RKT untuk Kurva Linier (1)

Permasalahan kita akan menjadi sederhana apabila kurva (yang diwakili oleh titik² data) berbentuk garis lurus.

Seperti anda ketahui, bahwa persamaan umum sebuah garis lurus adalah :

$$g(x) = a + bx$$

Dan jumlah-kuadrat-kesalahan dapat dihitung melalui persamaan :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \{ y_i - a - bx_i \}^2$$

Agar nilai D^2 dapat seminimal mungkin, maka persamaan jumlah-kuadrat-kesalahan harus diturunkan terhadap parameter a dan b (untuk kemudian disamadengankan 0).

RKT untuk Kurva Linier (2)

Turunan pertama thd parameter a :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - b\,x_i \right)^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i) = 0$$

$$\sum y_i - \sum a - \sum b\,x_i = 0 \quad \ldots (1)$$

Turunan pertama thd parameter b :

$$\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - b\,x_i \right)^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} [(y_i - a - b\,x_i)\,x_i] = 0$$

$$\sum y_i\,x_i - \sum a\,x_i - \sum b\,x_i^2 = 0 \quad \ldots (2)$$

RKT untuk Kurva Linier (3)

Jika Σ a dapat diasumsikan senilai dengan n a (sebagai akibat penjumlahan akumulatif suku-1 sampai suku-n), maka persamaan **(1)** dapat ditulis sebagai :

$$\Sigma y_i - \Sigma a - \Sigma b x_i = 0 \quad \ldots (1)$$

$$n a + \Sigma b x_i = \Sigma y_i$$

$$n a = \Sigma y_i - \Sigma b x_i$$

$$a = 1/n (\Sigma y_i - \Sigma b x_i) \quad \ldots \mathbf{(3)}$$

$$a = y - b \overline{x} \quad \ldots \mathbf{(4)}$$

RKT untuk Kurva Linier (4)

Sementara, persamaan (2) dapat ditulis :

$$\Sigma\, y_i\, x_i - \Sigma\, a\, x_i - \Sigma\, b\, x_i^2 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

$$\Sigma\, a\, x_i + \Sigma\, b\, x_i^2 = \Sigma\, y_i\, x_i \qquad \text{... (5)}$$

Interpolasi persamaan (3) ke persamaan (5) akan menghasilkan :

$$\Sigma\, x_i\, 1/n\, (\, \Sigma\, y_i - \Sigma\, b\, x_i\,) + \Sigma\, b\, x_i^2 = \Sigma\, y_i\, x_i$$

$$\Sigma\, x_i\, \Sigma\, y_i - (\, \Sigma\, x_i\,)^2\, b + n\, \Sigma\, b\, x_i^2 = n\, \Sigma\, y_i\, x_i$$

$$b\, [\, n\, \Sigma\, x_i^2 - (\, \Sigma\, x_i\,)^2\,] = n\, \Sigma\, y_i\, x_i - \Sigma\, y_i\, \Sigma\, x_i$$

atau,

$$b = \frac{n\, \Sigma\, y_i\, x_i - \Sigma\, y_i\, \Sigma\, x_i}{n\, \Sigma\, x_i^2 - (\Sigma\, x_i)^2} \qquad \text{... (6)}$$

RKT untuk Kurva Linier (5)

Persamaan (4) dan (6) dapat dimanfaatkan untuk mendapatkan koefisien a dan b, sehingga fungsi g(x) dapat diperoleh.

