

## 7. Trigonometrische Funktionen

### Winkelfunktion im Dreieck

#### Rechtwinklige Dreiecke

#### Bezeichnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Allgemein:

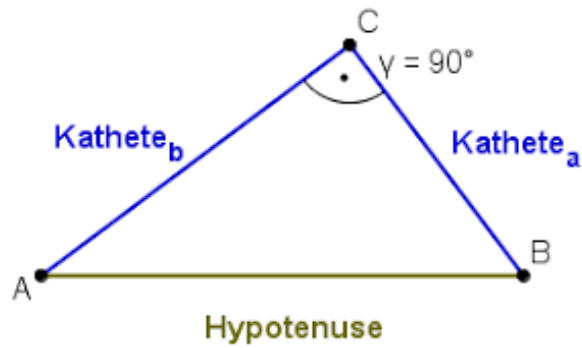


Figure 1: Dreieck

Im Bezug auf die Winkel:

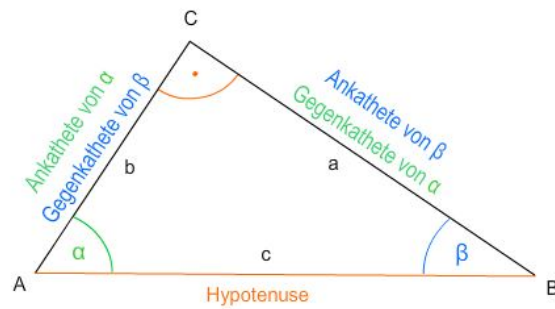


Figure 2: Dreieck

#### Beobachtung

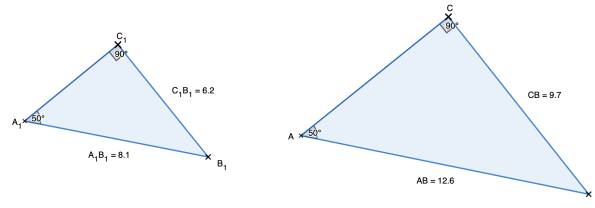


Figure 3: Dreieck

$A_1B_1$	$B_1C_1$	$\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$	$AB$	$BC$	$\frac{BC}{AB}$
8,1	6,2	0,76	12,6	9,7	0,76

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit festem Winkel  $\alpha$  ist das Verhältnis von Gegenkathete zu  $\alpha$  zur Hypotenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Sinus zu dem Winkel  $\alpha$

**Analog** In jedem rechtwinkligen Dreieck mit festem Winkel  $\alpha$  ist das Verhältnis von Ankathete zu  $\alpha$  zur Hypotenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Kosinus zu dem Winkel  $\alpha$

### Definition: Sinus

Gegeben: - rechtwinkliges Dreieck ABC - Winkel  $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

### Definition: Kosinus

Gegeben: - rechtwinkliges Dreieck ABC - Winkel  $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Ankathete zur Länge der Hypotenuse

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

### Definition: Tangens

Gegeben: - rechtwinkliges Dreieck ABC - Winkel  $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Ankathete

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

### Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

- Einheitskreis := Kreis um den Ursprung mit Radius 1
- Zu jedem Punkt  $P$  auf dem Kreis gibt es ein rechtwinkliges Dreieck
- Länge der Hypotenuse ist 1.

