1. Die e-Funktion

Problem:

Bisher unbekannt sind die Ableitungen von Exponentialfunktionen wie $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = 3^x$, $f_4(x) = 4^x$ ...

Definition:

Ein Funktion des Typs $f(x) = c \cdot a^x, c \in (R), a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}$, nennt man **Exponentialfunktion zur Basis a**.

Lösungsansatz für f_2:

Bestimme $f_2'(x)$ näherungsweise mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$f_2'(x) = \lim_{g \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h}$$

Wir nehmen einen Wert z.B. h=0,00001, der Nahe bei 0 liegt und bestimme damit einen Näherungsweg von $f_2'(x)$

Es gilt damit:

$$d(x) = \frac{2^{x+0,00001} - 2^x}{0,00001}$$

Wir berechnen damit für verschiedene x die Näherungswerte:

x	$f(x) = 2^x$	$d(x) \approx f_2'(x)$	$\frac{d(x)}{f_2(x)} \approx \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}$
0	1	0,69315	0,69315
1	2	1,38630	0,69315
2	4	2,77260	0,69315
3	8	5,54520	0,69315
-1	0,5	0,34657	0,69315

Beobachtung: Der Quotient $\frac{d(x)}{f(x)}$ scheint konstant zu sein.

Behauptung: Der Quotient $\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}$ ist konstant. Anders gesagt bedeutet dass, es gibt eine Konstante c (Proportionalitätsfaktor), so dass gilt:

$$f_2'(x) = c \cdot f_2(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2^x \cdot \frac{2^h - 1}{h} \\ &= 2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \\ &= f_2(x) \cdot f_2'(0) \end{aligned}$$

$f_2'(0)$ ist die gesuchte Konstante c. $\square$

Behauptung: Die Funktion f sei gegeben mit $f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}$.

Der Quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ist konstant. Anders gesagt bedeutet dass, es gibt eine Konstante c (Proportionalitätsfaktor), so dass gilt:

$$f'(x) = c \cdot f(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - a}{h} \\ &= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - a}{h} \\ &= f(x) \cdot f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0)$ ist die gesuchte Konstante c. $\square$

Untersuchung des Proportionalitätsfaktors c

Wir berechnen den Proportionalitätsfaktor mit der Näherung $d(x)$ für verschieden Basen a.

$$f(x) = a^x \quad d(0) \approx \frac{a^{x+0{,}00001} - 1}{0{,}00001}$$

2^x | 0,69315 | 3^x | 1,09862 2.72^x | 0,99326 | e | 1|

Definition:

Für die **Eulersche Zahl e** stimmt die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ mit ihrer Ableitung $f'(x) = e^x$ überein.

$e \approx 2,71828$

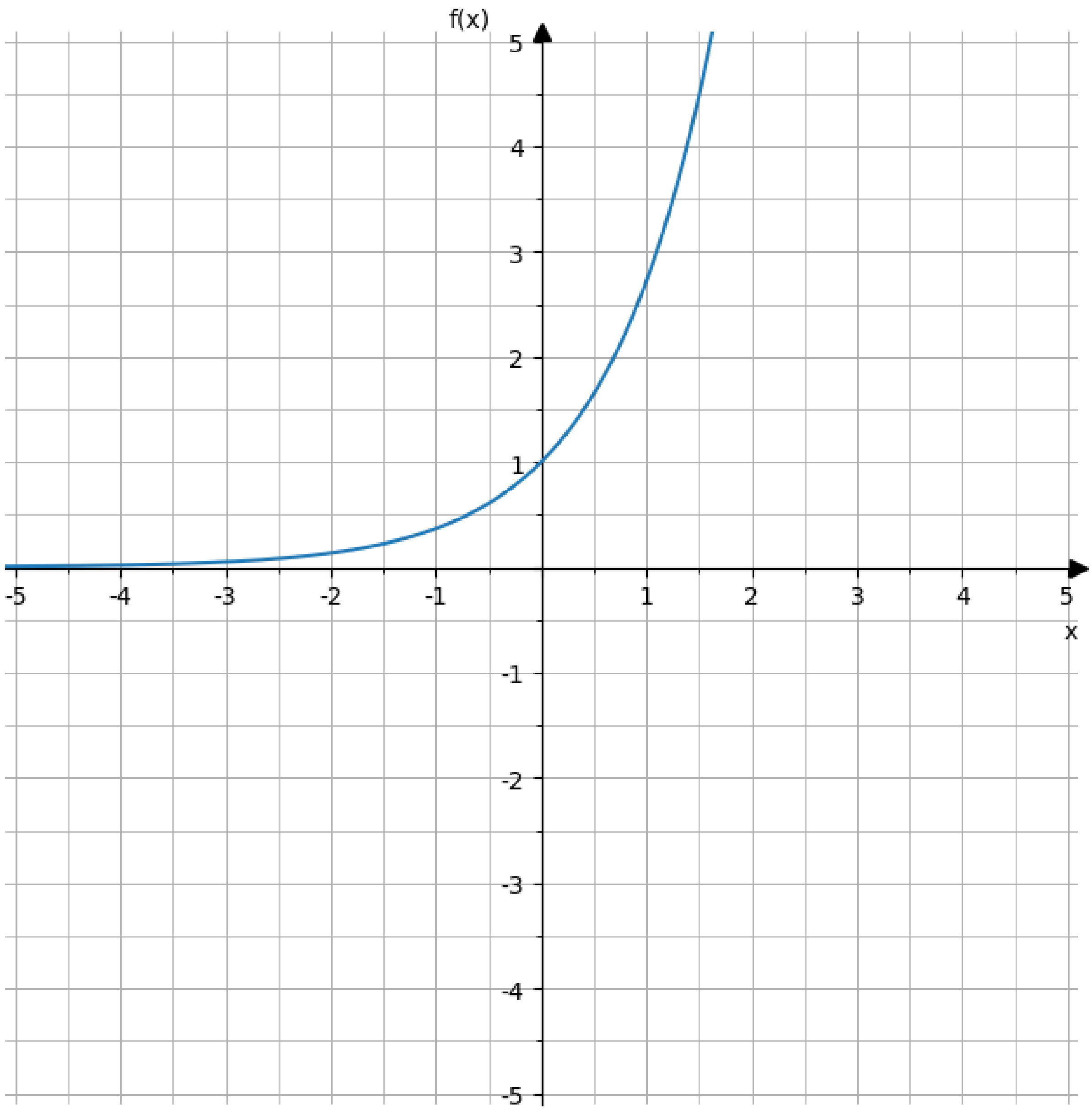
Die Funktion $f(x) = e^x$ heißt **natürliche Exponentialfunktion**

Graph der natürlichen Exponentialfunktion:

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ------------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= np.exp(x)
# ------------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)
```

```
# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#plt.show()
```

Out[1]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1159ae710>]



Eigenschaften:

1. keine Nullstellen
2. $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
3. $f(0) = 1$
4. keine Extremstellen
5. keine Wendestellen

6. $f(x)$ ist streng monoton wachsend, weil $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x > 0$
7. Der Graph ist linksgekrümmt.
8. $f(1) = e^1 = e$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} = 0$