Sedangkan untuk mengetahui derajat kesesuaian dari persamaan yang dicari, dapat dihitung melalui koefisien korelasi yang berbentuk :

$$r^2 = \frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2} \quad \text{... (7)}$$

dengan,

r = koefisien korelasi

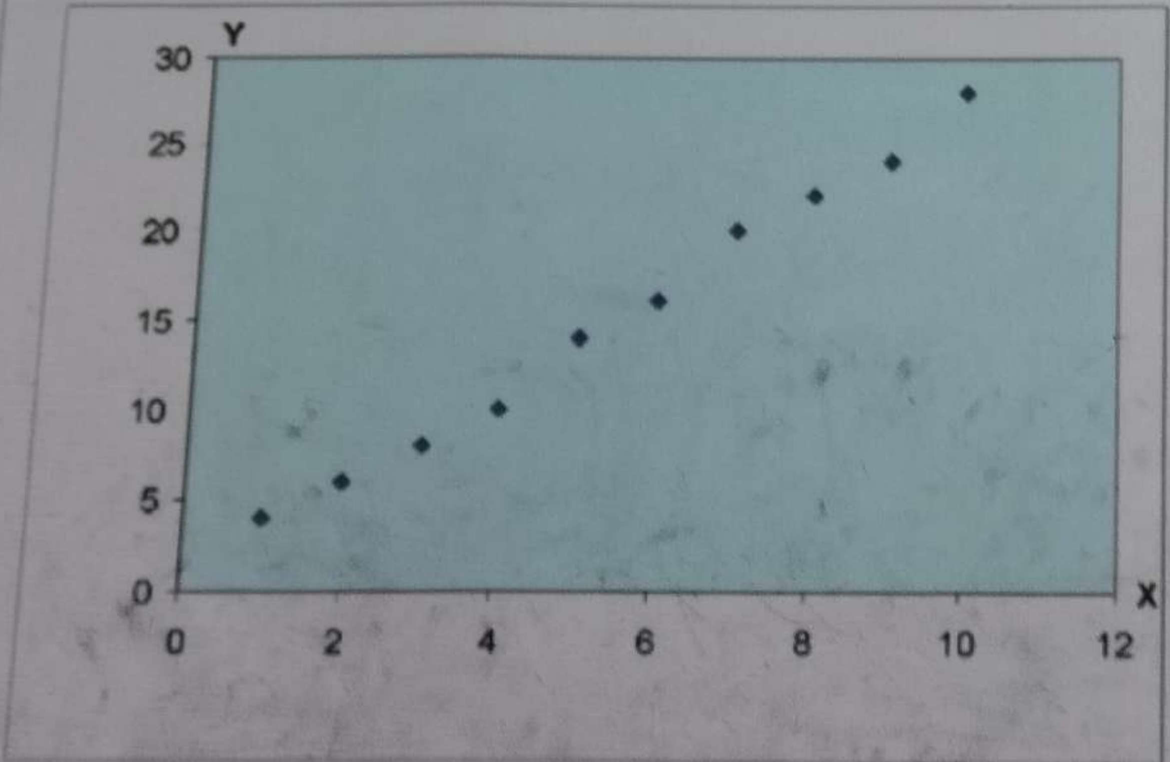
$$D_t^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2 - D^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Jika $r = 1$, maka fungsi g(x) memiliki tingkat kesesuaian yang tinggi dengan persamaan aslinya (f(x)). Atau $r = 0$ jika sebaliknya.

RKT untuk Kurva Linier (6)

contoh : tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28



No	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	1	4	4	1
2	2	6	12	4
3	3	8	24	9
4	4	10	40	16
5	5	14	70	25
6	6	16	96	36
7	7	20	140	49
8	8	22	176	64
9	9	24	216	81
10	10	28	280	100
$\sum$	55	152	1058	385

RKT untuk Kurva Linier (7)

Nilai rerata untuk x dan y adalah :

$\overline{x} = \Sigma x / n = 55/10 = 5,5$
$\overline{y} = \Sigma y / n = 152/10 = 15,2$

Jika persamaan umum garis dinyatakan sebagai : $y = a + bx$,
dan,

$$b = \frac{n \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{10 \,.\, 1058 - 55 \,.\, 152}{10 \,.\, 385 - (55)^2} = \frac{2220}{825} = 2,690909$$

