# 向量代数

一、向量：既有方向，又有大小

1. 向量加法：三角形法则

2. 向量数乘：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

3. 空间直角坐标系

①记为Oxyz坐标系或 $[O, x_1, x_2, x_3]$ 坐标系

②向量r的坐标分解式：$\vec{r}=x\cdot\vec{x_1}+y\cdot\vec{x_2}+z\cdot\vec{x_3}$

$(x,y,z)$ 称为点M的坐标，$\vec{r}=\vec{OM}$ 为M关于O的向径

4. 向量的模：$\vec{r}=(x,y,z)$，$\vec{r}=\vec{OM}$

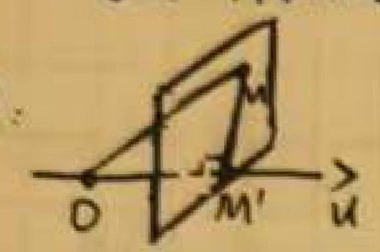
$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

5. 方向角：$\vec{r}$ 与三条坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma$ 称为向量 $\vec{r}$ 的方向角

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\vec{r}|},\frac{y}{|\vec{r}|},\frac{z}{|\vec{r}|}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$

↳ 称为向量r的方向余弦

6. 投影：




$\vec{OM}=\vec{r}$，$\vec{OM'}=Prj_u\vec{r}$ 记为向量r在u轴上的投影

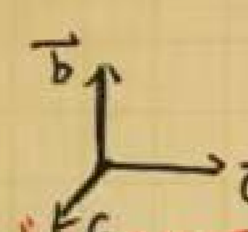
$$\begin{cases} Prj_u\vec{a}=\vec{a}\cdot\cos\varphi \ (\text{方向在u轴上}) \\ Prj_u(\vec{a}+\vec{b})=Prj_u\vec{a}+Prj_u\vec{b} \\ Prj_u(\lambda\vec{a})=\lambda Prj_u\vec{a} \end{cases}$$

二、数量积　向量积　混合积

1. 数量积（点乘）

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

2. 向量积（叉乘）




① $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$，

方向遵循右手定则　等于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 形成的平四面积

② 向量 $\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=0$

③
$$\begin{cases} \vec{a}\times\vec{a}=0 \\ \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b} \\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \\ (\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \end{cases}$$

/ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

叉乘用处：
①求平面法向量
②求三角形面积

④坐标表达式，

$\vec{a}=a_x\vec{x_1}+a_y\vec{x_2}+a_z\vec{x_3}$，$\vec{b}=b_x\vec{x_1}+b_y\vec{x_2}+b_z\vec{x_3}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{x_1} & \vec{x_2} & \vec{x_3} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \ (\text{行列式})$$

$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{x_1}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{x_2}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{x_3}$

3. 混合积

① $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

②几何意义：$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ 的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。

③ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面的充要条件是 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

三、平面及其方程

1. 平面的点法式方程

①法线向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$M(x,y,z)$ 为平面上一点，

有 $\vec{n}\cdot\vec{M_0M}=0 \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

② 若知道三点 $M_1$，$M_2$，$M_3$，可以先用 $\vec{M_1M_2}$，$\vec{M_1M_3}$ 来计算 $\vec{n}=\vec{M_1M_2}\times\vec{M_1M_3}$，再写点法式方程

2. 平面的一般方程

① $Ax+By+Cz+D=0$　$(\vec{n}=(A,B,C))$

② 平面的截距式方程：

$P:(a,0,0)$　$Q:(0,b,0)$　$R:(0,0,c)$，

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

3. 平面的参数方程：

① $M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$ 在平面上，

$\vec{u_1}=(x_1,y_1,z_1)$　$\vec{u_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+a\vec{u_1}+b\vec{u_2}$，a，b 为参数

②参数方程转化成一般方程：

由向量共面条件，

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$，

$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$　$B=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$，$C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$　$D=\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

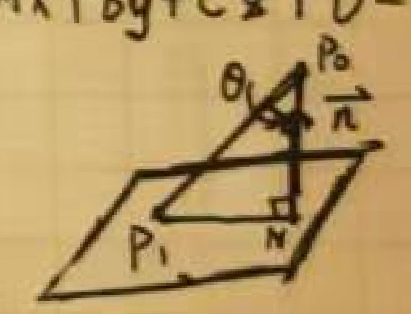
4. 两平面的夹角：锐角/直角

$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

5. 点到平面距离：$P_0:(x_0,y_0,z_0)$，平面 $Ax+By+Cz+D=0$

$d=|\vec{P_1P_0}||\cos\theta|=\frac{|\vec{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$\Rightarrow d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$




6. 两平行平面距离 $Ax+By+Cz+D_1=0$，$Ax+By+Cz+D_2=0$

$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

四、空间直线及其方程

1. 一般方程：看作两平面的交线，是一个线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

2. 对称式方程（点向式方程）

直线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$，

↳ m.n.p 叫做方向数

$\Rightarrow \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

3. 参数方程：

$x=x_0+mt$；$y=y_0+nt$；$z=z_0+pt$

4. 两直线夹角，锐角，直角

$L_1$，$L_2$ 的方向向量 $s_1=(m_1,n_1,p_1)$，$s_2=(m_2,n_2,p_2)$，

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

5. 直线与平面的夹角 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$L_1$ 方向向量 $\vec{s_1}=(m,n,p)$，平面法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

6. 直线与直线距离：

$L_1$，$L_2$ 的方向向量为 $\vec{s_1}$，$\vec{s_2}$，$M_1$，$M_2$ 分别在 $L_1$，$L_2$ 上.

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$$

五、平面束

直线 $L$：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

表示通过直线 $L$ 的平面.

平面束：通过定直线的所有平面的全体.

# 向量函数

1. 向量函数 vector function
$r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle=f(t)\cdot i+g(t)\cdot j+h(t)\cdot k$

2. 极限和连续性 limits and continuity
$\lim_{t\to a}r(t)=\langle \lim_{t\to a}f(t),\lim_{t\to a}g(t),\lim_{t\to a}h(t)\rangle$

$r(t)$ 连续当且仅当 $\lim_{t\to a}r(t)=r(a)$

3. 空间曲线 space curves
$C:(x,y,z)$

参数方程 parametric equation $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases}$

$\Rightarrow$ 一个连续的 $r(t)$ 定义一个空间曲线 C.

4. 求导:
$\frac{dr}{dt}=r'(t)=\lim_{h\to0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h}$
若 $|r(t)|=c$ (常量), 则 $r'(t)$ 与 $r(t)$ 一直垂直
$r'(t)=\langle f'(t),g'(t),h'(t)\rangle=f'(t)\cdot i+g'(t)\cdot j+h'(t)\cdot k$
unit tangent vector
单位切向量: $T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$
$\nearrow y=r(t_0)+R\cdot r'(t_0)$
☆ $t_0$ 处切线: 切线过点 $r(t_0)$, 方向为 $r'(t_0)$
误差 $R(h)=r(t_0+h)-r(t_0)-h\cdot r'(t_0)$

5. 积分:
$\int_a^b r(t)dt=(\int_a^b f(t)dt)i+(\int_a^b g(t)dt)j+(\int_a^b h(t)dt)k$

6. 弧长: arc length
$L=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$
$=\int_a^b|r'(t)|dt$

$\Rightarrow$ 弧长方程: 有 $r(t)=f(t)\cdot i+g(t)\cdot j+h(t)\cdot k$, $a\le t\le b$,
则 $s(t)=\int_a^t|r'(u)|du=\int_a^t\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,du\Rightarrow\frac{ds}{dt}=|r'(t)|$
$\Rightarrow$ 常用弧长方程来刻画空间曲线

[eg.]. 对 $r(t)=\cos t\cdot i+\sin t\cdot j+t\cdot k$, 用从 $(1,0,0)$ 开始的弧长来改写.

$\frac{ds}{dt}=|r'(t)|=\sqrt2$, $s=s(t)=\int_0^t|r'(u)|du=\sqrt2 t$

$\Rightarrow r(s)=\cos\frac{s}{\sqrt2}i+\sin\frac{s}{\sqrt2}j+\frac{s}{\sqrt2}\cdot k$

7. 曲率 curvature 描述曲线的弯曲程度
① $r(t)$ 被称为光滑的当 $r'(t)$ 连续且 $r'(t)\ne0$
② 曲率: 定义为单位切向量相对于弧长变化率的大小.
$K=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{T'(t)}{r'(t)}\right|=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

$\Rightarrow$ 若 $y=f(x)$, 则 $K=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac32}}$

☆ 曲率半径 $\rho=\frac1K$

8. 法向量和副法向量 the normal vector and binormal vector
① 对于单位切向量, 有 $|T(t)|=1$ 恒成立 $\Rightarrow T(t)\cdot T'(t)=0$

定义单位法向量 $N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$
unit normal vector

定义副法向量 $B(t)=T(t)\times N(t)$
binormal vector

② TNB 坐标系: $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ 互相垂直, 构成坐标系

[eg]. $r(t)=\langle t,\sqrt2\ln t,\frac1t\rangle$, 在点 $(1,0,1)$ 求 $r(t)$ 的单位切向量 $T(t)$, 单位法向量 $N(t)$, 曲率, 副法向量 $B(t)$

$r'(t)=\langle1,\frac{\sqrt2}{t},-\frac1{t^2}\rangle$, $T(t)=\frac{\langle1,\frac{\sqrt2}{t},-\frac1{t^2}\rangle}{\sqrt{\frac1{t^4}+2\cdot\frac1{t^2}+1}}$

$=\frac1{t^2+1}\langle t^2,\sqrt2t,-1\rangle$

$T'(t)=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\langle t^2,\sqrt2t,-1\rangle+\frac1{t^2+1}\langle2t,\sqrt2,0\rangle$

$T(1)=\langle\frac12,\sqrt2,-1\rangle$, $T'(1)=\langle\frac12,0,\frac12\rangle$

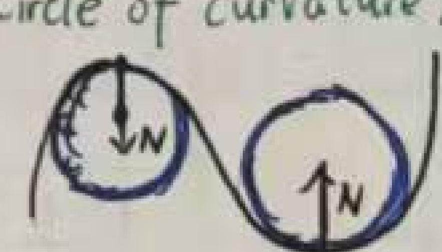
$N(1)=\frac{T'(1)}{|T'(1)|}=\langle\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2}\rangle$

$B(1)=T(1)\times N(1)=\langle\frac12,-\frac{\sqrt2}{2},-\frac12\rangle$

曲率 $K(1)=\frac{|T'(1)|}{|r'(1)|}=\frac{\sqrt2}{4}$

③ normal plane: N 与 B 张成的平面, 法向量为 $r'(t)$ 或 $T(t)$
法向平面
osculating plane: T 与 N 张成的平面, 法向量为 $B(t)$
密切面 ☆ 若为平面曲线, 则为同一平面

曲率圆: 圆心在 N 上, 半径 $\rho=\frac1K$ 的圆
circle of curvature / osculating circle.




