Kelompok 9

- Malvin Leonardo Hartanto (5025221033)
- Mohammad Hanif Furqan Aufa Putra (5025221161)
- Muhammad Alif Satriadhi (5025221188)

Tugas 3
Komputasi Numerik D

Dapatkan akar-akar persamaan berikut:

a. $x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$

b. $x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0$

Dengan:

1. Metode Iterasi
2. Metode Faktorisasi

Gunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan akar persamaan-persamaan:

3. $f(x) =- 0,875x^2 + 1,75x + 2,625$ $(x_i = 3,1)$
4. $f(x) =- 2,1 + 6,21x - 3,9x^2 + 0,667x^3$
5. $f(x) =- 23,33 + 79,35x - 88,09x^2 + 41,6x^3 - 8,68x^4 + 0,658x^5$ $(x_i = 3,5)$

Sekarang gunakan metode Secant untuk maksud yang sama dari persamaan:

6. $f(x) = 9,36 - 21,963x + 16,2965x^2 - 3,70377x^3$
7. $f(x) = x^4 - 8,6x^3 - 35,51x^2 + 464x - 998,46$ $(x_{i-1} = 7\ dan\ x_i = 9)$
8. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $(x_{i-1} = 2,5\ dan\ x_i = 3,6)$
9. Buatlah sebuah paparan untuk menjelaskan tentang metode Bairstow dan metode Quotient-Difference (Q-D). Dan buatlah sebuah kesimpulan mengenai kemudahan/kesulitan kedua metode tersebut di dalam menyelesaikan masalah dibanding dengan metode-metode yang telah anda pelajari dalam materi ini.

Jawaban

1. Berikut ini cara agar mendapatkan akar - akar persamaan pada soal nomor 1 dengan metode iterasi

   a. $x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$, Asumsikan $x_0 = 0$

   $x = \frac{(x^3 + 6,6x^2 + 22,64)}{29,05}$

   $f'(x) = \frac{3x^2 + 13,2x}{29,05}$, $f(x_0) = 0$, dan 0 < 1 menandakan konvergen, maka

   $f(x) = \frac{(x^3 + 6,6x^2 + 22,64)}{29,05}$

   Iterasi 1

   $f(x) = \frac{(x^3 + 6,6x^2 + 22,64)}{29,05}$

   $f(x_0) = \frac{(0 + 0 + 22,64)}{29,05}$

   $f(x_0) = 0,7793$, maka $x_1 = 0,7793$

   Iterasi 2

   $f(x_1) = \frac{(0,7793^3 + 6,6(0,7793^2) + 22,64)}{29,05}$

   $f(x_1) = 0,9336$, maka maka $x_2 = 0,9336$

   Iterasi 3

   $f(x_2) = \frac{(0,9336^3 + 6,6(0,9336^2) + 22,64)}{29,05}$

   $f(x_2) = 1,0054$, maka $x_3 = 1,0054$

   Maka akar - akar penyelesaiannya adalah:

   $x_1 = 0,7793$ $\qquad$ $x_2 = 0,9336$ $\qquad$ $x_3 = 1,0054$

   b. $x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0$, Asumsikan $x_0 = 0$

   $x = \frac{(x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 + 7,260)}{9,146}$

$f'(x) = \frac{(4x^3 - 1,23x^2 + 3,264x)}{9,146}$, $f(x_0) = 0$, dan 0 < 1 menandakan konvergen, maka

$f(x) = \frac{(x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 + 7,260)}{9,146}$

Iterasi 1

$f(x) = \frac{(x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 + 7,260)}{9,146}$

$f(x_0) = \frac{(0 - 0 + 0 + 7,260)}{9,146}$

$f(x_0) = 0,7938$, maka $x_1 = 0,7938$

Iterasi 2

$f(x_1) = \frac{(0,7938^4 - 0,41(0,7938)^3 + 1,632(0,7938)^2 + 7,260)}{9,146}$

$f(x_1) = 0,9272$, maka $x_2 = 0,9272$

Iterasi 3

$f(x_2) = \frac{(0,9272^4 - 0,41(0,9272)^3 + 1,632(0,9272)^2 + 7,260)}{9,146}$

$f(x_2) = 0,9923$, maka $x_2 = 0,9923$

Maka akar - akar penyelesaiannya adalah:

$x_1 = 0,7938$ $x_2 = 0,9272$ $x_3 = 0,9923$

2. Berikut ini cara mendapatkan akar-akar persamaan pada soal nomor 2 dengan metode faktorisasi.

   a. $x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$

   $A_2 = 6,6$ $A_1 = -29,05$ $A_0 = 22,64$

   $b_0 = \frac{A_0}{a_0}$ $a_1 = A_2 - b_0$ $a_0 = A_1 - a_1 b_0$

Di awal, inisialisasi $b_0 = 0$;

