4. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie berechnet man

$$\int_0^3 \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 7dx$$

?

Antwort:

1. Bilde eine Zerlegungssume
2. Bilde den Grenzwert der Zerlegunssumme

$\Rightarrow$ **aufwändig**

Wir suchen eine einfachere Möglichkeit.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Gegeben:

- f auf dem Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktion
- F beliebige Stammfunktion von f auf dem Intervall I

Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung:

- Schreibweise für $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
- Damit gilt: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Beispiele:

- $$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$
- $$\int_{-2}^2e^x=\left[e^x \right]_{-2}^2 = e^2-e^{-2}

Integrale (orientierte Flächeninhalte) können mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Wie sieht die Stammfunktion zu

$$f(x) = 4x^3 + 3x^4$$

aus?

$$\Rightarrow F(x) = x^4 + 35 \cdot x^5$$

Wie sieht die Stammfunktion zu

$$f(x) = 25e^{2-5x}$$

aus?

$$\rightarrow F(x) = 25e^{2-5x} \cdot (-15)??$$

Wie sieht die Stammfunktion zu

$$f(x) = e^{-x^2}$$

aus?

$\Rightarrow$ Dafür gibt es keine Regel, dennoch gibt es einen orientierte Flächeninhalt.

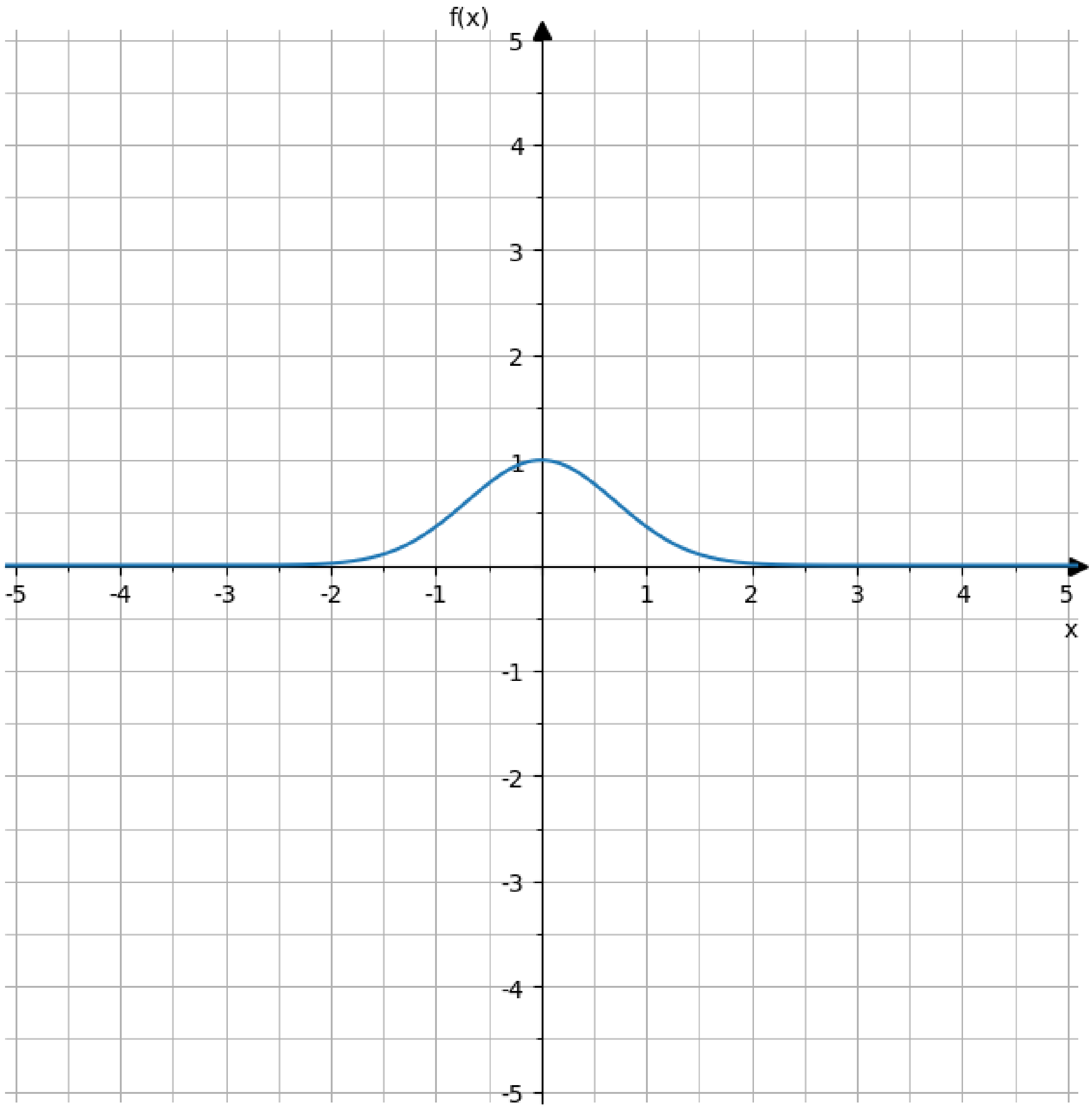
In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= np.exp(-x**2)
# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax= fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
```

```
# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#plt.show()
```

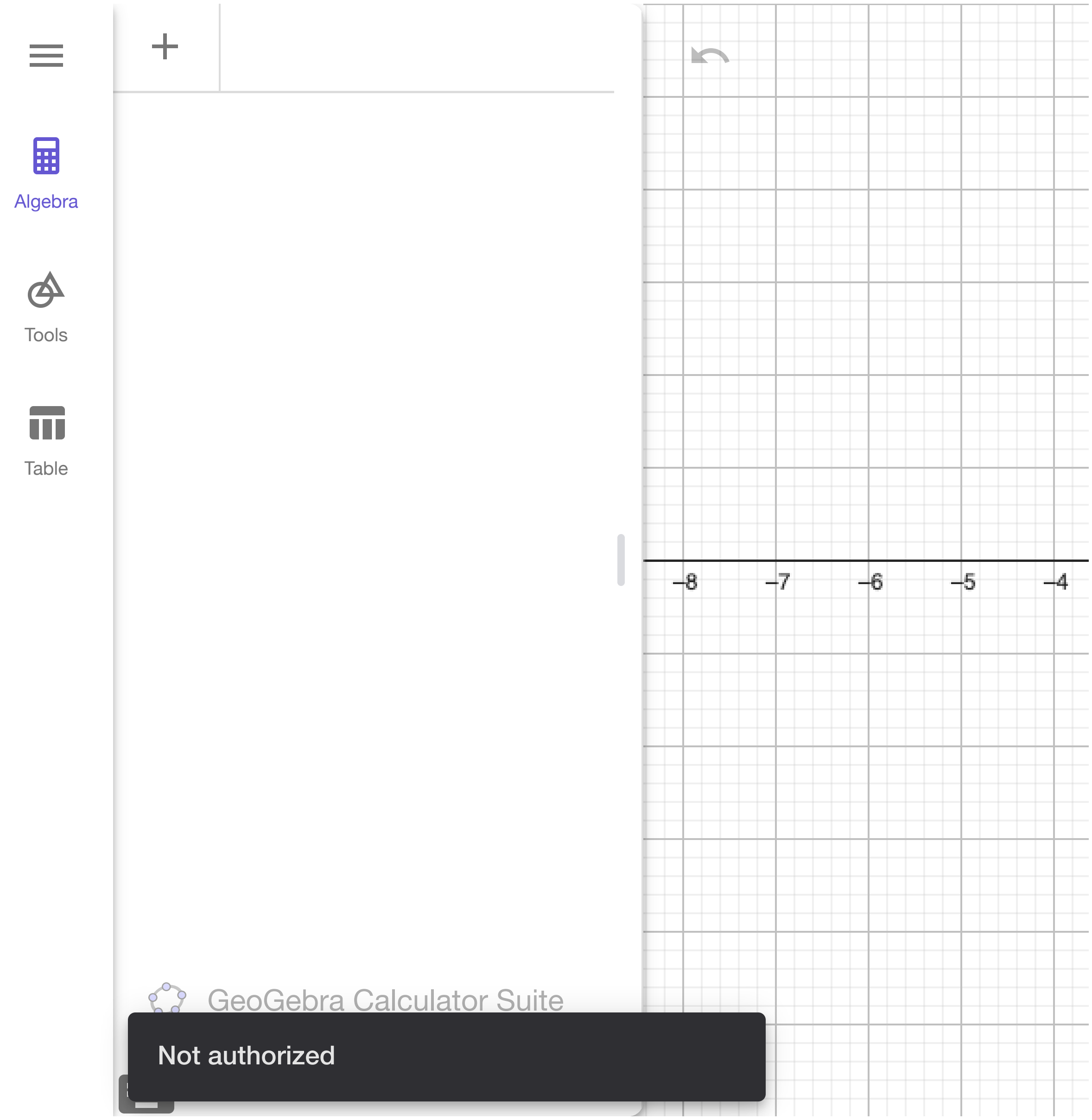
Out[1]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x10fa93690>]
```



In [5]:
```
from IPython.display import IFrame

IFrame('https://www.geogebra.org/calculator/zw4jzsgn', width=1200, height=60
```

Out[5]:



Definition:

Gegeben:

- f sei eine auf dem Intervall I integrierbare Funktion
- $u \in I$

Die Funktion

$$J_u(x) = \int_u^x f(t)dt$$

heißt Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

Satz 1:

Es gilt 1.)

$$J_u(u) = \int_u^u f(t)dt = 0$$

2.)

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Satz 2:
Ist J_u die Integralfunktion einer differenzierbaren Funktion f, so git:

$$J_u'(x) = f(x)$$

Die Integralfunktion J_u ist alos eine Stammfunktion von f