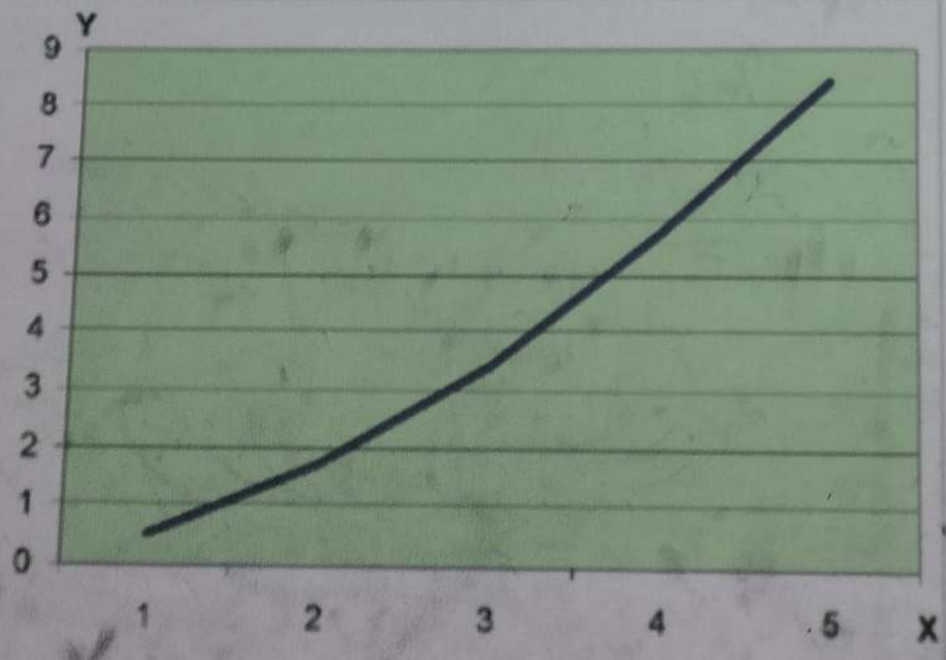
RKT untuk Kurva Non-Linier (4)

Contoh : Tentukan persamaan kurva lengkung yang diwakili serangkaian data berikut :

x	1	2	3	4	5
y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Penyelesaian masalah di atas dilakukan melalui 2 *fashion*, transformasi log dan ln.



RKT untuk Kurva Non-Linier (5)

Transformasi log (fungsi asli diamsusikan sebagai fungsi berpangkat)

Misal persamaan yang dicari adalah : $y = ax^b$

Persamaan tersebut dapat dilinierisasi melalui fungsi logaritmik sbb : $\log y = \log ax^b$

atau dapat pula dinyatakan sebagai : $\log y = b \log x + \log a$

Sehingga jika dimisalkan $q = \log x$, $p = \log y$, $A = \log a$, $B = b$, akan diperoleh tabel :

No	x_i	y_i	q_i	P_i	$q_i \cdot p_i$	$(q_i)^2$
1	1	0,5	0	- 0,301	0	0
2	2	1,7	0,3010	0,2304	0,0693	0,0906
3	3	3,4	0,4771	0,5315	0,2536	0,2276
4	4	5,7	0,6020	0,7559	0,4550	0,3624
5	5	8,4	0,6990	0,9243	0,6461	0,4886
	$\sum$	**19,7**	**2,0791**	**2,1411**	**1,4240**	**1,1692**

RKT untuk Kurva Non-Linier (6)

Dari tabel tersebut dapat diperoleh beberapa parameter penting, seperti :

$\overline{q} = \Sigma \log x_i / n = 2,0791 / 5 = 0,4158$

$\overline{p} = \Sigma \log y_i / n = 2,1411 / 5 = 0,42822$

Sedangkan koefisien A dan B dihitung melalui persamaan (4) dan (6) :

$$B = \frac{n \Sigma q_i p_i - \Sigma q_i \Sigma p_i}{n \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2} = \frac{5\,(1,4240) - 2,0791\,(2,1411)}{5\,(1,1692) - 2,0791\,(2,0791)} = \frac{2,6684}{1,5233} = 1,7572$$

$A = \overline{p} - B\,\overline{q} = 0,42822 - 1,7572 \;.\; 0,4158 = -\,0,3024$

Karena $A = \log a \rightarrow$ maka $a = 0,4984$

Karena $B = b \rightarrow$ maka $b = 1,7572$

Dengan demikian fungsi yang dicari adalah : $y = 0,4984\, x^{1.7572}$

RKT untuk Kurva Non-Linier (7)

Transformasi ln (fungsi asli diasumsikan sebagai fungsi eksponensial)

Misal persamaan yang dicari adalah : $y = a\,e^{bx}$

atau dapat pula dinyatakan sebagai : $\ln y = \ln a + bx$

Sehingga jika dimisalkan $q = x$, $p = \ln y$, $A = \ln a$, $B = b$, maka dpt diperoleh tabel :