$a_1 = 6,6 - 0 = 6,6$;

$a_0 =- 29,05 - (6,6)(0) =- 29,05$;

$b_0 = \frac{22,64}{-29,05} \approx- 0,77935$;

$a_1 = 6,6 - (- 0,77935) = 7,37935$;

$a_0 =- 29,05 - (7,37935)(- 0,77935) \approx- 23,29890$;

$b_0 = \frac{22,64}{-23,29890} \approx- 0,97172$;

$a_1 = 6,6 - (- 0,97172) = 7,57172$;

$a_0 =- 29,05 - (7,57172)(- 0,97172) \approx- 21,69240$;

#	b_0	a_1	a_0
1	0	$6,6$	$- 29,05$
2	$- 0,77935$	$7,37935$	$- 23,29890$
3	$- 0,97172$	$7,57172$	$- 21,69240$

$x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$

$(x - 0,97172)(x^2 + 7,57172x - 21,69240) = 0$

$x_1 \approx 0,97172$ $\quad$ $x_2 \approx 2.21623$ $\quad$ $x_3 \approx- 9.78795$

b. $x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0$

$A_3 =- 0,41$ $\quad$ $A_2 = 1,632$ $\quad$ $A_1 =- 9,146$ $\quad$ $A_0 = 7,260$

$b_0 = \frac{A_0}{a_0}$ $b_1 = \frac{(A_1 - a_1 b_0)}{a_0}$

$a_1 = A_2 - b_0$ $a_0 = A_1 - a_1 b_0$

Di awal, inisialisasi $b_0 = 0$;

#	b_0	b_1	a_1	a_0
1	0	0	1.63200	-9.14600
2	-0.79379	0.85836	2.42579	-7.22043
3	-1.00548	0.92888	2.63748	-6.49407
4	-1.11794	0.95432	2.74994	-6.07172
5	-1.19571	0.96478	2.82771	-5.76489
6	-1.25935	0.96878	2.89135	-5.50479
7	-1.31885	0.96875	2.95085	-5.25426
8	-1.38174	0.96468	3.01374	-4.98182

$x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0$

$(x^2 + 0,96468x - 1,38174)(x^2 + 3,01374x - 4,98182) = 0$

$x_1 \approx 0,78825$ $x_2 \approx -1,75293$

$x_3 \approx 1.18617$ $x_4 \approx -4.19991$

3. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 3 dengan metode Newton-Raphson.

   $f(x) = -0,875x^2 + 1,75x + 2,625$ ($Xi = 3,1$)

   $f'(x) = -1,5x + 1,75$

   Dengan mengambil Xi sebagai 3,1, hasilnya adalah sebagai berikut:

#	Xn	f(Xn)	f'(Xn)	Xn+1 = Xn -f(Xn)/f'(Xn)
1	3.1	-0.35875	-2.9	2.976293103
2	2.976293103	0.082482373	-2.714439655	3.006679623
3	3.006679623	-0.02341772	-2.760019434	2.998195001
4	2.998195001	0.006314644	-2.747292502	3.000493498
5	3.000493498	-0.001727458	-2.750740248	2.999865501
6	2.999865501	0.000470731	-2.749798252	3.000036688
7	3.000036688	-0.00012841	-2.750055033	2.999989995

Oleh karena itu, perkiraan nilai akarnya adalah 2,999989995

4. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 4 dengan metode Newton-Raphson.

$$f(x) = \ -2,1 + 6,21x - 3,9x^2 + 0,667x^3$$

$$f'(x) = 6,21 - 7,8x + 200,1x^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{-2,1+6,21x-3,9x^2+0,667x^3}{6,21 - 7,8x + 200,1x^2}$$

Iterasi	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_{i+1})$
1	0	0.338164251	-2.1	6.21	-0.41004639
2	0.338164251	0.44603874	-0.41004639	3.801143317	-0.033436088
3	0.44603874	0.456724617	-0.033436088	3.128997897	-2.20275E-05
4	0.456724617	0.456731804	-2.20275E-05	3.064951337	2.15452E-07
5	0.456731804	0.456731734	2.15452E-07	3.064908415	-2.10891E-09
6	0.456731734	0.456731734199422	-2.10891E-09	3.064908835	2.06427E-11
7	0.456731734199422	0.456731734192687	2.06427E-11	3.064908831	-2.02394E-13
8	0.456731734192687	0.456731734192753	-2.02394E-13	3.064908831	2.38698E-15

9	0.456731734192753	0.456731734192752	2.38698E-15	3.064908831	0

Jadi salah satu akar persamaan adalah 0.456731734192752

5. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 5 dengan metode Newton-Raphson.