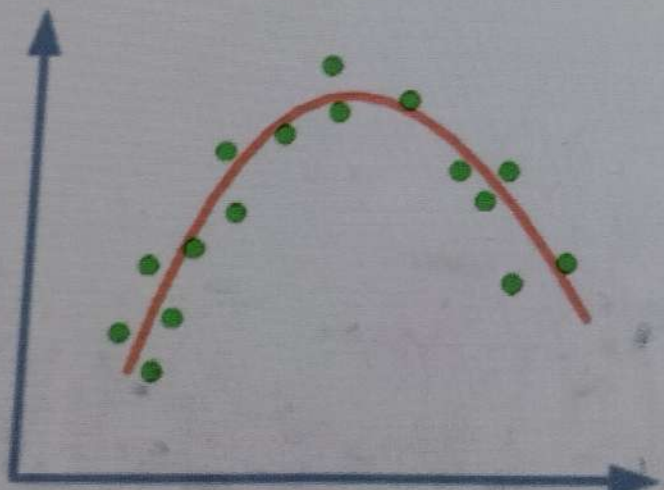
$a = \overline{y} - b\overline{x} = 15,2 + 2,690909 \,.\, 5,5 = 30$

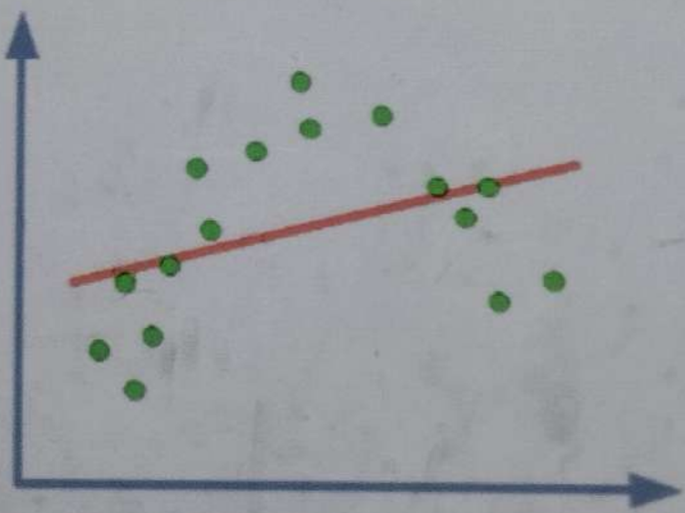
Jadi persamaan garis yang mendekati rangkaian data tersebut adalah :

$$y = 30 + 2,69x$$

RKT untuk Kurva Non-Linier (1)

Di dalam praktek akan sering kita jumpai kasus dimana plotting titik² data memiliki tren berupa kurva lengkung.
Sehingga pendekatan melalui RKT utk kurva linier menjadi kurang optimal/sesuai untuk digunakan.





Karena kurva lengkung yang didekati dengan sebuah garis lurus tentu akan menimbulkan kesalahan yang cukup berarti.

RKT untuk Kurva Non-Linier (2)

Kecuali untuk beberapa bentuk fungsi yang memang dapat didekati dengan metode Linierisasi Kurva Non-Linier. Fungsi² tersebut antara lain :

1. Fungsi Eksponensial

$y = a\,e^{bx}$ dengan a dan b adalah konstanta

persamaan di atas dapat dilinierkan dengan logaritma-natural spt berikut :
$\ln y = \ln a + b\,x \ln e$

jika $\ln e = 1$, maka $\ln y = \ln a + b\,x$

persamaan di atas berbentuk garis lurus dengan kemiringan b, dan memotong sumbu ln y di ln a.

RKT untuk Kurva Non-Linier (3)

2. Fungsi Berpangkat

fungsi berpangkat adalah contoh lain fungsi dengan kurvanya yang non-linier.

$y = a\,x^b$ dengan a dan b adalah konstanta

me-linier-kan fungsi di atas juga dapat dilakukan menggunakan persamaan logaritmik spt berikut :

$$\log y = b \log x + \log a$$

persamaan di atas berbentuk garis lurus dengan kemiringan b dan memotong sumbu log y di log a.