

Tugas 3 Komputasi Numerik



Kelompok 8:

Jericho Nathanael Chrisnanta / 5025221001

Adrian Aziz Santoso / 5025221229

Muhammad Bimatara Indianto / 5025221260

TUGAS 3

1. Tentukan: (a) rerata; (b) deviasi standar; dan (c) varian; dari data-data berikut:

0,95 1,05 1,15 1,25 1,32
 1,35 1,42 1,46 1,47 1,47
 1,54 1,55 1,63 1,65 1,71
 1,74 1,78 1,82 1,85 1,92
 1,95 2,06 2,14 2,27 2,39

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{rerata} &= \bar{x} = \frac{\sum x}{\sum f_i} \\ &= \frac{0,95+1,05+1,15+1,25+1,32+1,35+1,42+1,46+2(1,47)+1,54+1,55+1,63+1,65+1,71+1,74+1,78+1,82+1,85+1,92+1,95+2,06+2,14+2,27+2,39}{25} \\ &= \frac{40,89}{25} = 0,134069 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sigma = \text{standar deviasi} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,134069} = 0,366154399$$

i	x_i	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$
1	0,95	-0,6856	0,47004736
2	1,05	-0,5856	0,34292736
3	1,15	-0,4856	0,23580736
4	1,25	-0,3856	0,14868736
5	1,32	-0,3156	0,09960336
6	1,35	-0,2856	0,08156736
7	1,42	-0,2156	0,04648336
8	1,46	-0,1756	0,03083536
9	1,47	-0,1656	0,02742336
10	1,47	-0,1656	0,02742336
11	1,54	-0,0956	0,00913936
12	1,55	-0,0856	0,00732736
13	1,63	-0,0056	3,136E-05
14	1,65	0,0144	0,00020736
15	1,71	0,0744	0,00553536
16	1,74	0,1044	0,01089936
17	1,78	0,1444	0,02085136
18	1,82	0,1844	0,03400336
19	1,85	0,2144	0,04596736
20	1,92	0,2844	0,08088336
21	1,95	0,3144	0,09884736
22	2,06	0,4244	0,18011536
23	2,14	0,5044	0,25441936
24	2,27	0,6344	0,40246336
25	2,39	0,7544	0,56911936
		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 3,230616$	

$$\text{c) } \sigma^2 = \text{varian} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{3,230612}{24} = 0,134069$$

2. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut:

x 1 3 5 7 10 12 13 16 18 20
 y 3 2 6 5 8 7 10 9 12 10

i	X _i	Y _i	X _i ²	X _i Y _i
1	1	3	1	3
2	3	2	9	6
3	5	6	25	30
4	7	5	49	35
5	10	8	100	80
6	12	7	144	84
7	13	10	169	130
8	16	9	256	144
9	18	12	324	216
10	20	10	400	200
Total	105	72	1477	928

$a = \text{kuadran terkecil} =$

$$\frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2} = \frac{(72)(1477) - (105)(928)}{10(1477) - (105)^2} = \frac{106344 - 97440}{14770 - 11025} = \frac{8904}{3445} = 2,584615384$$

3. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut:

x 4 6 8 10 14 16 20 22 24 28 28 34 36 38
y 30 18 22 28 14 22 16 8 20 8 14 14 0 8

i	X _i	Y _i	X _i ²	X _i Y _i
1	4	30	16	120
2	6	18	36	108
3	8	22	64	176
4	10	28	100	280
5	14	14	196	196
6	16	22	256	352
7	20	16	400	320
8	22	8	484	176
9	24	20	576	480
10	28	8	784	224
11	28	14	784	392
12	34	14	1156	476
13	36	0	1296	0
14	38	8	1444	304
Total	152	186	7592	3604

$a = \text{kuadran terkecil} =$

$$\frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2} = \frac{(222)(7592) - (288)(3604)}{14(7592) - (288)^2} = \frac{1685424 - 1037956}{106288 - 82944} = \frac{1581468}{23344} = 67,74623029$$

4. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut:

x 1 2 2,5 4 6 8 8,5
y 0,4 0,7 0,8 1 1,2 1,3 1,4

i	X _i	Y _i	X _i ²	X _i Y _i
1	1	0,4	1	0,4
2	2	0,7	4	1,4
3	2,5	0,8	6,25	2
4	4	1	16	4
5	6	1,2	36	7,2
6	8	1,3	64	10,4
7	8,5	1,4	72,25	11,9
Total	32	6,8	199,5	37,3

$a = \text{kuadran terkecil} =$

$$\frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2} = \frac{(6,8)(199,5) - (32)(37,3)}{7(199,5) - (32)^2} = \frac{1356,6 - 1193,6}{1396,5 - 1024} = \frac{163}{372,5} = 0,4375838926$$

5. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut:

x 2,5 3,5 5 6 7,5 10 12,5 15 17,5 20
y 5 3,4 2 1,6 1,2 0,8 0,6 0,4 0,3 0,3

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	2,5	5	6,25	12,5
2	3,5	3,4	12,25	11,9
3	5	2	25	10
4	6	1,6	36	9,6
5	7,5	1,2	56,25	9
6	10	0,8	100	8
7	12,5	0,6	156,25	7,5
8	15	0,4	225	6
9	17,5	0,3	306,25	5,25
10	20	0,3	400	6
Total	99,5	15,6	1323,25	85,75

$a = \text{kuadran terkecil} =$

$$\frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2} = \frac{(15,6)(1323,5) - (99,5)(85,75)}{10(1323,5) - (99,5)^2} = \frac{20646,6 - 8532,125}{13235 - 9900,25} = \frac{12114,475}{3334,75} = 0,3634218028$$

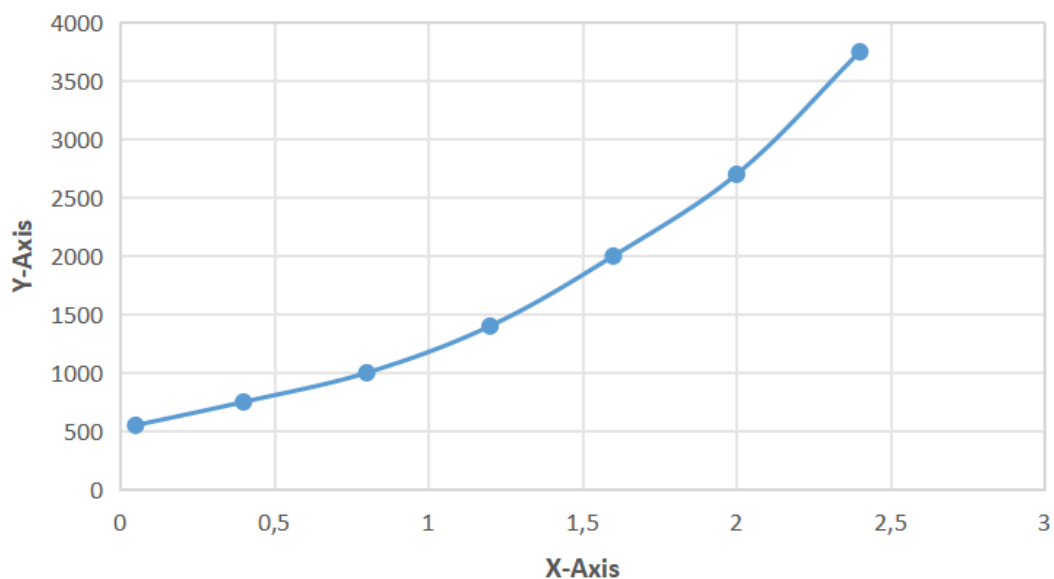
6. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis kurva dari data berikut:

x 0,05 0,4 0,8 1,2 1,6 2 2,4
y 550 750 1000 1400 2000 2700 3750

Untuk menemukan fungsi kurva dengan menggunakan regresi polinomial dari data yang diberikan, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan derajat polinomial yang akan digunakan. Dalam hal ini, kita akan menggunakan polinomial berderajat 2 (*quadratic*) karena data “terlihat” memiliki pola yang melengkung.

