

Kelompok 9

- Malvin Leonardo Hartanto (5025221033)
- Mohammad Hanif Furqan Aufa Putra (5025221161)
- Muhammad Alif Satriadhi (5025221188)

## Tugas 4

### Komputasi Numerik D

1. Tentukan: (a) rerata; (b) deviasi standar; dan (c) varian; dari data-data berikut

0,95	1,42	1,54	1,55	1,63
1,32	1,15	1,47	1,95	1,25
1,46	1,47	1,92	1,35	1,05
1,85	1,74	1,65	1,78	1,71
2,39	1,82	2,06	2,14	2,27

2. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut :

x	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y	3	2	6	5	8	7	10	9	12	10

3. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi garis lurus dari data berikut :

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28	28	34	36	38
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8	14	14	0	8

4. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi kurva dari data berikut :

x	1	2	2,5	4	6	8	8,5
y	0,4	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4

5. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi kurva dari data berikut :

x	2,5	3,5	5	6	7,5	10	12,5	15	17,5	20
y	5	3,4	2	1,6	1,2	0,8	0,6	0,4	0,3	0,3

6. Gunakan regresi polynomial untuk menaksir fungsi kurva dari data berikut :

x	0,05	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
y	550	750	1.000	1.400	2.000	2.700	3.750

7. Gunakan regresi polynomial untuk menaksir fungsi kurva dari data berikut :

x	0	2	4	6	9	11	13	15	17	19	23	25	28
y	1,2	0,6	0,4	-0,2	0	-0,6	-0,4	-0,2	-0,4	0,2	0,4	1,2	1,8

## Jawaban

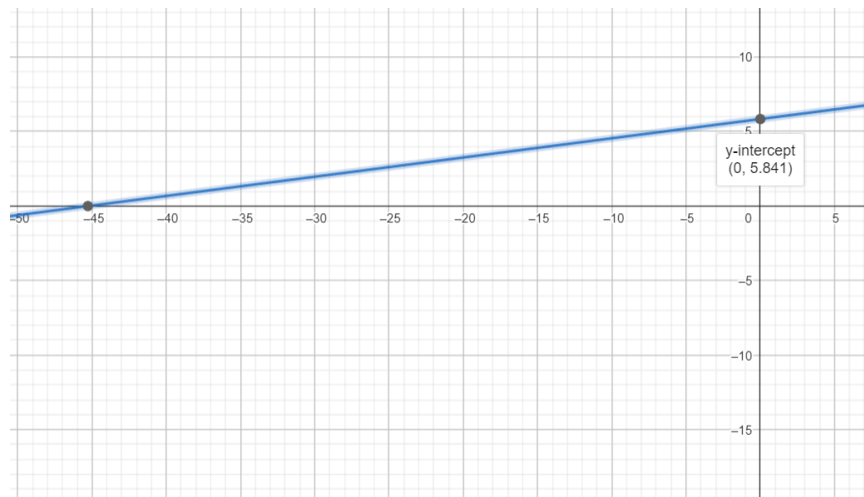
1. Berikut ini rerata, deviasi standar, dan varian dari data di nomor 1.

a. Rerata ( $\bar{y}$ ) =  $\frac{\sum y_i}{n} = \frac{40,89}{25} = 1,6356$

b. Deviasi standar ( $\sigma$ ) =  $\sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \approx 0,366891$

c. Varian ( $\sigma^2$ ) =  $\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \approx 0,134609$

2. Dari soal yang diberikan didapat gambar grafik seperti berikut



Perhitungannya adalah seperti berikut

NO	X	Y	X*Y	X^2
1	1	3	3	1
2	3	2	6	9
3	5	6	30	25
4	7	5	35	49
5	10	8	80	100
6	12	7	84	144
7	13	10	130	169
8	16	9	144	256
9	18	12	216	324
10	20	10	200	400
Σ	105	72	928	1477
rata-rata x	10.5			
rata-rata y	7.2			
b	0.129			
a	5.841			

Dengan **b** didapat dengan cara

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Dan **a** merupakan

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Dengan demikian, persamaan garis yang digunakan untuk mendekati data tersebut dapat diungkapkan sebagai berikut:

$$y = 5,841 + 0,129x$$

3. Berikut ini cara menaksir fungsi garis lurus dari data nomor 3 dengan regresi kuadrat terkecil.

No	$X_i$	$Y_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i)^2$
1	4	30	120	16
2	6	18	108	36
3	8	22	176	64
4	10	28	280	100
5	14	14	196	196
6	16	22	352	256
7	20	16	320	400
8	22	8	176	484
9	24	20	480	576
10	28	8	224	784
11	28	14	392	784
12	34	14	476	1156
13	36	0	0	1296
14	38	8	304	1444
$\Sigma$	288	222	3604	7592

