5. Waagerechte und senkrechte Asymptoten

Bisher: Wir haben hauptsächliche Ganzrationele Funktinen betrachtet.
Es gibt aber auch Funktionen, mit ganzrationaler Funktion im Nenner, z.B.:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x^3 - x + 1}$$

Dies Funktionen heißen **gebrochenrationale Funktionen**

Definition:

Funktionen der Art $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, bei denen g und g ganzrationele Funktionen sind und h einen Grad größer gleich 1 hat, heißen **gebrochenrationale Funktionen**.

Beispiele:

Beobachtung:

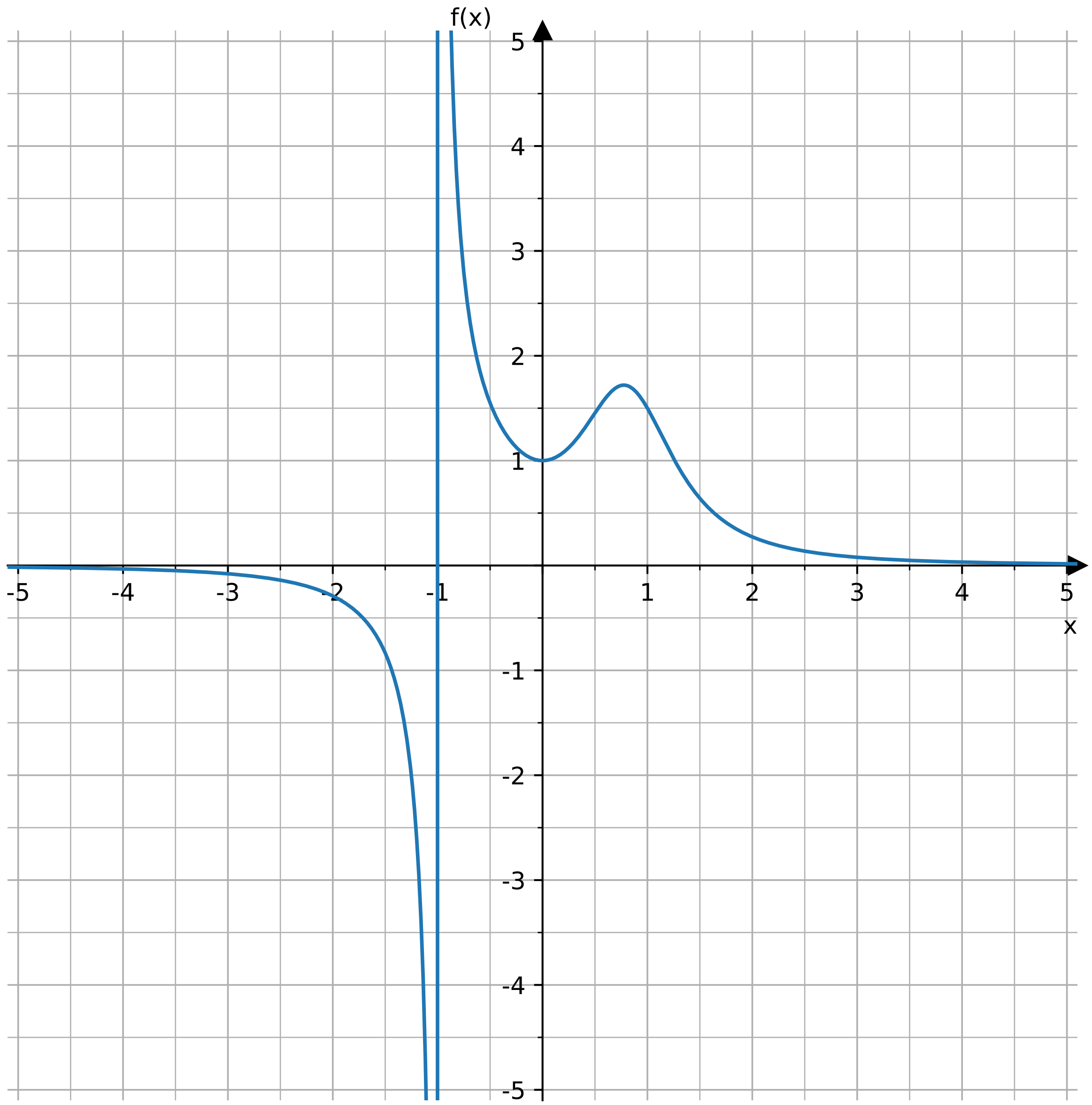
Ganzrationale Funktionen haben Definitionslücken, da nicht durch 0 geteilt werden darf.

Die Untersuchung und Angabe der Defintionsmenge ist folgliche obligatorisch. Dafür reicht es aus den Nenner zu betrachten.

Wie verläuft der Graph bei sochen Definitionslücken?

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x^3 - x + 1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



Beobachtung

Die Graphen von gebrochenrationalen Funktionen besitzen an den Defintionslücken senkrechte Asymptoten.

Untersuchung des Verhaltens an den Definitionslücken

Idee: Man nähert sich in einer Umgebung der Defintionslücke von beiden Seiten an und betrachtet die Veränderung der Funktionswerte.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^3-x+1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$
$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = ?$$
$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = ?$$

$x \searrow -1$:

x	$f(x)$
0	?
$-0,5$	?
$-0,9$	?
$-0,99$	?

$x \nearrow -1$:

x	$f(x)$
0	?
$-0,5$	?
$-0,9$	?
$-0,99$	?

Satz:

Gegeben: - ganzrationale Funktion $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ - g und h differenzierbare Funktionen

Es gilt:

Wenn $g(x_0) \neq 0$ und h(x_0)=0$ gilt, dann
- ist x_0 eine **Polstelle** von f - Die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist eine senkrechte Asymptote von f.