

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Sweetland – What Merchant Navy?

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e
Computação 2020/2021

Investigação Operacional

Turma 4MIEIC02 - Grupo 3:

Ana Marisa Machado Macedo - up201909572@fe.up.pt

Francisco Costa Filipe de Almeida - up201909574@fe.up.pt

João Filipe Carvalho de Araújo - up201705577@fe.up.pt

Maria Helena Viegas Oliveira Ferreira - up201704508@fe.up.pt

Índice

Índice	2
Introdução	3
Itinerários	4
Formulação do Modelo	6
Solução ótima	11
Análise de sensibilidade - Labor cost range	14
Análise de sensibilidade - 15 dias de manutenção por ano	17
Formulação modelo - Procura de milho e trigo de Fatland e Sealand duplicam	18
Solução ótima	21
Relatório de sensibilidade	24
Conclusões	25
Anexos	27

Introdução

O Dr. Peter Hops, Primeiro-Ministro de Sweetland, pretende reestruturar a frota da marinha mercante do seu país, e precisa de **decidir o número de embarcações de diferentes tipos que devem ser adquiridas e como as viagens devem ser atribuídas a essas embarcações**, a fim de **satisfazer os requisitos de importação e exportação do país**.

No âmbito da disciplina de Investigação Operacional, no ano letivo de 2020/2021, foi-nos proposto, usando os nossos conhecimentos de modelação, resolução e interpretação de problemas de Programação Linear, ajudar o governo da Sweetland e o seu primeiro-ministro.

Ao longo do relatório o problema é definido mais detalhadamente, é formulado um modelo de programação linear para o resolver e a solução ótima é obtida. São também gerados relatórios de sensibilidade e analisadas certas variáveis e restrições. O processo é repetido, mas considerando que a procura de milho e trigo de Fatland e Sealand duplica.

Para a resolução do problema, implementou-se a modelação em linguagem Python, recorrendo-se à biblioteca **Gurobi**.

1. Itinerários

Deve-se, em primeiro lugar, definir os **itinerários** a que os navios podem ser atribuídos, o **tipo de carga** transportada e **tipo de navio**.

Sabe-se *a priori* que, Sweetland tem os portos Doce e Bom, Fatland os portos Sky e Moon e Sealand o porto Mars. Dos portos de Sweetland deve ser exportado **milho** e **trigo**, e importado **ferro** e **cobre** de Fatland e Sealand. Existem dois tipos de navios para o propósito: os pequenos (**Tipo 1**) e os grandes (**Tipo 2**).

Os itinerários devem ter em conta que:

1. Os navios devem partir com as exportações de Doce ou Bom e retornar carregados com as importações de Sky, Moon ou Mars (seja do porto onde descarregaram a carga ou de outro porto em Fatland ou Sealand).
2. As embarcações de grande porte (navio tipo 2) não podem ir para Moon, pois excedem o calado permitido de 8 metros. O calado do navio tipo 1 quando cheio é de 10 metros, enquanto que Moon só permite navios com calado de 8 metros.

Com estas restrições, teríamos 18 itinerários para navios do tipo 1 e 8 itinerários para navios tipo 2. No entanto, sabe-se que Doce só exporta milho e Sky não importa milho, pelo que não pode haver itinerários em que o navio vá diretamente de Doce para Sky. O mesmo acontece com Bom, que só exporta trigo e não importa cobre, e Moon, que não importa trigo e só exporta cobre.

O número de itinerários diminui assim para **12** para o navio tipo 1 e **7** para o navio tipo 2. A tabela seguinte representa os itinerários e devidas cargas:

ID	Itinerário	Tipo de navio	Produto exportado de Sweetland	Produto importado para Sweetland
1	Doce – Moon – Doce	1	Milho	Cobre
2	Doce – Moon - Mars - Doce	1	Milho	Ferro
3	Doce – Moon - Sky - Doce	1	Milho	Cobre
4	Doce – Moon - Sky - Doce	1	Milho	Ferro
5	Doce – Mars – Moon – Doce	1	Milho	Cobre
6	Doce – Mars – Doce	1 e 2	Milho	Ferro
7	Doce – Mars – Sky – Doce	1 e 2	Milho	Cobre
8	Doce – Mars – Sky – Doce	1 e 2	Milho	Ferro
9	Bom – Sky – Bom	1 e 2	Trigo	Ferro
10	Bom – Mars – Bom	1 e 2	Trigo	Ferro
11	Bom – Sky – Mars – Bom	1 e 2	Trigo	Ferro
12	Bom – Mars - Sky - Bom	1 e 2	Trigo	Ferro

Tabela 1: Viagens, tipo de navios que podem fazer as respectivas viagens, e produtos exportados e importados por Sweetland.

2. Formulação do Modelo

Para formular o problema, devemos definir as **variáveis de decisão**, ou seja, as variáveis sobre as quais vamos decidir os valores, as **restrições**, que impõe limites às decisões, e por fim a **função objetivo**, que define o critério para descobrir a solução ótima.

O modelo encontra-se implementado no ficheiro “**Modelos/P2.py**”. Utiliza-se o método *addVar* para adicionar variáveis de decisão ao modelo, em que um dos parâmetros é o tipo da variável, *vtype*, que pode ser contínua (C) ou inteira (I). Para este modelo usamos variáveis contínuas. Para adicionar restrições ao modelo utiliza-se o método *addConstr*, e para definir a função objetivo do modelo no Gurobi utiliza-se o método *setObjective*. *Por fim, para encontrar a solução usa-se a função optimize.*

No ficheiro “Modelos/P2.lp” apresenta-se a função objetivo e restrições de uma forma visivelmente mais simples.

Variáveis de decisão:

- **vessel1**: número de navios do tipo 1 que devem ser adquiridos;
- **vessel2**: número de navios do tipo 2 que devem ser adquiridos;
- **trips_{tripType,1}**: número de viagens do itinerário tripType (tripType = [1, 12]) que devem ser feitas pelos navios tipo 1. A tripType representa o ID do itinerário apresentado na tabela 1;
- **trips_{tripType,2}**: número de viagens do itinerário tripType (tripType = [6, 12]) que devem ser feitas pelos navios tipo 2. A tripType representa o ID do itinerário apresentado na tabela 1.

De maneira a simplificar a função objetivo, quatro variáveis auxiliares foram criadas.

