

3. Gleichungen und Ungleichungen lösen

3. Gleichungen und Ungleichungen lösen

Benötigt bei:

3. Gleichungen und Ungleichungen lösen

Benötigt bei:

- Berechnung von Schnittpunkten des Graphen mit der x -Achse
- Anmerkung: Wie berechnet man den Schnitt mit der y -Achse?
- Extrempunkte
 - notwendige Bedingung
- Wendepunkte
 - notwendige Bedingung
- Schnittpunkte von Graphen
- In der Geometrie:
 - Schnitt von Geraden
 - Schnitt von Ebenen,
 - Schnitt von Gerade mit Ebene
- In der Stochastik
- etc.

Nullgleichungen

1. Typ: $a_2x^2 + a_0 = 0$

$$x^2 - 2 = 0$$

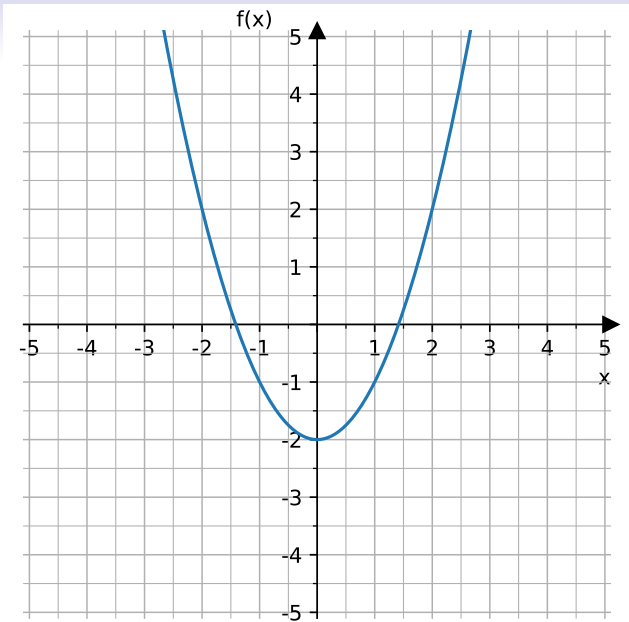
$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2},$$

$$x_2 = -\sqrt{2}$$

$$L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

- Zwei Lösungen, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine positive Zahl vorhanden ist.
- Ein Lösung ausschließlich für die Gleichung $x^2 = 0$
- Keine Lösung, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine negative Zahl vorhanden ist.



2. Typ: $a_n x^n + a_0 = 0$

$$2x^5 + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^5 = -64$$

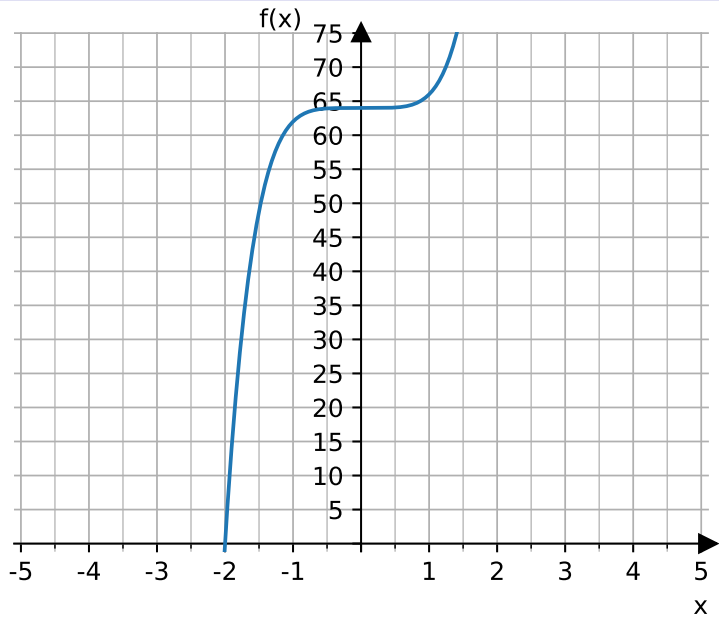
$$\Leftrightarrow x^5 = -32$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-32}$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$L = \{-2\}$$

- mehrere Lösungen, wenn Grad n gerade ist.
- eine Lösung, wenn der Grad n ungerade ist.



