

一维磁流体力学激波 — 第 4 次作业*

徐均益[†]

余航[‡]

陈宇韬[§]

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

中国科学技术大学物质科学研究院等离子所, 合肥 230026

摘要

讨论一维磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 激波问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论磁声波的特性, 分析数值格式的计算效果, 请在 **2023 年 5 月 26 日周五 08:40 前** 完成并提交.

1 一维磁流体力学激波 (Jeffrey et al., 1964)

守恒型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (1)$$

间断两侧满足关系

$$[\tilde{\lambda}U - \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1] = 0 \quad (2)$$

或者

$$\tilde{\lambda}[U] = [\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1]. \quad (3)$$

其中 $\tilde{\lambda}$ 是间断移动的速度, \mathbf{n}_1 为间断面的单位法向量.

对一维磁流体, 设所有的物理量只是 x 和 t 的函数,

$$U_t + F_x = 0 \quad (4)$$

*2023 年春季磁流体力学的数值模拟方法

[†]ID: SA22214015 Email: jyxu@mail.ustc.edu.cn

[‡]ID: SA22168021 Email: yh131996@mail.ustc.edu.cn

[§]ID: SA22214014 Email: chenyt@mail.ustc.edu.cn

这里

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p_m \\ \rho v_y \\ H_y \\ \rho v_z \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p^* \\ v_x \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p_m \right) + v_x p^* - \frac{\mu}{4\pi} H_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \\ \rho v_y v_x - \frac{\mu}{4\pi} H_x H_y \\ H_y v_x - v_y H_x \\ \rho v_z v_x - \frac{\mu}{4\pi} H_x H_z \\ H_z v_x - v_z H_x \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中 $\rho, p, e, \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 和 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 分别是密度, 压强, 内能, 速度, 和磁场. $p_m = \mu H^2/8\pi$ 为磁压, $p^* = p + p_m$ 为总压强. 由磁场无散条件 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, H_x 是常数, 公式 (3) 因此化为

$$[\rho \tilde{v}_x] = 0 \quad (7)$$

$$[\rho v_x \tilde{v}_x + p^*] = 0 \quad (8)$$

$$\left[\tilde{v}_x \left(\frac{\rho}{2} v^2 + \rho e + \frac{\mu}{8\pi} H^2 \right) + v_x p^* - \frac{\mu}{4\pi} H_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \right] = 0 \quad (9)$$

$$\left[\rho v_y \tilde{v}_x - \frac{\mu}{4\pi} H_x H_y \right] = 0 \quad (10)$$

$$[\tilde{v}_x H_y - H_x v_y] = 0 \quad (11)$$

$$\left[\rho v_z \tilde{v}_x - \frac{\mu}{4\pi} H_x H_z \right] = 0 \quad (12)$$

$$[\tilde{v}_x H_z - H_x v_z] = 0 \quad (13)$$

此处 \tilde{v}_x 相对于间断流体速度的 x 分量, 即

$$\tilde{v}_x = v_x - \tilde{\lambda} \quad (14)$$

假设 $\tilde{\lambda}$ 为常数. 使用随间断运动的坐标系, 在这个坐标系中速度 $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$, 磁场 $\mathbf{H}' =$

(H'_x, H'_y, H'_z) . Galilean 变换的结果是 \mathbf{H} 不变, 速度由下面方程决定

$$v'_x = v_x - \tilde{\lambda} = \tilde{v}_x$$

$$v'_y = v_y$$

$$v'_z = v_z.$$

在不造成混淆的情况下, 直接用 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 和 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 表示 \mathbf{v}' 和 \mathbf{H}' . 将间断位置设为坐标原点, 即

$$x = 0.$$

定义

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2}(Q_0 + Q_1),$$

角标 0 和 1 分别表示间断两侧 (波前/上游和波后/下游) 的量. 进而可以将跃变关系 (7)-(13) 表示为

$$m[\tau] - [v_x] = 0 \quad (15)$$

$$m[v_x] + [p] + \frac{\mu}{4\pi} \langle \mathbf{H} \rangle \cdot [\mathbf{H}] = 0 \quad (16)$$