Variáveis auxiliares:

- **dLoaded_{type}**: distância feita pelos navios do tipo type (type = 1 e 2) enquanto cheios
- **dEmpty_{type}**: distância feita pelos navios do tipo type (type = 1 e 2) enquanto vazios

Este problema é **equilibrado**, ou seja, as necessidades de exportação de Sweetland para trigo e milho são iguais às necessidades de importação de Sealand e Fatland para estas mercadorias, e as necessidades de importação de Sweetland para cobre e ferro são iguais às necessidades de exportação de Sealand e Fatland para estas mercadorias).

Um navio **tipo 1** consegue transportar até **35 toneladas**, enquanto que um navio **tipo 2** consegue transportar **70 toneladas**.

Restrições:

$$\mathbf{c1:} \ 35 * (\text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{11,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 * (\text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{11,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq 50000$$

A restrição 1 garante que o número de viagens que **sai de Bom com trigo** consegue transportar a quantidade mínima que deve ser exportada de trigo de Bom, i.e., **a capacidade das viagens dos navios têm de ser superior a 50000 toneladas**. Esta restrição é redundante dado o equilíbrio de cargas, especificamente as restrições 7 e 11.

$$\mathbf{c2:} \ 35 * (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{3,1} + \text{trips}_{4,1} + \text{trips}_{5,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{7,1} + \text{trips}_{8,1}) + 70 * (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{7,2} + \text{trips}_{8,2}) \geq 40000$$

A restrição 2 garante que o número de viagens que **sai de Doce com milho** consegue transportar, no mínimo, as **40000 toneladas** que Doce deve exportar. Esta restrição é redundante dado o equilíbrio de cargas, especialmente as restrições 8 e a 13.

$$\mathbf{c3:} \ 30 * (\text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{11,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 * (\text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{11,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq 50000$$

A restrição 3 garante que o número de viagens que **chegam a Bom com ferro** conseguem transportar as **50000 toneladas** que devem ser importadas.

$$\mathbf{c4:} \ 35 * (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{3,1} + 35 \text{ trips}_{5,1} + 35 \text{ trips}_{7,1}) + 70 \text{ trips}_{7,2} \geq 20000$$

A restrição 4 garante que o número de viagens que **importam cobre para Doce** conseguem transportar as **20000 toneladas** que devem ser importadas de Doce. Esta restrição é redundante dado as restrições 9 e 12.

$$\mathbf{c5:} \ 35 * (\text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{4,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{8,1}) + 70 (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{8,2}) \geq 20000$$

A restrição 5 garante que o número de viagens que **importam ferro para Doce** conseguem transportar as **20000** toneladas que devem ser importadas.

$$c6: 35 * (trips_{2,1} + trips_{6,1} + trips_{10,1} + trips_{11,1}) + 70 * (trips_{6,2} + trips_{10,2} + trips_{11,2}) \geq 30000$$

A restrição 6 garante que número de viagens que **retornam a Bom ou Doce** conseguem trazer a quantidade de **ferro** que deve ser **exportada por Mars, 30000** toneladas.

$$c7: 35 * (trips_{10,1} + trips_{12,1}) + 70 * (trips_{10,2} + trips_{12,2}) \geq 20000$$

A restrição 7 garante que os navios conseguem levar a quantidade de **trigo** que deve ser **importada por Mars, 20000** toneladas.

$$c8: 35 * (trips_{5,1} + trips_{6,1} + trips_{7,1} + trips_{8,1}) + 70 * (trips_{6,2} + trips_{7,2} + trips_{8,2}) \geq 10000$$

A restrição 8 garante que o número de viagens que **levam milho e chegam a Mars** conseguem transportar as **10000** toneladas que devem ser importadas por Mars.

$$c9: 35 * (trips_{3,1} + trips_{7,1}) + 70 * trips_{7,2} \geq 10000$$

A restrição 9 garante que o número de viagens que **levam cobre e partem de Sky** conseguem transportar as **10000** toneladas que devem ser **exportadas por Sky e importadas por Doce**.

$$c10: 35 * (trips_{4,1} + trips_{8,1} + trips_{9,1} + trips_{12,1}) + 70 * (trips_{8,2} + trips_{9,2} + trips_{12,2}) \geq 40000$$

A restrição 10 garante que o número de viagens que **levam Ferro e partem de Sky** conseguem transportar as **40000** toneladas que devem ser **exportadas**.

$$c11: 35 * (trips_{9,1} + trips_{11,1}) + 70 * (trips_{9,2} + trips_{11,2}) \geq 30000$$

A restrição 11 garante que o número de viagens que **levam Trigo e chegam a Sky** conseguem transportar as **30000** toneladas que devem ser importadas.

$$c12: 35 * (trips_{1,1} + trips_{5,1}) \geq 10000$$

A restrição 12 garante que o número de viagens que **levam cobre e partem de Moon** conseguem transportar as **10000** toneladas que devem ser exportadas.

$$c13: 35 * (trips_{1,1} + trips_{2,1} + trips_{3,1} + trips_{4,1}) \geq 30000$$

A restrição 13 garante que o número de viagens que **levam milho e chegam a Moon** conseguem transportar as **30000** toneladas que devem ser importadas.

c14: $T_{\text{tripType},1} * \text{trips}_{\text{tripType},1} \leq \text{vessel1} * 345 * 24$, para todo o tripType entre 1 e 12

Esta restrição pode ser traduzida nesta:

c14: $- 8280 \text{ vessel1} + 400 \text{ trips}_{1,1} + 453.3333333333334 \text{ trips}_{2,1} + 456.6666666666666 \text{ trips}_{3,1} + 456.6666666666666 \text{ trips}_{4,1} + 453.3333333333334 \text{ trips}_{5,1} + 440 \text{ trips}_{6,1} + 526.6666666666667 \text{ trips}_{7,1} + 526.6666666666667 \text{ trips}_{8,1} + 480 \text{ trips}_{9,1} + 384 \text{ trips}_{10,1} + 498.6666666666667 \text{ trips}_{11,1} + 498.6666666666667 \text{ trips}_{12,1} \leq 0$

c15: $T_{\text{tripType},2} * \text{trips}_{\text{tripType},2} \leq \text{vessel2} * 345 * 24$, para todo o tripType entre 6 e 12