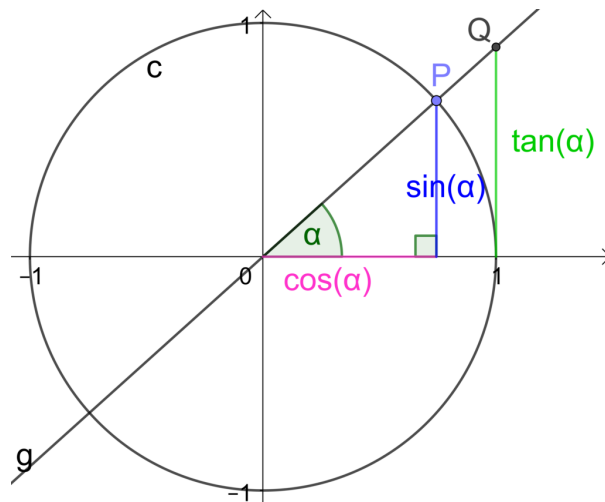


Figure 4: Einheitskreis

### Sinus, Kosinusfunktion und Tangensfunktion im Dreieck

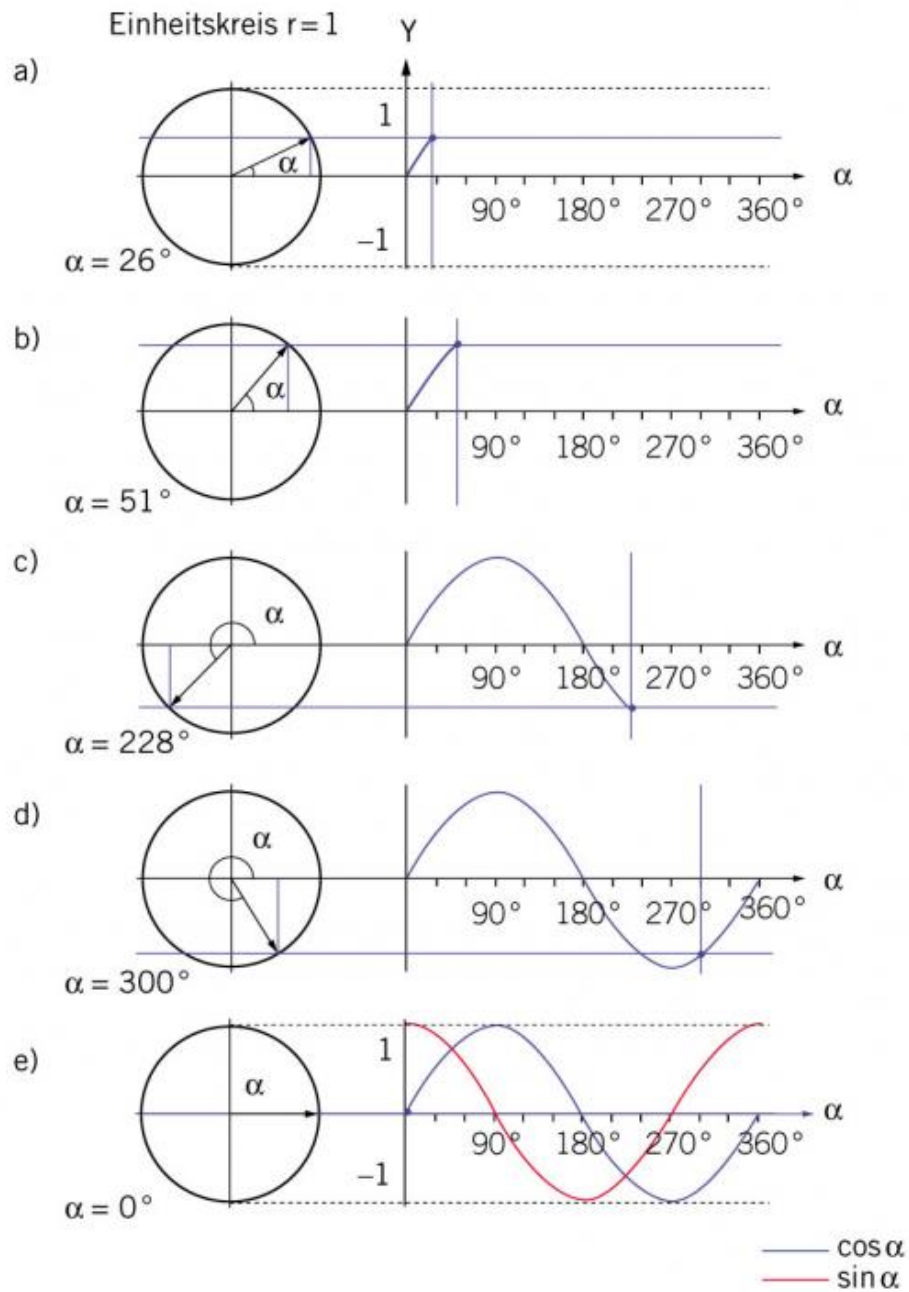


Figure 5: Sinusfunktion

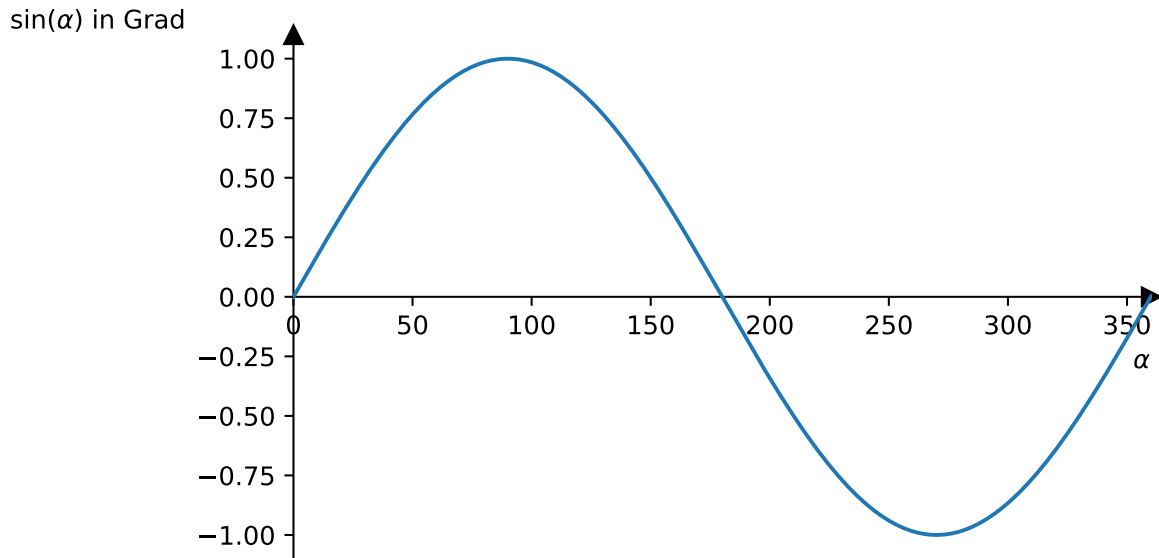
### Definition: Sinusfunktion im Dreieck

Gegeben:

-rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Sinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Sinusfunktion**

**Funktionsgraph der Sinus-Funktion:**



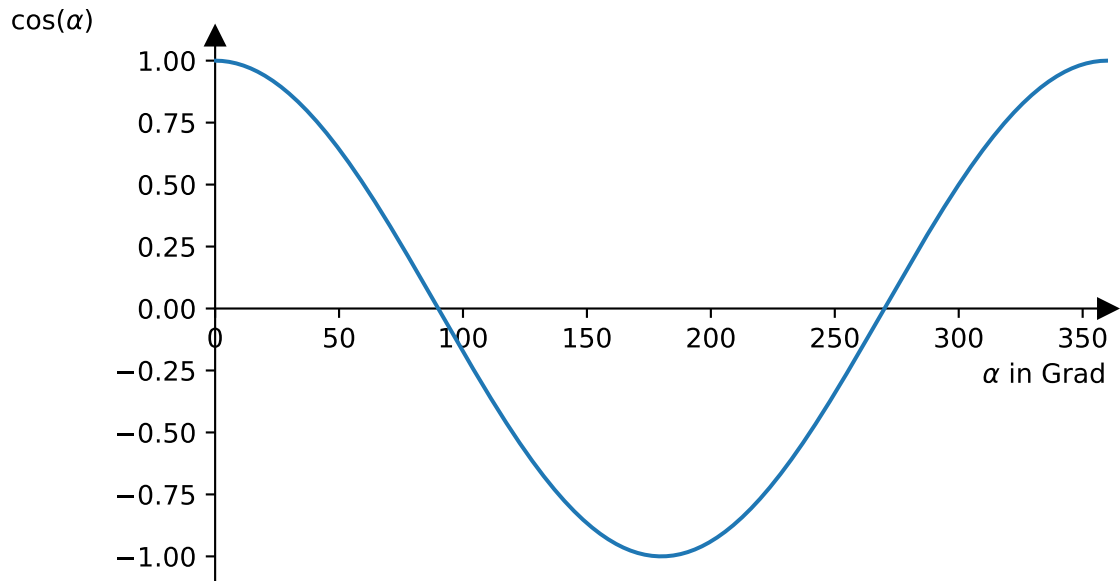
**Definition: Kosinus-Funktion im Dreieck**

