7. Anwendung der e-Funktion

Aufgabe:

Fischteich mit einer Gläche von $64 m^2$. Am Samstag ist $1 m^2$ mit Algen bedeckt. Am Sonntag schon $2 m^2$. Die Algen wachsen immer durch Zweiteilung.

Tag n	1	2	3	4	5

Algenbestand B(N)| 1 | 2 | 4 | 4 | 16 | 32 |

Dies ist exponentielles Wachstum.

Rekursive Berechnung

$$B(n+1) = B(n) \cdot 2$$

Explizite Berechnung

$$B(n) = 1 \cdot 2^n$$

Definition:

Exponentielles Wachstum liegt vor, wenn für jeden Zeitschritt die prozentuale Änderung

$$p = \frac{B(n+1) - B(n)}{(B(n))}$$

die selbe ist.

Der Quotient

$$\frac{B(n+1)}{B(n)} = 1 + p$$

heißt **Wachstumsfaktor** .

rekursive Darstellung des exponentiellen Wachstums:

$$B(n+1) = a \cdot B(n)$$

explizite Darstellung des exponentiellen Wachstums:

$$B(n+1) = c \cdot a^n$$

Satz:

Das exponentielle Wachstum lässt sich mit Hilfe der e-Funktion darstellen.

$$B(n) = B(0) \cdot a^n$$

$$a = e^k$$

$$B(n) = c \cdot e^{kn}$$

mit

$$c = B(0)$$

Der Term $k = \ln(a)$ heißt Wachstumskonstante.

Wenn $k > 0$ dann ist k die Wachstumskonstante und $B(n)$ eine Wachstumsfunktion.
Wenn $k < 0$ dann ist k die Zerfallskonstante und $B(n)$ eine Zerfallsfunktion.

Bemerkung:

Findet ein kontinuierliches Wachstum bzw. Zerfall statt, verwendet man $f(t)$ anstelle von $B(n)$

Beispiel:

- Kaptial: 20.000€
- Zinssatz: 5% (pro Jahr)

Wachstumsfaktor:

$$a = 1 + 5\% = 1,05$$

Anfangswert:

$$f(0) = c \cdot a^0$$

Gleichung:

$$f(t) = 20000 \cdot 1,05^t$$

Gleichung als e-Funktion:

$$\begin{aligned} f(t) &= B(0) \cdot e^{kt} \\ &= 20000 \cdot e^{kt} \\ &= 20000 \cdot e^{\ln(1,05) \cdot t} \end{aligned}$$

- Frage: Wann beträgt das Kapital 35000 Euro? $$ \begin{align*} 35000 &= 20000\cdot e^{\ln(1,05)t}\ \frac{7}{4} &= e^{\ln(1,05)t}\ \frac{\ln(\frac{7}{4})}

{\ln(1,05)} &= t\ t &\approx 11,4

\end{align}

$Antwort: Nach 12 Jahre beträgt das Kapital 35000 Euro. - Frage: In welchem Jahr$

|*begin{align}* f(t+1)-f(t) &= 5000\ 20000\cdot e^{\ln(1,05)(t+1)} - 20000\cdot e^{\ln(1,05)t} &=5000\ 4\cdot \left(e^{\ln(1,05)(t+1)} - e^{\ln(1,05)(t)}\right) &= 1\ 4\cdot e^{\ln(1,05)t} \left(e^{\ln(1,05)} - 1\right) &= 1\ 4\cdot 1,05^t \left(1,05 - 1\right) &= 1\ 1,05^t &= \frac{1}{0,2}\ t &= \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}\ &\approx 14,2 \end{align*} $$

```
Antwort: Im 15. Jahr.
```

- Frage: Wann hat sich as Vermögen verdoppelt? $\Rightarrow$ Verdopplungszeit

7.1 Verdopplungszeit T_V

Es gilt:

$$f(t+T_V) = 2 \cdot f(t)$$

mit $f(t) = c \cdot e^{kt}$ folgt:

$$\begin{aligned} c \cdot e^{k(t+T_V)} &= 2 \cdot c \cdot e^{kt} \\ c \cdot e^{kt} \cdot e^{k \cdot T_V} &= 2 \cdot c \cdot e^{kt} \\ e^{k \cdot T_V} &= 2 \\ k \cdot T_V &= \ln(2) \\ T_V &= \frac{\ln(2)}{k} \end{aligned}$$

Satz:

Die Verdopplungszeit T_V wird berechnet mit:

$$T_V = \frac{\ln(2)}{k}$$

3.2 Halbwertszeit T_H

Es gilt:

$$f(t+T_H) = \frac{1}{2} \cdot f(t)$$

mit $f(t) = c \cdot e^{kt}$ folgt:

$$
\begin{aligned}
c \cdot e^{k(t+T_H)} &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot e^{kt} \\
c \cdot e^{kt} \cdot e^{k \cdot T_H} &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot e^{kt} \\
e^{k \cdot T_H} &= \frac{1}{2} \\
k \cdot T_H &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
T_H &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}
\end{aligned}
$$

Satz:

Die Halbwertszeit T_H wird berechnet mit:

$$T_H = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$$