   $f(x) =- 23,33 + 79,35x - 88,09x^2 + 41,6x^3 - 8,68x^4 + 0,658x^5 \quad (x_i = 3,5)$

   $f'(x) = 79,35 - 176,18x + 124,8x^2 - 34,72x^3 + 3,29x^4$

   $f(x_i) = 1,943937499999890$

   $f'(x_i) =- 3,394374999999910$

   $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x_i)}$

   $x_{i+1} = 3,5 - \frac{1,943937499999890}{-3,394374999999910} = 4,072693794881220$

   Untuk nilai x_{i+1} selanjutnya ada pada tabel di bawah ini.

Iterasi	Xi	f(xi)	f'(xi)	xi + 1	Er (%)
1	3,500000000000000	1,943937499999890	-3,394374999999910	4,072693794881220	0,0561325618
2	4,072693794881220	-1,871703845913320	-8,428855960973690	3,850634733179430	0,0017014531
3	3,850634733179430	-0,049741344826089	-7,618971271073970	3,844106116249880	0,0000059982
4	3,844106116249880	-0,000174435830672	-7,565303032939940	3,844083058901100	0,0000000001
5	3,844083058901100	-0,000000002213483	-7,565111043331400	3,844083058608510	0,0000000000
6	3,844083058608510	0,000000000000000	-7,565111040895430	3,844083058608510	0,0000000000

   Berdasarkan tabel di atas, nilai akar yang dicari adalah $3,844083058608510$

6. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 6 dengan metode Secant.

   $f(x) = 9,36 - 21,963x + 16,2965x^2 - 3,70377x^3$

   Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut kita akan menggunakan 2 dan 2,5 untuk dijadikan nilai awal

#1		
		f(x)
X-1	2	0.098984
X0	2.5	-1.56578125
Xi+1	2.19365937	
#2		
		f(x)
X-1	2	0.098984
X0	2.19365937	0.503988404
Xi+1	2.394548031	
#3		
		f(x)
X-1	2.19365937	0.503988404
X0	2.394548031	-0.642380742
Xi+1	2.281977828	0.090960457

Didapatkan ketika $x \approx 2.281977828$. Nilai dari persamaan mendekati 0

7. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 7 dengan metode Secant.

$$f(x) = x^4 - 8,6x^3 - 35,51x^2 + 464x - 998,46 \quad (x_{i-1} = 7 \; dan \; x_i = 9)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

$$x_{i+1} = 9 - \frac{592.83*(7-9)}{-39.25 - 592.83}$$

$$x_{i+1} = 7.12419314$$

Iterasi	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$

1	7	9	7.12419314	-39.25	592.83	-28.73897027
2	7.12419314	9	7.21092327	-28.73897027	592.83	-19.85322683
3	7.21092327	9	7.268896044	19.85322683	592.83	-13.15996498
4	7.268896044	9	7.306489517	-13.15996498	592.83	-8.483474687
5	7.306489517	9	7.330381969	-8.483474687	592.83	-5.370298072
6	7.330381969	9	7.345370839	-5.370298072	592.83	-3.36038085
7	7.345370839	9	7.354697028	-3.36038085	592.83	-2.0874384
8	7.354697028	9	7.360470045	-2.0874384	592.83	-1.290824212
9	7.360470045	9	7.364032191	-1.290824212	592.83	-0.795974353
10	7.364032191	9	7.366225809	-0.795974353	592.83	-0.489978483
11	7.366225809	9	7.36757502	-0.489978483	592.83	-0.301293986
12	7.36757502	9	7.368404246	-0.301293986 5	592.83	-0.185147641
13	7.368404246	9	7.368913653	-0.185147641	592.83	-0.113728752
14	7.368913653	9	7.369226501	-0.113728752	592.83	-0.069841645
15	7.369226501	9	7.369418601	-0.069841645	592.83	-0.042883713
16	7.369418601	9	7.369536544	-0.042883713	592.83	-0.026328712
17	7.369536544	9	7.369608953	-0.026328712	592.83	-0.01616374
18	7.369608953	9	7.369653405	-0.01616374	592.83	-0.009922903
19	7.369653405	9	7.369680694	-0.009922903	592.83	-0.006091528
20	7.369680694	9	7.369697446 -	-0.006091528	592.83	0.003739452

21	7.369697446	9	7.369707729	-0.003739452	592.83	-0.002295547

Jadi akar persamaanya adalah 7.369707729.