圆心: $r(t)+\frac1K N(t)$
圆: 圆心 $+\frac1K\cdot\vec N\cdot\sin\theta+\frac1K\cdot\vec T\cdot\cos\theta$.

☆ 要记忆的公式:
$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ $N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ $B(t)=T(t)\times N(t)$
$K=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{T'(t)}{r'(t)}\right|=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

9. 挠率 torsion $\tau$ 描述空间曲线的扭曲程度
① $\frac{dB}{ds}=-\tau\cdot N\Rightarrow\tau=-\frac{dB}{ds}\cdot N$
$\Rightarrow\tau(t)=-\frac{B'(t)\cdot N(t)}{|r'(t)|}=-\frac{[r'(t)\times r''(t)]\cdot r'''(t)}{|r'(t)\cdot r''(t)|^2}$

10. 速度, 加速度, 速率
position vector: $r(t)$
① velocity vector $v(t)=\lim_{t\to0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h}=r'(t)$

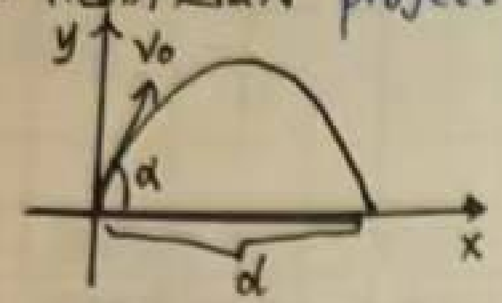
② the speed $|v(t)|=|r'(t)|=\frac{ds}{dt}$

③ acceleration vector $a(t)=v'(t)=r''(t)$

☆ 由 $a(t)$ 求 $v(t)$, $v(t)$ 求 $r(t)$, 积分时注意加 C (初值加

④ $v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t}a(u)du \quad r(t)=r(t_0)+\int_{t_0}^{t}v(u)du$ 矢函，量向

11. 抛体运动 projectile motion




$F=ma=-mg\cdot\vec{j}$，$a=-g\cdot\vec{j}$

$\therefore v(t)=-gt\vec{j}+C$，$r'(t)=v(t)=-gt\vec{j}+v_0$

$r(t)=-\frac{1}{2}gt^2\cdot\vec{j}+tv_0+D$

12. 切向加速度/法向加速度
tangential and normal components of acceleration

① $T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{\vec{v}}{|v|}$

$\Rightarrow \vec{v}=|v|\cdot T(t)$，两边求导

$\Rightarrow \vec{a}=|v|'T+|v|\cdot T'$，又 $K=\frac{|T'|}{|r'|}=\frac{|T'|}{|v|}\Rightarrow |T'|=K|v|$

$N=\frac{T'}{|T'|}$

$\Rightarrow T'=K|v|\cdot N$

$\Rightarrow \vec{a}=|a_T|\cdot T+|a_N|N$ 且 $|a_T|=|v'|$，$a_N=K|v|^2$

② $\vec{v}\cdot\vec{a}=|v|\cdot|v|'\Rightarrow |a_T|=|v'|=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|v|}=\frac{r'(t)\cdot r''(t)}{|r'(t)|}$

$|a_N|=K|v|^2=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|}$

13. Frenet-Serret Formulas ☆

$$\begin{cases}\frac{dT}{ds}=KN\\ \frac{dN}{ds}=-KT+\tau B\\ \frac{dB}{ds}=-\tau N\end{cases}$$

14. 开普勒三定律(Kepler's laws)

$$\begin{cases}F=m\vec{a}\\ F=-\frac{GMm}{r^2}\vec{u}=-\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\end{cases}\quad (\vec{u}=\frac{\vec{r}}{|r|})$$

$\Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{r}$，$\vec{a}\times\vec{r}=0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=r'\times v+r\times v'$
$=\vec{v}\times\vec{v}+r\times a$
$=0$

$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{v}=\vec{h}$ (constant vector)

$\Rightarrow \vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}=r^2(\vec{u}\times\vec{u}')$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{h}=-GM[(\vec{u}\cdot\vec{u}')\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{u}']$

$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{h}=GM\vec{u}+C$ (constant vector)

# 多元函数

## 一、多元函数 functions of serveral variables

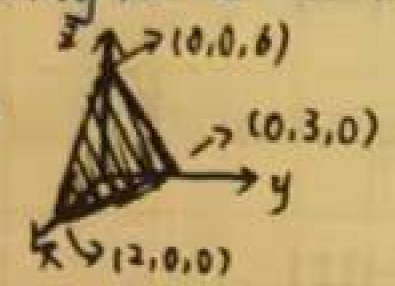
1. 两个变量 $z=f(x,y)$, $x,y\in D$
D: domain(定义域)
$\{f(x,y)\mid x,y\in D\}$: range (值域)
x, y: independent variable (自变量)
z: dependent variable (因变量)
☆并不是所有函数都有表达式!

2. graph
对于 $z=f(x,y)$, graph 为 $\{(x,y,z)\mid x,y\in D\}$ 构成的点集

[eg]. $z=ax+by+c$ linear function

⇒ the graph is: $ax+by+c-z=0$ (找三个截点, 画图)

⇒ $z=6-3x-2y$ ⇒




3. 水平曲线 (Level curves) 等高图 (contour maps)

① level curve: $f(x,y)=k$, k为常数

② level curve 的堆积形成等高图

4. 多个变量:

① $z=f(x_1,x_2\cdots x_n)$

② $f(x)=c\cdot x$, $c=\langle c_1,c_2\cdots c_n\rangle$; $x=\langle x_1,\cdots x_n\rangle$

⇒ 可以视为 $\begin{cases} n\text{个变量}: x_1,x_2\cdots x_n \\ 1\text{个点变量}: (x_1,x_2\cdots x_n) \\ 1\text{个向量变量}: \langle x_1,x_2\cdots x_n\rangle \end{cases}$

5. 平面点集

① $R^2$ 中邻域: 设 $P_0(x_0,y_0)$, δ为某一正数.
与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于δ的 $P(x,y)$ 的全体称为 $P_0$ 的δ邻域
记作 $U(P_0,\delta)$
去心δ邻域, 记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$.

② 点与点集关系: 点 $P\in R^2$, 点集 $E\subseteq R^2$
内点: 存在邻域 $U(P)\subseteq E$
外点: 存在邻域 $U(P)\cap E=\phi$
边界点: 对任意邻域 $U(P)$ 有E中的点和E外的点.

[eg].


$\begin{cases} \text{E的内点属于E} \\ \text{E的外点不属于E} \\ \text{E的边界点可能属于E.} \end{cases}$

⇒ E的边界点的全体称为E的边界记为 $\partial E$.
内点: interior point 外点: exterior point 边界点: boundary point

☆聚点: 对 $\forall\delta>0$, $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有E的点, 称P是E的聚点 (accumulation point) ⇒ 等于E的内点+边界点

③ 点集: (点集E)
开集: E中的点都是内点
闭集: E的边界 $\partial E\subset E$
连通集: E中任何两点可用折线连接且折线上的点都属于E.
区域(开区域): 连通的开集
闭区域: 开区域及其边界
有界集: 存在正数r, $E\subset U(O,r)$
无界集: 不是有界集的点集

## 二、多元函数的连续与极限 limits and continuity

1. 二元函数的极限 $f(x,y)$, 定义域D

① 写作 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

② 定义: $P_0(x_0,y_0)$ 是D的聚点, 若存在常数A, 对∀正数ε, 总存在正数δ, 使 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时, $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 则称A为 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的极限, 即 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)=A$.

(叫二重极限: ☆指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 无限接近于A, 所以不能用一种特殊方式趋近定函数极限存在.
☆但若 $P(x,y)$ 以不同的方式趋近时, $f(x,y)$ 趋于不同的值, 则极限不存在).

[eg]. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处极限?

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to0}0=0$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to0}0=0$

当 $y=kx$,
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0$ ⇒ 极限不存在

[eg]. $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

定义域 $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$, O(0,0) 为聚点,
$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$,
取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$,
即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$ 时, 总有
$|f(x,y)-0|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

2. 极限运算

① 加减乘除: $\lim(a\pm b)=\lim a\pm\lim b$.
$\lim(a\cdot b)=\lim a\cdot\lim b$
$\lim\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\lim a}{\lim b}$ $(\lim b\neq0)$

② 无穷小替换: $x\to0$, $\sin x=x$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

④ 夹逼准则(一般夹为0)

# 多元函数

2. 连续性 (continuity)

①定义：$f(P)=f(x,y)$，定义域 $D$，$P_0(x_0,y_0)$ 为聚点，$P_0\in D$，
若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

②. $\begin{cases}\text{多元连续函数的和、差、积仍为连续函数}\\ \text{连续函数的商在分母不为零处仍连续}\\ \text{多元连续函数的复合函数也是连续函数}\end{cases}$

③多元初等函数：可用一个式子表示的多元函数.
一切多元初等函数在其定义区域内是连续的
(定义域内的区域或闭区域)

有理函数 rational function

④有界性与最大值最小值定理：在有界闭区域D上的多元连续函数必定在D上有界，且能取得它的最大值和最小值.

⑤介值定理：在有界闭值区域D上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

⑥一致连续性定理：在有界闭区域D上的多元连续函数必定在D上一致连续.

## 三. 偏导数

1. 偏导数定义 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的偏导数：
$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}，记作 \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} 或 f_x(x_0,y_0)$$

偏导函数：$z=f(x,y)$ 对 $x$ 的偏导函数
$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$f_x(x,y)$

[eg.]. 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在 $(1,2)$ 处偏导数

$f_x(x,y)=2x+3y$，$f_x(1,2)=8$

$f_y(x,y)=2y+3x$，$f_y(1,2)=7$

[eg.]. 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数

$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$，由 $\boxed{\text{对称性}}$ ☆

$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

☆偏导数的记号是一个整体记号，不能看成分子与分母之商.

2. 几何意义

$f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截的曲线在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线 $M_0T_y$ 对 $y$ 轴的斜率.

