IV Funktionen und Graphen

1. Strecken, Verschieben, Spiegeln von Graphen

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 + 8 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \end{aligned}$$

Exkurs: Pascalsches Dreieck

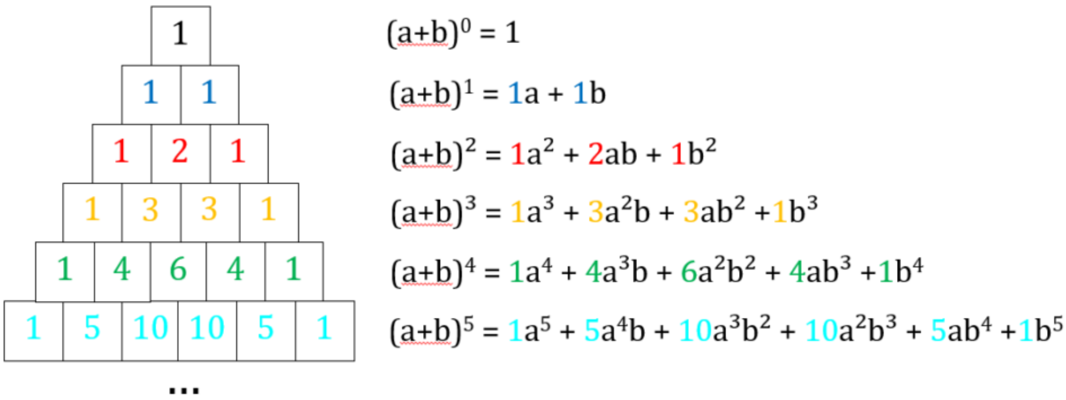
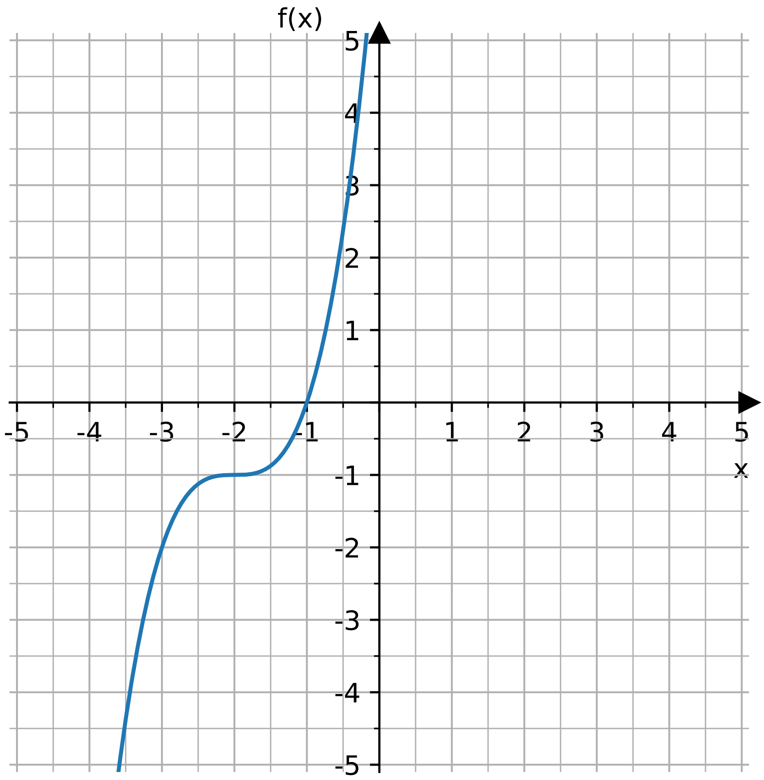


Figure 1: Abb. Pascalsches Dreieck



Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	8	27

Fragen:

- Welche Auswirkung hat es , wenn man jeden Funktionswert mit der gleichen Zahl d=-1 addiert?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	8	27
$f(x) - 1$	0-1	1-1	8-1	27-1

=> Alle Punkte des Funktionsgraphen liegen um eine Einheit tiefer, als bei der Ausgangsfunktion.
=> Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der y-Achse.

