取 $\gamma = 5/3$, $\mu = 1$, $H_x = 5$. 分别就如下初值条件设计实验

3.2.1 较弱的快激波

取 $x_0 = 0.0$, 快激波条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \begin{bmatrix} 2.121, 4.981, -13.27, -0.163, -0.6521, 2.572, 10.29 \end{bmatrix}^T, \\ W_R &= \begin{bmatrix} 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

3.2.2 较弱的慢激波

取 $x_0 = 0.0$, 慢激波条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \begin{bmatrix} 2.219, 0.4442, 0.5048, 0.0961, 0.0961, 1, 1 \end{bmatrix}^T, \\ W_R &= \begin{bmatrix} 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (13)$$

3.2.3 一维 MHD 快激波

取 $x_0 = 0.2$, 快磁声激波的初值条件为¹

$$\begin{aligned} W_L &= \begin{bmatrix} 3.896, 305.9, 0, -0.058, -0.226, 3.951, 15.8 \end{bmatrix}^T, \\ W_R &= \begin{bmatrix} 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 一维 MHD 慢激波

同样取 $x_0 = 0.2$, 慢磁声激波的初值条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \begin{bmatrix} 3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1 \end{bmatrix}^T, \\ W_R &= \begin{bmatrix} 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (15)$$

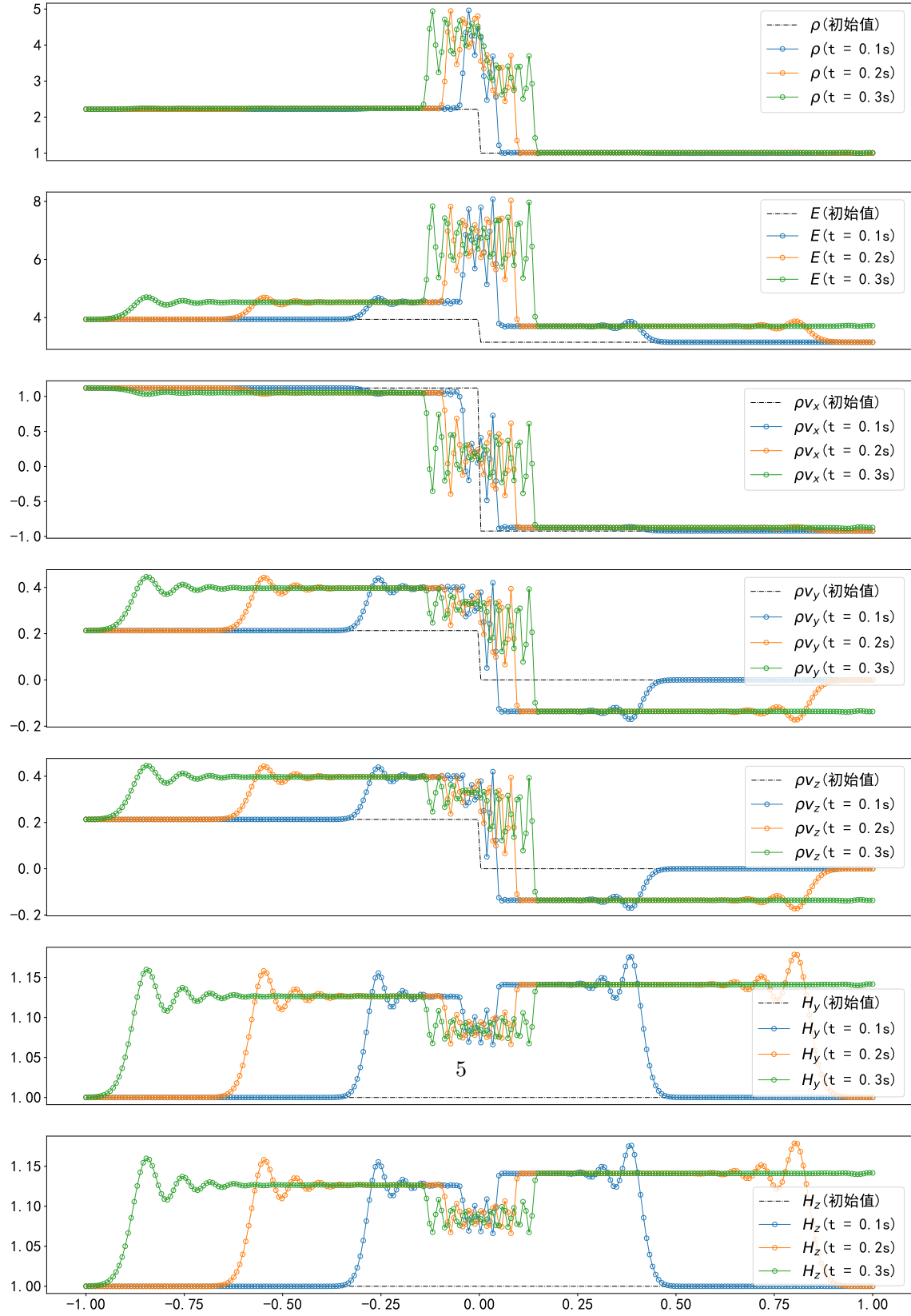
4 实验结果及分析

这里填入实验的图 5 和图 2 和分析内容。

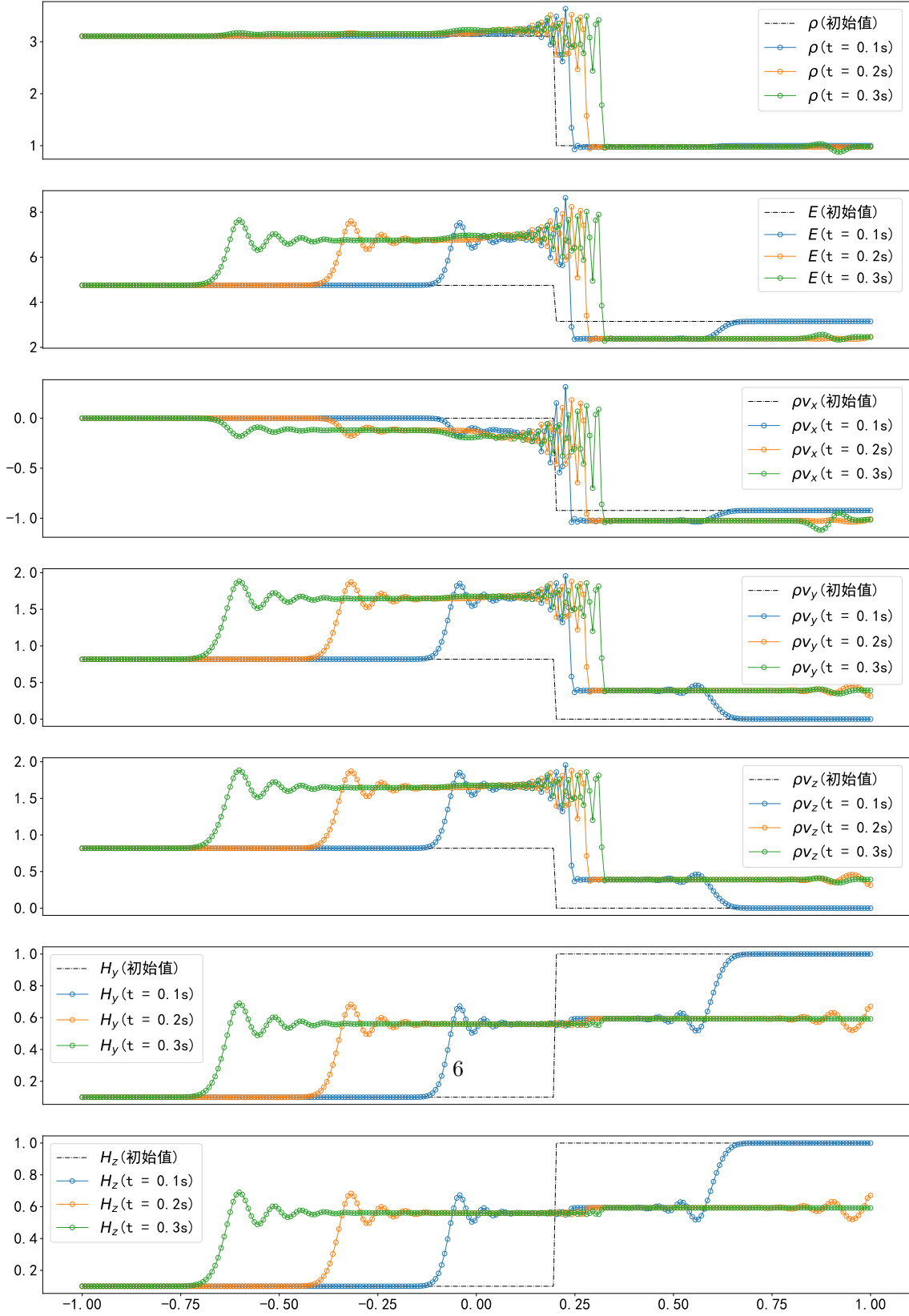
实验的图 5 和图 2 和分析内容。

¹根据附件 Excel 表计算得到, 和文献 Dai et al. (1994) 稍有出入.