$f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $y=y_0$ 所截的曲线在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线 $M_0T_x$ 对 $x$ 轴的斜率.

⇒各偏导数在某点存在不能保证函数在该点连续.
(偏导数相当于沿坐标轴趋近)

3. 高阶偏导数 (higher derivatives)

[eg]. $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ $\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$ $\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$

第二个，第三个称为混合偏导数 (mixed partial derivatives)

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数

①克莱劳定理：若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 Clairaut's claim 在区域D中连续，则在该区域中这两个二阶混合偏导数必相等.

⇒高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下与求导的次序无关.

②拉普拉斯方程 Laplace's equation

[eg]. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，证明 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ✓

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 称为拉普拉斯方程，满足该方程的称为调和函数 (harmonic functions)

(更高阶：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=0$).

③波方程 wave equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(u(x,t))$

[eg]. $u(x,t)=\sin(x-at)$
$u_x=\cos(x-at)$，$u_{xx}=-\sin(x-at)$
$u_t=-a\cos(x-at)$，$u_{tt}=-a^2\sin(x-at)$ 成立.

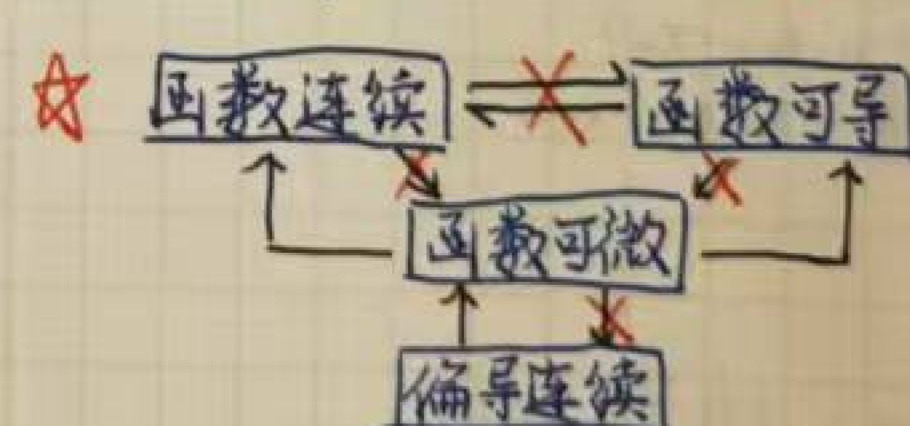
## 四. 微分映射 differentiable map

1. $\begin{cases}D^\circ：\text{内点}\\ \partial D：\text{边界点}\\ \overline{D}：\text{极限点}\\ D'：\text{聚点}\end{cases}$

$D^\circ\subsetneq D\subseteq\overline{D}$，$D^\circ\subseteq D'\subseteq\overline{D}$，$\overline{D}=D\cup D'=D\cup\partial D$

2. 定义：$f: D\to R^m$ 是一种映射，定义域 $D\subset R^n$，$x_0$ 是D的内点
$f$ 可微分当存在线性映射 $L: R^n\to R^m$，
$f(x_0+h)=f(x_0)+L(h)+o(h)$，$h\to0$. 这叫做 $f$ 在 $x_0$ 处的微分，记作 $df(x_0)$

→小量

☆ 


3. 雅可比矩阵 jacobi matrix

①对于 $F: R^n\to R^m$，由m个函数 $y_1(x_1\cdots x_n)$，$\cdots$ $y_m(x_1\cdots x_n)$ 组成雅可比矩阵：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}，记作 J_F(x_1\cdots x_n)$$

②当 $x$ 接近于一点P时，有
$F(x)\approx F(p)+J_F(p)(x-p)$

## 4. 方向函数和梯度

directional derivatives and gradient

①方向函数定义：

$f: D \to R^m$, $D \subseteq R^n$, $X \in D^\circ$, $u \in R^n \setminus \{0\}$

方向函数(在u方向上) $f_u(X) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}$.

记作 $D_u f(x)$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x)$

② ☆ $\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ 为方向u的方向余弦

⇒ 当 $|u|$ 是1时，$\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 是 slope (斜率)

⇒ 方向函数是双向的！(与国内不同)

③ $\begin{cases} f_u(X) = \nabla f(x) \cdot u = |\nabla f(x)|\,|u| \cdot \cos\theta \\ f_u(X) = J_f(x) \cdot u = J_f(x)^T \cdot u = |J_f(x)| \cos\theta \cdot |u| \end{cases}$

④ 梯度

$\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j}$
$= \langle f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0) \rangle$

(或：$\mathrm{grad} f(x) = J_f(x)^T = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x) \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)\right)^T$).

⑤ $\begin{cases} \text{梯度方向是最陡峭的，增长最快，} |\nabla f(x)| = \text{slope} \\ \text{梯度垂直于等高线} \\ \text{垂直于梯度的方向变化率为0} \end{cases}$

$\nabla(c\vec{u}) = c\nabla(\vec{u})$

$\nabla(u+v) = \nabla(u) + \nabla(v)$

$\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$

$\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

## 5. 切空间 tangent spaces

①(微分的graph) the graph $G_A$ is called tangent space of $G_f$ at $x_0$.

② parametric form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_0 + A(x-x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 - Ax_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix} h$$

$(y_0 = f(x_0)$, $A = J_f(x_0)$, $\dim(G_A) = n)$ $\quad (x = x_0 + h)$

⇒ 对于 $z = f(x,y)$，求 $(x_0,y_0,z_0)$ 处切空间：

$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

(对于该平面，法向量 $\vec{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$)

推广：$\vec{n} = (J_f(x,y), -1)$.

⇒ 对于 $F(x,y,z) = 0$：$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0$,

法向量 $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$

[补充]：

$\begin{cases} dx: \text{identity map (恒等映射，即} f(a)=a) \\ dx_j: \text{坐标投影} \\ dz: z\text{上的identity map} \end{cases}$

[补充]. conformal (保角性)

[eg]. $G(x,y) = (2x - x^2 + y^2, 2y - 2xy)$，求在哪个点不具有conformal.

$J_G(x,y) = \begin{bmatrix} 2-2x & 2y \\ -2y & 2-2x \end{bmatrix}$.

$J_G(x,y)^T \cdot J_G(x,y) = \begin{bmatrix} 2-2x & 2y \\ -2y & 2-2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-2x & -2y \\ 2y & 2-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2x)^2+4y^2 & 0 \\ 0 & (2-2x)^2+4y^2 \end{bmatrix}$

⇒ G is conformal when $(2-2x)^2 + 4y^2 \neq 0$, ∴

在 $(1,0)$ 处不具有conformal. preserve the angle between any two smooth curves $\Gamma_1, \Gamma_2$ through $x_0$.

$J_G(x,y) \cdot J_G(x,y)^T = \lambda I$，$\lambda \neq 0$ 要验证

I为单位矩阵.

## 6. 链式法则 (the chain rule)

① $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$,

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

⇒ $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$ (两边同时除以dt即可)

② $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t}$

③ general version:

$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$

⇒ $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(y_0) \cdot J_f(x_0)$

求2阶导则

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial s}\right)$

$= \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2}$

$+ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}$

## 7. 隐函数微分 (implicit differentiation)

① 对于 $F(x,y) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$，即 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$

② 对于 $F(x,y,z) = 0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

## 五. 全微分

1. 定义：

① $\begin{cases} f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x \\ f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_y(x,y)\Delta y \end{cases}$

$\qquad$ 偏增量 $\qquad\qquad$ 偏微分

② $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(p_0)$ 上有定义，则全增量 $\Delta z$

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

其中 $A = f_x(x,y)$, $B = f_y(x,y)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. $o(\rho)$ 是较ρ高阶的无穷小量.

若可以写成这样的形式 ($\Delta z = A\Delta x + B\Delta y$)，则称函数可微.

2. 若函数 $z = f(x,y)$ 偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(x,y)$ 连续，则函数在该点可微分.

[eg]. 计算 $z = e^{xy}$ 在 $(2,1)$ 处全微分.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot e^{xy}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^{xy}$

$\therefore dz\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = e^2 dx + 2e^2 dy$

[eg]. 计算 $z = x^2y + y^2$ 的全微分

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$.

$\therefore dz = 2xy\,dx + (x^2+2y)dy$

[补充] $\boxed{\text{mean value theorem}}$

1. $f: D \to R$, $D \subseteq R^n$, 可微, $a, b \in D$, $[a,b] = \{(1-t)a + tb;\ 0 \le t \le 1\}$ 在D中，则存在 $x \in [a,b]$,

$f(b) - f(a) = df(x)(b-a) = \nabla f(x)(b-a)$

2. $f(b) - f(a) = \left\{\int_0^1 J_f[a + t(b-a)]dt\right\}(b-a)$

3. $df(x)(b-a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(b_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(b_n-a_n)$

[补充]. 连通 path-connected.

A subset $D\subseteq R^n$ is said to be path-connected if:
对于任意两点 $a,b\in D$, 有连续的曲线 $g:[0,1]\to D$, 满足 $g(0)=a$, $g(1)=b$.

[补充]. 介值定理 intermediate value

对于函数 $f(x)$, $D\subseteq R^n$, 若 $f(x)$ 连续且连通, 则 range $f(D)$ 是一个区间.

## 六、误差估计 error propagation

1. $\Delta y=f(x_1+\Delta x_1,\cdots x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\cdots x_n)$ ⇐ absolute error

$\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\cdots x_n)\cdot\Delta x_j$ ($\Delta x_j$很小) ⇒ 用 differentials.

(或者, $\Delta y=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+r\Delta x)\Delta x_j$, 其中 $x=(x_1\cdots x_n)$, $\Delta x=(\Delta x_1\cdots\Delta x_n)$, $r\in[0,1]$) ↳ 用 mean value theorm

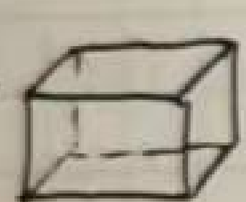
⇒ 用于计算上界 upper bound: 已知 $|\Delta x_j|\le\delta_j$

则 $|\Delta y|\le\sum_{j=1}^{n}M_j\delta_j$, 其中 $M_j=\max_{x'\in U}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x')\right|$, 其中

$U=\{x'\mid x'\in R^n, |x_j'-x_j|\le\delta_j$ 对于 $j\le n\}$.