$$m[v_y] - \frac{\mu}{4\pi} H_x [H_y] = 0 \quad (17)$$

$$m \langle \tau \rangle [H_y] + \langle H_y \rangle [v_x] - H_x [v_y] = 0 \quad (18)$$

$$m[v_z] - \frac{\mu}{4\pi} H_x [H_z] = 0 \quad (19)$$

$$m \langle \tau \rangle [H_z] - H_x [v_z] = 0 \quad (20)$$

这里

$$\tau = \rho^{-1}, \quad (21)$$

$$m = \rho_1 \tilde{v}_{x1} = \rho_0 \tilde{v}_{x0}. \quad (22)$$

同时选取坐标系使得 $\langle H_z \rangle = 0$. 这样, 很容易得到关于 m (或者激波速度 $\tilde{\lambda}$) 的方程 (力学关系), 快慢磁声激波情况下为

$$(m^2 + [\tau]^{-1}[p]) \left(m^2 - \langle \tau \rangle^{-1} \frac{\mu H_x^2}{4\pi} \right) = m^2 \langle \tau \rangle^{-1} \frac{\mu}{4\pi} \langle H_y \rangle^2 \quad (23)$$

横波 (Alfven 波) 情况下为,

$$\langle \tau \rangle m^2 - \frac{\mu H_x^2}{4\pi} = 0. \quad (24)$$

能量方程 (9) 可以改写为,

$$m \left\{ \left[e + \frac{\mu}{8\pi} \tau H^2 \right] + [\tau] \left(\langle p \rangle + \frac{\mu}{8\pi} \langle \mathbf{H}_t^2 \rangle - \frac{\mu}{8\pi} H_x^2 \right) - \frac{\mu}{4\pi} [\tau \mathbf{H}_t] \cdot \langle \mathbf{H}_t \rangle \right\} = 0 \quad (25)$$

此处 \mathbf{H}_t 是横向磁场

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1.$$

最后得到

$$m = 0 \quad (26)$$

或

$$[e] + \langle p \rangle [\tau] = -\frac{\mu}{16\pi} [\tau] [\mathbf{H}_t]^2. \quad (27)$$

(27) 称为广义 Rankine-Hugoniot 关系. (26) 为接触间断条件.

结合方程 (23), (24) 和 (26), 将磁流体力学间断分为快慢激波, 横向间断 (激波) 和接触间断.

不失一般性, 我们可以选取坐标系使得激波前 $H_x > 0$, $H_{y0} > 0$, 且假定 x 轴指向 \mathbf{n} 的正方向, \mathbf{n} 为激波前指向激波后的单位向量, 即流体流入的方向. 整理后, 可将快慢磁声激波关系表示为

$$\bar{\eta} = h \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\gamma h \sin \theta_0 - (1 - s_0) \pm \sqrt{R(h)}}{2s_0 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h} \right\}, \quad (28)$$

$$\bar{Y} = \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{1}{2}h^2 + h \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma h \sin \theta_0 - (1 - s_0) \pm \sqrt{R(h)}}{2s_0 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h} \right) \right\} \quad (29)$$

$$= \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{1}{2}h^2 + h \left(\frac{\bar{\eta}/h - \sin \theta_0}{1 - (\bar{\eta}/h) \sin \theta_0} \right) \right\}, \quad (30)$$

$\bar{\eta}$, η , h , \bar{Y} , θ_0 , s_0 和 R 的定义如下,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} &= \frac{[\rho]}{\rho_0}, & \eta &= \frac{\rho_1}{\rho_0} = 1 + \bar{\eta} \\
h &= \frac{[H_y]}{H_0}, & H_j &= \sqrt{H_x^2 + H_{yj}^2} \quad (j = 0, 1) \\
\bar{Y} &= \frac{[p]}{p_0}, & Y &= \frac{p_1}{p_0} = 1 + \bar{Y} \\
s_j &= \frac{\gamma p_j}{(\mu/4\pi)H_j^2} \quad (j = 0, 1) \\
\sin \theta_j &= \frac{H_{yj}}{H_j}, & 0^\circ < \theta_j < 90^\circ \quad (j = 0, 1) \\
R(h) &= h^2 \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \sin^2 \theta_0 - (\gamma - 1) \right] + h \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \\
&\quad + 4s_0 \sin^2 \theta_0 + (1 - s_0)^2.
\end{aligned} \tag{31}$$

此外

$$\frac{\tilde{v}_{x1}}{b_{x1}} = \eta^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{v}_{x0}}{b_{x0}} = \frac{1}{[1 - (\bar{\eta}/h) \sin \theta_0]^{1/2}} \tag{32}$$

从而可以直接求得激波速度 $\tilde{\lambda}$ ($= v_{x0} - \tilde{v}_{x0}$).