Esta restrição pode ser traduzida nesta:

c15: $- 8280 \text{ vessel2} + 550 \text{ trips}_{6,2} + 658.3333333333333 \text{ trips}_{7,2} + 658.3333333333333 \text{ trips}_{8,2} + 600 \text{ trips}_{9,2} + 480 \text{ trips}_{10,2} + 623.3333333333333 \text{ trips}_{11,2} + 623.3333333333333 \text{ trips}_{12,2} \leq 0$

Na restrição 14 afirmamos que o **tempo total das viagens feitas por navios do tipo 1 é inferior ou igual ao número de horas que o navio pode operar por ano multiplicado pelo número de navios necessários do tipo 1**. A restrição 15 é equivalente, mas para os navios do **tipo 2**. Ambas as restrições não estão exatamente corretas matematicamente. Por exemplo, imaginemos o caso em que o tempo operacional do navio é de 30 dias e tem-se 3 vias com a duração de 20 dias. Esta restrição permitiria-nos obter uma solução em que 2 navios iriam fazer as 3 viagens. No entanto, na verdade seriam precisos 3 navios, que usariam apenas 20 dos 30 dias que poderiam estar operacionais. Apesar de não ser completamente precisa matematicamente, num ponto de vista de gestão a restrição faz sentido, e permite-nos reduzir o tempo computacional para chegar a solução.

c16: $d\text{Loaded}_1 = 10000 \text{ trips}_{1,1} + 10500 \text{ trips}_{2,1} + 11000 \text{ trips}_{3,1} + 22000 \text{ trips}_{4,1} + 10500 \text{ trips}_{5,1} + 11000 \text{ trips}_{6,1} + 11500 \text{ trips}_{7,1} + 11500 \text{ trips}_{8,1} + 12000 \text{ trips}_{9,1} + 9600 \text{ trips}_{10,1} + 10800 \text{ trips}_{11,1} + 10800 \text{ trips}_{12,1}$

c17: $d\text{Loaded}_2 = 11000 \text{ trips}_{6,2} + 11500 \text{ trips}_{7,2} + 11500 \text{ trips}_{8,2} + 12000 \text{ trips}_{9,2} + 9600 \text{ trips}_{10,2} + 10800 \text{ trips}_{11,2} + 10800 \text{ trips}_{12,2}$

As restrições 16 e 17 garantem que as variáveis $dLoaded_1$ e $dLoaded_2$ equivalem à **distância percorrida por todos os navios em todas as viagens enquanto estão carregados, para todos os navios tipo 1 e 2 usados**, respectivamente.

c18: $dEmpty_1 = 1000 \text{ trips}_{2,1} + 500 \text{ trips}_{3,1} + 500 \text{ trips}_{4,1} + 1000 \text{ trips}_{5,1} + 2000 \text{ trips}_{7,1} + 2000 \text{ trips}_{8,1} + 2000 \text{ trips}_{11,1} + 2000 \text{ trips}_{12,1} = 0$

c19: $dEmpty_2 = 2000 \text{ trips}_{7,2} + 2000 \text{ trips}_{8,2} + 2000 \text{ trips}_{11,2} + 2000 \text{ trips}_{12,2}$

As restrições 18 e 19 garantem que as variáveis $dEmpty_1$ e $dEmpty_2$ equivalem à **distância percorrida por todos os navios enquanto vazios para todos os navios 1 e 2 usados**, respectivamente.

Em suma, as restrições 1 a 13 garantem que o número de viagens é o correto dado aos valores de importação e exportação fornecidos. Destas restrições, 3 delas são redundantes. As restrições 14 e 15 garantem que o tempo operacional dos navios é de 345 dias. As restrições 16 a 19 garantem a correção do valor das variáveis auxiliares.

Função Objetivo:

O custo da **compra dos navios tipo 1** é de $1000 * 10^3$, enquanto o custo da **compra dos navios tipo 2** é de $1500 * 10^3$. O custo da tripulação (**labor cost**) por ano para os navios **tipo 1** é de $70 * 10^3$ e do navio **tipo 2** é de $75 * 10^3$. O **combustível gasto por um navio tipo 1** se estiver **carregado** é de 50 litros/ 1000 km, e de 42 litros/ 1000km se estiver **vazio**. O **combustível gasto por um navio tipo 2** se estiver **carregado** é de 40 litros/ 1000km, se estiver **vazio** reduz para 30. Finalmente, a **compra das unidades é parcelada em prestações fixas sem juros ao longo de 25 anos** e o **custo anual da manutenção é de 10%** do custo inicial de cada navio. Quando definimos que o objetivo é **minimizar o custo no ano inicial**, a função objetivo é a seguinte:

$$\text{Min } 0.1 * (\text{vessel1} * 1000000 + \text{vessel2} * 1500000) + (\text{vessel1} * 1000000 + \text{vessel2} * 1500000) / 25 + \text{vessel1} * 70000 + \text{vessel2} * 75000 + ((dLoaded1/1000) * 50 + (dEmpty1/1000) * 42 + (dLoaded2/1000) * 40 + (dEmpty2/1000) * 30) * 0.8$$

Se quisermos definir que o objetivo é minimizar os custos ao longo de 25 anos, apenas temos de multiplicar a função objetivo por 25.

3. Solução ótima

Com o modelo definido anteriormente, o otimizador do Gurobi encontrou 1 solução, a qual se encontra “**Solution-P2.sol**”.

O número de navios **tipo 1** que são precisos comprar são **46** (45.3), e o número de navios **tipo 2** são **57**.

Os navios **tipo 1** farão **286 viagens** do **itinerário 1** (Doce - Moon - Doce), **286 viagens** do **itinerário 3** (Doce - Moon - Sky - Doce) e **286 viagens** do **itinerário 4** (Doce - Moon - Sky - Doce). Os navios **tipo 2** farão **143 viagens** do **itinerário 6** (Doce - Mars - Doce), **429 viagens** do **itinerário 9** (Bom - Sky - Bom) e **286 viagens** do **itinerário 10** (Doce - Moon - Sky - Doce). Na tabela 10, nos anexos, pode observar-se a diferença de itinerários e nº de viagens entre esta solução e uma solução do mesmo modelo usando variáveis inteiras, em vez de contínuas. A **distância** percorrida por navios **tipo 1 carregados** será **12285714.3m** e por **tipo 2** será **9457142.8m**. A distância percorrida por navios **tipo 1 vazios** será **285714.3m** e por navios **tipo 2** é **0m**.

