4. Funktionenscharen

Beispiel:

$$f(x) = e^{x+1}$$
$$g(x) = e^{x+2}$$
$$h(x) = e^{x+3}$$
$$i(x) = e^{x+4}$$

Dies Funktionen haben folgende Eigenschaften gemeinsam:

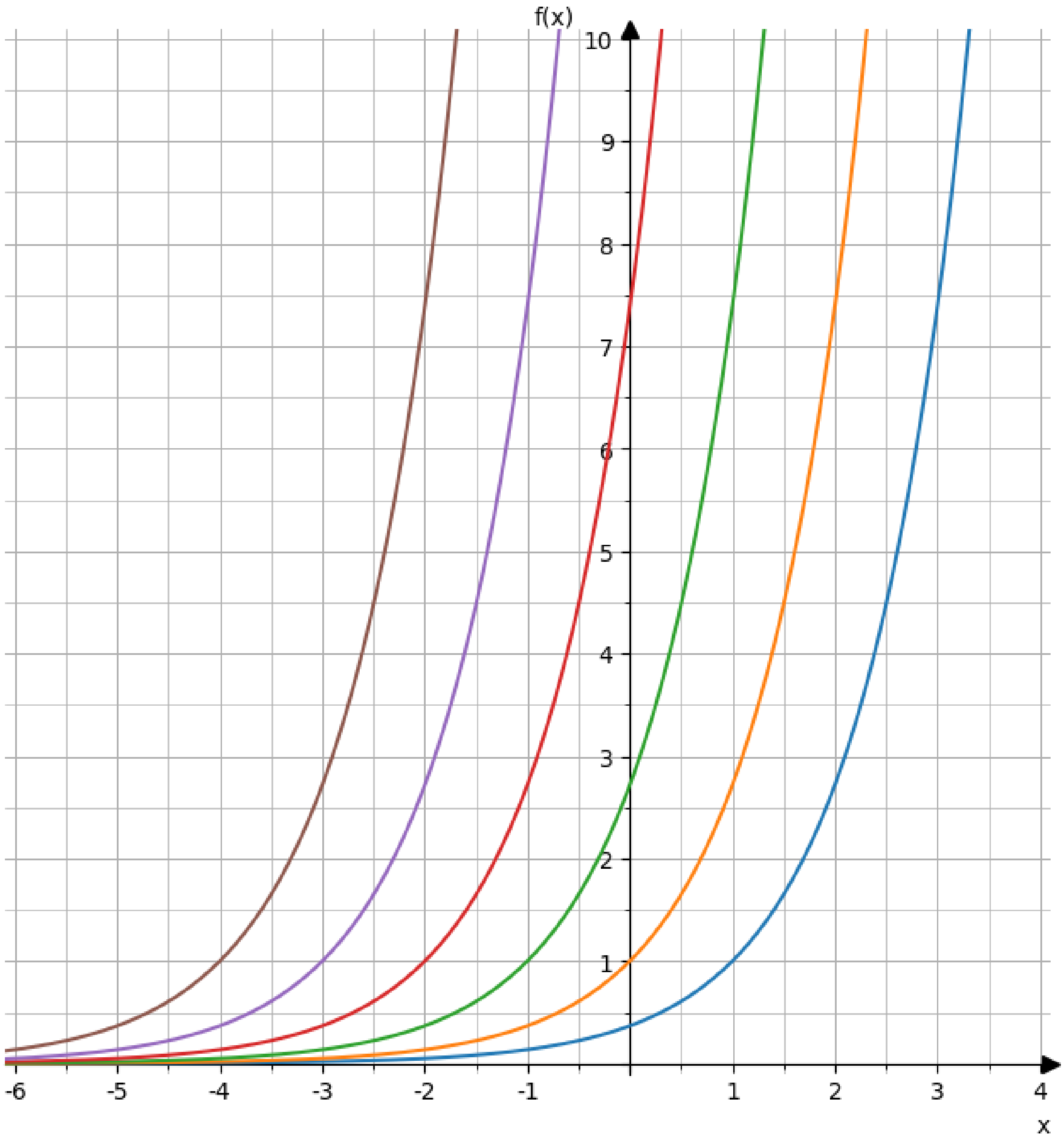
1.
2.

Ihr Schaubilder sehen wir folgt aus:

In [3]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -6.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 4.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -0.1# untere y-Intervallgrenze
d = 10.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
yminus1=np.exp(x-1)
y0=np.exp(x)
y1=np.exp(x+1)
y2=np.exp(x+2)
y3=np.exp(x+3)
y4=np.exp(x+4)


# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
```

```python
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,yminus1, zorder=10)
ax.plot(x,y0, zorder=10)
ax.plot(x,y1, zorder=10)
ax.plot(x,y2, zorder=10)
ax.plot(x,y3, zorder=10)
ax.plot(x,y4, zorder=10)
#plt.show()
```

Out[3]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x122813350>]
```



Welche Möglichkeit gäbe es, alle unendliche vielen Funktionen, welche diese Struktur besitzen, in einem Funktionsterm zu schreiben?