Dari Tabel di atas kita dapat menghitung:

Nilai rerata dari x dan y adalah:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{288}{14} = 20.57$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{222}{14} = 15.86$$

Jika persamaan umum garis dinyatakan sebagai :  $y = a + bx$

Maka:

$$b = \frac{n \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n \Sigma (x_i)^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{14 \cdot 3604 - 288 \cdot 222}{14 \cdot 7592 - 82.944} = -0.57745$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 15.86 - (-0.57745)(20.57) = 17.08$$

Jadi persamaan garis yang mendekati rangkaian data tersebut adalah :

$$y = 17.08 - 0.57745x$$

4. Berikut ini cara menaksir fungsi kurva dari data nomor 4 dengan regresi kuadrat terkecil.

a. Transformasi log

No	$x_i$	$y_i$	$q_i$	$p_i$	$q_i \cdot p_i$	$(q_i)^2$
1	1	0.4	0	-0.39794	0	0
2	2	0.7	0.30103	-0.15490	-0.04663	0.09062
3	2.5	0.8	0.39794	-0.09691	-0.03856	0.15836
4	4	1	0.60206	0	0	0.36248
5	6	1.2	0.77815	0.07918	0.06161	0.60552
6	8	1.3	0.90309	0.11394	0.10290	0.81557
7	8.5	1.4	0.92942	0.14613	0.13581	0.86382
$\Sigma$	32	6.8	3.91169	-0.31050	0.21514	2.89636

Dari tabel di atas, dapat diperoleh beberapa parameter penting, seperti:

$$\bar{q} = \frac{\Sigma q_i}{n} = \frac{3,91169}{7} \approx 0,55881$$

$$\bar{p} = \frac{\Sigma p_i}{n} = \frac{-0,31050}{7} \approx -0,04436$$

Sedangkan, koefisien A dan B dihitung dengan cara:

$$B = \frac{n \Sigma q_i p_i - \Sigma q_i \Sigma p_i}{n \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2} = \frac{7 \cdot 0,21514 - 3,91169 \cdot (-0,31050)}{7 \cdot 2,89636 - (3,91169)^2} \approx 0,54704$$

$$A = \bar{p} - B\bar{q} = -0,04436 - 0,54704 \cdot 0,55881 \approx -0,35005$$

$$\text{Karena } A = \log a \rightarrow \text{maka } a = 10^{-0,35005} \approx 0,44663$$

$$\text{Karena } B = b \rightarrow \text{maka } b = 0,54704$$

Dengan demikian, fungsi kurva dengan transformasi log adalah:

$$y = 0,44663x^{0,54704}$$

b. Transformasi ln

No	$x_i$	$y_i$	$(q_i)^2$	$p_i$	$q_i \cdot p_i$
1	1	0.4	1	-0.91629	-0.91629
2	2	0.7	4	-0.35667	-0.71335
3	2.5	0.8	6.25	-0.22314	-0.55786
4	4	1	16	0	0
5	6	1.2	36	0.18232	1.09393
6	8	1.3	64	0.26236	2.09891
7	8.5	1.4	72.25	0.33647	2.86001
$\Sigma$	32	6.8	199.5	-0.71495	3.86536

Dari tabel di atas, dapat diperoleh beberapa parameter penting, seperti:

$$\bar{q} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{32}{7} \approx 4,57143$$

$$\bar{p} = \frac{\Sigma p_i}{n} = \frac{-0.71495}{7} \approx -0,10214$$

Sedangkan, koefisien A dan B dihitung dengan cara:

$$B = \frac{n \Sigma q_i p_i - \Sigma q_i \Sigma p_i}{n \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2} = \frac{7 \cdot 3,86536 - 32 \cdot (-0,71495)}{7 \cdot 199,5 - (32)^2} \approx 0,13406$$

$$A = \bar{p} - B\bar{q} = -0,10214 - 0,13406 \cdot 4,57143 \approx -0,71496$$

$$\text{Karena } A = \ln a \rightarrow \text{maka } a = e^{-0,71496} \approx 0,48921$$

$$\text{Karena } B = b \rightarrow \text{maka } b = 0,13406$$

Dengan demikian, fungsi kurva dengan transformasi log adalah:

$$y = 0,48921e^{0,13406x}$$

Dari kedua cara di atas, kita perlu memilih antara transformasi log atau transformasi ln yang memiliki akurasi lebih bagus. Caranya adalah dengan menghitung koefisien korelasi:

No	$x_i$	$y_i$	Transformasi log			Transformasi ln		
			$g(x_i)$	$D^2$	$D_t^2$	$g(x_i)$	$D^2$	$D_t^2$
1	1	0.4	0.44663	0.00217	0.32653	0.55939	0.02541	0.32653
2	2	0.7	0.65257	0.00225	0.07367	0.63964	0.00364	0.07367
3	2.5	0.8	0.73729	0.00393	0.02939	0.68398	0.01346	0.02939
4	4	1	0.95346	0.00217	0.00082	0.83632	0.02679	0.00082
5	6	1.2	1.19022	0.00010	0.05224	1.09349	0.01134	0.05224
6	8	1.3	1.39308	0.00866	0.10796	1.42973	0.01683	0.10796
7	8.5	1.4	1.44005	0.00160	0.18367	1.52885	0.01660	0.18367
$\Sigma$	32	6.8	6.81330	0.02089	0.77429	6.77140	0.11407	0.77429

Dari tabel di atas, dapat dicari nilai r untuk transformasi log:

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \sqrt{\frac{0.77429 - 0.02089}{0.77429}} \approx 0,98642$$

Sedangkan untuk nilai r transformasi ln adalah:

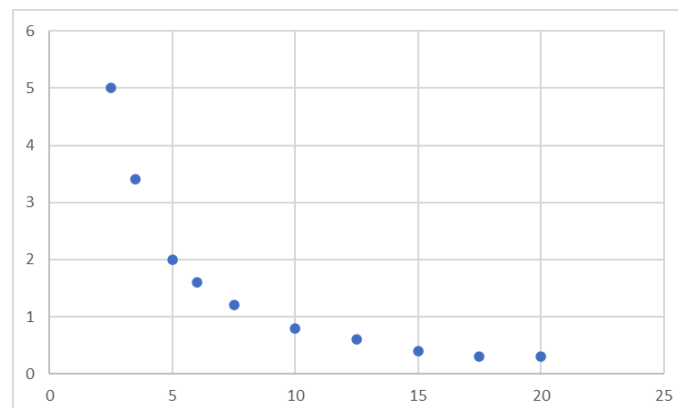
$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \sqrt{\frac{0.77429 - 0.11407}{0.77429}} \approx 0,92340$$

Dapat dilihat bahwa koefisien korelasi r untuk transformasi log lebih mendekati nilai 1 daripada transformasi ln. Jadi, dapat disimpulkan fungsi kurva  $y = 0,44663x^{0,54704}$  yang diperoleh dari transformasi log memberikan pendekatan yang lebih baik.

5. Gunakan regresi kuadrat terkecil untuk menaksir fungsi kurva dari data berikut :

X: 2,5 3,5 5 6 7,5 10 12,5 15 17,5 20

Y: 5 3,4 2 1,6 1,2 0,8 0,6 0,4 0,3 0,3



Pendekatan log

No	X	Y	q	p	q.p	(qi)^2
1	2,5	5	0,39794	0,69897	0,278148	0,158356
2	3,5	3,4	0,544068	0,531479	0,289161	0,29601
3	5	2	0,69897	0,30103	0,210411	0,488559
4	6	1,6	0,778151	0,20412	0,158836	0,605519
5	7,5	1,2	0,875061	0,079181	0,069288	0,765732
6	10	0,8	1	-0,09691	-0,09691	1
7	12,5	0,6	1,09691	-0,22185	-0,24335	1,203212
8	15	0,4	1,176091	-0,39794	-0,46801	1,383191
9	17,5	0,3	1,243038	-0,52288	-0,64996	1,545144
10	20	0,3	1,30103	-0,52288	-0,68028	1,692679
$\Sigma$	99,5	15,6	9,11126	0,052324	-1,13267	9,138402

$$\bar{q} = \Sigma q / n = 9,11126 / 10 = 0,911126$$

$$\bar{p} = \Sigma p / n = 0,052324 / 10 = 0,0052324$$

$$B = \frac{n \Sigma q_i p_i - \Sigma q_i \Sigma p_i}{n \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2} = \frac{10(-1,13267) - 9,11126 (0,052324)}{10(9,138402) - (9,111261)^2} = -1,41039$$