O custo anual com esta solução é de **26596445.27€**.

Nas tabelas seguintes observam-se as quantidades de exportação e importação dos produtos, em toneladas, e os **fluxos de exportação de milho de Doce e de trigo de Bom**, respectivamente.

	Export		Import	
	Wheat	Corn	Copper	Iron
Bom	50000	-	-	50000
Doce	-	40000	20000	20000

Tabela 2: Quantidades de exportação e importação de Sweetland, em toneladas.

	Export		Import	
	Copper	Iron	Wheat	Milho
Mars	-	30000	20000	10000
Sky	10000	40000	30000	-
Moon	10000	-	-	30000

Tabela 3: Quantidades de exportação e importação de Sealand e Fatland, em toneladas.

ID Itinerário	Itinerário	Navio	Espaço (Toneladas)	Destino
1	Doce - Moon - Doce	1	10 010	Moon
3	Doce - Moon - Sky - Doce	1	10 010	Moon
4	Doce - Moon - Sky - Doce	1	10 010	Moon
6	Doce - Mars - Doce	2	10 010	Mars

Tabela 4: Fluxos de exportação de milho de Doce.

ID Itinerário	Itinerário	Navio	Espaço (Toneladas)	Destino
9	Bom - Sky - Bom	2	30 030	Sky
10	Bom - Mars - Bom	2	20 020	Mars

Tabela 5: Fluxos de exportação de trigo de Bom.

Foi implementado adicionalmente um modelo que restringe o tempo operacional exatamente e utiliza variáveis inteiras. Esse modelo está em “**P2-Exact.py**” e em “P2-Exact.lp” a função objetivo e restrições aplicadas a esse modelo, visivelmente mais simples. O número

de navios obtidos foi o mesmo, no entanto as viagens feitas não foram por cada navio. A solução obtida foi próxima, mas o tempo computacional foi muito superior. Portanto, a solução apresentada na pergunta 2 é, portanto, uma boa solução. As viagens feitas acabariam por provocar um custo superior em relação ao obtido com o modelo da pergunta 2, e o tempo necessário para cumprir a restrição temporal exatamente poderia não compensar logisticamente.

4. Análise de sensibilidade - *Labor cost range*

O relatório de sensibilidade permite analisar os limites de variação dos vários parâmetros do modelo que permitem manter a solução ótima encontrada, bem como os efeitos provocados na solução pela alteração dos valores desses parâmetros.

Nas figuras seguintes encontra-se o relatório de sensibilidade completo do Modelo definido anteriormente. A geração do relatório encontra-se implementada no ficheiro **“Sensitivity-Reports/Sensitivity-Model2.py”**. O coeficiente de cada variável é obtido através do atributo *Obj*, o *allowable decrease* através do atributo *SAObjLow* e o *allowable increase* através do atributo *SAObjUp*.

```
--- SENSITIVITY REPORT ---
```

Valor da Função Objetivo = 26596445.27260179

Variables						
Name	Final Value	Reduced cost	Objective Coefficient	Allowable Decrease	Allowable Increase	
vessel1	45.318610536001835	0.0	210000.0	204510.98823529435	1613315.929411767	
vessel2	57.10835058661145	0.0	285000.0	75779.741538461 290742.3507692305		
dLoaded(1)	12285714.285714287	0.0	0.04	0.036869524959742495	0.15901663516068074	
dLoaded(2)	9457142.857142856	0.0	0.032	-0.18608949911009495	0.18226280193236016	
dEmpty(1)	285714.28571428574	0.0	0.0336	-0.04153140096618008	19.24162801932367	
dEmpty(2)	0.0	0.0	0.024	-1.1274012077294668	0.06156570048309004	
trips(9,1)	0.0	2135.826086956524	0.0	-2135.826086956524	inf	
trips(10,1)	0.0	1708.6608695652176	0.0	-1708.6608695652176	inf	
trips(11,1)	0.0	4524.888405797102	0.0	-4524.888405797102	inf	
trips(12,1)	0.0	2835.6410628019357	0.0	-2835.6410628019357	inf	
trips(9,2)	428.57142857142856	0.0	0.0	-414.3700483091803	4271.652173913048	
trips(10,2)	285.7142857142857	0.0	0.0	-16828.93913043478	414.3700483091803	
trips(11,2)	0.0	4605.604830917868	0.0	-4605.604830917868	inf	
trips(12,2)	0.0	1227.1101449275352	0.0	-1227.1101449275352	inf	
trips(1,1)	285.7142857142857	0.0	0.0	-9604.014009661836	37.56570048309005	
trips(2,1)	0.0	1368.6913043478285	0.0	-1368.6913043478285	inf	
trips(3,1)	285.7142857142857	0.0	0.0	-1493.9980676328482	439.9999999999982	
trips(4,1)	285.7142857142857	0.0	0.0	-37.56570048309005	1368.6913043478285	
trips(5,1)	0.0	2347.1705314009682	0.0	-2347.1705314009682	inf	
trips(6,1)	0.0	1957.840579710146	0.0	-1957.840579710146	inf	
trips(7,1)	0.0	2786.675845410632	0.0	-2786.675845410632	inf	
trips(8,1)	0.0	2346.675845410634	0.0	-2346.675845410634	inf	
trips(6,2)	142.85714285714286	0.0	0.0	-75.1314009661801	2737.382608695657	
trips(7,2)	0.0	879.9999999999964	0.0	-879.9999999999964	inf	
trips(8,2)	0.0	0.0	0.0	-2737.382608695657	75.1314009661801	

Figura 1: Relatório de sensibilidade das variáveis de decisão do Modelo definido no ficheiro **“Modelos/P2.py”**.