- Welche Auswirkung hat es, wenn man jeden Funktionswert mit der gleichen Zahl a=2 multipliziert?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	8	27
$2 \cdot f(x)$	0	2	16	54

=> Alle y-Werte der Punkte des ursprünglichen Funktionsgraphen werden mit a-vervielfacht und erhalten das entegengesetzte Vorzeichen.
=> Streckung des ursprünglichen Funktionsgraphen mit dem Faktor a.

- Welche Auswirkung hat es, wenn man jeden Funktionswert mit der gleichen Zahl a=-1 multipliziert?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	8	27
$-1 \cdot f(x)$	0	-1	-8	-27

=> Alle y-Werte der Punkte des ursprünglichen Funktionsgraphen erhalten das entegengesetzte Vorzeichen.
=> Speigelung des ursprünglichen Funktionsgraphen an der x-Achse.

- Welche Auswirkung hat es, wenn man von jeden x-Wert die gleiche Zahl c=2 subtrahiert.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	8	27
$f(x-2)$	-8	-1	0	1

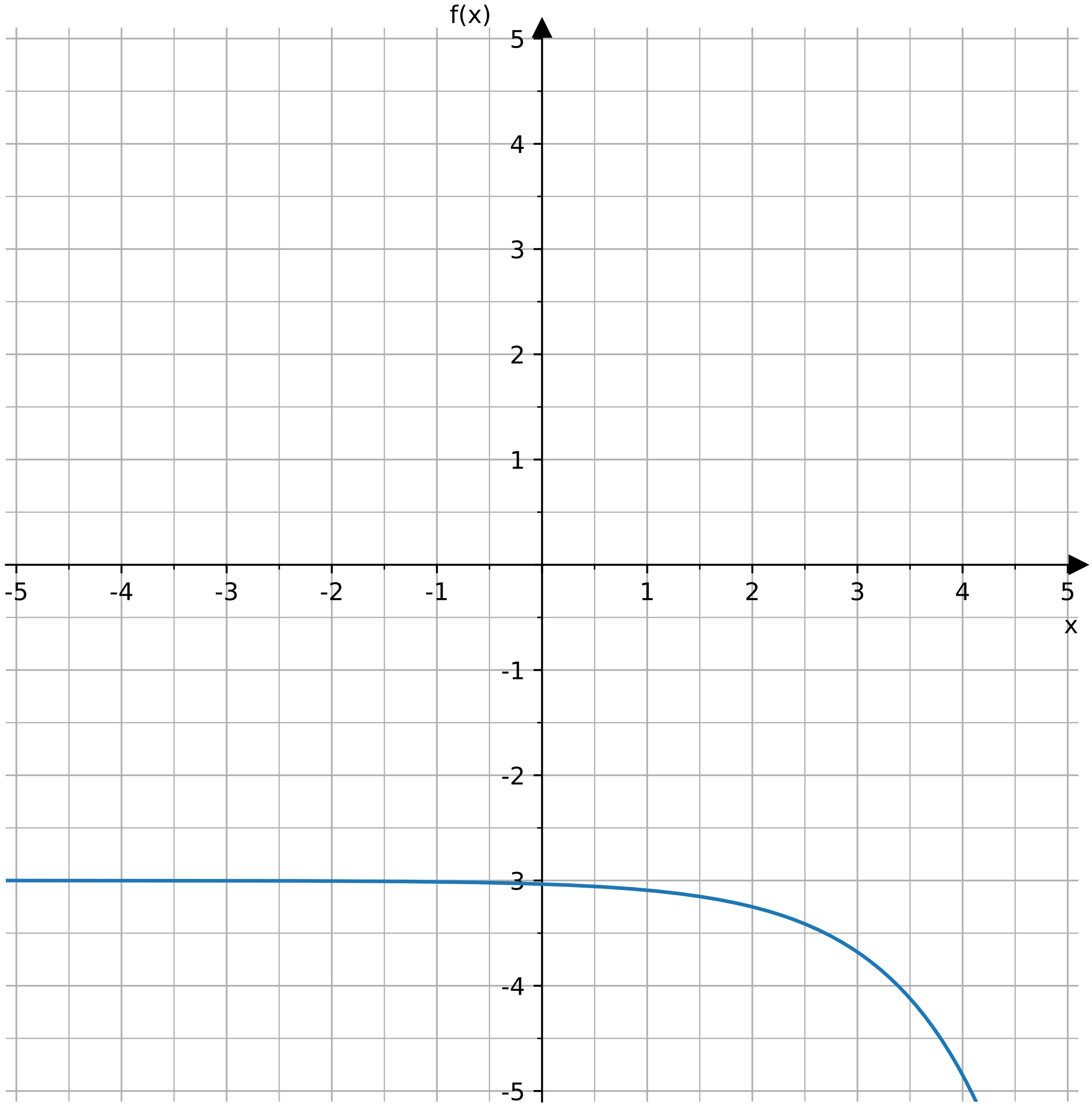
=> Alle Punkte des Funktionsgraphen haben den Funktionswert, den der ursprüngliche Graph schon zwei Einheiten weiter links gehabt hat.
=> Der Graph wird verschoben auf entlang der x-Achse.