Berikutnya, buatlah persamaan regresi polinomial dengan menggunakan metode kuadrat terkecil untuk menemukan koefisien polinomial yang sesuai. Persamaan regresi polinomial berderajat 2 memiliki bentuk $y = ax^2 + bx + c$.

Dengan menggunakan data yang diberikan, kita dapat membentuk sistem persamaan linier dengan mensubstitusikan nilai x dan y ke persamaan regresi polinomial:



Persamaan untuk $x = 0.05$: $550 = [a * (0.05)^2] + [b * 0.05] + c$

Persamaan untuk $x = 0.4$: $750 = [a * (0.4)^2] + [b * 0.4] + c$

Persamaan untuk $x = 0.8$: $1000 = [a * (0.8)^2] + [b * 0.8] + c$

Persamaan untuk $x = 1.2$: $1400 = [a * (1.2)^2] + [b * 1.2] + c$

Persamaan untuk $x = 1.6$: $2000 = [a * (1.6)^2] + [b * 1.6] + c$

Persamaan untuk $x = 2$: $2700 = [a * (2)^2] + [b * 2] + c$

Persamaan untuk $x = 2.4$: $3750 = [a * (2.4)^2] + [b * 2.4] + c$

Selanjutnya, selesaikanlah sistem persamaan linier tersebut untuk menemukan koefisien a , b , dan c . Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan metode aljabar linier seperti eliminasi Gauss atau matriks invers.

Setelah diperoleh nilai koefisien a , b , dan c , kita dapat memasukkannya ke dalam persamaan regresi polinomial untuk memperoleh fungsi kurva yang dicari. Didapatkanlah nilai koefisien sebagai berikut:

$$a = 800 \quad b = -800 \quad c = 600$$

Maka, persamaan regresi polinomial yang ditaksir adalah:

$$y = 800x^2 - 800x + 600$$

Dengan menggunakan regresi polinomial berderajat 2 dan koefisien yang tepat, kita dapat me-nemukan fungsi kurva dari data yang diberikan.

7. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis kurva dari data berikut:

x 0 2 4 6 9 11 13 15 17 19 23 25 28
y 1,2 0,6 0,4 -0,2 0 -0,6 -0,4 -0,2 -0,4 0,2 -0,4 1,2 1,8

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	$X_i Y_i$	$X_i^2 Y_i$
1	0	1,2	0	0	0	0	0
2	2	0,6	4	8	16	1,2	2,4
3	4	0,4	16	64	256	1,6	6,4
4	6	0,2	36	216	1296	1,2	7,2
5	9	0	81	729	6561	0	0
6	11	-0,6	121	1331	14641	-6,6	-72,6
7	13	-0,4	169	2197	28561	-5,2	-67,6
8	15	-0,2	225	3375	50625	-3	-45
9	17	-0,4	289	4913	83521	-6,8	-115,6
10	19	0,2	361	6859	130321	3,8	72,2
11	23	-0,4	529	12167	279841	-9,2	-211,6
12	25	1,2	625	15625	390625	30	750
13	28	1,8	784	21952	614656	50,4	1411,2
Σ	172	3,6	3240	69436	1600920	57,4	1737

Dengan menggunakan data tabel, maka diperoleh:

13	$a_0 +$	172	$a_1 +$	3240	$a_2 =$	3,6	$a_2 = -0,0137$
172	$a_0 +$	3240	$a_2 +$	69436	$a_3 =$	57,4	$a_1 = 0.2144$
3240	$a_0 +$	69436	$a_2 +$	1600920	$a_3 =$	1737	$a_0 = 0.8538$

Maka, persamaan regresi polynomial orde 2 yang ditaksir adalah:

$$y = -0.0137x^2 + 0.2144x + 0.8538$$