Constraints						
Name	Shadow Price	Slack	RHS	RHS Up	RHS Low	
c1	240.4134161490683		0.0	50000.0	inf	50000.0
c2	274.40040027605244		0.0	40000.0	50000.0	40000.0
c3	0.0	-0.0	50000.0	50000.0	-inf	
c4	0.0	-0.0	20000.0	20000.0	-inf	
c5	1.073305728088287		0.0	20000.0	20000.0	20000.0
c6	0.0	-0.0	30000.0	30000.0	-inf	
c7	0.0	-0.0	20000.0	20000.0	-inf	
c8	0.0	-0.0	10000.0	10000.0	-inf	
c9	42.68565907522424		0.0	10000.0	10000.0	-0.0
c10	54.183781918564485		0.0	40000.0	40000.0	40000.0
c11	5.919572118702575		0.0	30000.0	30000.0	20000.0
c12	0.0	-0.0	10000.0	10000.0	-inf	
c13	26.88324361628713		0.0	30000.0	30000.0	20000.0
c14	-25.36231884057971		0.0	0.0	375238.0952380952	-inf
c15	-34.42028985507246		0.0	0.0	472857.14285714284	-inf
c16	0.04	0.0	0.0	inf	-12285714.285714287	
c17	0.032	0.0	0.0	inf	-9457142.857142856	
c18	0.0336	0.0	0.0	inf	-285714.28571428574	
c19	0.024	0.0	0.0	inf	0.0	

Figura 2: Relatório de sensibilidade das restrições do Modelo definido no ficheiro “Modelos/P2.py”.

Através da Figura 1, é possível observar para cada variável de decisão do modelo o *allowable decrease* e *allowable increase* associado ao seu coeficiente. Estes valores representam o intervalo em que o coeficiente da dada variável de decisão na função objectiva pode ser diminuído/aumentado, respetivamente, sem alterar a solução óptima, onde todos os outros dados são fixos.

Por exemplo, o coeficiente da variável **vessel1**, que representa o nº de navios do tipo 1, é de 210000, que equivale a:

$$0.1 * 1000000 + 1000000/25 + 70000,$$

onde 70000 representa o custo da tripulação (**labor cost**). O coeficiente, segundo o relatório de sensibilidade, pode variar entre 204510.988 e 1613315.929, sem que a solução óptima seja alterada. Assim, sendo que o *labor cost* faz parte do coeficiente, para se obter o allowable range desse custo, subtrai-se ou soma-se ao custo total da tripulação (de todos os navios) o allowable decrease ou increase, respectivamente e divide-se o resultado pelo número de navios, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Range Labor cost inferior} &= (\text{labor cost}(\text{total}) - \text{allowable decrease}) / \text{vessel1} \\ &= (70\,000 * 46 - 204510.98823529435) / 46 = 65\,554,109 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Range Labor cost superior} &= (\text{labor cost}(\text{total}) + \text{allowable increase}) / \text{vessel1} \\ &= (70\,000 * 46 + 1613315.929411767) / 46 = 105\,072,085 \end{aligned}$$

Já para a variável que representa o nº de navios tipo 2, **vessel2**, o seu coeficiente é de 285000.0, que equivale a:

$$0.1 * 1500000 + 1500000/25 + 75000,$$

onde 75000 representa o custo da tripulação (**labor cost**). O coeficiente, segundo o relatório de sensibilidade, pode variar entre 204510.988 e 1613315.929, sem que a solução ótima seja alterada. O cálculo do *range* do *labor cost* para este tipo de navio é equivalente ao cálculo para o navio tipo 1, mas com os novos valores:

$$\begin{aligned} \text{Range Labor cost inferior} &= (\text{labor cost (total)} - \text{allowable decrease}) / \text{vessel2} \\ &= (75\,000 * 57 - 75779.741538461) / 57 = 73\,670,531 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Range Labor cost superior} &= (\text{labor cost (total)} + \text{allowable increase}) / \text{vessel2} \\ &= (75\,000 * 57 + 290742.3507692305) / 57 = 80\,100,743 \end{aligned}$$

Conclui-se então que **o custo da tripulação do navio tipo 1 pode variar entre 65554.109 e 105072.085**, sem que o nº ótimo de navios do tipo 1 necessários se altere, e **o custo da tripulação do navio tipo 2 pode variar entre 73670.531 e 80100.743**, sem que o nº ótimo de navios do tipo 2 necessários se altere.

5. Análise de sensibilidade - 15 dias de manutenção por ano

O impacto da diminuição da duração de manutenção de navios do tipo 1 no valor total da frota pode ser avaliado através do **shadow price** da restrição associada ao tempo total de viagem disponível durante um ano para navios do tipo um (restrição c14), visível na figura 2. O valor do *shadow price* é obtido através do atributo *Pi* do objeto que representa a restrição e neste caso corresponde à mudança no custo total da frota por cada hora que varia no tempo total disponível para viagem. O valor do impacto é calculado pela expressão:

$$\text{shadowPrice} * \text{nDias} * 24\text{h} * \text{nNavios}$$

Neste caso queremos avaliar o impacto quando o número de dias de manutenção de navios do tipo 1 é reduzido de 20 para 15 dias, ou seja, quando há 5 dias adicionais para viagens. O número de navios do tipo 1 é 46, conforme a solução obtida no primeiro modelo. Substituindo os valores na expressão temos:

$$-25.36231884057971 * 5 * 24 * 46 = - 140\ 000.00\text{€}$$

Logo, reduzir o tempo de manutenção de navios do tipo 1 em 5 dias resultará na diminuição do custo total da frota em 140 000.00€, que daria 26 456 445.27€.

6. Formulação modelo - Procura de milho e trigo de Fatland e Sealand duplicam

Se as exportações totais de Sweetland permanecem inalteradas, mas a procura de milho e trigo de Fatland e Sealand duplicam, de modo a que parte da procura de cereais desses países não pode ser satisfeita por Sweetland, deixamos de ter um problema equilibrado.

Todas as variáveis declaradas na pergunta 2 continuam a existir. Adicionam-se apenas quatro variáveis às existentes, a carga de trigo e milho que chega a Mars, a carga de trigo que chega efetivamente a Sky e a carga de milho que chega a Moon. As restrições de 1 a 6, 9, 10, 12 e de 14 a 19 mantêm-se. Para além dessas, alteram-se as 4 restrições não mantidas (7, 8, 11 e 13) e adicionam-se outras 4. Poderiam acrescentar-se 2 condições não necessárias, que o trigo que chega a Sky é menor que 60000 (que sempre será porque de Bom só chegam 60000 toneladas de trigo) e que o milho que chega a Moon é menor que 60000 (que sempre será porque de Doce só chegam 40000 toneladas de milho).

O novo modelo encontra-se implementado no ficheiro **“Modelos/P6.py”**. Para este modelo usamos variáveis contínuas.

No ficheiro “Modelos/P6.lp” apresenta-se a função objetivo e restrições de uma forma visivelmente mais simples.

