2. Linearfaktordarstellung

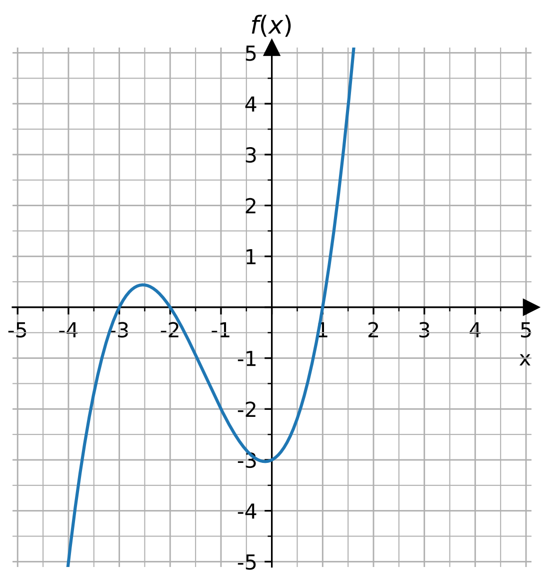
Beispiel:

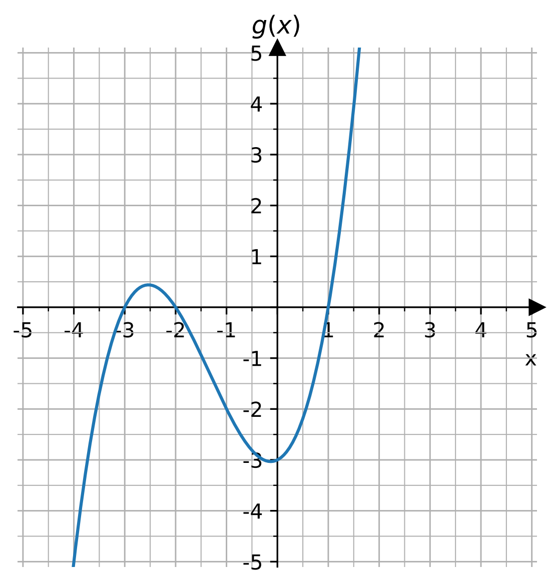
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x+3) \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$$

	$f(x)$	$g(x)$
Grad	berechenbar	ablesbar $\mathrm{grad}(f) = 3$
Nullstellen	ablesbar $n_1 = 1$ $n_2 = -2$ $n_3 = -3$	zu berechnen Verfahren nicht bekannt
Aufbau	Linearfaktoren	Polynom

Definition:
Bestehen Faktoren einer Multiplikation aus linearen Elementen der Form $ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man die Faktoren als Linearfaktoren.

Schauen wir uns die Funktionsgraphen der Fuktion f und g an:





Satz 1:
1. Jede ganzrationale Funktion in Lienarfaktordarstellung lässt sich durch ausmultiplizieren

in eine Polynomfunktion umformen.
2. Nicht jede ganzrationale Funktion besitzt eine Linearfaktordarstellung.

Beweis:
1. klar
2. Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1 \quad \square$

Satz 2:
Ist eine ganzrationale Funktion f vom Grad $n, n \in \mathbb{N}$ und der Nullstelle c gegeben, so gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad $n - 1$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x)$$

Beweis:
Gegeben:

- ganzrationale Funktion f
- $\text{grad}(f) = n$
- c Nullstelle von f

Verschiebung der Nullstelle c in den Ursprung durch Verschieben des Graphen von f entlang der x-Achse um $-c$ erzeugt eine neue Funktion h:

$$h(x) = f(x - (-c)) = f(x + c)$$

Eigenschaften von h:

- h ist auch eine ganzrationale Funktion mit $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$
- $x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h, d.h. $h(0) = f(0 + c) = f(c) = 0$

Es folgt damit: $a_0 = 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x \\ &= x \cdot (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1) \\ &= x \cdot k(x) \end{aligned}$$

Eigenschaften von $k(x)$:

- ganzrationale Funktion
- Gleichung $k(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$
- $\text{grad}(k) = n - 1$

Zurückverschiebung des Graphen von h um c entlang der x-Achse ergibt den Graphen von f und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x-c) \\ &= (x-c) \cdot k(x-c) \\ &= (x-c) \cdot g(x), \quad \text{mit } g(x) = k(x-c) \end{aligned}$$

mit $\text{grad}(g) = \text{grad}(k) = n-1 \quad \square$

Satz 3:
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad $n, n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.

Beweis:
Gegeben:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit $\text{grad}(f) = n$

$\Rightarrow$ Es gibt ein c_1, so das gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-c_1) \cdot (a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) \\ &= (x-c_1) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \text{grad}(g) = \text{grad}(f) - 1 = n-1$

Sei c_2 weiter Nullstelle von $f(x)$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-c_1)(x-c_2)\left(a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0\right) \\ &= (x-c_1)(x-c_2) \cdot h(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \text{grad}(h) = \text{grad}(f) - 2 = n-2$

Die Durchführung dieser Schritte ist insgesamt maximal n-mal möglich. $\square$