Gegeben:

-rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Kosinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Kosinusfunktion**

**Funktionsgraph der Kosinus-Funktion:**



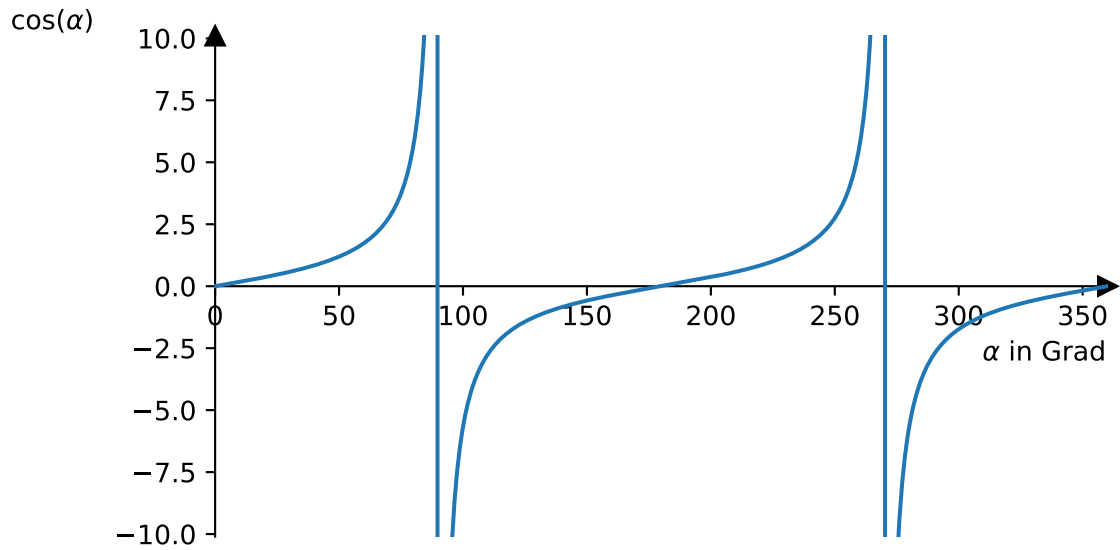
### Definition: Tangens-Funktion im Dreieck

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Tangens zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Tangensfunktion**

**Funktionsgraph der Tangens-Funktion:**



## reellewertige Winkelfunktionen

### Bogenmaß

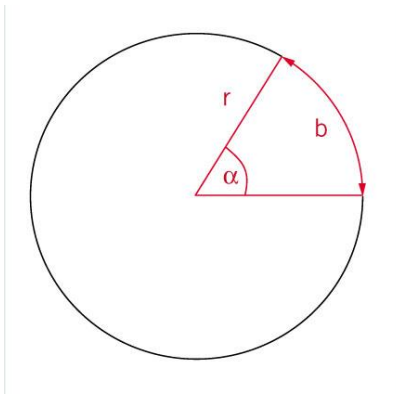


Figure 6: Einheitskreis

### Beobachtung:

- Jedem Winkel kann eindeutig eine Kreisbogenlänge zugeordnet werden.
- Diese Zuordnung ist bijektiv.
- Die Kreisbogenlänge ist eine reelle Zahl.

