8. Funktionenscharen

2024-03-19

Bemerkung:

Funktionenscharen lassen sich analog den Funktionen, auf ihre chrakteristische Eigenschaften untersuchen. Abhängig vom Parameter bleiben dabei:

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Symmetrie

Unabhängig von t sind gemeinsame Punkte der Funktionenschar.

Beispiel: $f_(x) = ax^4 + x^3, \quad a \neq 0$

1. Untersuchen Sie, ob alle Graphen duch den Ursprung verlaufen.

$$f_a(0) = 0$$

Die Lösung ist unabhänig von a und alle Graphen gehen durch den Punkt O(0|0).

2. Bestimmen Sie a so, dass $\int\limits_{-a}^{a} f_a(x)dx = a$ gilt.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-a}^{a} f_a(x)dx &= \left[\frac{1}{5}ax^5 + \frac{1}{4}x^4\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{5}a \cdot a^5 + \frac{1}{4}a^4 - \left(\frac{1}{5}a \cdot (-a)^5 + \frac{1}{4}(-a^{)}4\right) \\
&= \frac{1}{5}a^6 + \frac{1}{4}a^4 - \left(-\frac{1}{5}a^6 + \frac{1}{4}a^4\right) \\
&= \frac{2}{5}a^6
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $a > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}a^6 &= a \quad \Big| : a \\ \frac{2}{5}a^5 &= 1 \\ a^5 &= \frac{5}{2} \\ a_1 &= \sqrt[5]{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $a < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}a^6 &= a \quad \Big| : a \\ \frac{2}{5}a^5 &= 1 \\ a^5 &= \frac{5}{2} \\ a_2 &= -\sqrt[5]{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Art des Extremums von f_a

$$
\begin{aligned}
\text{1. not. Bed: } f_a'(x) &= 0 \\
f_a'(x) &= 4ax^3 + 3x^2 = 0 \\
&= x^2(4ax + 3) = 0 \\
x_1 &= 0 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{4a}
\end{aligned}
$$

2. hin. Bed: $f_a''(x) \neq 0$

$$f_a''(x) = 12ax^2 + 6x$$

Für $x_1 = 0$

$f_a''(0) = 0$ $\Rightarrow$ Keine Aussage möglich

f' macht auch keinen Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 0$

$\Rightarrow$ Sattelstelle

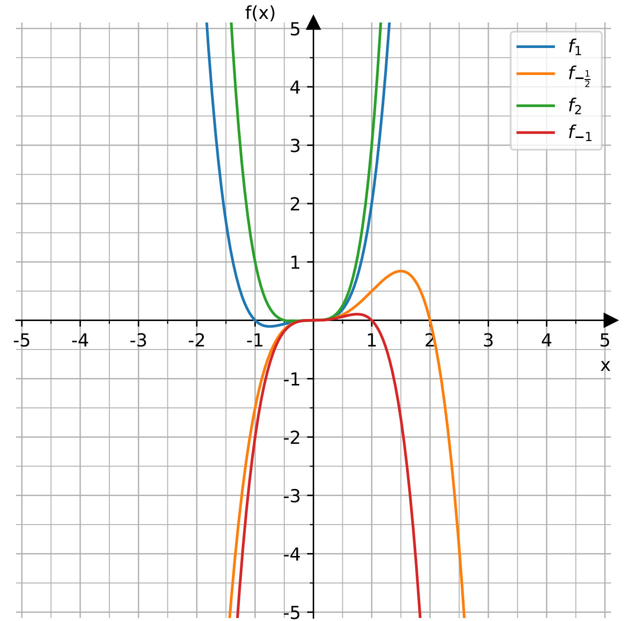
$$\text{Für } x_2 = -\frac{3}{4a}$$

$$f_a''\left(-\frac{3}{4a}\right) = \frac{108a}{16a^2} - \frac{18}{4a} = \frac{9}{4a}$$

Für $a > 0$ gilt: lokales Minimum bei $x_2 = -\dfrac{3}{4a}$

Für $a < 0$ gilt: lokales Maximum bei $x_2 = -\dfrac{3}{4a}$

4. Schaubild von f_1, f_{-1}, $f_{-\frac{1}{2}}$ und f_2



f(x)
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
f_1
$f_{-\frac{1}{2}}$
f_2
f_{-1}

Beispiel: Gemeinsame Punkte einer Funktionenschar bestimmen

Gegeben: $f_t(x) = (x-1) \cdot e^{-tx}, \quad t \in \mathbb{R}$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte aller Graphen G_{f_t}

Lösungsansatz 1: Verlaufen alle Graphen der Funktionenschar durch einen Punkt, dann gilt es auch für zwei ausgewählte. Wähle zwei einfach Vertreter, z.B. f_0 und f_1.

$G_0 \cap G_1:$

$$
\begin{aligned}
x-1 &= (x-1)\cdot e^{-x} \qquad \mid -(x-1)\\
0 &= (x-1)\cdot e^{-x} - (x-1)\\
0 &= (x-1)\cdot (e^{-x}-1)\\
x_1 &= 1 \text{ und } x_2 = 0\\
f_t(1) &= 0 \text{ und } f_t(0) = -1\\
&\Rightarrow \text{Beide Werte unabhängig von } t\\
&\Rightarrow \text{Alle Graphen gehen durch einen gemeinsamen Punkt } t\\
&\Rightarrow P(1|0) \text{ und } Q(0|-1)
\end{aligned}
$$

