3. Gleichungen und Ungleichungen Lösen

Benötigt bei:

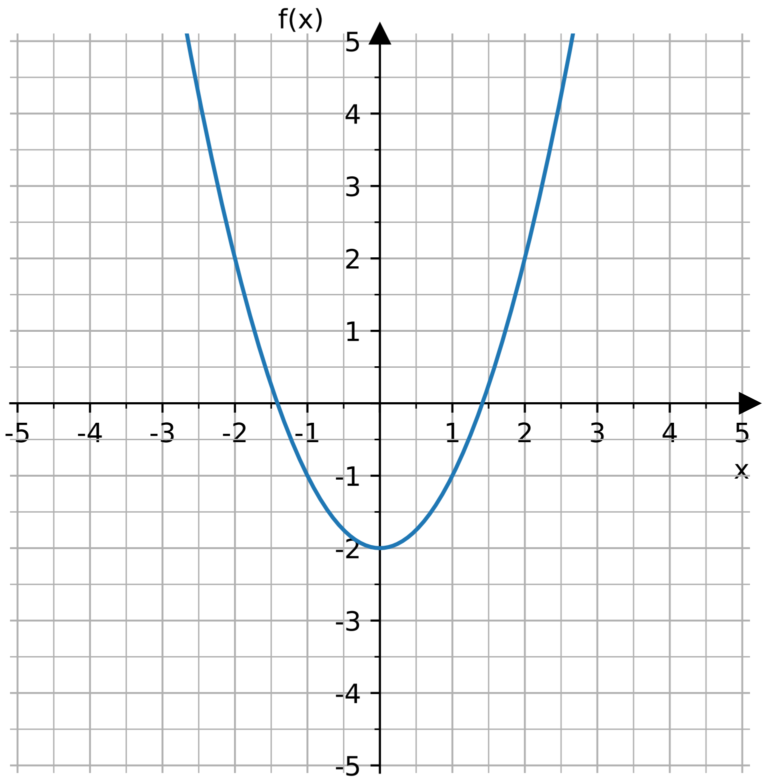
- Berechnung von Schnittpunkten des Graphen mit der x-Achse
- Anmerkung: Wie berechnet man den Schnitt mit der y-Achse?
- Extremstpunkte
  - notwendige Bedingung
- Wendepunkte
  - notwendige Bedingung

Nullgleichungen

1. Typ: $a_2x^2 + a_0 = 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = \sqrt{2}, \\ & x_2 = -\sqrt{2} \\ & L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

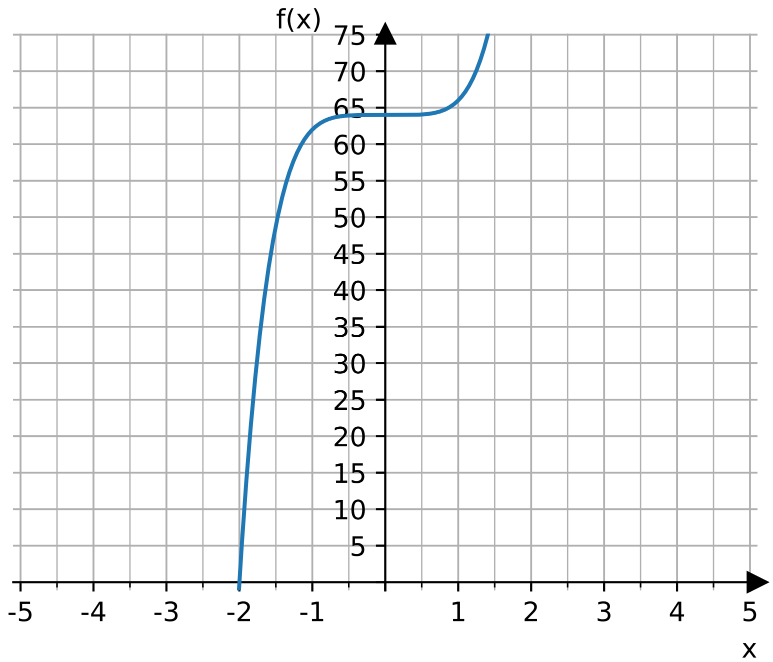
- Zwei Lösungen, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine positive Zahl vorhanden ist.
- Ein Lösung ausschließlich für die Gleichung $x^2 = 0$
- Keine Lösung, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine negative Zahl vorhanden ist.