Variáveis de decisão:

As variáveis $vessel1$, $vessel2$, $trips_{tripType,1}$, $trips_{tripType,2}$ descritas anteriormente e as variáveis auxiliares $dLoaded_{type}$, $dEmpty_{type}$ são mantidas. São adicionadas estas 4 novas variáveis:

load_{Mars, Trigo}: quantidade de trigo que chega a Mars, i.e., é importada por Mars

load_{Mars, Milho}: quantidade de milho que chega a Mars

load_{Sky, Trigo}: quantidade de trigo que chega a Sky

load_{Moon, Milho}: quantidade de milho que chega a Moon

Restrições:

$$c7: 35 (\text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 (\text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq \text{load}_{\text{Mars},\text{Trigo}}$$

A restrição 7 garante que os navios que fazem as viagens para Mars com Trigo têm espaço para a carga atribuída a Mars, ou seja, a carga que efetivamente chega a Mars.

$$c8: \text{load}_{\text{Mars},\text{Trigo}} \leq 40000$$

Dado que a procura de Mars por trigo é de 40000 toneladas. A restrição 8 garante que o Trigo que chega a Mars é igual ou inferior a essa quantidade.

$$c9: 35 (\text{trips}_{5,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{7,1} + \text{trips}_{8,1}) + 70 (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{7,2} + \text{trips}_{8,2}) \geq \text{load}_{\text{Mars},\text{Milho}}$$

A restrição 9 garante que os navios que fazem as viagens para Mars com Milho tenham espaço para a carga atribuída a Mars, ou seja, a carga que efetivamente chega a Mars.

$$c10: \text{load}_{\text{Mars},\text{Milho}} \leq 20000$$

Dado que a procura de Mars por milho duplicou, é agora de 20000 toneladas. A restrição 10 garante que o milho que chega a Mars é igual ou inferior a essa quantidade.

$$c13: 35 (\text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{11,1}) + 70 (\text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{11,2}) \geq \text{load}_{\text{Sky},\text{Trigo}}$$

$$c15: 35 (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{3,1} + \text{trips}_{4,1}) \geq \text{load}_{\text{Moon},\text{Milho}}$$

Dado que a procura de Sky por Trigo e a procura de Moon por milho é superior à oferta, as restrições 13 e 15 são suficientes, garantindo que os navios que fazem as viagens têm espaço para a carga que lhes é atribuída.

$$c16: \text{load}_{\text{Mars},\text{Trigo}} + \text{load}_{\text{Sky},\text{Trigo}} = 50000$$

$$c17: \text{load}_{\text{Mars},\text{Milho}} + \text{load}_{\text{Moon},\text{Milho}} = 40000$$

Dado que não nos é dito que, se monetariamente compensar, podemos não exportar carga, a carga exportada tem que ser exatamente a carga que pode ser exportada, as 50000 toneladas de Trigo e as 40000 toneladas de milho.

Restrições descritas anteriormente:

$$c1: 35 * (\text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{11,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 * (\text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{11,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq 50000$$

$$\mathbf{c2:} \ 35 * (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{3,1} + \text{trips}_{4,1} + \text{trips}_{5,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{7,1} + \text{trips}_{8,1}) + 70 * (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{7,2} + \text{trips}_{8,2}) \geq 40000$$

$$\mathbf{c3:} \ 30 * (\text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{11,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 * (\text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{11,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq 50000$$

$$\mathbf{c4:} \ 35 * (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{3,1} + 35 \text{ trips}_{5,1} + 35 \text{ trips}_{7,1}) + 70 \text{ trips}_{7,2} \geq 20000$$

$$\mathbf{c5:} \ 35 * (\text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{4,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{8,1}) + 70 (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{8,2}) \geq 20000$$

$$\mathbf{c6:} \ 35 * (\text{trips}_{2,1} + \text{trips}_{6,1} + \text{trips}_{10,1} + \text{trips}_{11,1}) + 70 * (\text{trips}_{6,2} + \text{trips}_{10,2} + \text{trips}_{11,2}) \geq 30000$$

$$\mathbf{c11:} \ 35 * (\text{trips}_{3,1} + \text{trips}_{7,1}) + 70 * \text{trips}_{7,2} \geq 10000$$

$$\mathbf{c12:} \ 35 * (\text{trips}_{4,1} + \text{trips}_{8,1} + \text{trips}_{9,1} + \text{trips}_{12,1}) + 70 * (\text{trips}_{8,2} + \text{trips}_{9,2} + \text{trips}_{12,2}) \geq 40000$$

$$\mathbf{c14:} \ 35 * (\text{trips}_{1,1} + \text{trips}_{5,1}) \geq 10000$$

$$\mathbf{c18:} \ T_{\text{tripType},1} * \text{trips}_{\text{tripType},1} \leq \text{vessel1} * 345 * 24, \text{ para todo o tripType entre 1 e 12}$$

$$\mathbf{c19:} \ T_{\text{tripType},2} * \text{trips}_{\text{tripType},2} \leq \text{vessel2} * 345 * 24, \text{ para todo o tripType entre 6 e 12}$$

$$\mathbf{c20:} \ d\text{Loaded}_1 = 10000 \text{ trips}_{1,1} + 10500 \text{ trips}_{2,1} + 11000 \text{ trips}_{3,1} + 22000 \text{ trips}_{4,1} + 10500 \text{ trips}_{5,1} + 11000 \text{ trips}_{6,1} + 11500 \text{ trips}_{7,1} + 11500 \text{ trips}_{8,1} + 12000 \text{ trips}_{9,1} + 9600 \text{ trips}_{10,1} + 10800 \text{ trips}_{11,1} + 10800 \text{ trips}_{12,1}$$

$$\mathbf{c21:} \ d\text{Loaded}_2 = 11000 \text{ trips}_{6,2} + 11500 \text{ trips}_{7,2} + 11500 \text{ trips}_{8,2} + 12000 \text{ trips}_{9,2} + 9600 \text{ trips}_{10,2} + 10800 \text{ trips}_{11,2} + 10800 \text{ trips}_{12,2}$$

$$\mathbf{c22:} \ d\text{Empty}_1 = 1000 \text{ trips}_{2,1} + 500 \text{ trips}_{3,1} + 500 \text{ trips}_{4,1} + 1000 \text{ trips}_{5,1} + 2000 \text{ trips}_{7,1} + 2000 \text{ trips}_{8,1} + 2000 \text{ trips}_{11,1} + 2000 \text{ trips}_{12,1} = 0$$

$$\mathbf{c23:} \ d\text{Empty}_2 = 2000 \text{ trips}_{7,2} + 2000 \text{ trips}_{8,2} + 2000 \text{ trips}_{11,2} + 2000 \text{ trips}_{12,2}$$