2. 相对误差 relative error

$$\frac{\Delta y}{y}\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\Delta x_j}{y}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{y}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\Delta x_j}{x_j}$$

[eg.]. 一个盒子,  75cm, 60cm, 40cm, 每边误差在0.2cm内

① 绝对误差: $V=f(x,y,z)=xyz$,

$dV=df(x,y,z)=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$

⇒ $\Delta V=dV(x,y,z)(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=yz\Delta x+xz\Delta y+xy\Delta z$

$\begin{cases}\text{用 differential: }\Delta V=60\times40\times0.2+75\times40\times0.2+75\times60\times0.2\\ \text{用 mean value: }\Delta V=60.2\times40.2\times0.2+75.2\times40.2\times0.2+75.2\times60.2\times0.2\end{cases}$

② 相对误差:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{75}+\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\right)=0.011$$

## 七、多元函数的极值及其求法

1. 极值必要条件: $z=f(x,y)$, 在 $(x_0,y_0)$ 处有偏导数, 且有极值, 则: $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$ ⇒ 拓展: $\nabla f(x_0)=0$

critical point (stationary point)

驻点: $f_x(x_0,y_0)=0$ 且 $f_y(x_0,y_0)=0$ 的点.

函数的驻点不一定是极值点.

2. 充分条件: $z=f(x,y)$, 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续且有一阶、二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 均为0, 令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f_{yy}(x_0,y_0)=C$,
$D=AC-B^2$

$\begin{cases}AC-B^2>0\text{: 具有极值, }A<0\text{ 为极大值, }A>0\text{ 为极小值}\\ AC-B^2<0\text{: 无极值}\\ AC-B^2=0\text{: 另作讨论}\end{cases}$

⇒ 求 $z=f(x,y)$ 的极值,

① 解 $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$, 列出所有 $(x,y)$ 解.

② 对所有解, 求出二阶偏导数值

③ 代入 $AC-B^2$ 来判断.

☆ 考虑函数的极值问题时, 除了考虑函数的驻点外, 若有偏导数不存在的点, 也应当考虑.

3. 无条件极值: 除在定义域内无其他额外要求的求极值.
unconstrained optimization

条件极值: 有额外条件

⇒ 如何处理 $\begin{cases}\text{① 转化成无条件极值}\\ \text{② 拉格朗日乘数法}\end{cases}$

4. 拉格朗日乘数法

对于 $z=f(x,y)$, 有附加条件 $\varphi(x,y)=0$,
先作拉格朗日函数: $L(x,y)=f(x,y)-\lambda\cdot\varphi(x,y)$, $\lambda$为参数.,

⇒ $\begin{cases}f_x(x,y)-\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)-\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$ 解出可能极值点.

feasible solution: 适宜解 feasible regin: 可行域

[可推广]. 核心在于一阶偏导数等于0, 附加条件成立.

☆ 当 $\varphi(x,y)=0$ 且 $\nabla\varphi(x,y)=0$ 时, 不适用.

global maximum: 最大值. local maximum: 极大值.

5. 拓展 ↗ 对于 $z=f(x,y)$, $Hf(z)=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}$, 算值即可

① $Hf(x_0)=(h_{ij})\in R^{n\times n}$, $h_{ij}=f_{x_ix_j}(x_0)$

Hesse matrix: 海塞矩阵 ⇒ 是对称矩阵 (symmetric matrix)

⇒ 有 $f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)^T\cdot h+\frac{1}{2}h^T\cdot Hf(x_0)h+o(h^2)$ for $h\to0$

$q(h)=h^T\cdot Hf(x_0)\cdot h=\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(x_0)\cdot h_ih_j$

$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{1}{2}q(h)+o(h^2)$ for $h\to0$

$\begin{cases}q(h)>0\text{ for all }h\in R^n\setminus\{0\}\text{, f有极大值 }x_0\\ q(h)<0\text{ for all }h\in R^n\setminus\{0\}\text{, f有极小值 }x_0\end{cases}$

② 鞍点 (saddle point): 那些是驻点但不是极值点的点.

③ 判断一个区域内函数的极值(最值).
先看函数内部, 算驻点, 再判断 $AC-B^2$
再看边界, 代入计算数值.

④ 对于定义域无界的函数求极值, 只用考虑 critical point!

⑤ 拉格朗日乘数法拓展到n元:

$f: D\to\mathbb{R}$, $g=(g_1,\cdots g_m): D\to\mathbb{R}^m$, 有 $D\subseteq R^n$, $S=\{x\in D; g(x)=0\}$
$x^*\in S$. 假设:
f在 $x^*$ 有极值, $J_g(x^*)$ 满秩, 则存在 $\lambda_i\in R$,
$\nabla f(x^*)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla g_i(x^*)$

6. 二元函数的泰勒公式

①设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一邻域内连续且有 $(n+1)$ 阶连续偏导数，

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\ ,0<\theta<1$$

其中：$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$ 表示 $hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$ 表示 $h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0)$.

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$ 表示 $\sum_{p=0}^{m}C_m^p h^p k^{m-p}\left.\frac{\partial^m f}{\partial x^p\partial y^{m-p}}\right|_{x_0,y_0}$

余项 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

② 拉格朗日中值公式：

$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

## 八. 重积分

1. 二重积分概念与性质

①定义：$f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1\cdots\Delta\sigma_n$，$\Delta\sigma_i$ 表示面积，取 $(\xi_i,\eta_i)$，若各小闭区域的直径中最大值 $\lambda\to0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 极限存在，则记：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

被积函数 $f(x,y)$，被积表达式 $f(x,y)d\sigma$，

面积元素：$d\sigma$，积分变量：$x,y$

积分区域：D　积分和：$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

也可写成 $\iint f(x,y)dxdy$，$dxdy$ 为直角坐标系中的面积元素。

②性质：

I. $\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$

II. 将 D 分为区域 $D_1$ 和 $D_2$

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$

III. 若在 D 上，$f(x,y)=1$，$\sigma$ 为 D 的面积，则

$\sigma=\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma$. ⇒ 若取体积：$\Omega=\iiint_\Omega 1dxdydz$

IV. 若在 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，

$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$

V. 设 M, m 为 $f(x,y)$ 在 D 上的 max 和 min，则

$m\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma$

(二重积分的中值定理)：

$m\le\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma\le M$ ⇒ 在 D 上存在一点 $(\xi,\eta)$，

使 $\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$ 成立。

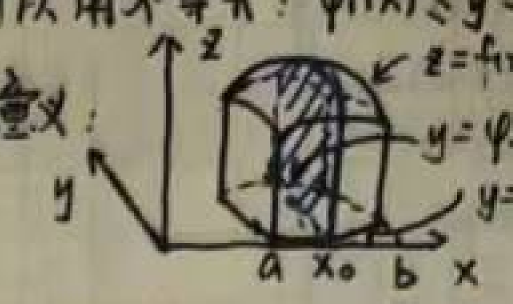
☆几何意义：$\iint_D f(x,y)d\sigma$ 表示以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体。

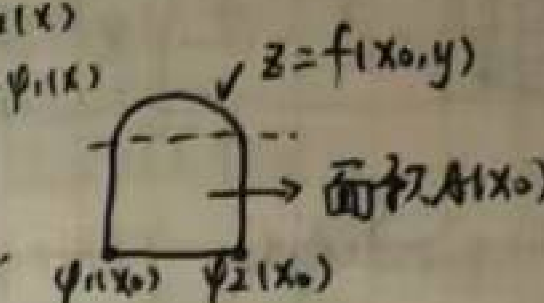
2. 二重积分的计算

① 利用直角坐标，分成两次定积分。

设 D 可以用不等式：$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$，$a\le x\le b$ 表示

由几何意义：




在 $[a,b]$ 中取 $x_0$ 作 $x=x_0$ 截面，

$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)dy$，一般的，有

$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$，再对 x 积分，有

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx$，是先对 y 后对 x 的二次积分

类似的，先对 x 再对 y 的二次积分：

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)dx\right]dy$

☆注意判断积分区域类型：

X 型区域 D：画与 y 轴平行的线，相交最多 2 点，⇒ 用 $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$

Y 型区域 D：画与 x 轴平行的线，相交最多 2 点，⇒ 用 $\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)$

(用函数理解)。

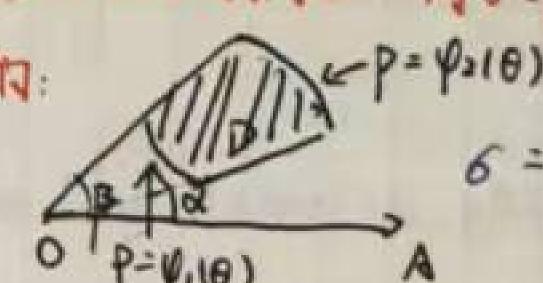
② 利用极坐标计算二重积分

$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\underbrace{\rho\cdot d\rho d\theta}_{\text{面积元素}}$

⇒ 再变成两次定积分来做。

☆如果极点在 D 的内部，有 $0\le\rho\le\varphi(\theta)$，$0\le\theta\le2\pi$

特殊的：




$\sigma=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$

③ 二重积分的换元法，

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，若变换

T: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 上平面上的 D，满足，

$\begin{cases}x(u,v),\ y(u,v)\text{ 在 D' 上有一阶连续偏导数，}\\ J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne0\\ \text{变换 T: D'}\to\text{D 是一对一的}\end{cases}$

则：$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$.

3. 三重积分：

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ (与二重积分类似)

计算方法：分成三次积分

① 用直角坐标计算，

$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\}$.

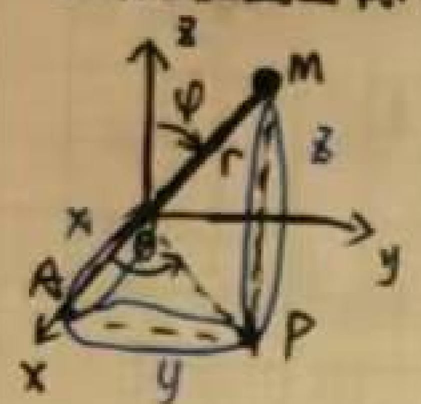
$D_{xy}=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$.

