Problem

$$x^y \quad ? \quad y^x$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& x, y > 0 \\
& x^y \quad \square \quad y^x && |\text{ln ist stetig und str. mono. st.} \\
\Leftrightarrow\ & \ln(x^y) \quad \square \quad \ln(y^x) && |\text{ln-Gesetze} \\
\Leftrightarrow\ & y\ln(x) \quad \square \quad x\ln(y) && | : x, : y, x, y > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\ln(x)}{x} \quad \square \quad \frac{\ln(y)}{y}
\end{aligned}$$

Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{\ln(z)}{z}$

Bestimme Maximum:

$$f'(z) = z^{-1} \cdot z^{-1} - \ln(z) \cdot z^{-2} = \frac{1 - \ln(z)}{z^2}$$

1. not. Bed.:

$$\begin{aligned}
f'(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(z) &= 0 \\
\ln(z) &= 1 \\
z &= e
\end{aligned}$$

2. hinr. Bed.: VZW

$$\text{Für } z \in (0; e) \text{ gilt } ln(z) < 0$$

$$\text{und damit}$$

$$\frac{1 - \ln(z)}{z^2} > 0$$

Damit ist f auf $I_1 = (0; e)$ streng mono steigend.

$$\text{Für } z \in (e; \infty) \text{ gilt } ln(z) > 0$$

$$\text{und damit}$$

$$\frac{1-\ln(z)}{z^2} < 0$$

Damit ist f auf $I_2 = (e;\infty)$ streng mono fallend.

Conclusio:

Wenn $y < x < e$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(y)}{y} < \frac{\ln(x)}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot \ln(y) < y \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow \quad & y^x < x^y \end{aligned}$$

Wenn $e < y < x$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(y)}{y} > \frac{\ln(x)}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot \ln(y) > y \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow \quad & y^x > x^y \end{aligned}$$