$[v_y]$ 表示为

$$\frac{[v_y]}{b_{x1}} = \frac{b_{x1}h}{\tilde{v}_{x1} \cos \theta_0} = \frac{h}{\cos \theta_0} \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}}{h} \right) \sin \theta_0 \right]^{1/2}. \tag{33}$$

给定 h 和激波前状态, 我们可以确定激波速度以及激波后的态. 用 v_n , \tilde{v}_n 和 H_n 取代 v_x , \tilde{v}_x 和 H_x , 可以得到不依赖于 x 轴选择的一般形式. 对于 (1 型) 快磁声激波和慢激波, 激波上下游的关系式如下文所述.

1.1 1 型快激波

$$h_f = \frac{[H_y]}{H_0} \quad (34)$$

$$s_0 \geq 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin^2 \theta_0, \quad 0 < h_f \leq \hat{h}_f \quad \left(\hat{h}_f = \frac{2}{\gamma - 1} \sin \theta_0 \right) \quad (35)$$

$$\bar{\eta}_f = h_f \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\gamma h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0) + \sqrt{R(h_f)}}{2s_0 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f} \right\},$$

$$\bar{\eta}_{f \max} = \frac{2}{\gamma - 1} \quad (36)$$

$$\bar{Y}_f = \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{1}{2}h_f^2 + h_f \frac{-\frac{1}{2}\gamma h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0) + \sqrt{R(h_f)}}{2s_0 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f} \right\},$$

$$= \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{1}{2}h_f^2 + h_f \frac{(\bar{\eta}_f/h_f) - \sin \theta_0}{1 - (\bar{\eta}_f/h_f) \sin \theta_0} \right\}, \quad \bar{Y}_{f \max} = \infty \quad (37)$$

$$\frac{\tilde{v}_{n1}^f}{b_{n1}^f} = \eta_f^{-1/2} \frac{\tilde{v}_{n0}^f}{b_{n0}^f} = \frac{1}{[1 - (\bar{\eta}_f/h_f) \sin \theta_0]^{1/2}} \quad (38)$$

$$\frac{[v_n^f]}{b_{n1}^f} = -\bar{\eta}_f \frac{\tilde{v}_{n1}^f}{b_{n1}^f} = -\frac{\bar{\eta}}{[1 - (\bar{\eta}_f/h_f) \sin \theta_0]^{1/2}} \quad (39)$$

$$\frac{[v_y^f]}{b_{n1}^f} = \frac{b_{n1}^f}{\tilde{v}_{n1}^f} \frac{h_f}{\cos \theta_0} = \frac{h_f}{\cos \theta_0} \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}_f}{h_f} \right) \sin \theta_0 \right]^{1/2} \quad (40)$$

$$R(h_f) = h_f^2 \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \sin^2 \theta_0 - (\gamma - 1) \right] + h_f \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0)$$

$$+ 4s_0 \sin^2 \theta_0 + (1 - s_0)^2 \quad (41)$$

1.2 慢激波

$$h_s = -\frac{[H_y]}{H_0}, \quad 0 \leq h_s \leq \sin \theta_0 \quad (0 < \theta_0 < 90^\circ) \quad (42)$$

$$\bar{\eta}_s = h_s \left\{ \frac{(1-s_0) - \frac{1}{2}\gamma h_s \sin \theta_0 + \sqrt{R^+(h_s)}}{(\gamma-1)h_s + 2s_0 \sin \theta_0} \right\} \quad (43)$$

$$\bar{Y}_s = \frac{\gamma}{s_0} \left\{ -\frac{h_s^2}{2} + h_s \left[\frac{(1-s_0) + \frac{1}{2}\gamma h_s \sin \theta_0 + \sqrt{R^+(h_s)}}{(\gamma-1)h_s + 2 \sin \theta_0} \right] \right\} \quad (44)$$

$$\frac{\tilde{v}_{n1}^s}{b_{n1}^s} = \frac{1}{\eta_s^{1/2}} \frac{\tilde{v}_{n0}^s}{b_{n0}^s} = \frac{1}{[1 + (\bar{\eta}_s/h_s) \sin \theta_0]^{1/2}} \quad (45)$$

$$\frac{[v_n^s]}{b_{n1}^s} = -\bar{\eta}_s \frac{\tilde{v}_{n1}^s}{b_{n1}^s} = -\frac{\bar{\eta}_s}{[1 + (\bar{\eta}_s/h_s) \sin \theta_0]^{1/2}} \quad (46)$$

$$\frac{[v_y^s]}{b_{n1}^s} = -\frac{b_{n1}^s}{\tilde{v}_{n1}^s} \frac{h_s}{\cos \theta_0} = -\frac{h_s}{\cos \theta_0} [1 + (\bar{\eta}_s/h_s) \sin \theta_0]^{1/2} \quad (47)$$

$$R^+(h_s) = h_s^2 \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \sin^2 \theta_0 - (\gamma-1) \right] - h_s \sin \theta_0 (2-\gamma)(1+s_0) + 4s_0 \sin^2 \theta_0 + (1-s_0)^2 \quad (48)$$

2 数值实验

考虑下列初值问题

$$U(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} U_L, & x < x_0 \\ U_R, & x > x_0 \end{cases} \quad (49)$$

或者

$$W(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < x_0 \\ W_R, & x > x_0 \end{cases} \quad (50)$$

的有限差分数值计算. 这里 U 的表达式由方程 (5) 给出, 而

$$W = \left[\rho, p, v_x, v_y, v_z, H_y, H_z \right]^T. \quad (51)$$

上标 T 表示转置操作. 取 $\gamma = 5/3$, $\mu = 1$, $H_x = 5$. 分别就下面两种初值条件, 设计有限差分格式进行数值求解并作图讨论结果.

2.1 较弱的快慢激波

取 $x_0 = 0.0$, 快激波条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \left[2.121, 4.981, -13.27, -0.163, -0.6521, 2.572, 10.29 \right]^T, \\ W_R &= \left[1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4 \right]^T. \end{aligned} \quad (52)$$

慢激波条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \left[2.219, 0.4442, 0.5048, 0.0961, 0.0961, 1, 1 \right]^T, \\ W_R &= \left[1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1 \right]^T. \end{aligned} \quad (53)$$

其中快激波的计算结果如图 1 所示.

2.2 一维 MHD 快激波 (Mach 数为 10)(Dai et al., 1994)

取 $x_0 = 0.2$, 快磁声激波的初值条件为¹

$$\begin{aligned} W_L &= \left[3.896, 305.9, 0, -0.058, -0.226, 3.951, 15.8 \right]^T, \\ W_R &= \left[1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4 \right]^T. \end{aligned} \quad (54)$$

作为参考, 使用 TVD (Total Variance Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 的数值计算结果如图 2 所示.

2.3 一维 MHD 慢激波 (Mach 数为 3.5)(Dai et al., 1994)

同样取 $x_0 = 0.2$, 慢磁声激波的初值条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \left[3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1 \right]^T, \\ W_R &= \left[1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1 \right]^T. \end{aligned} \quad (55)$$

作为参考, 使用 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 的数值计算结果如图 3 所示.

附件 Excel 表给出用激波关系计算的上下游变量值. 表 Dai1994 为依据文献 Dai et al. (1994) 给出的初值, 表 FnS 是简单地复制表 Dai1994 并改变单元 D2, N2 得到的另一组初值, 此时红色部分的数据没有用处. 其中, B-D, F-H 列为快激波数据, L-M, P-R 列为慢激波数

¹根据附件 Excel 表计算得到, 和文献 Dai et al. (1994) 稍有出入.