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$

② 利用柱面坐标计算：$\rho,\theta$ (xOy 上转化)，z 保留。

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ ⇒ $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho,\theta,z)\rho\, d\rho d\theta dz$

③用球面坐标计算：




$OP = r\sin\varphi,\ z = r\cos\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

## 4. 达布积分(单变量积分)

Darboux

①达布求和：

有函数 $f: [a,b] \to R$，$P_A = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$i \in \{1,2,\cdots n\}$

$m_i = \underbrace{\inf}_{\text{下确界}}\{f(x);\ x_{i-1} \le x \le x_i\}$，　$M_i = \underbrace{\sup}_{\text{上确界}}\{f(x);\ x_{i-1} \le x \le x_i\}$

达布下和：$\underline{S}(P;f) = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1})$

达布上和：$\overline{S}(P;f) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1})$　　P表示的是对于[a,b]的分区集合

⇒性质：若再往[a,b]中加点分割(记为Q)，$Q \supset P$ 时，$\underline{S}(P;f) \le \underline{S}(Q;f) \le \overline{S}(Q;f) \le \overline{S}(P;f)$　　$(p = \{x_0, x_1, \cdots x_n\}$，P是p的集合。$P = \{P | n \in R\}$。

②达布积分：

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\underline{S}(P;f);\ P \in P\}$ 达布下积分

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\overline{S}(P;f);\ P \in P\}$ 达布上积分

⇒达布上积分和达布下积分相等则黎曼可积(或者说上和/下和)

compact(紧致)集合上连续函数黎曼可积。

③黎曼积分缺点：

黎曼可积函数较少，无理论描述数列/级数，

## 5. 重积分补充

① $\int_{[0,1]^2} xy\,d^2(x,y)$ 表示 $\iint_D xy\,dx\,dy$，$D = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

(特例：$\int_{[0,1]^2} x^m y^n d^2(x,y) = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$)。

② $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d^2(x,y) = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \Leftarrow f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$

③小Fubini：

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d^2(x,y) = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

④质心(Centroid of D)：

$$S = \frac{1}{vol(D)}\left(\iint_D x\,dx\,dy,\ \iint_D y\,dx\,dy\right),\quad vol(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

⑤特征函数与约束

特征函数：对于子集 $A \subseteq R^n$，有 $\lambda_A: R^n \to R$，

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

⇒对于函数 $f: R^n \to R$，有：

$$\int_A f(x)d^n(x) = \int_{R^n} f(x)\lambda_A(x)d^n(x)$$

⇒对于函数 $f: B \to R$　$(A \subseteq B \subseteq R^n)$，平凡扩张！ trival extension

$F: R^n \to R$，$x \mapsto f(x)$ for $x \in B$ and $x \mapsto 0$ for $x \notin B$

约束：
- 有些子集特征函数是不可积的
- 但对于well-defined (measurable 可测的)子集，特征函数是可积的

# 九、勒贝格积分 Lebesgue Integral

☆两种方法 $\begin{cases}\text{测度论} \\ L^1\text{-半范数}\end{cases}$

## 1. 阶级函数 step function

① n-维 interval：$Q \subseteq R^n$ 且 $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ (笛卡尔内积)，$I_i$ 是 $[a,b]$ 的形式(开区间也行) n维区间

② step function $\phi: R^n \to R$，有：$Q_1, \cdots Q_r$ 和常数 $c_1 \cdots c_r$ 满足

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_{Q_i}(x)\quad (x \in R^n)$$

(就是不同区间特征函数线性张成的函数)

③ n维 interval 的体积：

对于 $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$，体积 $vol(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

(若有 $I_i$ 为1个点，则 $vol(Q) = 0$)

④ step function 的积分：integral of step function (ISF)

对于 $\phi = \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_Q$，有

$$\int_{R^n} \phi(x)d^n(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i vol(Q_i)$$

☆计算时一般只用 $\int \lambda_Q = vol(Q)$ 和 $\int(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1\int\phi_1 + c_2\int\phi_2$

④性质：
- 每个step function 可以表示为互不相交的子集特征函数之和。
- 对于一个step function，无论其表示方式如何，体积一样。

⑤黎曼可积与step function (与达

$f: [a,b] \to R$ 是黎曼可积的，iff 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 step function $\phi, \psi$ 来让 $\phi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ $(x \in [a,b])$；$\phi(x) = \psi(x) = 0$ $(x \notin [a,b])$；$\int(\psi - \phi) < \varepsilon$

## 2. $L^1$-半范数

① ordinate set of a function $f \ge 0$

对于二元函数，就是函数graph 和xy平面bounded 的子集

$O_f = \{x \in R^{n+1};\ 0 \le x_{n+1} \le f(x_1, \cdots x_n)\}$ of a function $f \ge 0$

②：几个定义：

$+\infty + a = +\infty$　　$a \in R \cup \{+\infty\}$

$-\infty + a = -\infty$　　$a \in R \cup \{-\infty\}$

$+\infty \cdot 0 = 0$

$+\infty \cdot a = \begin{cases} +\infty & a \in R^+ \cup \{+\infty\} \\ -\infty & a \in R^- \cup \{-\infty\} \end{cases}$

$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$　　$\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$

③包络级数 enveloping series

对于级数 $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_{Q_i}$，被称为 $f: R^n \to \overline{R}$ 如果：
- 每个 $Q_i$ 都是开区间，$c_i \ge 0$
- $f(x) \le \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_{Q}(x)$，$x \in R^n$

$I(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i vol(Q_i) \in [0, +\infty]$

☆step function 是有限个特征函数相加，而enveloping series 是无穷个特征函数相加。

⇒ step function 是阶梯状的，而 enveloping series 是可以光滑的。

⇒ enveloping series 是针对1个f而言的，要始终大于f

④ $L^1$-seminorm ($L^1$-半范数)

$\|f\|_1 = \inf\{I(\phi) : \phi$ is an enveloping series for $|f|\}$.

inf: 最小上界

☆ 可以直观地看成函数的距离

[补充]. 函数f作为一个vetor space V中的vector, 自然有内积和范数(距离)

$\Rightarrow f = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}$ 视为∞维的向量 (即 $f(n) = x_n$, n为∀实数)

普通向量的内积: $x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

函数内积: $f \cdot g = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum^{\infty} x_k y_k \ (k \in R)$

$= \int_a^b f(x) g(x) dx$

普通向量的L-p范数:

$\|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$

函数的L-p范数:

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\cdots + x_n^p + \cdots} = \sqrt[p]{\sum^{\infty} x_k^p}$

$= \sqrt[p]{\int_s |f|^p d\mu} = (\int_s |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

因 $\int_s |f|^p d\mu$ 不一定在f为0时为0,

所以 $\|f\|_p$ 为L-p半范数.

⑤ well-defined: D是连通域且在D上的某段曲线积分与路径无关

completeness of the real numbers

因级数在R上能等于+∞, 即f的上界存在.

(最小上界公理: 一个非空子集有上界, 则必有最小上界)

⑥ 勒贝格可积: (Lebesgue integrable)

存在 sequence $(\phi_k)$ of step functions 满足

$\lim_{k\to\infty} \|f - \phi_k\| = 0$, 则:

$\int_{R^n} f(x) d^n x = \lim_{k\to\infty} \int_{R^n} \phi_k(x) d^n x$

⑦ 柯西审敛法:

所有柯西数列必收敛

柯西数列: 满足对于∀ε>0有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 当 $m, n > N$ 时,

⑧ 性质:

I. f is integrable iff |f| is integrable.

即 $|\int f| \le \int |f| = \|f\|_1$

II. $f_1, f_2$ 可积, 则 ($c_1, c_2$ 为实数)

$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int f_1 + c_2 \int f_2$

III. $f_1 \le f_2$, 则 $\int f_1 \le \int f_2$

IV. $f_1, f_2$ 可积, $f_1, f_2$ 其中1个有界, 则 $f_1 f_2$ 有界

V. $f_1, f_2$ 可积, 则 $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$ 可积

VI. 反常积分绝对收敛则勒贝格可积

VII. 黎曼积分都勒贝格可积且积分值相同.

⑨ 勒贝格测度: Lebesgue measurable

⇒ 就是长度/面积/体积…

可测度: The characteristic function $\chi_A$ 可积,

$\Rightarrow vol(A) = \int_{R^n} \chi_A(x) d^n x = \int_A 1 \, d^n x$

性质:

I. 可测集的交集可测

II. 可测集的并集可测(不为∞)

III. 有界闭集(compact)可测

IV. 有界开集可测(但存在有界集不可测)

V. 可数集测度为0

判断测度为0: 对所有ε>0有 sequence $Q_1, Q_2 \cdots$ intervals,

$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ and $\sum_{k=1}^{\infty} vol(Q_k) < \varepsilon$, 则N测度为0

3. 单调收敛定理: monotone convergence theorem

$\begin{cases} f_k \text{单调递增} \\ f_k \text{可积} \\ \int f_k \text{有界} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \\ \int f(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x) \end{cases}$

(积分符号与极限符号互换)

4. 有界收敛定理: bounded convergence theorem

$\begin{cases} \text{存在函数} f(x) \text{有} f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \\ |f_k(x)| \le \phi(x) \end{cases} \Rightarrow \int \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)$

5. 含参积分:

$F(x) = \int_Y f(x,y) d^n y$ (y为参数)

$\begin{cases} f(x,y) \text{连续} \\ |f(x,y)| \le \phi(y) \end{cases} \Rightarrow F(x)\text{连续}$

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \text{连续, 存在} \\ |\frac{\partial f}{\partial x}| \le \phi(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) d^n y$

## 十. 重积分补充

1. 换元重积分:

① 极坐标: $(x,y) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\iint f(x,y) dxdy = \iint f(r,\theta) \cdot r \cdot dr d\theta$

② 球坐标: $(x,y,z) \to (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

$\iiint f(x,y,z) dxdydz = \iiint f(r,\varphi,\theta) r^2 dr d\varphi d\theta$

③ 一般形式: $R^n \to R^n$ 的函数F $(y_1, y_2 \cdots y_n) \to (x_1, x_2 \cdots x_n)$.

$\int_D F(y_1, \cdots y_n) \, \hat{d}^n(y_1, \cdots y_n) = \int_D F(x_1, x_2 \cdots x_n) |J_F(x_1, \cdots x_n)| \, \hat{d}(x_1, x_2 \cdots x_n)$

④ 旋转不变函数: rotation-invariant functions

$f: D \to R$, $D \subseteq R^n$ 是 rotation-invariant 的, 若存在 $g: I \to R$,

$I \subseteq [0, +\infty)$ 有 $f(x) = g(|x|) = g(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$

2. 应用:

① 曲面的面积: $z = f(x,y)$, 则:

$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} \, dxdy$, D为在xOy平面上的投影

☆ 一般求表面积时应有对称性, 再转化成曲面面积即可.

⇒ 曲面的参数方程:

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{matrix}$

$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv$.