Função Objetivo:

$$\text{Min } 0.1 * (\text{vessel1} * 1000000 + \text{vessel2} * 1500000) + (\text{vessel1} * 1000000 + \text{vessel2} * 1500000) / 25 + \text{vessel1} * 70000 + \text{vessel2} * 75000 + ((d\text{Loaded}_1/1000) * 50 + (d\text{Empty}_1/1000) * 42 + (d\text{Loaded}_2/1000) * 40 + (d\text{Empty}_2/1000) * 30) * 0.8$$

7. Solução ótima

Com o modelo definido anteriormente, o otimizador do Gurobi encontrou 1 solução, a qual se encontra “**Solution-P6.sol**”.

O número de navios do **tipo 1** necessários são **30** (29.6) e do **tipo 2** são **69** (68.3). Apesar da frota ser tão diferente, o valor da função objectivo é relativamente próximo. Em vez dos 26375686.4€ obtidos na pergunta 3, teremos **26268417.115€** de gastos. A redução do valor é facilmente explicável, podendo escolher (dentro da procura necessária) que local vamos entregar, iremos realizar as viagens que tiverem menores custos. A carga que chega demonstra esta teoria, pois **a quantidade de trigo que chega a Mars é 30000 toneladas** (em vez de 20000) e **a quantidade de milho que chega a Mars é 20000 toneladas** (em vez de 10000). Portanto, viajar para Mars é mais barato do que viajar para Sky e Moon. Dado que a oferta não mudou, inevitavelmente a oferta que chega a Sky e Moon é menor, sendo que a Sky chegam 20000 toneladas de trigo e a Moon chegam 20000 toneladas de milho. Pode-se confirmar que somando 30000 com 20000 toneladas equivale às 50000 toneladas de trigo que partem de Bom e que somando 20000 com 20000 toneladas equivale às 40000 toneladas de milho que partem de Doce.

Neste cenário, os **navios tipo 1** fazem **286** (285,7) **viagens** do **itinerário 1** e **286** (285,7) do **itinerário 3**. Os navios **tipo 2** fazem agora **286 viagens** do **itinerário 8**, **286 viagens** do **itinerário 9** e **429 viagens** do **itinerário 10**.

Nas tabelas seguintes observam-se as diferenças entre as quantidades de exportação e importação dos produtos, em toneladas, e as diferenças entre os **fluxos de exportação de milho de Doce** e **de trigo de Bom** dos modelos 1 e 2, respectivamente.

	Modelo 1				Modelo 2			
	Export		Import		Export		Import	
	Wheat	Corn	Copper	Iron	Wheat	Corn	Copper	Iron
Bom	50000	-	-	50000	50000	-	-	50000
Doce	-	40000	20000	20000	-	40000	20000	20000

Tabela 6: Diferenças entre as quantidades de exportação e importação de Sweetland, em toneladas.

	Modelo 1				Modelo 2			
	Export		Import		Export		Import	
	Copper	Iron	Wheat	Milho	Copper	Iron	Wheat	Milho
Mars	-	30000	20000	10000	-	30000	30000	20000
Sky	10000	40000	30000	-	10000	40000	20000	-
Moon	10000	-	-	30000	10000	-	-	20000

Tabela 7: Diferenças entre as quantidades de exportação e importação de Sealand e Fatland, em toneladas.

Modelo 1					Modelo 2				
ID Itinerário	Tipo de navio	Espaço (Tons)	Carga (Tons)	Destino	ID Itinerário	Tipo de navio	Espaço (Tons)	Carga (Tons)	Destino
1	1	10 010	10 000	Moon	1	1	10 010	10 000	Moon
3	1	10 010	10 000	Moon	3	1	10 010	10 000	Moon
4	1	10 010	10 000	Moon	-	-	-	-	-
6	2	10 010	10 000	Mars	-	-	-	-	-
-	-	-		-	8	2	20 020	20 000	Mars

Tabela 8: Diferenças entre os fluxos de exportação de milho de Doce dos modelos 1 e 2, em termos de viagens.

Modelo 1					Modelo 2				
ID Itinerário	Navio	Espaço (Tons)	Carga (Tons)	Destino	ID Itinerário	Navio	Espaço (Tons)	Carga (Tons)	Destino
9	2	30 030	30 000	Sky	9	2	20 020	20 000	Sky
10	2	20 020	20 000	Mars	10	2	30 030	30 000	Mars

Tabela 9: Diferenças entre os fluxos de exportação de trigo de Bom dos modelos 1 e 2.

Nos anexos, na tabela 11, apresenta-se ainda a diferença entre o nº de viagens feitas em cada modelo para cada itinerário.

8. Relatório de sensibilidade

No ficheiro “**Sensitivity-Reports\Sensitivity-Model7.py**” está implementada a geração do relatório de sensibilidade do Modelo definido no capítulo anterior. Nas figuras seguintes pode observar-se o resultado.

```
--- SENSITIVITY REPORT ---
```