$t = 0.3$ $C = 0.1$ Lax-Wendroff



$t = 0.3$ $C = 0.1$ Lax-Wendroff



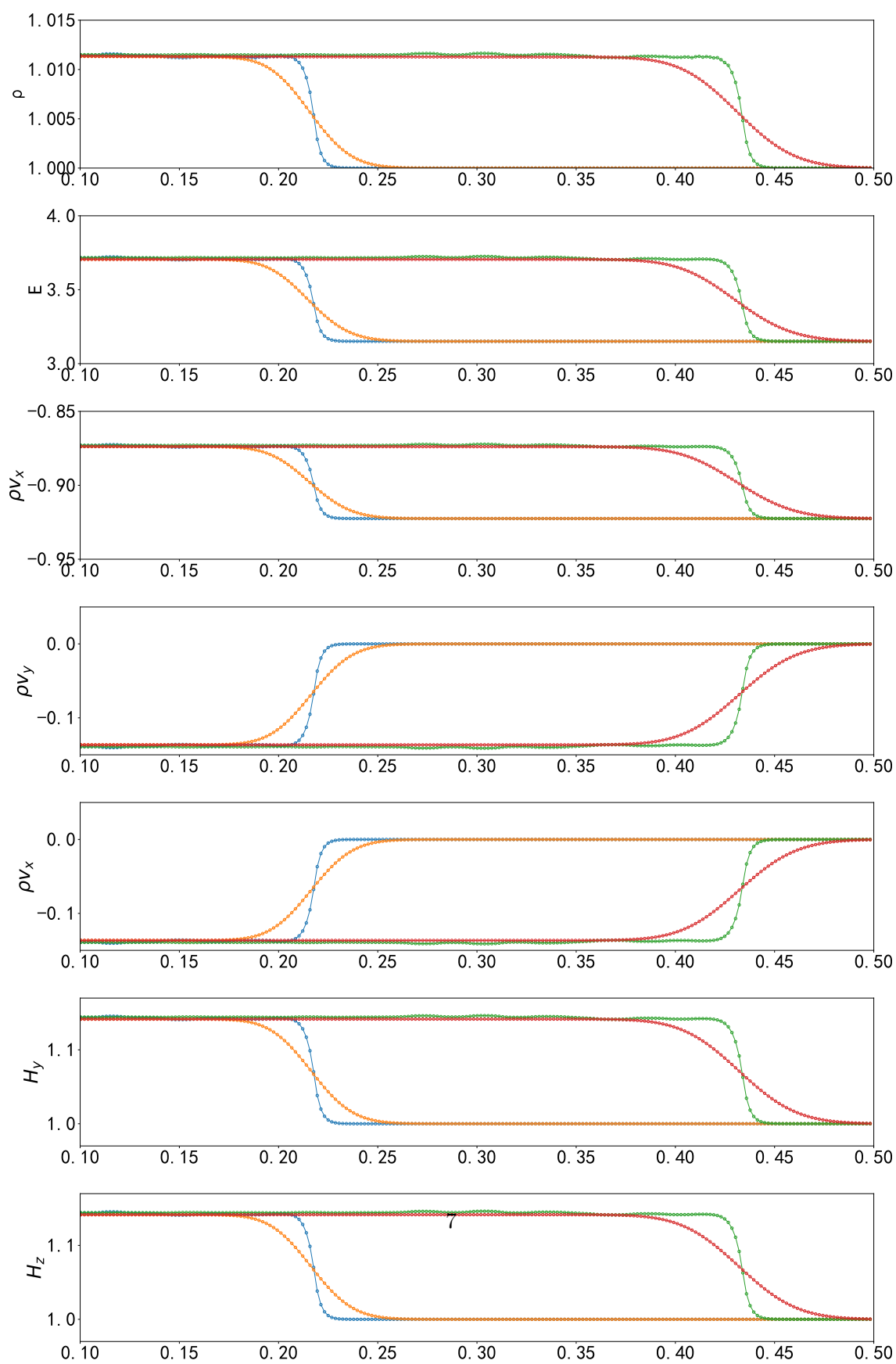


图 3: 较弱的慢激波。取 $x_0 = 0.0$ 使用 Upwind 和 TVD 格式。

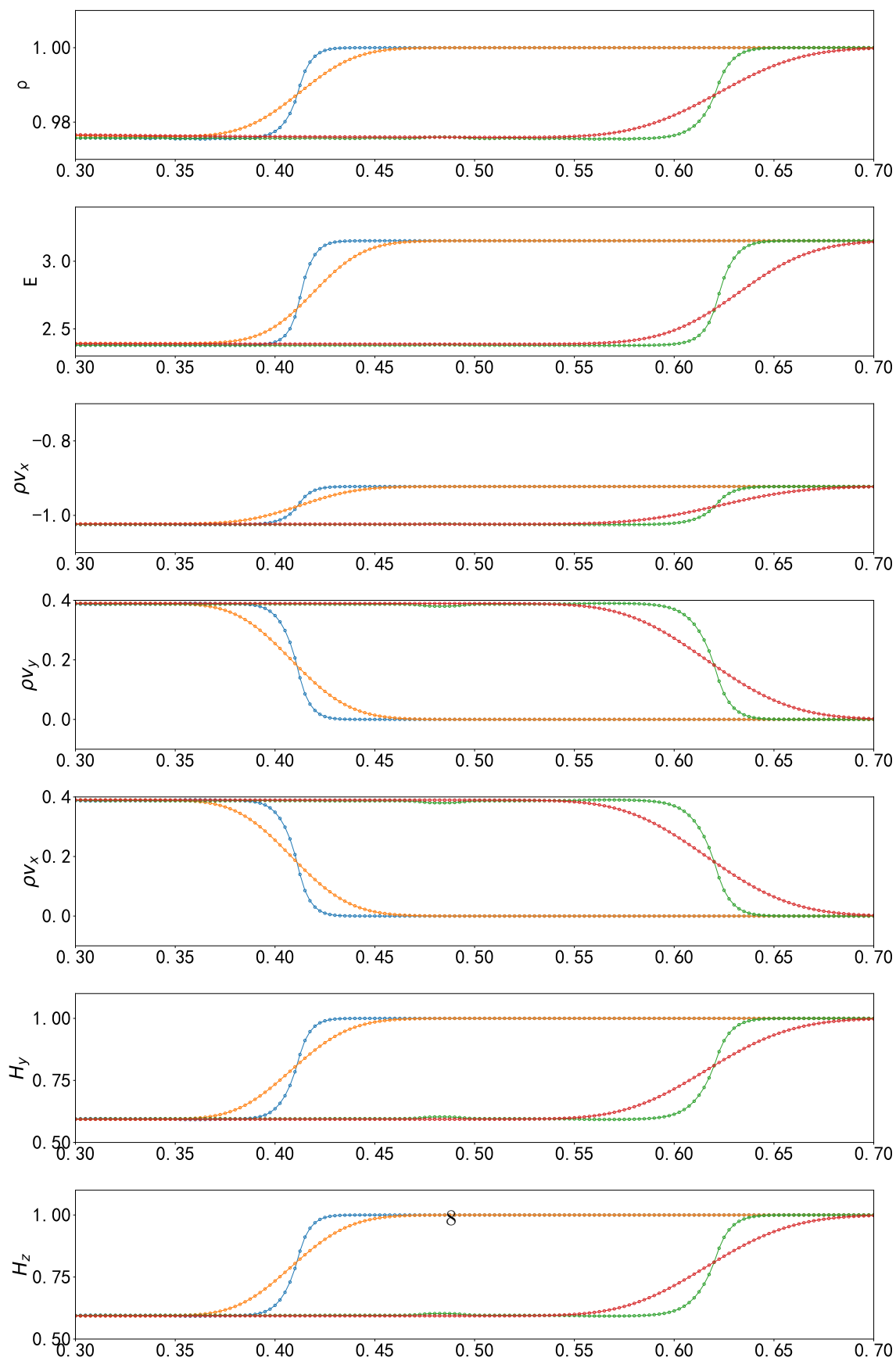


图 4: 较弱的慢激波。取 $x_0 = 0.0$ 使用 Upwind 和 TVD 格式。

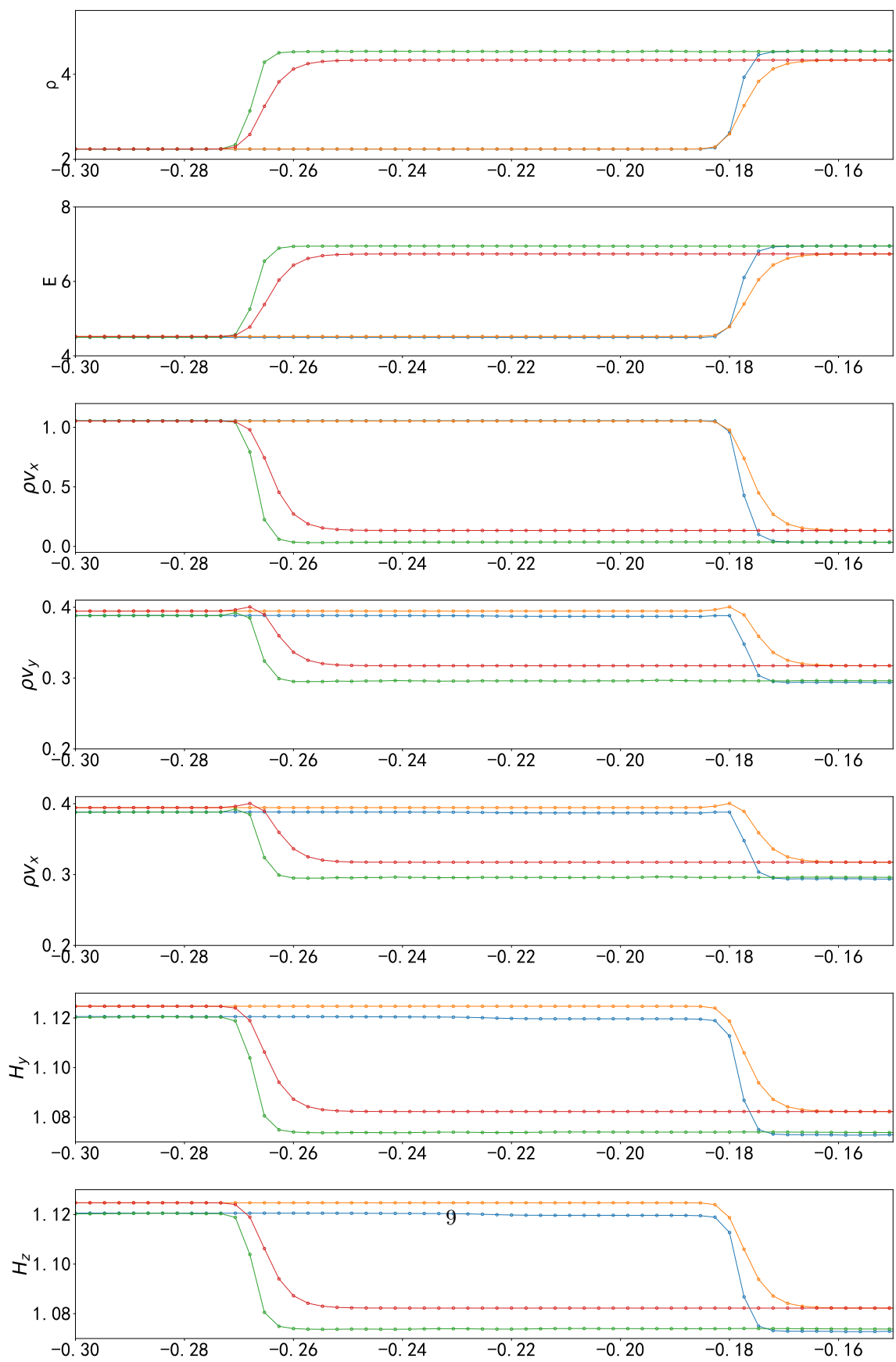


图 5: 较弱的慢激波。取 $x_0 = 0.0$ 使用 Upwind 格和 TVD 式。

5 其他数值方法尝试与分析

这里填入其他数值方法的尝试和分析，如果周四前还填不了就把这一节给删掉

6 附件

1. assign4.tex–本报告 L^AT_EX 源文件
2. assign4.pdf–本报告 PDF (Portable Document Format) 输出文件
3. References.bib – 文献文件
4. WFast077.eps–初值条件 (12) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 133 网格, 对应图 ?? (a)
5. WFast261.eps–初值条件 (12) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 261 网格, 对应图 ?? (b)
6. FShockNum.eps–初值条件 (14) 情况下 (快磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 ??
7. SShockNum.eps–初值条件 (15) 情况下 (慢磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 ??
8. MHDSHock.xlsx – 快慢激波两侧态分析的 EXCEL 表格文件

参考文献

DAI W, WOODWARD P R, 1994. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. J. Comput. Phys., 115: 485-514.