8. Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums

Gleichung des expnentiellen Wachstums lautet:

$$f(t) = c \cdot e^{kt}$$

Wie sieht die Ableitungsfunktion dazu aus?

$$f'(t) = k \cdot c \cdot e^{kt} = k \cdot f(t)$$

Also

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

Dies ist eine Funktionsgleichung, die sowohl die Funktion f und deren Ableitungsfunktion f' auftritt.

Definition:

Eine Gleichung, in der sowohl eine Funktion als auch ihre Ableitungsfunktion auftritt, nennt man **Differenzialgleichung**.

Frage: Gibt es weitere Funktionen außer der e-Funktion, welche die Differenzialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$ erfüllen?

Überlegungen:

Angenommen: Es gibt eine Funktion g, welche auch die obere Differenzialgleichung erfüllt.
Daraus folgt:

$$g'(t) = k \cdot g(t)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{g(t)}{f(t)}\right)' &= \left(\frac{g(t)}{c \cdot e^{kt}}\right)' \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{g(t)}{e^{kt}}\right)' \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left(g(t) \cdot e^{-kt}\right)' \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left(g'(t)e^{-kt} - k \cdot e^{-kt} \cdot g(t)\right) \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left(k \cdot g(t) \cdot e^{-kt} - k \cdot e^{-kt} \cdot g(t)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Quotient

$$\frac{g(t)}{f(t)} = a$$

konstant ist. Damit gilt:

$$g(t) = a \cdot f(t) = a \cdot c \cdot e^{kt} = c_1 \cdot e^k t$$

Somt ist g auch eine Exponentialfunktion.

Satz:

Die einzige Funktion, welche die Differenzialgleichung erfüllt, ist die Exponentialfunktion.