8. Uneigentliche Integrale

Beispiel:

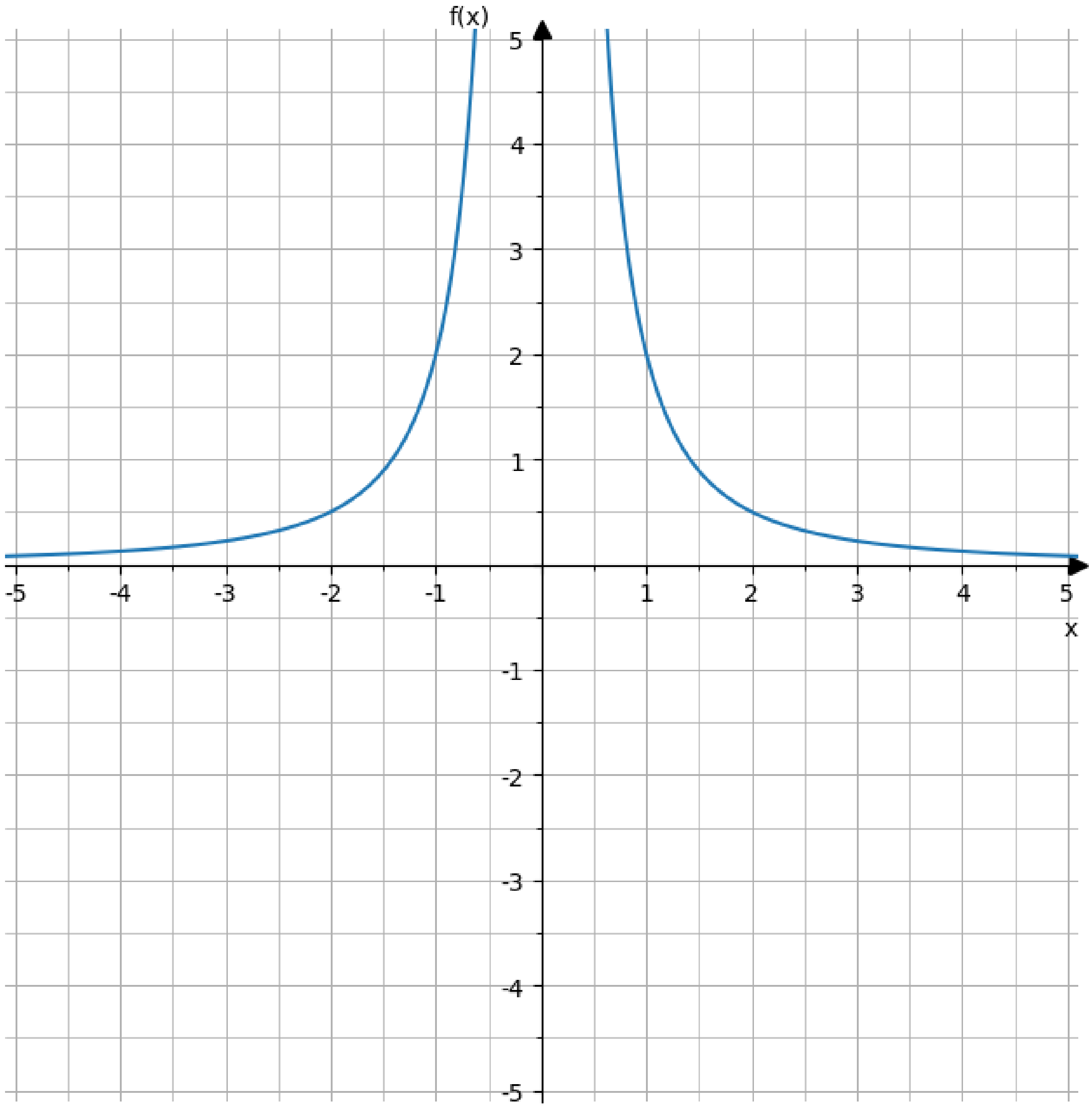
$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

In [4]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= 2/(x**2)
# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax= fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)
```

```
# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#plt.show()
```

Out[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x120e96c90>]



Berechnung des gerichteten Flächeninhalts zwischen Funktionsgraph von f mit der x-Achse auf dem Intervall $I = [1; 2]$

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^2$$
$$= -\frac{2}{2} + \frac{2}{1}$$
$$= 1$$

Könnte man auch den Flächeninhalt auf den Intervallen $I = [0; 1]$ oder $I = [1, \infty]$ berechnen?

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2}dx = ? \qquad \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = ?$$

Welche Werte könnten die Werte für die beiden Integrale annehmen? Wir vermuten:

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2}dx = ? \qquad \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = ?$$

Wie lässt sich die Vermutung nun überprüfen?

Idee: Berechne den gerichteten Flächeninhalt mit einer Variablen Grenze z und wende dann den Limes darauf an.

1. Berechnung des gerichteten Flächeninhalts:

$$\int_z^1 \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_z^1$$
$$= -\frac{2}{1} - \left(-\frac{2}{z}\right)$$
$$= -2 + \frac{2}{z}$$

2. Anwendung des Limes:

$$\lim_{z \to 0} -2 + \frac{2}{z} = \infty$$

$\Rightarrow$ Der gerichtete Flächeninhalt $\int_z^1 \frac{2}{x^2}dx$ ist nicht endlich, er wächst unbegrenzt.

Analoge Betrachtung mit $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx$:

1. Berechnung des gerichteten Flächeninhalts:

$$\begin{aligned}\int_1^z \frac{2}{x^2}dx &= \left[-\frac{2}{x}\right]_1^z \\ &= -\frac{2}{z} - \left(-\frac{2}{1}\right) \\ &= -\frac{2}{z} + 2\end{aligned}$$

2. Anwendung des Limes:

$$\lim_{z\to\infty} -\frac{2}{z} + 2 = 2$$

$\Rightarrow$ Der gerichtete Flächeninhalt der unbegränzten Fläche ist 2.

Damit lässt sich schreiben:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = 2$$

Bemerkung: Wenn es keine endlichen Flächeninhalt gibt, existiert das zugehörige Integral nicht

Definition:
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)dx$$

so schreibt man dafür

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

und nennt ein solches Integral **uneigentliches Integral**.

Existiert für eine Funktionslücke c von f der Grenzwert

$$\lim_{z\to c}\int_z^c f(x)dx$$

so schreibt man dafür

$$\int_{a}^{c} f(x)dx$$

und nennt ein solches Integral **uneigentliches Integral**.

Bemerkungen:

1. Analoges gilt, wenn c der oberen Grenze entspricht
2. Analoges gilt, wenn $-\infty$ eine Integrationsgrenze ist.