**Satz:**

Gegeben: - Kreis  $k(M; r)$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  - Kreissektor mit Öffnungswinkel  $\alpha$

Die Kreisbogenlänge  $b$  des Kreissegments (Bogenmaß) wird berechnet mit:

$$b = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

**Folgerung**

Damit lässt sich wie folgt auch zu jeder reellen Zahl  $x$  ein Wert  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  bzw.  $\tan(x)$  zuordnen:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \rightarrow & \sin(\alpha) \\ \downarrow & & = \\ x & \rightarrow & \sin(x) \end{array}$$

**Funktionsterme**

Zuordnung Winkel  $\rightarrow$  Bogenlänge

$$g(\alpha) = \left( r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right)$$

Zuordnung Bogenlänge (reelle Zahl)  $\rightarrow$  Sinus

$$f(x) = f(g(\alpha)) = \sin \left( r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right) = \sin(x)$$

**Winkelfunktionen****Sinus-Funktion**

- Definitionsmenge:  $\mathbb{R}$
- Wertemenge:  $W = \{f(x) \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode  $p = 2\pi$
- punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Nullstellen:



$$\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Maximalstellen:

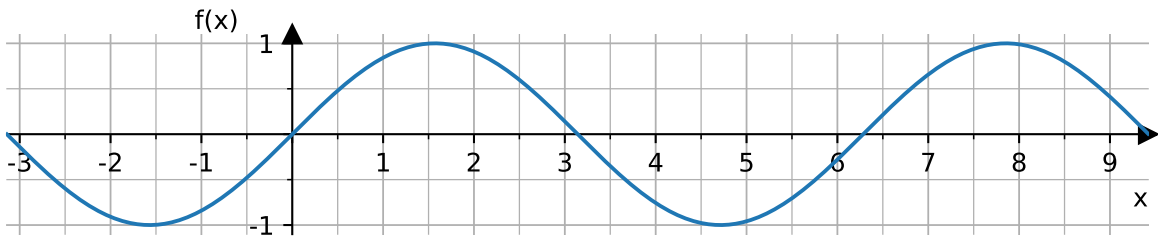
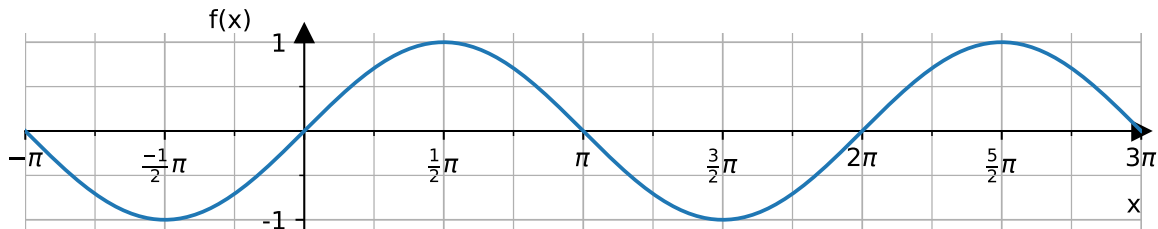
$$\dots, -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Minimalstellen:

$$\dots, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



## Kosinus-Funktion

- Definitionsmenge:  $\mathbb{R}$
- Wertemenge:  $W = \{f(x) \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode  $p = 2\pi$
- achsensymmetrisch zur y-Achse

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- Nullstellen:

$$\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } \frac{2k+1}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Maximalstellen:

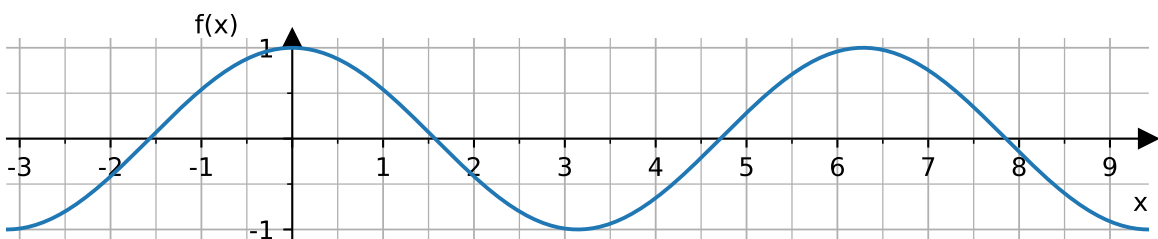
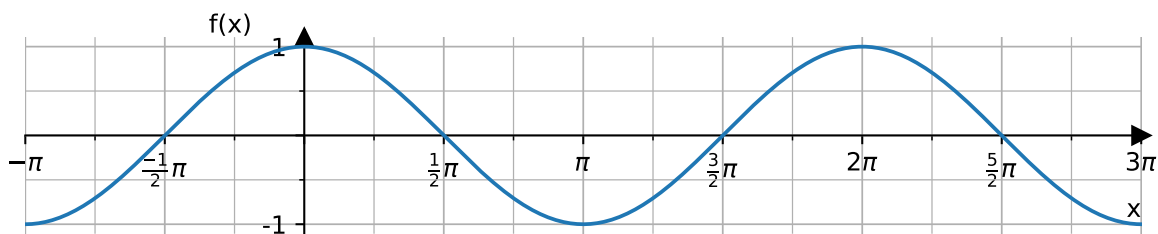
$$\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Minimalstellen:

$$\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



### Verschieben der Sinusfunktion entlang der y-Achse

Funktionsgleichung:

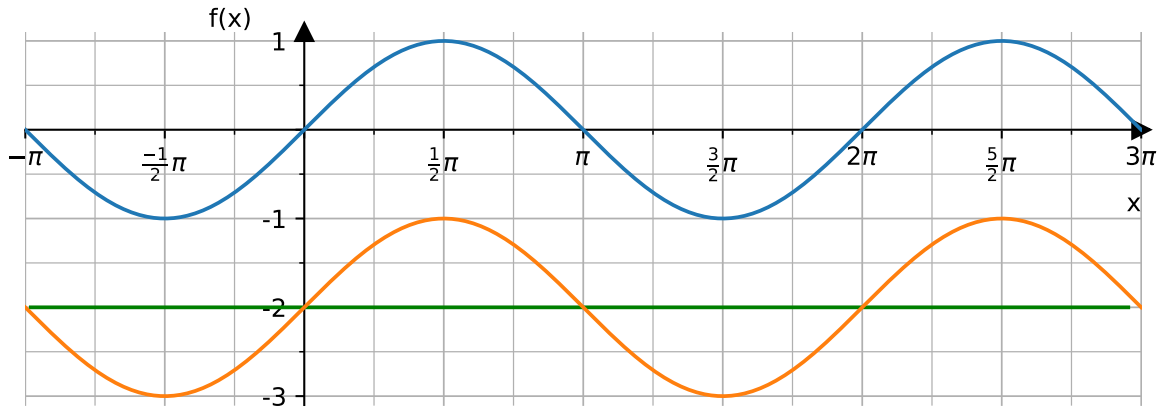
$$f(x) = \sin(x) + d$$

Die Mittellinie ist die Gerade  $y = d$

### Beispiel

$$f(x) = \sin(x) - 2$$

Mittellinie:  $y = -2$



### Verschieben entlang der x-Achse

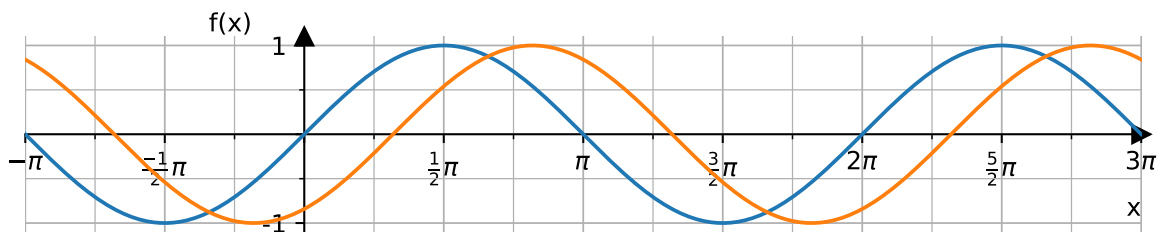
Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(x - c)$$

Man nennt  $c$  auch Phase.