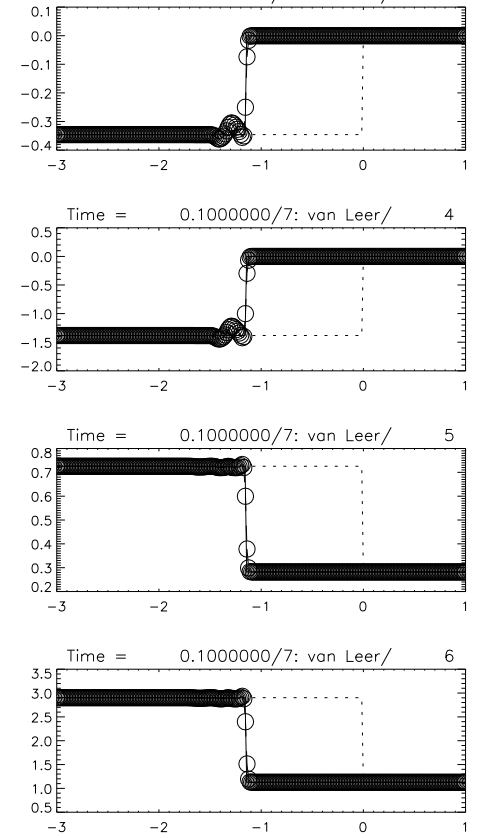
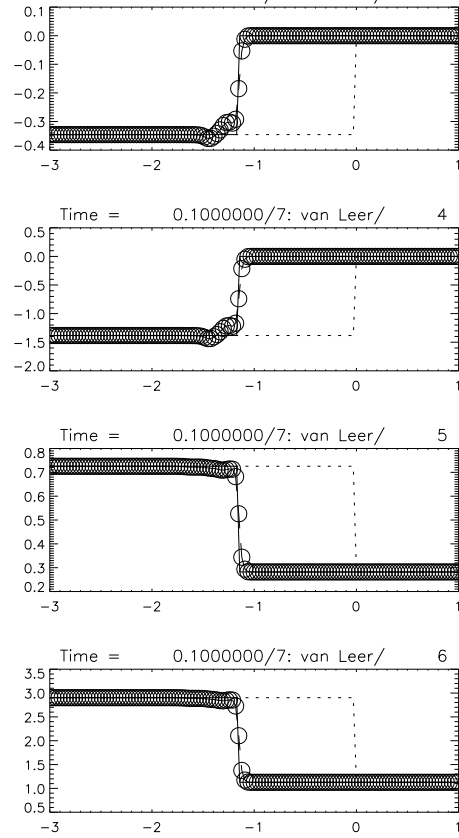