2. Typ: $a_n x^n + a_0 = 0$

$$\begin{aligned} & 2x^5 + 64 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^5 = -64 \\ \Leftrightarrow \quad & x^5 = -32 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \sqrt[5]{-32} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -2 \\ & L = \{-2\} \end{aligned}$$

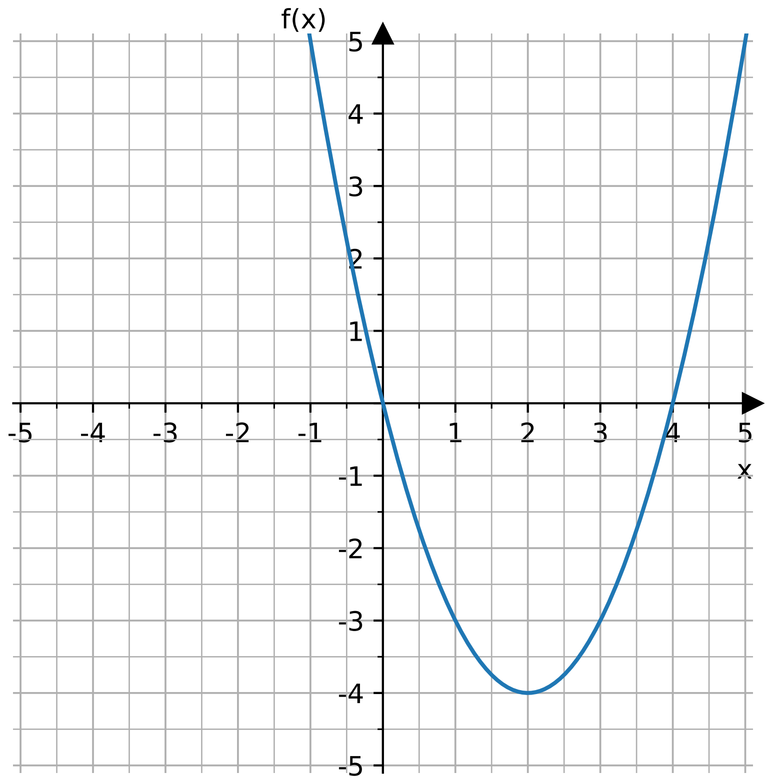
- mehrere Lösungen, wenn Grad n gerade ist.
- eine Lösung, wenn der Grad n ungerade ist.



3. Typ: $a_2x^2 + a_1x = 0$

$$\begin{aligned}
&& 2x^2 - 4x &= 0 \\
\Leftrightarrow && x(2x-4) &= 0 \\
\Leftrightarrow && x_1 &= 0, \text{ oder} \\
&& (2x_2 - 4) &= 0 \\
\Leftrightarrow && 2x_2 &= 4 \\
\Leftrightarrow && x_2 &= 2 \\
&& L &= \{0; 2\}
\end{aligned}$$

- Anwendung des Distributivgesetz durch Ausklammern der Variablen.
- Anwendung des Satzes vom Nullprodukt



4. Typ: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$
$$x_1 = 1$$
$$L = \{1\}$$

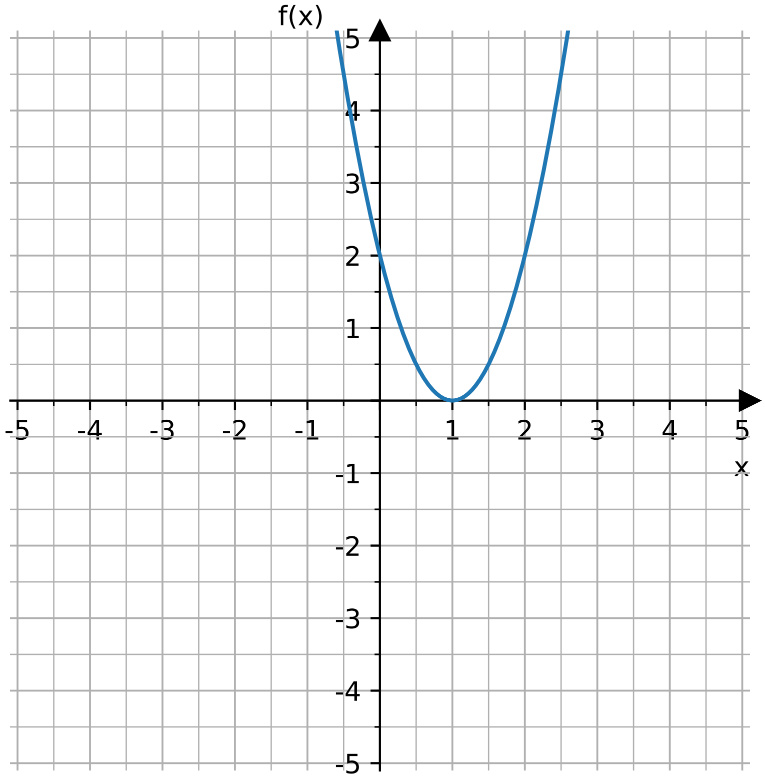
- für $a_2 = 1$: p-q-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- für $a_2 \neq 1 \neq 0$: abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Diskriminante entscheidet über die Anzahl der Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$