$$A = \bar{p} - B \bar{q} = 0,0052324 - (-1,41039) (0,911126) = 1,290275$$

$$A = \log a$$



$$a = 19,510$$

$$B = b = -1,41039$$

$$Y = ax^b = 19,510 \cdot X^{-1,41039}$$

Pendekatan ln

No	X	Y	q <sup>2</sup>	p	q.p
1	2,5	5	6,25	1,609438	4,023595
2	3,5	3,4	12,25	1,223775	4,283214
3	5	2	25	0,693147	3,465736
4	6	1,6	36	0,470004	2,820022
5	7,5	1,2	56,25	0,182322	1,367412
6	10	0,8	100	-0,22314	-2,23144
7	12,5	0,6	156,25	-0,51083	-6,38532
8	15	0,4	225	-0,91629	-13,7444
9	17,5	0,3	306,25	-1,20397	-21,0695
10	20	0,3	400	-1,20397	-24,0795
Σ	99,5	15,6	1323,25	0,12048	-51,5501

$$\bar{q} = \sum x_i / n = 99,5 / 10 = 9,95$$

$$\bar{p} = \sum \ln y_i / n = 9,11126 / 10 = 0,911126$$

$$B = \frac{n \sum q_i p_i - \sum x_i \sum p_i}{n \sum q_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{10(-51,5501) - 99,5(0,12048)}{10(1323,25) - (99,5)^2} = -0,158298$$

$$A = \bar{p} - B \bar{q} = 0,911126 - (-0,158298) (9,95) = 2,48619$$

$$A = \ln a$$

$$a = 12,01541$$

$$B = b = -0,158298$$

$$Y = ae^{bx} = 12,0154 \cdot e^{-0,158298x}$$

6. Berikut cara menaksir fungsi kurva dari data nomor 6 dengan regresi polinomial. Karena tidak diberikan orde untuk persamaannya, maka kami memakai orde-2:

Persamaan polinomial orde-2 memiliki bentuk :

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

No	$X_i$	$Y_i$	$(X_i)^2$	$(X_i)^3$	$(X_i)^4$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i)^2 Y_i$
1	0.05	550	0.0025	0.000125	0.00000625	27.5	1.375
2	0.4	750	0.16	0.064	0.0256	300	120
3	0.8	1000	0.64	0.512	0.4096	800	640
4	1.2	1400	1.44	1.728	2.0736	1680	2016
5	1.6	2000	2.56	4.096	6.5536	3200	5120
6	2	2700	4	8	16	5400	10800
7	2.4	3750	5.76	13.824	33.1776	9000	21600
$\Sigma$	8.45	12150	14.5625	28.224125	58.24000625	20407.5	40297.375

Dengan menggunakan data tabel, maka diperoleh :

$$7a_0 + 8.45a_1 + 14.5625a_2 = 12150$$

$$8.45a_0 + 14.5625a_1 + 28.224125a_2 = 20407.5$$

$$14.5625a_0 + 28.224125a_1 + 58.24000625a_2 = 40297.375$$

Sehingga:

$$a_2 = 592.22 \quad a_1 = 60.90 \quad a_0 = 514.32$$

Jadi persamaan kurva yang dicari adalah :

$$y = 514.32 + 60.90x + 592.22x^2$$

7. Berikut cara menaksir fungsi kurva dari data nomor 7 dengan regresi polinomial. Karena tidak diberikan orde untuk persamaannya, maka kami memakai orde-2.

n	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
1	0	1.2	0	0	0	0	0
2	2	0.6	4	8	16	1.2	2.4
3	4	0.4	16	64	256	1.6	6.4
4	6	-0.2	36	216	1296	-1.2	-7.2
5	9	0	81	729	6561	0	0
6	11	-0.6	121	1331	14641	-6.6	-72.6
7	13	-0.4	169	2197	28561	-5.2	-67.6
8	15	-0.2	225	3375	50625	-3	-45
9	17	-0.4	289	4913	83521	-6.8	-115.6
10	19	0.2	361	6859	130321	3.8	72.2
11	23	0.4	529	12167	279841	9.2	211.6
12	25	1.2	625	15625	390625	30	750
13	28	1.8	784	21952	614656	50.4	1411.2
$\Sigma$	172	4	3240	69436	1600920	73.4	2145.8

Berdasarkan tabel di atas, dapat diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 13 & 172 & 3240 \\ 172 & 3240 & 69436 \\ 3240 & 69436 & 1600920 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 73,4 \\ 2145,8 \end{bmatrix}$$

$$13x + 172y + 3240z = 4$$

$$172x + 3240y + 69436z = 73.4$$

$$3240x + 69436y + 1600920z = 2145.8$$

$$x \approx 1.12452 \quad y \approx -0.24109 \quad z \approx 0.00952$$

Jadi, persamaan kurva yang dicari adalah:

$$y = 1.12452 - 0.24109x + 0.00952x^2$$