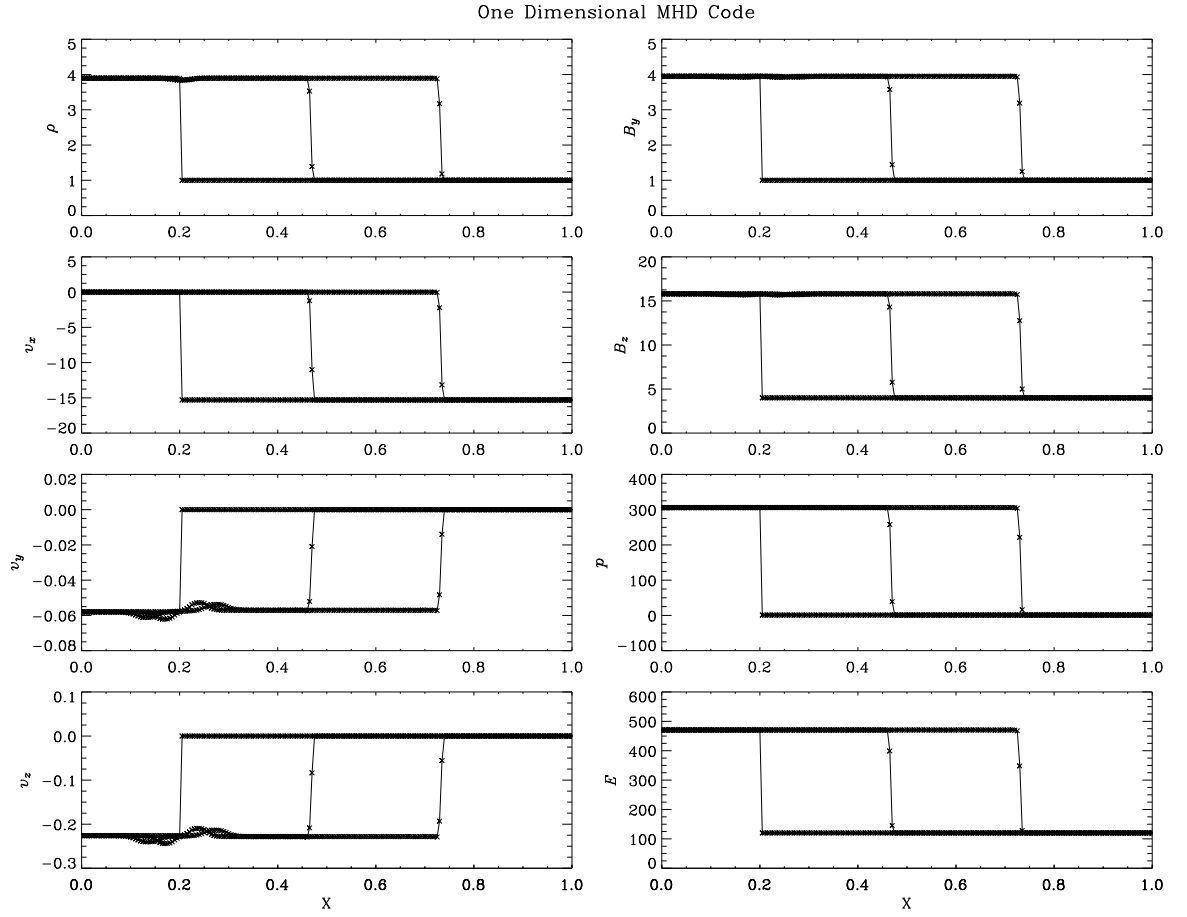