② 质心

平面: 面密度 $\mu(x,y)$, 有: $M = \iint_D \mu(x,y) dxdy$,

$\bar{x} = \frac{1}{M} \cdot \iint_D x\mu(x,y) dxdy$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \cdot \iint_D y\mu(x,y) dxdy$

空间: 密度 $\rho(x,y,z)$, 有: $M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z) dxdydz$

$\bar{x} = \frac{1}{M} \cdot \iiint_\Omega x\rho(x,y,z) dxdydz$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \cdot \iiint_D y\rho(x,y,z) dxdydz$

$\bar{z} = \frac{1}{M} \cdot \iiint_\Omega z\rho(x,y,z) dxdydz$

③ 转动惯量：

平面，面密度 $\mu(x,y)$：$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,dxdy$，$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,dxdy$

空间，密度 $\rho(x,y,z)$：$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$，

$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$，

$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$

④ 引力：

$F=(F_x,F_y,F_z)$

$$=\left(\iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,\ \iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,\ \iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv\right)$$

点 $(x_0,y_0,z_0)$ 距离为 $r$

# 十一、曲线，曲面积分

## 1. 第一类曲线积分 / 对弧长的曲线积分

① 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 $L$ 上有定义且连续，$L$ 的参数方程：

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有一阶连续导数且

$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2\neq 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt \quad (\alpha<\beta)$$ ☆

② $y=\psi(x) \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\psi(t) \end{cases} \Rightarrow \int f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'(x)^2}\,dx$

③ 性质：

Ⅰ. $\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$

Ⅱ. $\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$

Ⅲ. 在 $L$ 上有 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$

## 2. 第二类曲线积分 / 对坐标的曲线积分

① $F(x,y)=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$ 为向量值函数，$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$

② $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$

☆ 注意积分弧段的方向。

☆ 这里，下限 $\alpha$ 对应 $L$ 的起点，上限 $\beta$ 对应于 $L$ 的终点，$\alpha$ 不一定小于 $\beta$

③ 两种曲线积分间的联系：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$\vec{\tau}=\varphi'(t)\vec{i}+\psi'(t)\vec{j}$ 称为有向曲线弧的切向量。

方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}$

计算 $\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$ 可得对弧长的曲线积分

即 $\int_L Pdx+Qdy=\int_L[P\cos\alpha+Q\cos\beta]ds$

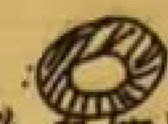
或 $\int_\Gamma A\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma A\cdot\vec{\tau}\,ds$，

$A=(P,Q,R)$ $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

## 3. 格林公式，Green ..

在平面闭区域 $D$ 上的二重积分可以通过沿闭区域 $D$ 的边界区域 $D$ 的边界曲线 $L$ 上的曲线积分来表达。

① 平面单连通区域： $D$ 区域中不含有洞的区域

平面复连通区域： $D$ 区域中有洞。 

正向：沿 $L$ 走时，$D$ 总在他的左边

② 函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$L$ 是 $D$ 区域的取正向的边界曲线

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

☆ 对于复连通区域，应包括内部的边界。

③ 平面上曲线积分与路径无关的条件：

对于 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，充分必要条件为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。

（单连通域，$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续）

$\Rightarrow$ 奇点：

破坏函数 $P$，$Q$ 及 $\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续性的点。

④ 二元函数的全微分求积：

对于 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在单连通域 $G$ 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件：

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。（与③条件联系 ✓）

$\Rightarrow$ 求解：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(s,t)ds+Q(s,t)dt$（区别变量，函数没变）

便于计算：$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$

（平行于坐标轴的曲线：$\underrightarrow{\quad}\uparrow$）

⑤ 曲线积分的基本定理：

保守场 $F$：$\int_L F\cdot dr$ 在区域 $G$ 内与积分路径无关。

$\Rightarrow F(x,y)=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$，$F=\nabla f(x,y)$，有：

$\int_L F\cdot dr=f(B)-f(A)$

## 4. 第一类曲面积分 / 对面积的曲面积分

① $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dxdy$，

$D_{xy}$ 为 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影。

②：$\oiint_\Sigma$ 表示在闭曲面 $\Sigma$ 上积分

## 5. 第二类曲面积分 / 对坐标的曲面积分

① 通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧。

在 $\Sigma$ 上取曲面 $\Delta S$ 投影到 $xOy$ 平面上，法向量与 $z$ 轴夹角 $\gamma$，积分出来要加上与 $\cos\gamma$ 相同的符号

② 流量：在单位时间内流向 $\Sigma$ 一侧的流体的质量

向量场 $A(x,y,z)=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$，

$n$ 为 $\Sigma$ 在点 $(x,y,z)$ 处的单位法向量。

流量 $\Phi=\iint_\Sigma A\cdot n\,dS=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

③ 积分曲面 $\Sigma$ 由方程 $z=z(x,y)$ 决定，投影在 $xOy$ 平面上为 $D_{xy}$，$\Sigma$ 为曲面上侧。

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

☆ 上侧，前侧，右侧 取正号

下侧，后侧，左侧 取负号

高斯公式

①空间闭区域Ω由Σ围成，$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$,

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

②空间二维单连通区域：G内任一闭曲面所围成的区域全属于G

空间一维单连通区域：G内任一闭曲线总可以张成一片完全属于G的曲面

③G是空间二维单连通区域，$\iint P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$ 在G内与所取曲面Σ无关而只取决于Σ的边界曲线（曲面积分为0）的充要条件：$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$

④散度：$A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$,

$$\operatorname{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$ 通量密度

点M处：

$\operatorname{div}A(M)>0$：正源，向外发散

$\operatorname{div}A(M)<0$：负源，向流去汇聚

$\operatorname{div}A(M)=0$：无源

若$\operatorname{div}A$恒为0，则A为无源场

7. 斯托克斯公式 Stokes

①Γ为空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手定则（四指绕Γ方向，拇指指法向量方向），有：

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$=\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$，也可写成：

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

②空间曲线积分与路径无关的条件：

G是一维单连通域，充分必要条件是：

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$.

（同时也说存在$u(x,y,z)$，$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$是其全微分：

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

③环流量，

对于$A(x,y,z)=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$

环流量为$\oint_\Gamma A\cdot\tau\,ds=\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$.

④旋度，

$$\operatorname{rot}(A)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\nabla\times A=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

7. 向量场 vector field

①保守场 conservative vector field

存在$f(x,y)$使$\vec{F}=\nabla f(x,y)$

一、常用放缩：

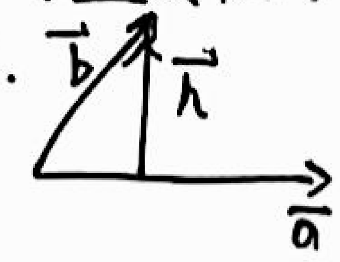
$x < \sqrt{x^2+y^2}$，$x+y > \sqrt{x^2+y^2}$，$xy < \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$，
$xy < \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\lim_{x\to0}\sin x = x$　$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$　$\lim_{x\to0} e^x = x+1$

$\lim_{x\to0}\ln(x+1) = x$

二、正交化（求 $\vec N$）

1.




$\vec b$ 在 $\vec a$ 的垂直投影：
$\vec h = \vec b - \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|^2}\cdot\vec a$

（若求 $\vec N$，则 $\vec h = r'' - \frac{r''\cdot r'}{r'\cdot r'}\cdot r'$，$\vec N = \frac{\vec h}{|\vec h|}$）.

三、向量函数公式：$\frac{d}{dt}|r(t)| = \frac{r(t)\cdot r'(t)}{|r(t)|}$

1. $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$，$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$，$B(t) = T(t)\times N(t)$

曲率 $K = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

挠率 $\tau = -\frac{dB}{ds}\cdot\vec N = -\frac{[r'(t)\times r''(t)]\cdot r'''(t)}{|r'(t)\cdot r''(t)|^2} = -\frac{B'(t)\cdot N(t)}{|r'(t)|}$

2. 密切圆圆心：$r(t) + \frac{1}{k}N(t)$，曲率半径：$\frac{1}{k}$

⇒ 密切圆坐标：圆心 $+ \frac{1}{k}\cdot\vec N\cdot\sin\theta + \frac{1}{k}\cdot\vec T\cdot\cos\theta$

3. normal plane：N与B张成，法向量为 $r'(t)$ 或 $T(t)$

osulating plane：N与T张成，法向量为 $B(t)$ 或 $r'(t)\times r''(t)$

$\hookrightarrow f(t_0) + \mathbb{R}f'(t_0) + \mathbb{R}f''(t_0)$

4. Frenet-Serret公式

$\frac{dT}{ds} = K N(t)$

$\frac{dN}{ds} = -K(t)\cdot T(t) + \tau(t)\cdot B(t)$

$\frac{dB}{ds} = -\tau(t)\cdot N(t)$

5. 弧长：$s = \int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$ [从r(a)到r(b)]

四、梯度，偏导相关

1. countor：
- 水平切线：$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial y}\neq0$
- 竖直切线：$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}\neq0$

2. $\nabla f(x,y)\neq0$ 且连续 ⇒ countor是连续的

$\hookrightarrow$ 对参数方程来说，$r(t)$ 连续且 $r'(t)\neq0$

3. 保角性 conformal（映射后交点的角度不变）

$J_F^T\cdot J_F = \lambda I$，$\lambda\neq0$ 要验证.

4. 切平面

① $z=f(x,y)$：$z-z_0 = f_x(x,y)(x-x_0) + f_y(x,y)(y-y_0)$

法向量 $(f_x(x,y), f_y(x,y), -1)$

② $F(x,y,z)=0$：$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$

法向量 $(F_x, F_y, F_z)$

5. 可微：$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，

可微 ⇔ $\Delta z = f_x\Delta x + f_y\Delta y + o(\rho)$

⇔ $\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y}{\rho} = 0$　（用极坐标！）

⇐ 偏导存在且连续

步骤：先看偏导存在？再看连续？（极限是否存在）

可微 ⇒ 连续

6. 偏导定义：

$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

五、画图：

① 对称性(symmetry) ⇒ 关于轴和面，要写全

关于 $y=x$ 对称：$(x,y)\mapsto(y,x)$

$y=-x$ ：$(x,y)\mapsto(-y,-x)$

homogenous

② 齐次函数：$f(kx,ky)=k^n f(x,y)$　（n是阶数）

⇒ countor是相似(similar)的

③ 考虑角度：

定义域：是否划分了多个区域？

保角性：相切↦相切，垂直↦垂直

切线水平或竖直的点，

与坐标轴或对称轴交点，

因式分解，不要直接消项！（防止0被忽略）

六、极限：

1. 存在极限条件：
- $x_0$ 为聚点(accumulating point)
- δ~ε定义满足

有界(bounded)：D is contained in a ball,

若 $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = C$（定值），则 $f(x,y)$ 的 $k(\neq0)$ countor是有界的.