Alle Funktionsterme unterscheiden sich nur in einer Zahl. Wir nennte diese Zahl allgemein a.
a ist bei uns eine ganze Zahl. Dies müssen wir dokumentieren und schreiben $a \in \mathbb{Z}$.

Damit lautet der Funktionsterm: $$ f_a(x)=e^{x+a}, \quad a \in \mathbb{R}

Definition:

Enthält ein Funktionsterm neben einer möglichen Funktionsvariable , z.B. x noch einen Parameter, z.B. a, so gehört zu jedem Wert des Paramters $a \in \mathbb{D}$ (Definitionsmenge von

a) eine Funktion f_a, die jedem x ein Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet.
Die Funktionen f_a bislden eine **Funktionenschar**.

Übung 1: Buch Seite 62 Nr. 9

a)

$$\begin{aligned} t &= 3 \\ f_k(3) &= 7000 \\ 8 - 2e^{-k\cdot 3} &= 7000 \end{aligned}$$

Umformung:

$$\begin{aligned} 8 - 2e^{-k\cdot 3} &= 7 \\ -2e^{-k\cdot 3} &= -1 \\ 2e^{-k\cdot 3} &= 1 \\ e^{-k\cdot 3} &= \frac{1}{2} \\ -k \cdot 3 &= ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -k \cdot 3 &= ln\left(2^{-1}\right) \\ -k \cdot 3 &= -ln(2) \\ k &= \frac{ln(2)}{3} \approx 0,23 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= 2k \cdot e^{kt} \\ f_k'(0) &= 0,25 \\ 2e^{-k\cdot 0} &= 0,25 \\ 2k &= 0,25 \\ k &= 0,125 \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} 8 - 2e^{-k\cdot x} = 8$$

Antwort: Es ist folglich mit 8000 Ameisen zu rechnen.

d)

Antwort 1 : Die Gleichung $f_k(t+1) - f_k(t) = 0,1$ gibt den Zeitpunkt t an, zu dem der Ameisenbestand in der Folgewoche um 100 zunimmt.
Antwort 2: Die Gleichung $f_k'(t) = 0,1$ gibt den Zeipunkt t an, an dem die momentane Änderungsrate 100 Ameisen beträgt.

Übung 2: Buch Seite 62 Nr. 11

b) Berechne die Kooridnaten der Extrempunkte. Die x-Kooridnate

$$\begin{aligned} f_k(x) &= (x-k)e^{x-k} \\ f_k'(x) &= e^{x-k} + (x-k)e^{x-k} = (x-k+1)e^{x-k} \\ f_k''(x) &= e^{x-k} + (x-k+1)e^{x-k} = (x-k+2)e^{x-k} \\ \text{1. Not. Bed.: } f_k'(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-k+1)e^{x-k} = 0 \\ \text{S.v.N } (x-k+1) &= 0 \\ x &= k-1 \\ \text{2. Hinr. Bed.: } f_k''(k-1) &= e^{k-1-k}(k-1-k+2) = e^{-1} > 0 \end{aligned}$$

Es handelt sich um einen Tiefpunkt

Die y-Kooridante des Tiefpunkts

$$\begin{aligned} f_k(k-1) &= (k-1-k)e^{k-1-k} \\ &= -e^{-1} \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$T_k\left(k-1 | -\frac{1}{e}\right)$$

Wann liegt dieser Punkt auf der x-Achse?

$$-\frac{1}{e} = 0$$

Hierfür gibt es keine Lösung.

Wann liegt dieser Punkt auf der y-Achse?

$$k-1=0 \Leftrightarrow k=1$$

Übung 3: Buch Seite 62 Nr. 10

a)

$$\begin{gathered} h_c'(x) = e^{c+x} + xe^{c+x} = (x+1)e^{c+x} \\ h_c'(0) = e^c \end{gathered}$$

b)

Betrachte die Steigungen an der Stelle x=0:

A: h_0
B: $h_{0,5}$
C: h_1
D: $h_{1.5}$

c)

- $\lim\limits_{x \to \infty} h_c(x) = \infty$
- Tiefpunkte bei $x = -1$
- Wendepunkte bei $x = -2$
- Erhöhung von c führt zu einem steileren Anstieg des Graphen (= Streckung)

d) Vorgehensweise analog wie in Aufgabe 11

$$T\left(-1| - e^{-1+c}\right)$$