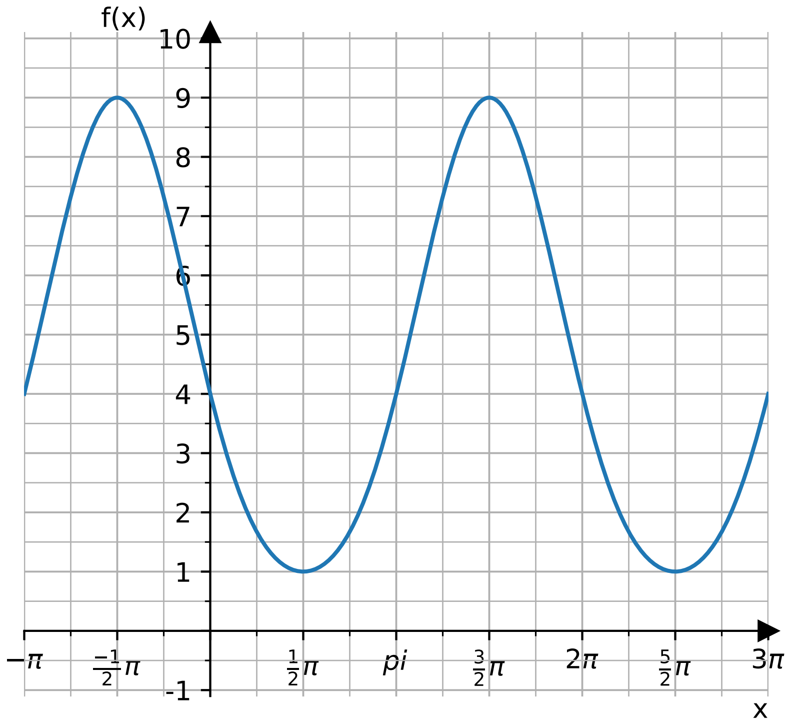


5. Typ: $a_2x^{2n} + a_1x^n + a_0 = 0$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) - 4\sin(x) + 4 &= 0 \\ u^2 - 4u + 4 &= 0 \quad \circ\, u = \sin(x) \\ \Leftrightarrow (u-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow u - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow u &= 2 \quad \circ\, u = \sin(x) \\ \sin(x) &= 2 \\ L &= \{\},\ \text{da}\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{aligned}$$

- Substitution und Resubstitution
- weiter Gleichungen, die so gelöst werden können:
  - $a_2e^{2x} + a_1e^x + a_0 = 0$

- $a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$



6. Typ: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ **und eine Lösung ist bekant**

$$x^3 - 6x^2 + 6 = 0$$

Errate eine Nullstelle, hier $x_1 = 1$

Dividiere Polynom durch den Term $x - 1$.

Dies ist eine Polynomdivision:

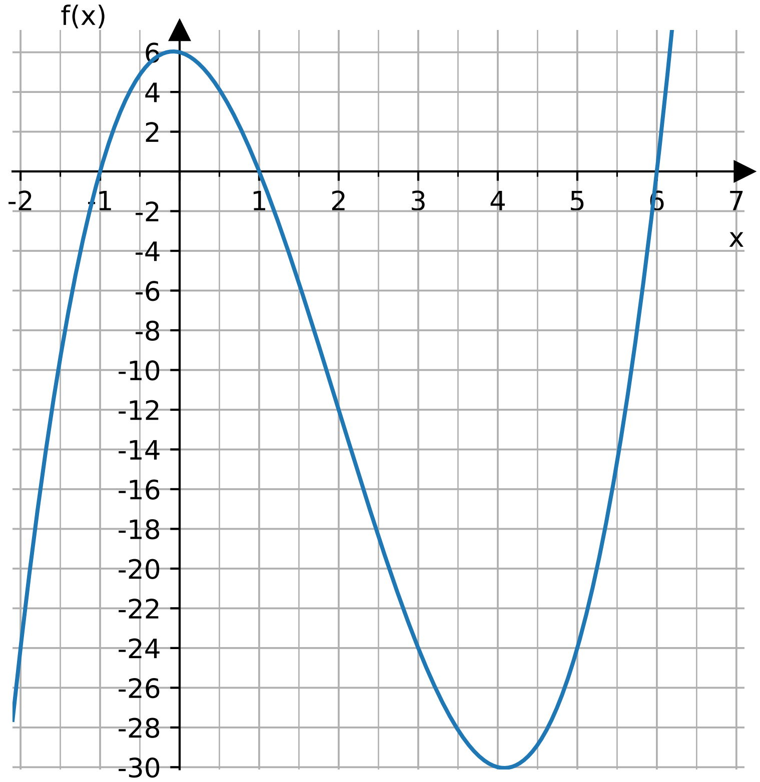
$$\begin{array}{llll}
x^3 & -6x^2 - x & +6 : (x-1) = x^2 - 5x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & \\
\hline
 & -5x^2 - x & \\
- & (-5x^2 + 5x) & \\
\hline
 & -6x & +6 \\
 & -(-6x & +6) \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