8. Berikut ini cara mendapatkan akar persamaan pada soal nomor 8 dengan metode Secant.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad (x_{i-1} = 2,5 \; dan \; x_i = 3,6)$

$f(2,5) = - 0,375$

$f(3,6) = 2,496$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

$$x_{i+1} = 3,6 - \frac{2{,}496\,(2{,}5 - 3{,}6)}{(-0{,}375) - 2{,}496} \approx 2,643678161$$

Untuk nilai x_{i+1} selanjutnya ada pada tabel di bawah ini.

iterasi	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$
1	2,5	3,6	2.643678161	-0.375	2.496	-0.376988412
2	3,6	2.643678161	2.769165006	2.496	-0.376988412	-0.3141156
3	2.643678161	2.769165006	3.396103337	-0.376988412	-0.3141156	1.325047998
4	2.769165006	3.396103337	2.889306223	-0.3141156	1.325047998	-0.18598456
5	3.396103337	2.889306223	2.95168505	1.325047998	-0.18598456	-0.08973968
6	2.889306223	2.95168505	3.009847686	-0.18598456	-0.08973968	0.019987258
7	2.95168505	3.009847686	2.999253099	-0.08973968	0.019987258	-0.001492129
8	3.009847686	2.999253099	2.999989083	0.019987258	-0.001492129	-2.18E-05
9	2.999253099	2.999989083	3.000000012	-0.001492129	-2.18E-05	2.45E-08
10	2.999989083	3.000000012	3	-2.18E-05	2.45E-08	-4.09E-13
11	3.000000012	3	3	2.45E-08	-4.09E-13	7.11E-15
12	3	3	3	-4.09E-13	7.11E-15	7.11E-15
13	3	3	3	7.11E-15	7.11E-15	0

Berdasarkan tabel di atas, nilai akar yang dicari adalah 3.

9. Buatlah sebuah paparan untuk menjelaskan tentang metode Bairstow dan metode Quotient-Difference (Q-D). Dan buatlah sebuah kesimpulan mengenai kemudahan/kesulitan kedua metode tersebut di dalam menyelesaikan masalah dibanding dengan metode-metode yang telah anda pelajari dalam materi ini.

    a.) Metode Bairstow

Metode Bairstow adalah pendekatan yang menggunakan pembagian polinomial dengan faktor kuadrat untuk menemukan akar-akar dari suatu persamaan polinomial. Dalam metode ini, upaya utama adalah mengidentifikasi faktor-faktor kuadrat yang membentuk polinomial. Ini berarti bahwa metode Bairstow pada dasarnya fokus untuk menemukan baik faktor linear maupun faktor kuadrat dari polinomial. Algoritma ini didasarkan pada prinsip bahwa setiap polinomial dapat dibagi oleh pembagi linear atau pembagi kuadrat.

$$\Delta p = \frac{b_n c_{n-3} - b_{n-1} c_{n-2}}{c_{n-2} c_{n-2} - c_{n-1} c_{n-3}}$$

$$\Delta q = \frac{b_{n-1} c_{n-1} - b_n c_{n-2}}{c_{n-2} c_{n-2} - c_{n-1} c_{n-3}}$$

Metode Bairstow memiliki keunggulan dalam menghasilkan pendekatan yang sangat akurat terhadap bentuk \($x^2 - rx - s$ \). Ini menandakan bahwa metode Bairstow menampilkan tingkat konvergensi yang tinggi, memungkinkannya untuk menentukan dua akar sekaligus, baik yang bersifat real maupun kompleks. Di samping itu, metode ini mampu menemukan semua akar dari persamaan polinomial. Namun, kelemahan dari metode ini adalah perlunya melakukan pencarian kembali terhadap akar-akar persamaan kuadrat menggunakan rumus ABC, yang memerlukan banyak data untuk dicari.

b.) Quotient-Difference (Q-D)

Metode Quotient –Difference (Q-D) adalah pendekatan untuk menyelesaikan persamaan polinomial dengan membuat tabel yang terdiri dari kolom e dan q. Penggunaan metode ini cukup kompleks, terutama ketika menangani persamaan polinomial orde tinggi dan persamaan yang melibatkan akar imajiner. Selain itu, iterasi metode Quotient –Difference (Q-D) juga cenderung lambat. Namun, metode ini memiliki beberapa keunggulan, di antaranya:

- Kemampuan untuk mencari akar-akar persamaan polinomial secara bersamaan

- Kemampuan untuk menemukan akar-akar kompleks (imajiner)

- Penyelesaian yang relatif lebih mudah dibandingkan dengan metode Bairstow

$e^{(0)}$	$q^{(1)}$	$e^{(1)}$	$q^{(2)}$	$e^{(2)}$	$q^{(3)}$	$e^{(3)}$	$q^{(4)}$	....	$e^{(n-1)}$	$q^{(n)}$	$e^{(n)}$
	$\frac{-a_2}{-a_1}$		0		0		0	....		0	
0		$\frac{a_3}{a_2}$		$\frac{a_4}{a_3}$		$\frac{a_5}{a_4}$		....	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$		0
	.		.		.		.	....		.	
0		.		.		.		....	.		0
	.		.		.		.	....		.	
0		.		.		.		....	.		.
	.		.		.		.	....		.	
0		.		.		.		....	.		.
	.		.		.		.	....		.	
0		.		.		.		....	.		0

Gambar 2.2 Tabel metode Q-D