Lösungsansatz 2: Löse für zwei allgemeine t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$

$$
\begin{aligned}
G_{t_1} \cap G_{t_2} &: \\
(x-1)e^{-t_1 x} &= (x-1) \cdot e^{-t_2 x} \qquad \mid -(x-1)e^{-t_1 x} \\
0 &= (x-1) \cdot e^{-t_2 x} - (x-1)e^{-t_1 x} \\
0 &= (x-1) \cdot (e^{-t_2 x} - e^{-t_1 x}) \\
x_1 &= 1 \text{ und } e^{-t_2 x} - e^{-t_1 x} = 0 \\
&e^{-t_2 x} = e^{-t_1 x} \\
&x_2 = 0 \\
f_t(1) &= 0 \text{ und } f_t(0) = -1 \\
&\Rightarrow \text{Beide Werte unabhängig von } t \\
&\Rightarrow \text{Alle Graphen gehen durch einen gemeinsamen Punkt } t \\
&\Rightarrow P(1|0) \text{ und } Q(0|-1)
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Gegeben: Funktionenschar $f_a(x) = x - e^{x-a} + a^2, \quad a \in \mathbb{R}$

Aufgabe: Bestimme a so, dass der Hochpunkt der des Graphen der Funktion $f_a(x)$ minimal wird.

Lösung: 1. Bestimme die Hochpunkte 1. not. Bed.:

$$
\begin{aligned}
f_a'(x) &= 0 \\
f_a'(x) &= 1 - e^{x-a} = 0 \\
-e^{x-a} &= -1 \\
e^{x-a} &= 1 \\
x - a &= \ln(1) \\
x - a &= 0 \\
x &= a
\end{aligned}
$$

2. hinr. Bed.:

$$\begin{aligned} \text{2. hin. Bed: } f_a''(x) &\neq 0 \\ f_a''(x) &= -e^{x-a} \\ f_a''(a) &= -e^{a-a} = -e^{0} = -1 \\ \Rightarrow \text{ Hochpunkt } P\left(a|f(a)\right) &= P\left(a|a-1+a^2\right) \end{aligned}$$

2. Die Funktion $h(a) = a^2 + a - 1$ berechnet die Funktionswerte der lokalen Hochpunkte. Minimum bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\text{1. not. Bed: } f_a'(x) &= 0 \\
f_a'(x) &= 2a + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad a &= -\frac{1}{2} \\
\text{2. hin. Bed: } f_a''(x) &\neq 0 \\
f_a''(x) &= 2 \\
f_a''\left(-\frac{1}{3}\right) &= 2 \neq 0 \\
\Rightarrow \text{ Minimum } a &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. Antwort:
   Für $a = -\frac{1}{2}$ liegt der Hochpunkt H_a der Graphen G_{f_a} am tiefsten.

Beispiel:

Gegeben: Funktionsschar $f_a(x) = x^3 - ax + a, \quad a \in \mathbb{R}$

Aufgabe: Bestimme den Flächeninhalt, den die beiden Graphen der Funktionen f_a und f_{a-1} mit der y-Achse einschließen.

Lösung:

1. Schnittstelle berechnen:

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= x^3 - ax + a \\
f_{a-1}(x) &= x^3 - (a-1)x + (a-1) \\
f_a(x) &= f_{a-1}(x) \\
x^3 - ax + a &= x^3 - (a-1)x + (a-1) \qquad \mid -x^3 \\
-ax + a &= -ax + x + a - 1 \\
0 &= x - 1 \\
1 &= x
\end{aligned}
$$

Beobachtung: Schnittstelle ist unabhängig vom Parameter a.

2. Differenzfunktion berechnen:

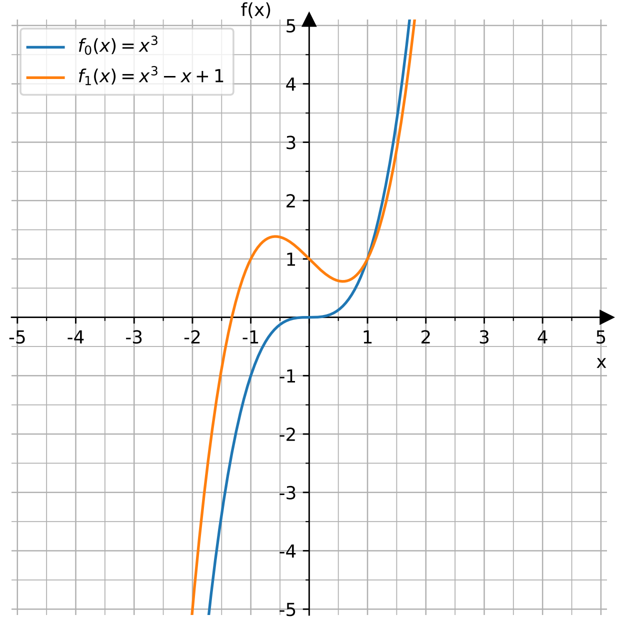
$$\begin{aligned} f_a(x) - f_{a-1}(x) &= x^3 - ax + a - (x^3 - (a-1)x + (a-1)) \\ &= x^3 - ax + a - x^3 + (a-1)x - (a-1) \\ &= x^3 - ax + a - x^3 + ax - 1x - a + 1 \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

Beobachtung: Differenzfunktion ist unabhängig vom Paramter a.

3. Flächeninhalt berechnen:

$$A = \int_0^1 f_a(x) - f_{a-1}(x) dx \quad = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2}1^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}0^2 + 0\right)$$
$$= \frac{1}{2}$$

Beobachtung: Der Flächeninhalt ist unabhänging vom Paramter a.



f(x)
$f_0(x) = x^3$
$f_1(x) = x^3 - x + 1$
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5