Valor da Função Objetivo = 26268417.1152519

Variables						
Name	Final Value	Reduced cost	Objective Coefficient	Allowable Decrease	Allowable Increase	
vessel1	29.560616517138254	0.0	210000.0	192939.93284671532	234784.3764705885	
vessel2	68.26547043938348	0.0	285000.0	261592.53333333312	308668.14379746834	
dLoaded(1)	6000000.0	0.0	0.04	1.6653345369377348e-16	0.0541349436392916	
dLoaded(2)	10828571.428571427	0.0	0.032	-0.10934943639291597	0.19563713505566055	
dEmpty(1)	142857.14285714287	0.0	0.0336	-1.1397379227053168	0.37283864734299826	
dEmpty(2)	571428.5714285715	0.0	0.024	-0.38237004830917865	0.23118502415458897	
trips(9,1)	0.0	2135.8260869565256	0.0	-2135.8260869565256	inf	
trips(10,1)	0.0	1708.6608695652176	0.0	-1708.6608695652176	inf	
trips(11,1)	0.0	4732.073429951693	0.0	-4732.073429951693	inf	
trips(12,1)	0.0	2628.4560386473468	0.0	-2628.4560386473468	inf	
trips(9,2)	285.7142857142857	0.0	0.0	-339.23864734299826	812.7400966183574	
trips(10,2)	428.57142857142856	0.0	0.0	-16828.93913043478	339.23864734299826	
trips(11,2)	0.0	5019.974879227049	0.0	-5019.974879227049	inf	
trips(12,2)	0.0	812.7400966183574	0.0	-812.7400966183574	inf	
trips(1,1)	285.7142857142857	0.0	0.0	-169.61932367149913	1493.998067632849	
trips(2,1)	0.0	1575.8763285024193	0.0	-1575.8763285024193	inf	
trips(3,1)	285.7142857142857	0.0	0.0	-1493.998067632849	439.9999999999982	
trips(4,1)	0.0	0.0	-439.9999999999982	169.61932367149913		
trips(5,1)	0.0	2347.1705314009682	0.0	-2347.1705314009682	inf	
trips(6,1)	0.0	2165.025603864735	0.0	-2165.025603864735	inf	
trips(7,1)	0.0	2786.675845410632	0.0	-2786.675845410632	inf	
trips(8,1)	0.0	2346.675845410634	0.0	-2346.675845410634	inf	
trips(6,2)	0.0	414.37004830917795	0.0	-414.37004830917795	inf	
trips(7,2)	0.0	879.9999999999964	0.0	-879.9999999999964	inf	
trips(8,2)	285.7142857142857	0.0	0.0	-18868.789371980674	414.37004830917795	
load(Mars,Wheat)	30000.0	0.0	0.0	-11.610572808833677	4.846266390614261	
load(Mars,Corn)	20000.0	0.0	-inf	26.88324361628709		
load(Sky,Wheat)	20000.0	0.0	-4.846266390614261	11.610572808833677		
load(Moon,Corn)	20000.0	0.0	-26.88324361628709	inf		

Figura 3: Relatório de sensibilidade das variáveis do Modelo definido no ficheiro “**Modelos/P6.py**”.

Constraints						
Name	Shadow	Price	Slack	RHS	RHS Up	RHS Low
c1	0.0	-0.0	50000.0	50000.0	-inf	
c2	269.5541338854382			0.0	40000.0	50000.0 40000.0
c3	0.0	-0.0	50000.0	50000.0	-inf	
c4	4.846266390614261			0.0	20000.0	20000.0 20000.0
c5	0.0	-0.0	20000.0	20000.0	-inf	
c6	0.0	-0.0	30000.0	30000.0	-inf	
c7	240.4134161490683			0.0	0.0	inf -0.0
c8	0.0	10000.0	40000.0	inf	30000.0	
c9	0.0	-0.0	0.0	0.0	-inf	
c10	-26.88324361628709			0.0	20000.0	20000.0 0.0
c11	42.68565907522425			0.0	10000.0	10000.0 -0.0
c12	60.10335403726705			0.0	40000.0	40000.0 30000.0
c13	240.4134161490683			0.0	0.0	10000.0 -0.0
c14	0.0	-0.0	10000.0	10000.0	-inf	
c15	26.88324361628709			0.0	0.0	0.0 -0.0
c16	240.4134161490683			0.0	50000.0	60000.0 50000.0
c17	26.88324361628709			0.0	40000.0	40000.0 40000.0
c18	-25.36231884057971			0.0	0.0	244761.90476190473 -inf
c19	-34.42028985507246			0.0	0.0	565238.0952380953 -inf
c20	0.04	0.0	0.0	inf	-6000000.0	
c21	0.032	0.0	0.0	inf	-10828571.428571427	
c22	0.0336	0.0	0.0	inf	-142857.14285714287	
c23	0.024	0.0	0.0	inf	-571428.5714285715	

Figura 4: Relatório de sensibilidade das restrições do Modelo definido no ficheiro “Modelos/P6.py”.

Da pergunta 6 sabemos que a quantidade de milho que chega a Mars são as 20000 toneladas desejadas. No contexto do modelo proposto na Pergunta 6, o efeito provocado no custo total da frota pelo aumento da quantidade de milho importado por Mars pode ser avaliado pelo *shadow price* da restrição associada a esta quantidade (c10). Neste caso queremos avaliar o impacto quando o valor de milho importado por Mars passa de 20000 para 25000 toneladas, isto é, quando a procura aumenta em 5000 toneladas. Tal consegue-se através da expressão:

$$\text{shadowPrice} * 5000$$

Substituindo o valor do *shadow price* tem-se:

$$-26.883243616287093 * 5000 = -134416.2181\text{€}$$

Logo, se a quantidade de milho importado por Mars passar para 25000 o custo total da frota diminui em 134416.2181€, resultando em 26134000.8969€.

Conclusões

Neste trabalho tivemos a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos nas aulas de investigação operacional, contribuindo assim para aprofundar e consolidar melhor os

conhecimentos obtidos com a disciplina. O trabalho correu como esperado e os resultados obtidos foram os desejados.

Anexos

	Primeiro modelo			
	Variáveis contínuas		Variáveis inteiras	
ID Itinerários	navios tipo 1 (46)	navios tipo 2 (57)	navios tipo 1 (46)	navios tipo 2 (57)
1	286	na	286	na
2	0	na	37	na
3	286	na	286	na
4	286	na	249	na
5	0	na	0	na
6	0	143	10	120
7	0	0	0	0
8	0	0	0	18
9	0	429	2	428
10	0	286	0	286
11 e 12	0	0	0	0

Tabela 10: Diferença de itinerários feitos e nº de viagens de cada itinerário entre as soluções do primeiro modelo usando variáveis contínuas ou inteiras

	Primeiro modelo		Segundo modelo	
ID Itinerários	navios tipo 1 (46)	navios tipo 2 (57)	navios tipo 1 (33)	navios tipo 2 (66)
1	286	na	286	na
2	0	na	0	na
3	286	na	286	na
4	286	na	0	na
5	0	na	0	na
6	0	143	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	286
9	0	429	0	286
10	0	286	0	429
11 e 12	0	0	0	0

Tabela 11: Diferença de itinerários feitos e nº de viagens de cada itinerário entre as soluções do primeiro e segundo modelo