Suche von dem Ergebnis die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x - 6 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_1 &= 6 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Damit hat man alle Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ gefunden:

$$L = \{-1; 1; 6\}$$



Gleichungen mit Termen auf beiden Seiten

7. Typ: Wurzelgleichungen

$$
\begin{aligned}
& & \sqrt{20-2x}+6 &= x \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{20-2x} &= x-6 && \text{Wurzel isolieren} \\
&\Rightarrow & 20-2x &= (x-6)^2 && (!) \\
&\Leftrightarrow & 20-2x &= x^2-12x+36 && \text{(2. Binomische Formel)} \\
&\Leftrightarrow & 0 &= x^2-10x+16 \\
& & x_{1,2} &= 5 \pm \sqrt{25-16} && \text{p-q-Formel} \\
& & &= 5 \pm 9 \\
& & x_1 &= 14 \\
& & x_2 &= -4
\end{aligned}
$$

- Es muss quadriert werden.
- **Quadrieren ist keie Äquivalenzumformung (!)**
- Durch das Quadrieren, generiert man eventuell zusätliche Lösungen der quadrierten Gleichung.
- Probe ist zwingend erforderlich.

Ungleichungen

$$3 \cdot 5^x > 6$$

Löse die dazugehörige Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& & 3 \cdot 5^x &= 6 \\
&\Leftrightarrow & 5^x &= 2 \\
&\Leftrightarrow & x &= \log_5(2) \\
& & &\approx 0,43
\end{aligned}
$$

Übertrage auf die Ungleichung:
Testwert 0 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

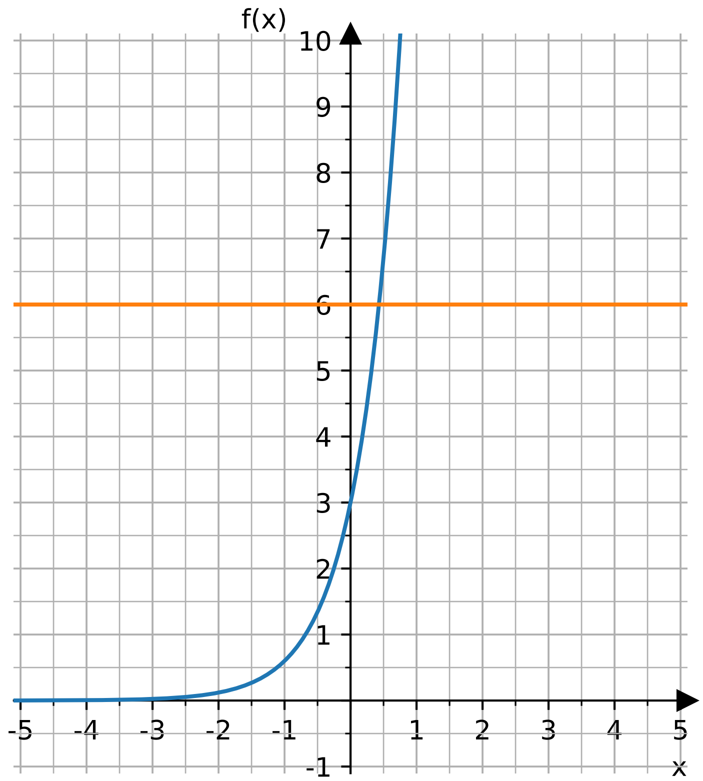
$$3 \cdot 5^0 = 3 < 6$$

Testwert 1 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

$$3 \cdot 5^1 = 15 > 6$$

Damit gilt für die Lösungsmenge:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \log_5(2)\}$$



f(x)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x