闭合(closed)：D contains its limit point.

连续定义：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. δ~ε法：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$

① $(x,y)\to(a,b)$：若 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = C$：$|f(x,y)-C|<\delta$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\infty$：$f(x,y)>\delta$

② $|(x,y)|\to\infty$：若 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}>\varepsilon$，
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=C$：$|f(x,y)-C|<\delta$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\infty$：$f(x,y)>\delta$

3. 几个常见趋近代换：

① $x=ky$，$y=kx$　② $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

③ $y=x^k$　$|(x,y)|\to\infty$，可用来证明或证否.

七、误差：

1. 用differentials (absolute error)：

$\Delta y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1\cdots x_n)\cdot\Delta x_j$（各项取正：因为 $|\Delta x_j|$）.

2. 用mean value theorm：用于计算 upper bound

$|\Delta y| \le \sum_{j=1}^n M_j\cdot\Delta x_j$，$M_j = \max\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j)\right|$，

$x_j\in[x_j-\Delta x_j, x_j+\Delta x_j]$.

3. 相对误差(relative error)

$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{y}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\Delta x_j}{x_j}$

八. 方向函数和梯度

1. 方向函数 (方向 $\vec{u}$)

$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cdot\cos\beta$.

双向!

2. 梯度

$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} = \langle f_x, f_y\rangle$

梯度方向增长最快, $|\nabla f(x)| = \text{slope}$

九. 补充.

1. $J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \frac{\partial f_m}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{x_n} \end{pmatrix}$

2. $\langle t^2, \frac{1}{t^2}, t^2+\frac{1}{t^2}\rangle$ 关于 $y=x$ 对称 (令 $t=\frac{1}{t}$)

3. chain rule

① $z=f(x,y)$, $x=g(t)$, $y=h(t)$,

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

② $z=f(x,y)$, $x=g(s,t)$, $y=h(s,t)$,

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$

4. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

5. 双曲线: hyperbola

椭圆: ellipse

抛物线 parabola

6. $D'$: 聚点. $\partial D$: 边界点 $D^\circ$: 内点.

闭集: $\overline{D} = D\cup D' = D\cup\partial D$

# • Line Integral

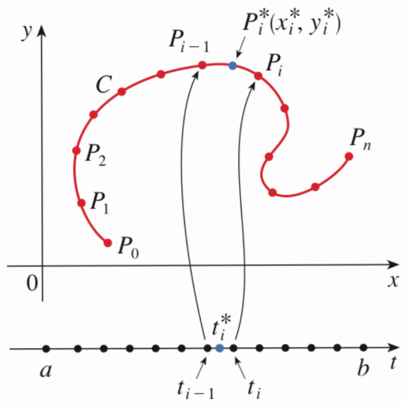



**FIGURE 1**

**2 Definitio** If $f$ is defined on a smooth curve $C$ given by Equations 1, then the **line integral of $f$ along $C$** is

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

if this limit exists.

↓

**3** $$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}_{ds}$$

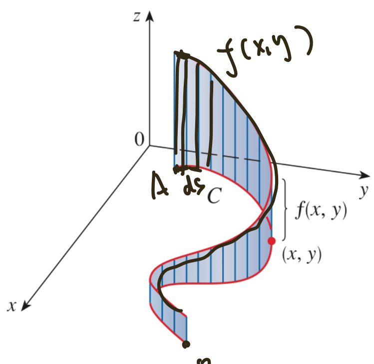



**FIGURE 2**

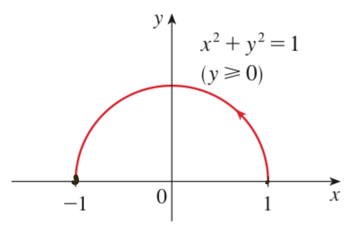



**FIGURE 3**

**EXAMPLE 1** Evaluate $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$, where $C$ is the upper half of the unit circle $x^2 + y^2 = 1$.

$x = \cos t$

$y = \sin t \quad 0 \le t \le \pi$

$$\int_0^\pi 2 + \cos^2 t \sin t \cdot \cancel{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} \cdot dt$$

$$2t - \frac{1}{3}\cos^3 t \Big]_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}$$

- Exact :

$w = (2x - z)dx + (y - xz)dy - xy\,dz$

## Theorem

*Suppose $\omega \colon D \to (\mathbb{R}^n)^*$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, is continuous and exact, $\omega = \mathrm{d}f$, and $\gamma \colon [a,b] \to D$ is any path. Then we have*

$$\int_\gamma \omega = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

**Proof.**

得到的2条推论

## Corollary

*Suppose $\omega \colon D \to (\mathbb{R}^n)^*$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, is continuous and exact.*

1. *The integrals $\int_\gamma \omega$ are independent of path, i.e., for any two paths $\gamma_1, \gamma_2$ in $D$ whose starting points and end points coincide we have $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.*
2. *For every closed path $\gamma$ in $D$ we have $\int_\gamma \omega = 0$.*

## The Converse of the Corollary

### Independence of path implies exactness

First observe/recall the following:

- If $\omega \colon D \to (\mathbb{R}^n)^*$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, is exact then $D$ must be *open*, because $\omega(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in D$ implies in particular $D = D^\circ$.
- If in addition $D$ is path-connected then any two antiderivatives $f_1, f_2$ of $\omega$ differ by a constant, since $\omega = \mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}f_2$ implies $\mathrm{d}(f_1 - f_2) = 0$ on $D$, and we have seen that in this case $f_1 - f_2$ must be constant.

If $w$ is continuous , exact $\Longleftrightarrow$ independent of path

# Locally Exact 1-Forms

## Definition

A differential 1-form $\omega\colon D \to (\mathbb{R}^n)^*$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, is *locally exact* if every point $\mathbf{x} \in D$ has a neighborhood, on which $\omega$ is exact.

Of course we can assume that this neighborhood is a ball $\mathrm{B}_r(\mathbf{x})$ for some $r > 0$. If $\omega$ is exact on $D$ then it is locally exact with $D$ serving as the desired neighborhood for all $\mathbf{x} \in D$.

## Proposition

If $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_i$ is locally exact (in particular, if $\omega$ is exact) and continuously differentiable (on $D$) then

$$(f_i)_{x_j} = (f_j)_{x_i} \quad \text{for all } 1 \le i < j \le n \quad (\text{on } D).$$

For example, for $n=2$, $\omega = \underbrace{(3+2xy)}_{f_1}dx + \underbrace{(x^2-3y^2)}_{f_2}dy$

$n=3.$ $\quad \frac{f_1}{\partial y} = \frac{f_2}{\partial x} \qquad 2x = 2x$.

$\_\, x \quad \_\, y \quad \_\, z$

exact $\Rightarrow (f_i)_{x_j} = (f_j)_{x_i}$

$+$ D is star-shaped

## Theorem (Poincaré's Lemma)

*Let $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_i$ be a continuously differentiable differential 1-form on $D \subseteq \mathbb{R}^n$. If $\omega$ satisfies $(f_i)_{x_j} = (f_j)_{x_i}$ for $1 \le i < j \le n$ and $D$ is star-shaped then $\omega$ is exact.*

Star-shaped:

## Definition

A subset $D$ of $\mathbb{R}^n$ is said to be *star-shaped* of there exists a "central" point $\mathbf{c} \in D$ such that for any other point $\mathbf{x} \in D$ the line segment $[\mathbf{c}, \mathbf{x}] = \{(1-t)\mathbf{c} + t\mathbf{x};\, 0 \le t \le 1\}$ is contained in $D$.


It will be shown that locally exact continuous differential 1-forms on a simply connected set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ are exact. This vastly generalizes Poincaré's Lemma.

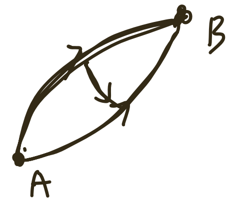
locally exact + simply-connected ⇒ exact

W39.

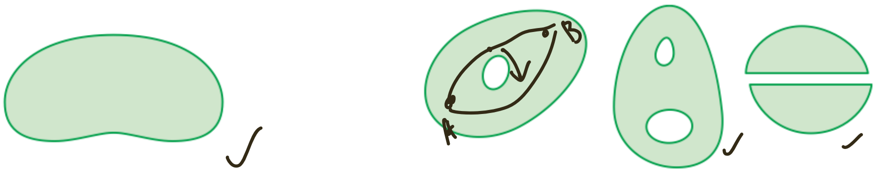
## Simply Connected regions

Roughly speaking, a connected open set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ is "simply connected" if every closed path in $D$ can be continuously contracted to a point entirely within $D$. Subsets of $\mathbb{R}^2$ with this property must not contain holes.

：在定义域内，任意2条连接2个点的线可以无障碍地收缩到一起.




