

Ist x^y größer oder kleiner als y^x

Frage:

$$x^y \quad ? \quad y^x$$

Lösung:

Lege den Definitionsbereich fest: $x, y > 0$

$$\begin{aligned} x^y &\stackrel{?}{=} y^x && |\ln \text{ ist stetig und str. mono. st.} \\ \Leftrightarrow \ln(x^y) &\stackrel{?}{=} \ln(y^x) && |\ln\text{-Gesetze} \\ \Leftrightarrow y \ln(x) &\stackrel{?}{=} x \ln(y) && | : x, : y, x, y > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} &\stackrel{?}{=} \frac{\ln(y)}{y} \end{aligned}$$

Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{z}$$

Bestimme Maximum:

$$f'(z) = z^{-1} \cdot z^{-1} - \ln(z) \cdot z^{-2} = \frac{1 - \ln(z)}{z^2}$$

1. not. Bed.:

$$\begin{aligned} f'(z) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln(z) = 0 \\ \ln(z) &= 1 \\ z &= e \end{aligned}$$

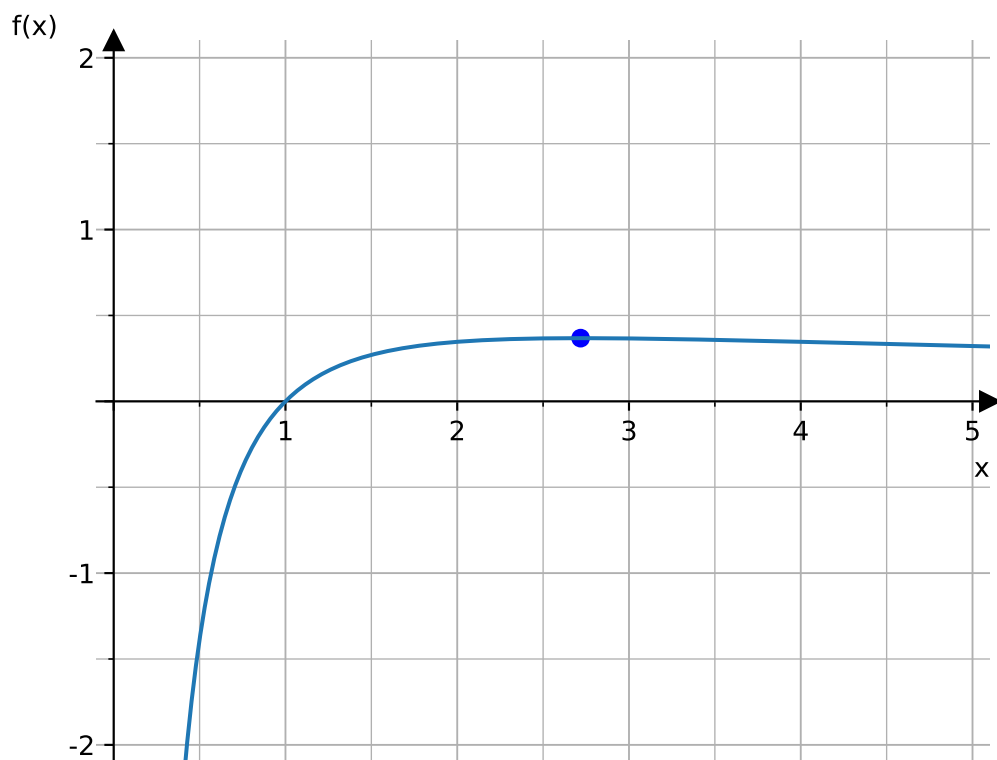
2. hinr. Bed.: VZW

Für $z \in (0; e)$ gilt $\ln(z) < 0$ und damit $\frac{1 - \ln(z)}{z^2} > 0$

Damit ist f auf $I_1 = (0; e)$ streng mono steigend.

Für $z \in (e; \infty)$ gilt $\ln(z) > 0$ und damit $\frac{1 - \ln(z)}{z^2} < 0$

Damit ist f auf $I_2 = (e; \infty)$ streng mono fallend.



Conclusio:

Wenn $y < x < e$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(y)}{y} &< \frac{\ln(x)}{x} \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln(y) &< y \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow y^x &< x^y \end{aligned}$$

Wenn $e < y < x$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(y)}{y} &> \frac{\ln(x)}{x} \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln(y) &> y \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow y^x &> x^y \end{aligned}$$