Satz:
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = a \cdot f(x-c) + d$, mit $a, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$ entsteht aus dem Graphen der Funktion f durch

- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$
- Verschiebung entlag der y-Achse um d
- Verschiebung entlang der x-Achse um c.

Beispiel:

$$f(x) = e^x$$



Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0,135	0,368	1	e

Fragen:

- Welche Auswirkung hat es , wenn man jeden Funktionswert mit -1 subtrahiert?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0,135	0,368	1	e

x	-2	-1	0	1
$-f(x)$	-0,135	-0,368	-1	$-e$

=> Die y-Koordinaten aller Punkte des Grapen werden negativ.

=> Spiegelung des Funktionsgraphen an der x-Achse.

- Welche Auswirkung hat es , wenn man die Funktionsvariable mit -1 multipliziert?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0,135	0,368	1	e
$f(-x)$	7,389	e	1	0,386

=> Alle Punkte des Grahen erhalten die y-Koordinaten ihrer negativen Pendants.

=> Spiegelung des Funktionsgraphen an der y-Achse.

- Welche Auswirkung hat es , wenn man die Funktionsvariable mit -1 multipliziert und den Funktionswert auch mnit -1?

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0,135	0,368	1	e
$f(-x)$	-7,389	$-e$	-1	-0,386

=> Alle Punkte des Grahen erhalten die y-Koordinaten ihrer negativen Pendants.

=> Alle y-kooridnaten der Punkte erhalten das entegegensgesetzte Vorzeichen.

=> Spiegelung des Funktionsgraphen am Ursprung $O(0|0)$

Satz:
Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graphen der Funktion f durch

- $g(x) = f(-x)$ mit einer Spiegelung an der y-Achse.
- $g(x) = -f(x)$ mit einer Spiegelung an der x-Achse.
- $g(x) = -f(-x)$ mit einerSpiegelung am Ursprung $O(0|0)$

Nachweis einer Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. einer Punktsymmetrie zum Ursprung:

Satz:

Der Graph einer Funktion f ist genau dann - achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D_f$ gil: $f(-x) = f(x)$ - punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle $x \in D_f$ gil: $f(-x) = -f(x)$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sin(x) \\ f(-x) &= -x \cdot \sin(-x) \\ &= -(x \cdot \sin(-x)) \\ &= -(x \cdot (-\sin(x)) \\ &= x \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse.