2. Linearfaktordarstellung

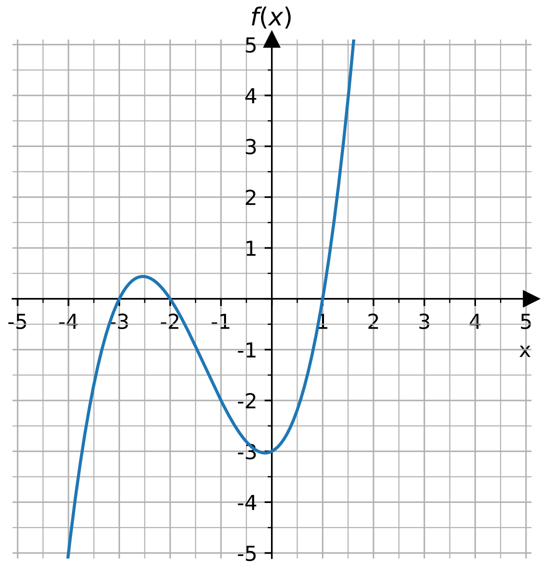
Beispiel:

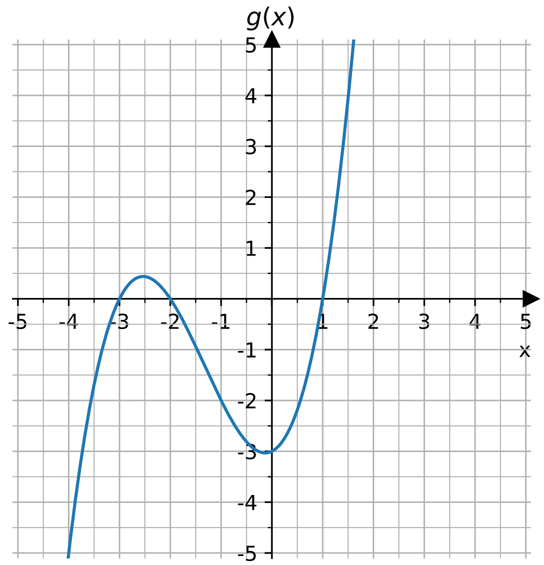
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x+3) \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$$

	$f(x)$	$g(x)$
Grad	berechenbar	ablesbar $\text{grad}(f) = 3$
Nullstellen	ablesbar $n_1 = 1$ $n_2 = -2$ $n_3 = -3$	zu berechnen Verfahren nicht bekannt
Aufbau	Linearfaktoren	Polynom

Definition:
Bestehen Faktoren einer Multiplikation aus linearen Elementen der Form $ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man die Faktoren als Linearfaktoren.

Schauen wir uns die Funktionsgraphen der Fuktion f und g an:





Satz 1:
1. Jede ganzrationale Funktion in Lienarfaktordarstellung lässt sich durch ausmultiplizieren

in eine Polynomfunktion umformen.
2. Nicht jede ganzrationale Funktion besitzt eine Linearfaktordarstellung.

Beweis:
1. klar
2. Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1 \quad \square$

Satz 2:
Ist eine ganzrationale Funktion f vom Grad $n, n \in \mathbb{N}$ und der Nullstelle c gegeben, so gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad $n-1$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x)$$

Beweis:
Gegeben:

- ganzrationale Funktion f
- $\text{grad}(f) = n$
- c Nullstelle von f

Verschiebung der Nullstelle c in den Ursprung durch Verschieben des Graphen von f entlang der x-Achse um $-c$ erzeugt eine neue Funktion h:

$$h(x) = f(x - (-c)) = f(x + c)$$

Eigenschaften von h:

- h ist auch eine ganzrationale Funktion mit $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$
- $x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h, d.h. $h(0) = f(0 + c) = f(c) = 0$

Es folgt damit: $a_0 = 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x \\ &= x \cdot (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1) \\ &= x \cdot k(x) \end{aligned}$$

Eigenschaften von $k(x)$:

- ganzrationale Funktion
- Gleichung $k(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$
- $\text{grad}(k) = n - 1$

Zurückverschiebung des Graphen von h um c entlang der x-Achse ergibt den Graphen von f und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x-c) \\ &= (x-c)\cdot k(x-c) \\ &= (x-c)\cdot g(x), \quad \text{mit } g(x) = k(x-c) \end{aligned}$$

mit $\text{grad}(g) = \text{grad}(k) = n-1 \quad \square$

Satz 3:
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad $n, n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n Nullstellen.