4. Typ: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 1$$

$$L = \{1\}$$

- für $a_2 = 1$: p-q-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

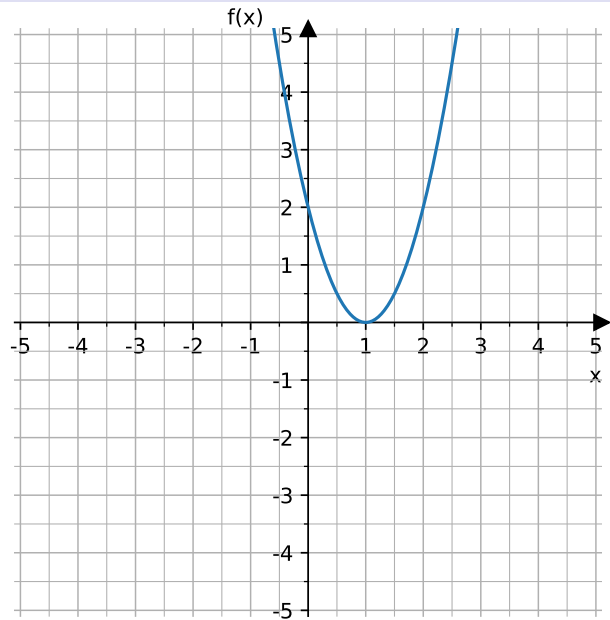
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- für $a_2 \neq 1 \neq 0$: abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Diskriminante entscheidet über die Anzahl der Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$



5. Typ: $a_2x^{2n} + a_1x^n + a_0 = 0$

Beispiel 1:

$$\sin^2(x) - 4\sin(x) + 4 = 0$$

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \quad \circ u = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)^2 = 0$$

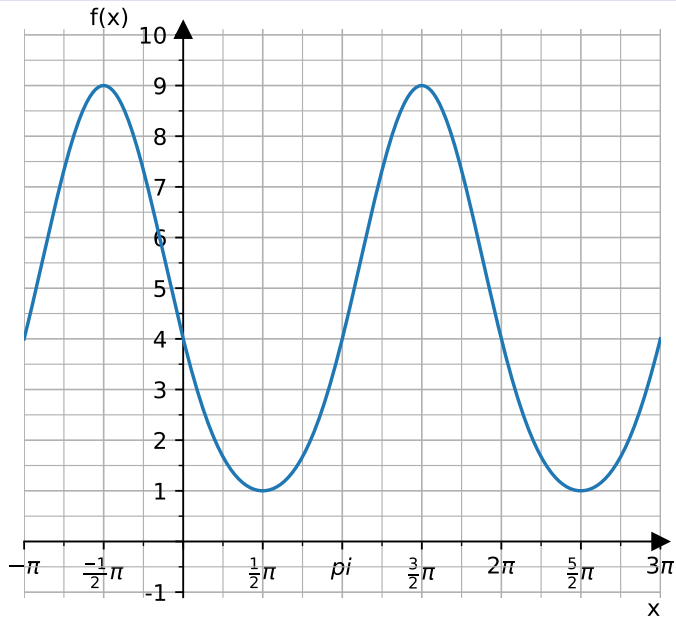
$$\Leftrightarrow u - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 2 \quad \circ u = \sin(x)$$

$$\sin(x) = 2$$

$$L = \{\}, \text{ da } -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

- Substitution und Resubstitution
- weiter Gleichungen, die so gelöst werden können:
 - $a_2e^{2x} + a_1e^x + a_0 = 0$
 - $a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$



Beispiel 2:

$$e^{5x} - 5e^{3x} + 6e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot (e^{4x} - 5e^{2x} + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 0; \quad e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0 \circ u = e^{2x}$$