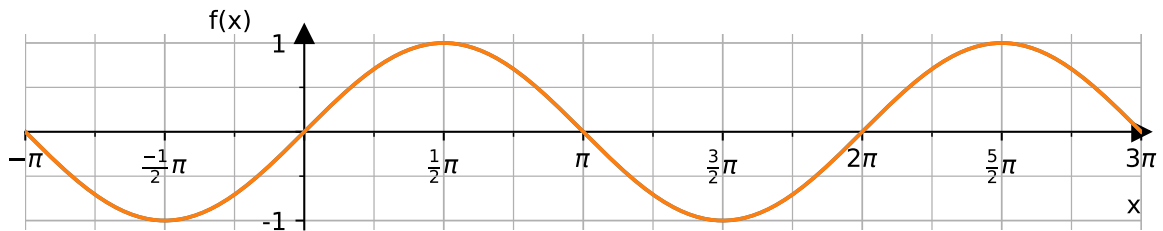
### Beispiel

$$f(x) = \sin(x - 1)$$



### Beobachtung

$$f(x) = \sin(x - 2 \cdot \pi) = \sin(x + 2 \cdot \pi) = \cos(x)$$



### Strecken / Stauchen

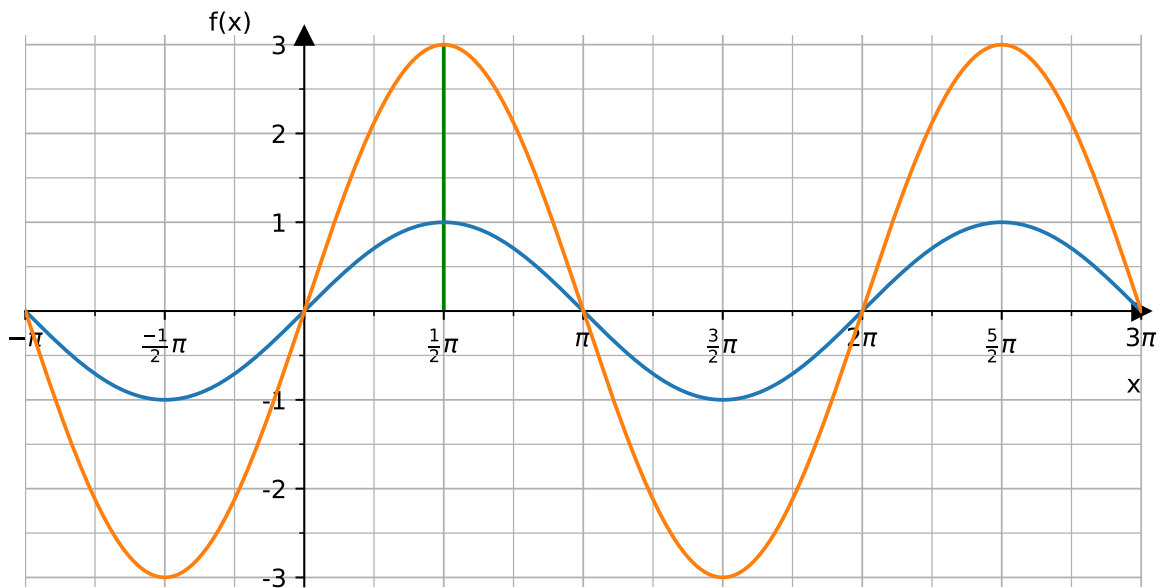
Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(x)$$

$|a|$  nennt man Amplitude (= Ausschlag). Die Amplitude ist immer positiv.

### Beispiel

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$



## Periode verändern

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(b \cdot x)$$

Das Verhältnis

$$p = \frac{2\pi}{b}$$

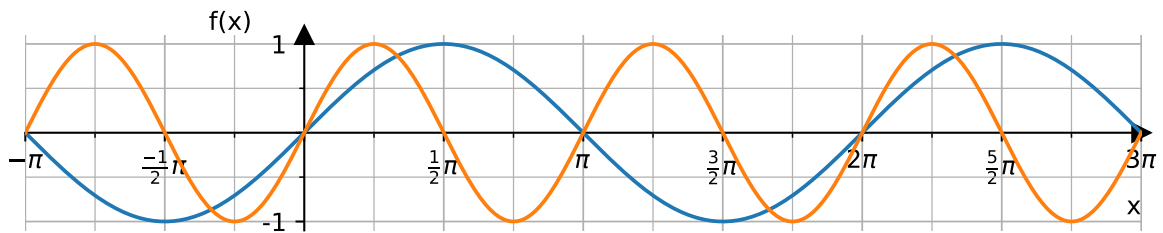
nennt man Periode.