图 1: 初值条件 (52) 情况下的快激波在 $t = 0.1$ 时的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 计算结果. 从上到下数据为无量纲形式的密度, 能量, 质量流和磁场垂直分量. (a) 网格数为 133; (b) 网格数为 261.

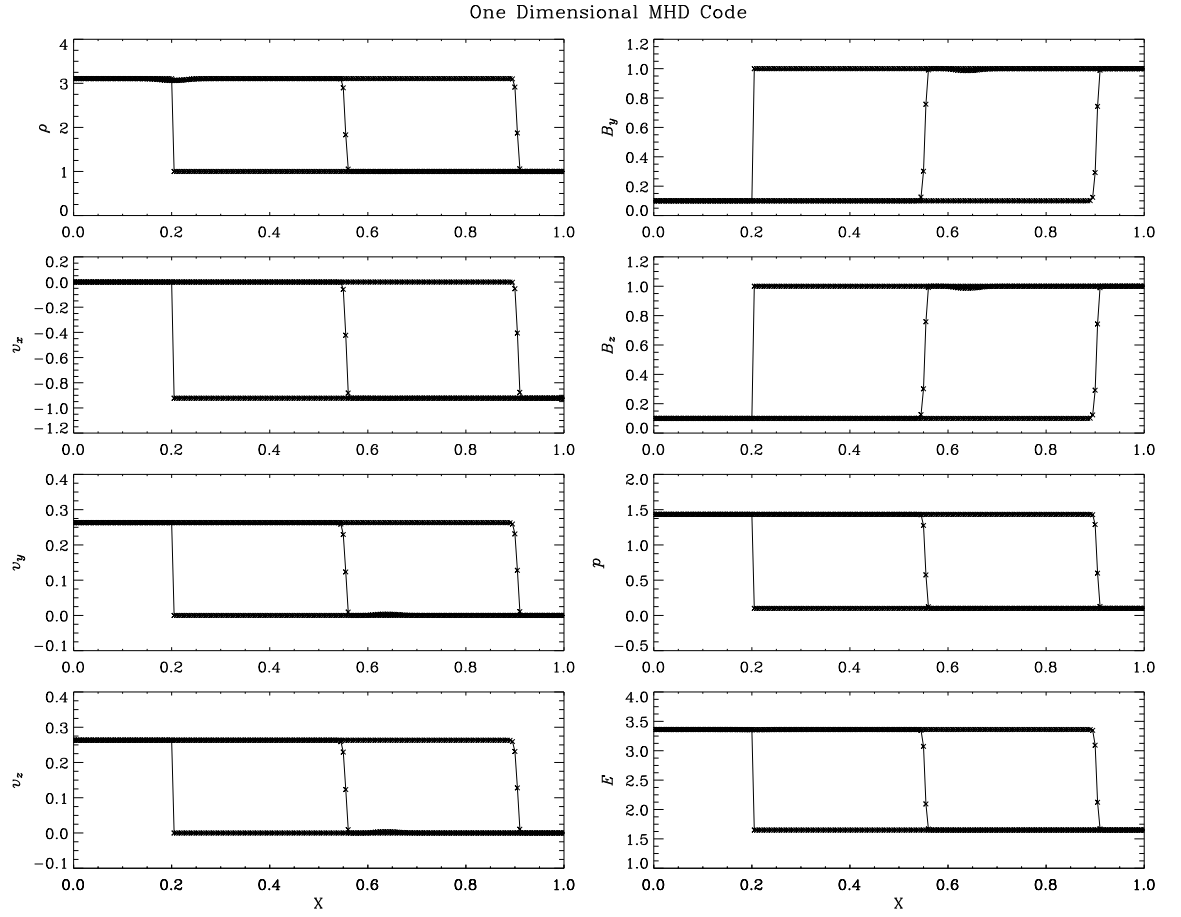


One0909a: General Identification

Tue Dec 21 15:28:04 2004

- 1 -

图 2: 初值条件 (54) 情况下快激波的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 对应于 $t = 0$, 0.05 和 0.1 时的计算结果.



One1221b: General Identification

Tue Dec 21 15:56:51 2004

- 1 -

图 3: 初值条件 (55) 情况下慢激波的 TVD 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983) 对应于 $t = 0$, 0.8 和 1.6 时计算结果.

据. 蓝色区域为输入, 红色数据为文献 Dai et al. (1994) 中的数据 (可能有误), B-D 和 L-M 为 Gauss 单位制数值, F-H, P-R 为无量纲单位数值 (具体方程和说明见第 4 节), C28, G28 为快激波速度 (正方向定义为上游指向下游, 负值表示从下游指向上游, 即向右传播), M28, Q28 为慢激波速度 (负值同样表示下游向上游传播).

后面两个激波较强, 特别是快激波, 如果觉得数值计算上有困难, 可以只完成前面较弱激波的计算.

3 分工说明

郑惠南提供了最初的报告文本, 数值计算结果生成的图形文件. 高新亮对整个文档结构, 规范, 文件清单进行了检查, 确认.

4 无量纲守恒形式方程

如果要使用无量纲数值, 可以将磁流体力学方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^2 + H_y^2 + H_z^2 + \frac{\beta p}{\gamma-1} \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x \left(v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\beta p}{\rho} \right) + 2(H_y^2 v_x + H_z^2 v_x - H_x H_y v_y - H_x H_z v_z) \\ \rho v_x^2 + \frac{\beta}{2} p + \frac{1}{2}(H_y^2 + H_z^2) \\ \rho v_x v_y - H_x H_y \\ \rho v_x v_z - H_x H_z \\ v_x H_y - v_y H_x \\ v_x H_z - v_z H_x \end{bmatrix} \quad (58)$$

这里 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. 若取 $\rho_0 = 1, p_0 = 1, v_0 = 1, H_0 = 1/\sqrt{4\pi}$, 则 $\beta = 2$.