For $R^2$ :

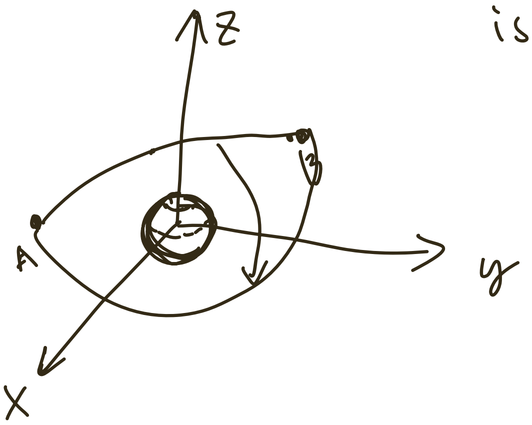



simply-connected region ✓

regions that are not simply-connected ✓ ✓

For $R^3$, $\{(x,y,z) \in R^3 ; (x,y,z) \neq \boxed{x^2+y^2+z^2 \leq 1}\}$

is still a simply-connected region ✓



# Curl and Divergence

**Definition**

The *curl* and *divergence* of a 3-dimensional vector field $F = (f_1, f_2, f_3)$ are defined as

$$\operatorname{curl} F = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} F = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3.$$

Example:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \overset{f_1}{y^2z^3}\,\mathbf{i} + \overset{f_2}{2xyz^3}\,\mathbf{j} + \overset{f_3}{3xy^2z^2}\,\mathbf{k}$$

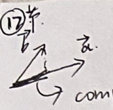
Curl F = 0

div F = $2xz^3 + 6xy^2z$

$$\operatorname{Curl} F = \begin{pmatrix} 6xyz^2 - 6xyz^2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Yu Jiarui :)

## ⑫节.



$\text{proj}_a \vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

$\text{comp}_a \vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \ (\text{体积}) \\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \end{cases}$$

- Equations of Lines and Planes

$L$: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

Line segment: $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r_0} + t\vec{r_1}$ $(0 \le t \le 1)$ 为2个端点

$P$: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$\vec{n} = \langle a, b, c\rangle$ is normal vector

- 求两面交线: $\begin{cases} \text{Step1: 找点} \\ \text{Step2: } \vec{v} = \vec{n_1}\times\vec{n_2} \end{cases}$
- Distance: $D = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- Quadric

① $\vec{v} = A^{-1}(-b)$

$K = b^T v + c$

Ellipsoid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Elliptic Paraboloid: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Hyperbolic Paraboloid: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

Cone: $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Hyperboloid of one sheet: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

two sheets: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta+\sin\theta)^2}$ subs $t = \tan(\frac{\theta}{2})$

$\displaystyle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,dt$

$= \sqrt{2}\pi$

- line integral in space.

$\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt$

- In Vector field:

$\displaystyle W = \int_a^b F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

$\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ where $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$

$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \dfrac{1+|x|+|y|}{2}$

so $|x|, |y| \le 1+\sqrt{2}$

追踪它: 先固定一个坐标不动, 观察其他2个

## ⑬节 Vector Function and Space Curve.

- A vector function $\vec{r}$ is continuous at $a$ if $\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$
- $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ ($\vec{r}'(t)$ exists, $\vec{r}'(t)\neq 0$)
- arclength: $L = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt$
- $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ $\vec{B}(t) = \vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$
- curvature:

$k = \dfrac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$

$k = \dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$

for $y = f(x)$, $k = \dfrac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$

- Osculating circle:

$R = \dfrac{1}{k}$

(q) center: $f(\vec{t_0}) + R\cdot\vec{N}(t_0)$

Example: $C(t) = q - 54\cos t\,\vec{N}(2) + 54\sin t\,\vec{T}(1)$

- Frenet-Serret formulas:

1. $d\vec{T}/ds = k\vec{N}$
2. $d\vec{N}/ds = -k\vec{T} + \tau\vec{B}$
3. $d\vec{B}/ds = -\tau\vec{N}$
4. $\tau = \dfrac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\cdot\vec{r}'''}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$

- Line Integral

Definition: A differential 1-form $w$: $D\to(R^n)^*$, $D\subseteq R^n$, is said to be exact if there exists a function $f$: $D\to R^n$ satisfying $w = df$ (a so-called antiderivative). Equivalently, the vector field $F$ corresponding to $w$ is a gradient field, $F = \nabla f$

- If $w: D\to(R^n)^*$, $D\subseteq R^n$, is exact then $D$ must be open, because $w(x) = df(x)$ for $x\in D$ imply in particular $D = D^\circ$

Q5. show that $K$ is compact.

$K$ is closed, because it's defined by weak inequalities $g(x,y,z)\le C$ involving one or more continuous functions $g$.

For bounded... 计算一填

Q1 的 f) replace $y-2x$ by $(y+2x)$

$\displaystyle\int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$

## ⑭:

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ if for every number $\varepsilon > 0$ there is a corresponding number $\delta > 0$ such that if $(x,y)\in D$, and $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ then $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

- Clairaut's Theorem: Suppose $f$ is defined on a disk $D$ that contains the point $(a,b)$. If the function $f_{xy}$ and $f_{yx}$ are both continuous on $D$, then $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$
- Laplace's equation

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- wave equation

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- Differentials.

$dz \doteq \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

$\Delta z$ 是精确变化

- Implicit.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z}$

- Gradient Vector

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y\rangle$

$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$ = slope

- Hess. $= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}$ $> 0 \Rightarrow$ local min/max; $< 0$ saddlepoint.

local min/max: $\nabla f(x,y) = (0,0)$ (no 限制时)

- global max/min: $\begin{cases} \text{① all critical point} \\ \text{② boundary.}\end{cases}$
- Lagrange multiplier

for $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$

$\nabla g \neq 0$

For $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda\nabla g + \mu\nabla h$

$\nabla g\neq 0$, $\nabla h\neq 0$, $\nabla g$ and $\nabla h$ linear independent

## ⑮:

if $m \le f(x,y) \le M$ for all $(x,y)$ in $D$,

then $mA(D) \le \iint_D f(x,y)\,dA \le MA(D)$

- Moment

$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA$

$\bar{x} = \dfrac{M_x}{m}$, $m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$

- Moment of Inertia

  $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\, dA$

- Surface.

  $A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dA$

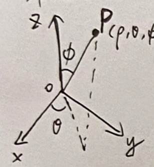
- triple. $V_E = \iiint_E dV = \iint_D z\, dA$

  $m = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$

  $M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)\, dV$

  $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$

- Spherical. + $\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$




- change of Variable.

  $\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$

  $d^3(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$

16 极值存在定理：S is compact, f is continuous ⇒ f 在 S 上有极大/小值

- For $H_f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

  半正定：$A > 0$ 且 $AC - B^2 = 0$

  正定：$A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$

  负定：$A < 0$ 且 $AC - B^2 > 0$

  indefinite：$AC - B^2 < 0$

- Conformal：$J_f^T(x) \cdot J_f(x) = \lambda I, \lambda \neq 0$

- Differentiable：

  Let $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, be a function with coordinate functions $f_1, \cdots f_m$ and $\mathbf{x} \in D^\circ$.

  ① If $f$ is differentiable at $\mathbf{x}$ then $f$ is continuous at $\mathbf{x}$.

  ② If all partial derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ exists near $\mathbf{x}$, then $f$ is differentiable at $\mathbf{x}$

$\boxed{Q_3}$ b) Show that there's a point on S minimized distance. S: $xyz - x - y - z = 2$

Consider a point on S: $P(-1,-1,-1)$

The length function $(x,y,z) \to |(x,y,z)|$ is continuous and attains a minimum $d_0$ on the set $C = \{(x,y,z) \in S;\ x^2+y^2+z^2 \leq 3\}$ which is closed, bounded and non-empty. Since $d_0 \leq \sqrt{3}$ and all points in $S \setminus C$ have length $> \sqrt{3}$, the point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ has the required property.

- Monotone Convergence Theorem

  If ① $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ (for all $x \in \mathbb{R}^n$ 与 for all $k \in \mathbb{N}$)

  and ② $(\int f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded

  Then: $\int \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int f_k$

- Bounded Convergence Theorem

  Suppose that $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a sequence of integrable functions on $\mathbb{R}^n$ converging almost everywhere and that there exists an integrable function $\phi \geq 0$ on $\mathbb{R}^n$ such that $|f_k(x)| \leq \phi(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. Then the limit function $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ is integrable with

  $\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k$

- 考虑 $F(x) = \int_{y \in Y} f(x,y)\, dy$

  如果对于每一个在定义域内的 x，f(x,y) 都可积，那么 F(x) is well-defined.

- If $x \to f(x,y)$ is continuous for each $y \in Y$ and there exists an integrable function $\phi: Y \to \mathbb{R}$ such that $|f(x,y)| \leq \phi(y)$ for all $(x,y) \in X \times Y$, then F is continuous

- If $x \to f(x,y)$ is a $C^1$-function for each $y \in Y$ and there exists an integrable function $\phi: Y \to \mathbb{R}$ such that $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq \phi(y)$ for all $(x,y) \in X \times Y$ then F is a $C^1$-function and

  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\, d^n y$.

Q4. show that $F'(x)$ exists and 求导积分的换序：

$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$, $x \in [0, +\infty)$

$|f_x(x,t)| = |-\sin t\, e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq \phi(t)$

choose $\phi(t) = e^{-\frac{x}{2}t}$

and $\phi(t) = e^{-\frac{x}{2}t}$ is independent of x and integrable over $[0, +\infty)$, so the function F can be differentiated under the integral sign

Q1. (e) False. For the closed curve

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

we have $\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi \neq 0$, and hence $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y) \in D$, is not a gradient field.

But F satisfies $(f_1)_y = (f_2)_x$

Q2. $g_x = l_1 l_2 l_3$ 证 have 4 critical points.

since $\Delta$ is closed and bounded and g is continuous, g attains both a maximum and a minimum on $\Delta$. One of these must be in the interior $\Delta^\circ$ and hence yield a 4th critical point $q_4$

- Smooth：$\vec{r}(t)$ is smooth if on an interval I if $\vec{r}\,'$ is continuous and $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ on I.

-

- continuous：If $\vec{x} \to f(x,y)$ is continuous ① for each $y \in Y$ and there exists an integrable function $\phi: Y \to \mathbb{R}$ ② such that $|f(x,y)| \leq \phi(y)$ for all $(x,y) \in X \times Y$, then F is continuous

  $F = \int_Y f(x,y)\, d^n y$

- Fundamental：(continuous and differentiable)

  $F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\, dt$

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

- exact ①能求 antiderivative ⟺ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

  ②定义域 simply-connected, open. 不能有洞 不间断

- $\mathrm{curl}(F) \equiv 0$ ⟺ locally exact.

- compact (对定义域) { closed：带个等号的限制条件. bounded：需计算，有界

- 有个极值的条件：一个连续且 compact 的函数

- Curl：$F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$

  curl F (vector) $= \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$

- $\mathrm{div}\, F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ (scalar)

- Theorem.

  ① For any $C^2$-function $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, we have $\mathrm{curl}(\nabla f) = 0$

  ② For any $C^2$ vector-field $G = (g_1, g_2, g_3): D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, we have $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\, G) = 0$

- winding Form：$w = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

  绕一圈 $\int_\gamma w = 2\pi$

- 连续：$\lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$

  一致连续：$\lim_{x_1 \to x_2} (f(x_1) - f(x_2)) = 0$

- ② If $x \to f(x,y)$ is a $C^1$-function for each $y \in Y$ and there exists an integrable function $\phi: Y \to \mathbb{R}$ such that $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq \phi(y)$ for all $(x,y) \in X \times Y$ and $1 \leq j \leq m$, then F is itself a $C^1$-function.