## Beispiel

$$f(x) = \sin(2 \cdot x)$$

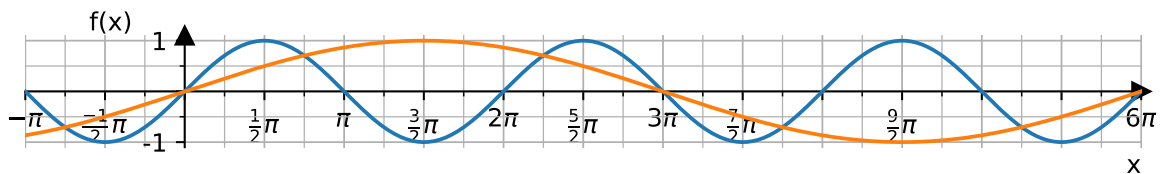
Die Periode ist:

$$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



## Beispiel

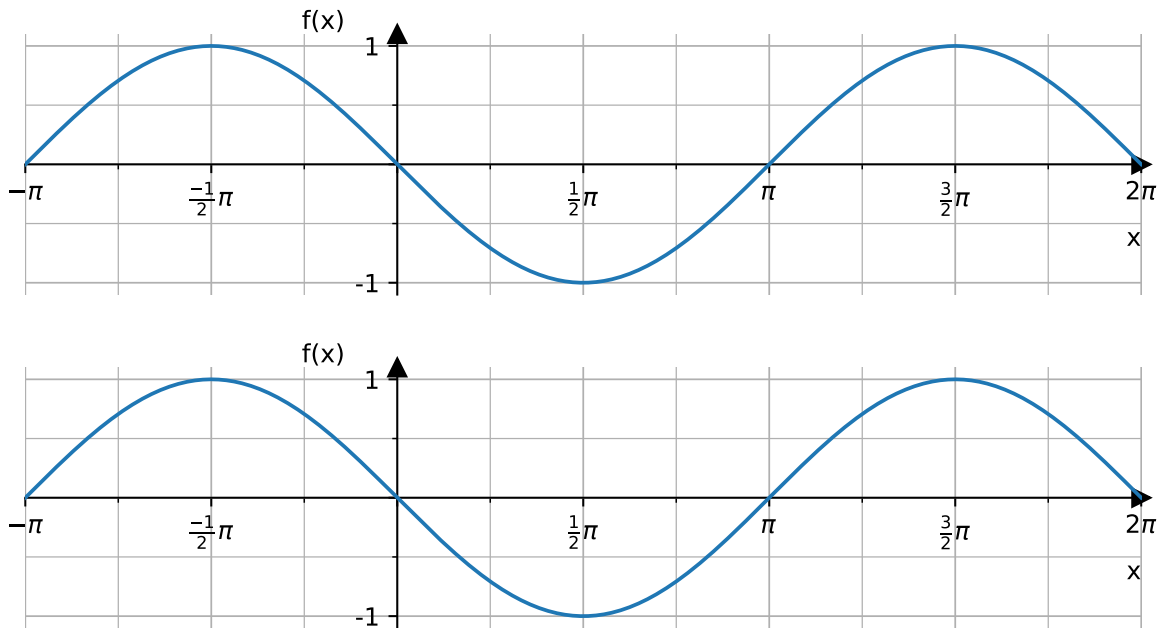
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$$



## Spiegeln an der x-Achse

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\sin(x) = \sin(-x)$$



## Allgemeine Sinus-Funktion

Definition:  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  Der Graph der Funktion

$$g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

geht aus der Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

hervor, indem - f um  $|a|$  in y-Richtung gestreckt wird. Die Amplitude ist:  $A = |a|$  - f um Faktor  $\frac{1}{b}$  in x-Richtung gestreckt wird. - f um  $c$  in x-Richtung und um  $d$  in y-Richtung verschoben wird.

## Bemerkung

Analoge Aussagen gelten auch für die Kosinus-Funktion.

Der Graph der Kosinus-Funktion geht aus dem Graph der Sinus-Funktion durch Verschiebung in x-Richtung um  $-\frac{\pi}{2}$  hervor.