4.1 Lax-Wendroff 格式

Lax-Wendroff 格式适用于守恒型方程

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

其中差分格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n)] \end{aligned} \quad (60)$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\gamma-1)v^2-2v_x^2}{2} & \frac{\gamma-1}{2} & (3-\gamma)v_x & (1-\gamma)v_y & (1-\gamma)v_z & (2-\gamma)H_y & (2-\gamma)H_z \\ -v_x v_y & 0 & v_y & v_x & 0 & -H_x & 0 \\ -v_x v_z & 0 & v_z & 0 & v_x & 0 & -H_x \\ \frac{H_x v_y - H_y v_x}{\rho} & 0 & \frac{H_y}{\rho} & -\frac{H_x}{\rho} & 0 & v_x & 0 \\ H_x v_z - H_z v_x & 0 & \frac{H_z}{\rho} & 0 & -\frac{H_x}{\rho} & 0 & v_x \end{bmatrix} \quad (61)$$

矩阵第二行 7 个元素分别为

$$-\frac{2(H_y^2 + H_z^2)v_x(1-\gamma) - 2H_x(H_y v_y + H_z v_z)(1-\gamma) - p v_x \beta \gamma + v_x v^2(2-3\gamma+\gamma^2)\rho}{(1-\gamma)\rho} \quad (62a)$$

$$\gamma v_x \quad (62b)$$

$$-((- \gamma E \rho + (\gamma-2)H_y^2 \rho + (\gamma-2)H_z^2 \rho + 3(\gamma-1)m_x^2 + (\gamma-1)m_y^2 + (\gamma-1)m_z^2)/\rho^2) \quad (62c)$$

$$-((2(H_x H_y \rho + (\gamma-1)m_x m_y))/\rho^2) \quad (62d)$$

$$-((2(H_x H_z \rho + (\gamma-1)m_x m_z))/\rho^2) \quad (62e)$$

$$-((2(H_x m_y + (\gamma-2)H_y m_x))/\rho) \quad (62f)$$

$$-((2(H_x m_z + (\gamma-2)H_z m_x))/\rho) \quad (62g)$$

其中 $m_x = \rho v_x, m_y = \rho v_y, m_z = \rho v_z$. 单元边界上的值可以取

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(u_{j\pm 1/2}^n), \quad u_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \quad (63)$$

State	1	1	0
ρ	3.1080	2.2192	1.0000
p	1.4336	0.4442	0.1000
v_n	0.0000	0.5048	-0.9225
v_y	0.2633	0.0961	0.0000
v_z	0.2633	0.0961	0.0000
H_y	0.1000	0.8163	1.0000
H_z	0.1000	0.8163	1.0000
H	5.002	5.132	5.196
v_t	0.3724	0.1360	0.0000
H_t	0.1414	1.1544	1.4142
b_n	0.8001	0.9468	1.4105
b	0.8004	0.9717	1.4658
a	0.8768	0.5776	0.4082
c_s	0.8785	0.9845	0.3916
$v_n + c_s$	0.8785	1.4893	-0.5309
$\cos \varphi$		0.7071	
$\sin \varphi$		0.7071	
$\sin \theta$		0.2250	0.2722
$s = \gamma \frac{4\pi p_0}{\mu H_0^2}$		0.3533	0.0776
\hat{h}_s		0.2722	
$R(h_s)$		0.8674	
$\bar{\eta}_s$		1.2192	
\bar{Y}_f		3.4418	
\tilde{v}_x		0.3426	0.7604
$\tilde{\lambda}$		0.1621	
Mach Number		0.3480	1.9415
$[v_t]$		-0.136	

5 附件

1. assign4.tex—本报告 L^AT_EX 源文件
2. assign4.pdf—本报告 PDF (Portable Document Format) 输出文件

3. References.bib – 文献文件
4. WFast077.eps–初值条件 (52) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 133 网格, 对应图 1 (a)
5. WFast261.eps–初值条件 (52) 情况下的快激波数值结果 (TVD 格式), 261 网格, 对应图 1 (b)
6. FShockNum.eps–初值条件 (54) 情况下 (快磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 2
7. SShockNum.eps–初值条件 (55) 情况下 (慢磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (TVD 格式), 对应图 3
8. MHDSHock.xlsx – 快慢激波两侧态分析的 EXCEL 表格文件

参考文献

- DAI W, WOODWARD P R, 1994. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. J. Comput. Phys., 115: 485-514.
- HARTEN A, 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J. Comput. Phys., 49: 357.
- JEFFREY A, TANIUTI T, 1964. Mathematics in science and engineering - a series of monographs and textbooks: volume 9 non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics[M]. New York / London: Academic Press.
- VAN LEER B, 1974. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme[J/OL]. Journal of Computational Physics, 14: 361-370. DOI: [10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9).