No	x_i	y_i	q_i^2	p_i	$q_i \cdot p_i$
1	1	0,5	1	- 0,6931	- 0,6931
2	2	1,7	4	0,5306	1,0612
3	3	3,4	9	1,2238	3,6714
4	4	5,7	16	1,7405	6,962
5	5	8,4	25	2,1282	10,641
Σ	**15**	**19,7**	**55**	**4,93**	**21,6425**

RKT untuk Kurva Non-Linier (8)

Dari tabel tersebut dapat diperoleh beberapa parameter penting, seperti :

$\overline{q} = \Sigma x_i / n = 15 / 5 = 3$

$\overline{p} = \Sigma \ln y_i / n = 2,0791 / 5 = 0,4158$

Sedangkan koefisien A dan B dihitung melalui persamaan (4) dan (6) :

$$B = \frac{n \Sigma q_i p_i - \Sigma q_i \Sigma p_i}{n \Sigma q_i^2 - (\Sigma q_i)^2} = \frac{5\,(21,6425) - 15\,(4,93)}{5\ (55) - (15)^2} = \frac{34,2625}{50} = 0,6852$$

$A = \overline{p} - B\,\overline{q} = 0,4158 - 0,68525\ .\ 3 = -\ 1,63995$

Karena $A = \ln a \rightarrow$ maka $a = 0,34447$

Karena $B = b \rightarrow$ maka $b = 0,68525$

Dengan demikian fungsi yang dicari adalah : $y = 0,34447\ e^{0,68525x}$

RKT untuk Kurva Non-Linier (9)

Sekarang waktunya memilih. Mana di antara 2 pendekatan yang memberikan akurasi lebih bagus. Caranya adalah dengan menghitung koefisien korelasi (7) :

$$r^2 = \frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}$$

dengan

$$D_t^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \qquad D^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax^b)^2 \qquad D^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ae^{bx})^2$$

No	x_i	y_i	Transformasi log			Transformasi ln		
			$g(x_i)$	D^2	D_t^2	$g(x_i)$	D^2	D_t^2
1	1	0,5	0,4984	0,000003	11,8336	0,6835	0,03367	11,8336
2	2	1,7	1,6848	0,000231	5,0176	1,3563	0,11813	5,0176
3	3	3,4	3,4354	0,00125	0,2916	2,6912	0,50240	0,2916
4	4	5,7	5,6953	0,000022	3,0976	5,3401	0,12953	3,0976
5	5	8,4	8,4296	0,000876	19,8916	10,5963	4,82373	19,8916
$\sum$	**15**	**19,7**		**0,00238**	**40,132**		**5,60746**	**40,132**

RKT untuk Kurva Non-Linier (9)

Dari tabel tersebut dapat dicari nilai r untuk transformasi log :

$$r = \left(\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{40,132 - 0,00238}{40,132} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,99997$$

Sedangkan untuk transformasi ln :

$$r = \left(\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{40,132 - 5,60746}{40,132} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,92751$$

Dapat dilihat bahwa koefisien korelasi r untuk transformasi log lebih mendekati nilai 1 dibanding transformasi ln. Sehingga bisa disimpulkan bahwa transformasi log memberikan pendekatan yang lebih baik.

Regresi Polynomial (1)

Persamaan garis lurus dapat didekati dg **Metode Kuadrat Terkecil**.

Sementara untuk kurva lengkung, pendekatan yang cukup logis adalah melalui transformasi log atau ln.

Atau, untuk kurva lengkung dapat didekati dengan **Regresi Polynomial**.

Persamaan polynomial orde-r mempunyai bentuk :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r$$

Jumlah kuadrat kesalahan dr pendekatan polynom di atas adalah :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_rx_i^r)^2 \quad \dots (8)$$

Regresi Polynomial (2)

Jika didiferensiasi terhadap setiap koefisiennya, maka persamaan (8) akan menjadi :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_rx^r)$$

Bisa dilihat bhw bentuk persamaan²nya menyerupai sistem persamaan

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i\,(a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_rx^r)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,(a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_rx^r)$$

.

.

.

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_r} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^r\,(a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_rx^r)$$

Regresi Polynomial (3)

$$
\begin{pmatrix}
n & \Sigma x & \Sigma x_i^2 & \cdots & \Sigma x_i^r \\
\Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \cdots & \Sigma x_i^{r+1} \\
\Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \cdots & \Sigma x_i^{r+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\Sigma x_i^r & \Sigma x_i^{r+1} & \Sigma x_i^{r+2} & \cdots & \Sigma x_i^{r+r}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_i^r y_i
\end{pmatrix}
$$

Berarti kita bisa menyatakan himpunan persamaan turunan tersebut menjadi persamaan matriks AX = B. Dan selanjutnya kita dapat menggunakan metode eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, dll untuk mencari nilai a_0, a_1, ..., a_r.