Beweis:
Gegeben:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit $\text{grad}(f) = n$

$\Rightarrow$ Es gibt ein c_1, so das gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-c_1)\cdot\left(a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) \\ &= (x-c_1)\cdot g(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \text{grad}(g) = \text{grad}(f) - 1 = n-1$

Sei c_2 weiter Nullstelle von $f(x)$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-c_1)(x-c_2)\left(a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0\right) \\ &= (x-c_1)(x-c_2)\cdot h(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \text{grad}(h) = \text{grad}(f) - 2 = n-2$

Die Durchführung dieser Schritte ist insgesamt maximal n-mal möglich. $\square$

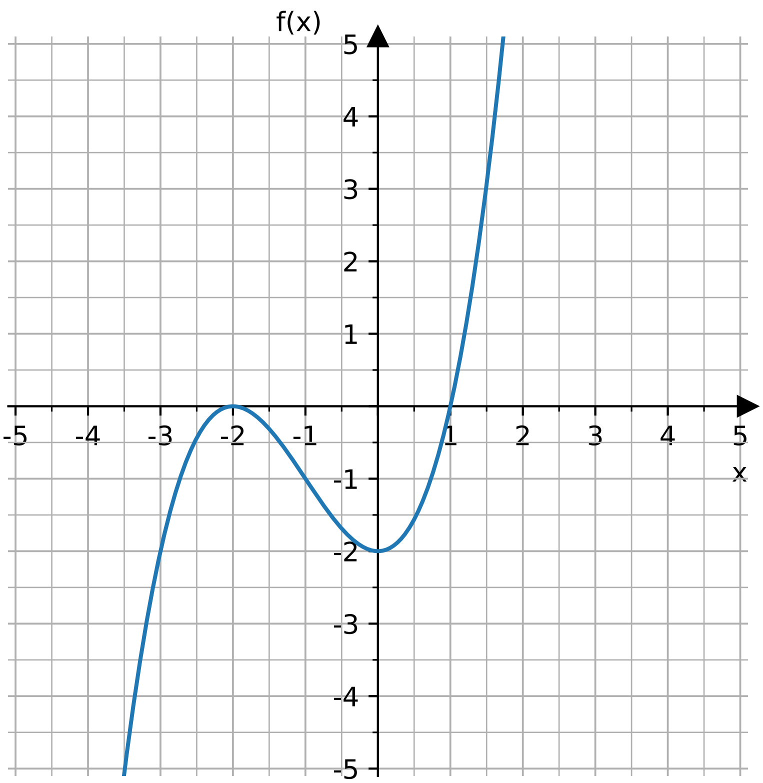
Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)^2$$

- der Linearfaktor $(x+2)$ ist doppelt vorhanden.
- $n_1 = -2$ ist eine "doppelte Nullstelle"
- In der Umgebung von $n_1 = -2$:
    - Der Linearfaktor $x(x-1)$ hat ungefähr den Wert -3.

  - Für $f(x)$ gilt somit $f(x) \approx -\frac{3}{2}(x+2)^2$
    $\Rightarrow$ Der Graph verläuft ungefähr wie eine nach oben geöffnete Parabel mit Tiefpunkt $n_1 = -2$
    $\Rightarrow$ Funktionsgraph berührt die x-Achse

- der Linearfaktor $(x-1)$ ist einmal vorhanden.
- $n_2 = 1$ ist eine "einfache Nullstelle"
- In der Umgebung von $n_1 = -2$:
  - Der Linearfaktor $x(x+2)^2$ hat ungefähr den Wert 9.
  - Für $f(x)$ gilt somit $f(x) \approx \frac{9}{2}(x-1)$
    $\Rightarrow$ In der Umgebung von $n_2 = 1$ verläuft der Graph ungefähr wie eine steigende Gerade.
    $\Rightarrow$ Der Funktionsgraph schneidet die x-Achse.



Verallgemeinerung im folgenden Satz:

Satz:
Gegeben:

- $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$ ganzrationale Funktion
- $g(a) \neq 0$

- $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $g(x)$ ist auch ganzrationale Funktion

Es gilt:

- Für $k = 1$ schneidet der Graph von f die x-Achse an der Stelle $x = a$
- Ist k ungerade ($k \neq 1$), so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Sattelpunkt auf der x-Achse.
- Ist k gerade, so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Extrempunkt auf der x-Achse.

Beispiel:

$$f(x) = 0,3(x-1)(x+1)^3(x-2)^4$$