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 3$$

Satz vom Nullprodukt

Substitution

Lösungsformel

$$e^{2x} = 2 \circ u = e^{2x} \quad \text{Resubstitution 1}$$

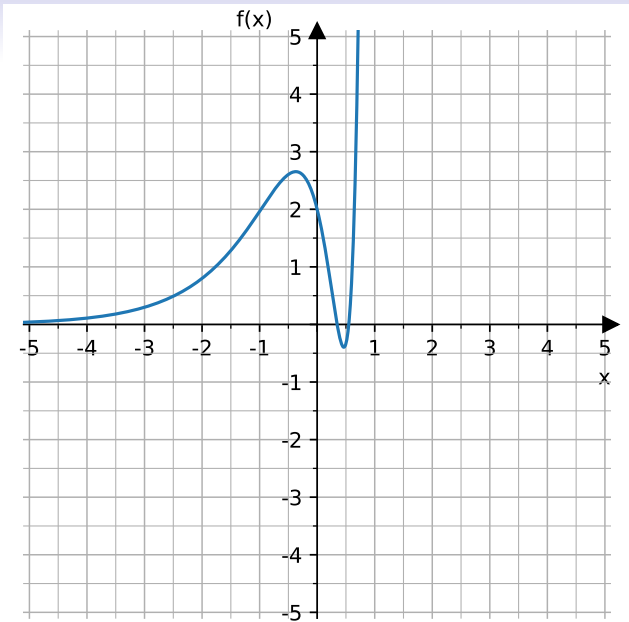
$$\Leftrightarrow 2x = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$e^{2x} = 3 \circ u = e^{2x} \quad \text{Resubstitution 2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}$$



6. Typ: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ und eine Lösung ist bekannt

$$x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$$

Errate eine Nullstelle, hier $x_1 = 1$

Dividiere Polynom durch den Term $x - 1$.

Dies ist eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 - x + 6 : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 - x + 6 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline -6x + 6 \\ -(-6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Suche von dem Ergebnis die Nullstellen:

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

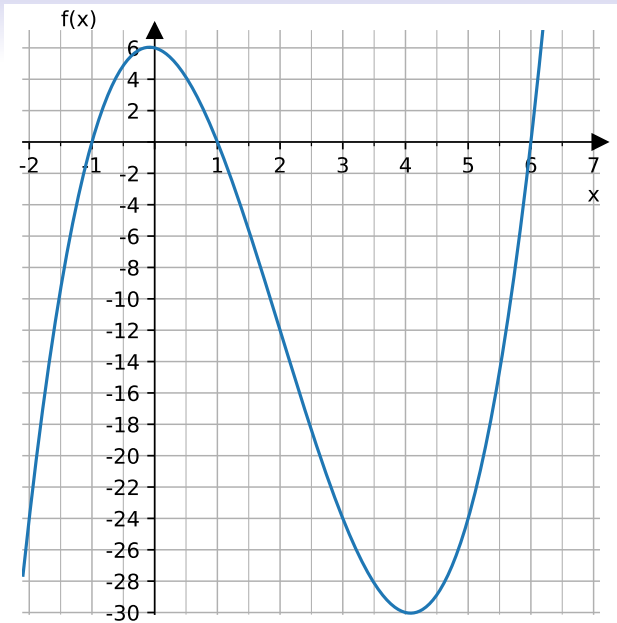
$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} \\&= \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -1$$

Damit hat man alle Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ gefunden:

$$L = \{-1; 1; 6\}$$



Gleichungen mit Termen auf beiden Seiten

7. Typ: Wurzelgleichungen

$$\sqrt{20 - 2x} + 6 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20 - 2x} = x - 6 \quad \text{Wurzel isolieren}$$

$$\Rightarrow 20 - 2x = (x - 6)^2 \quad (!)$$

$$\Leftrightarrow 20 - 2x = x^2 - 12x + 36 \quad (2. \text{ Binomische Formel})$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 10x + 16$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 16} \quad \text{p-q-Formel}$$

$$= 5 \pm 3$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 2$$

- Es muss quadriert werden.
- **Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung (!)**
- Durch das Quadrieren, generiert man eventuell zusätzliche Lösungen der quadrierten Gleichung.
- Probe ist zwingend erforderlich.

Probe:

$$x_1 = 8:$$

$$\sqrt{20 - 2 \cdot 8} + 6 = 8$$

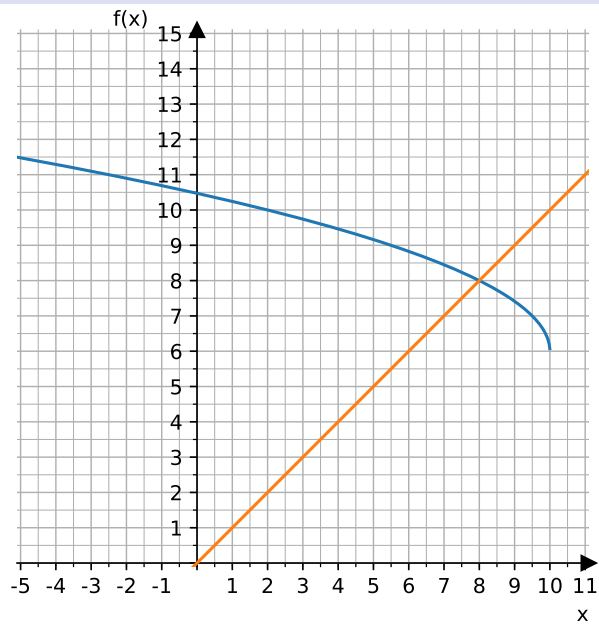
$$2 = 2$$

$$x_2 = 2:$$

$$\sqrt{20 - 2 \cdot (2)} + 6 = 3$$

$$\sqrt{16} + 6 \neq 3$$

$x_2 = 2$ ist keine Lösung.



Ungleichungen

1. Alternative: Löse die dazugehörige Gleichung

$$3 \cdot 5^x > 6$$

Die dazugehörige Gleichung:

$$3 \cdot 5^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \log_5(2) \\ \approx 0,43$$

Übertrage auf die Ungleichung:

Testwert 0 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

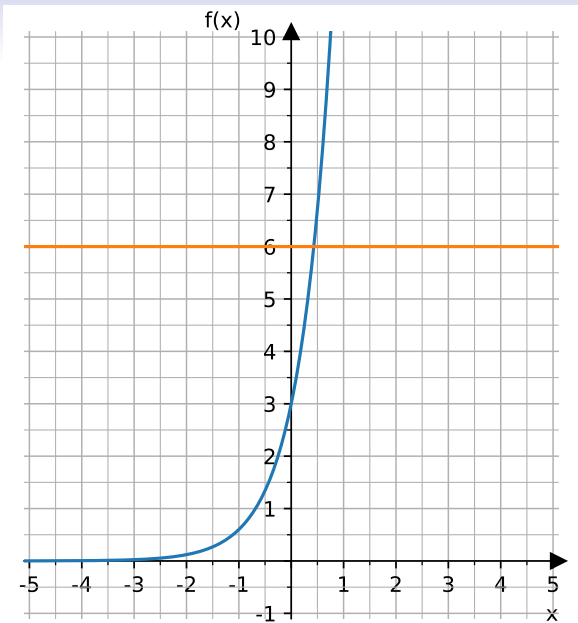
$$3 \cdot 5^0 = 3 < 6$$

Testwert 1 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

$$3 \cdot 5^1 = 15 > 6$$

Damit gilt für die Lösungsmenge:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \log_5(2)\}$$



2. Alternative: Behalte das Ungleichheitszeichen bei

Beispiel 1:

$$-3 \cdot 5^x > 6$$

$$\Leftrightarrow 5^x < -2 \quad (!)$$

$$\Leftrightarrow x < \log_5(2) \quad \text{log-Funktion ist streng mono steigend}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x < \log_5(2)\}$$

- belasse das Größer/Kleiner-Zeichen.
- achte darauf, dass bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl sich das Zeichen umdreht.
- Anwendung von ausschließlich streng monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit $<$ oder $>$ -Zeichen.
- Anwendung von ausschließlich monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit \leq oder \geq -Zeichen.

Beispiel 2:

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\Leftrightarrow x-2 \geq 3(x-1) \text{ VORSICHT! } (x-1) \text{ könnte auch negativ sein.}$$

1. Fall: $(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 \leq 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x-2 \leq 3x-3$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$

2. Fall: $(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x-1} &\geq 3 \\ \Leftrightarrow x-2 &\geq 3(x-1) \\ \Leftrightarrow x-2 &\geq 3x-3 \\ \Leftrightarrow -2x &\geq -1 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{1}{2} \\ L_2 &= \{\}\end{aligned}$$

Zusammen:

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \setminus 1 \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$

