

## 5. Extrem- und Wendepunkte

```
In [7]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatter

# Definitionsmenge und Funktion
# -----
a = -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b = 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1 # untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b, 1000)
y1 = -x**4 + 2*x**2 + 1
# -----

# Einstellung des Graphen
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, aspect = 1)

# Definition der Haupteinheiten, reelle Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top', 'right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom', 'left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1), (0), ls="none", marker=">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis_transform())
ax.plot((0), (1), ls="none", marker="^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis_transform())

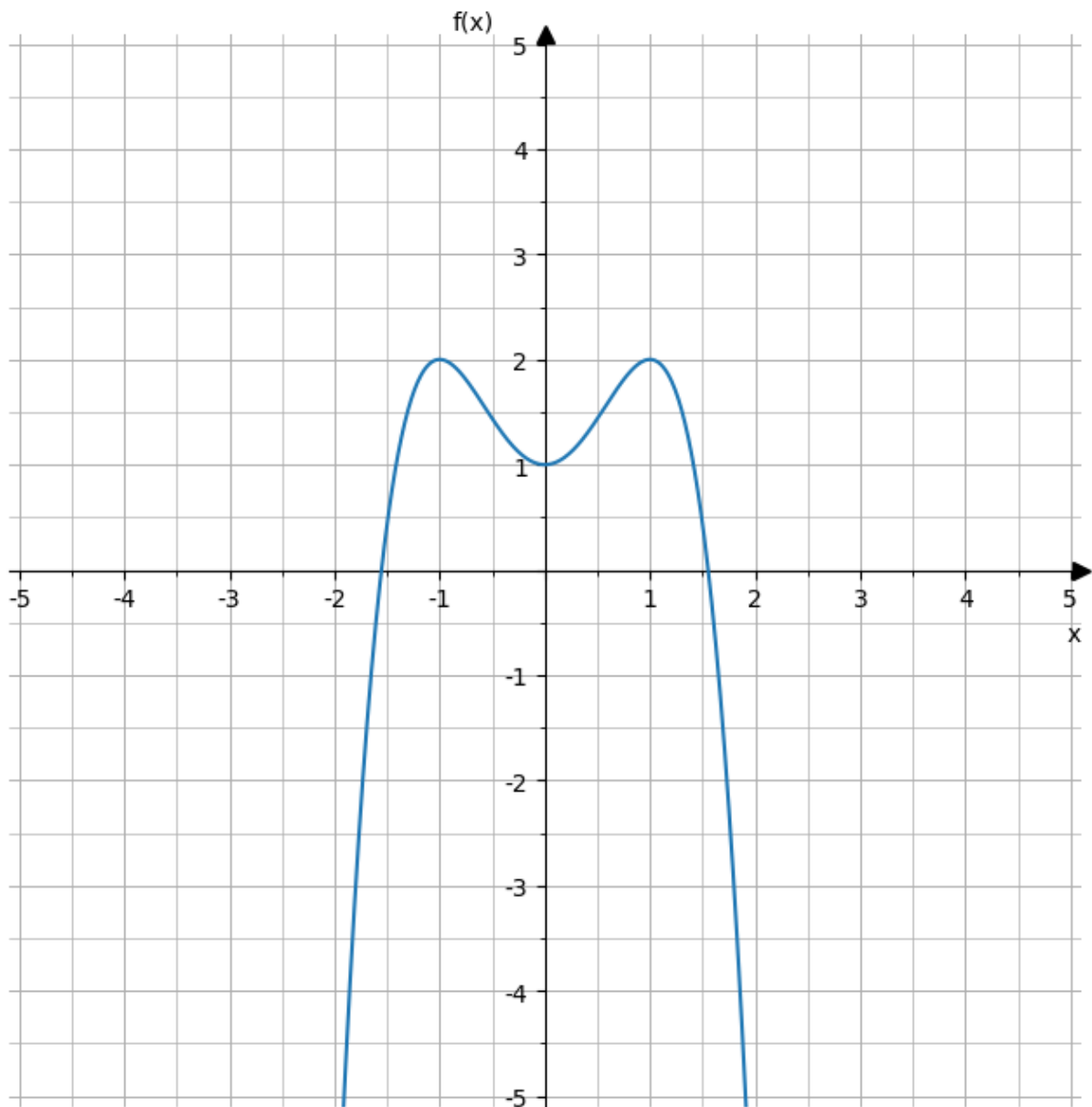
# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a, b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major", linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor", linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
```

```
ax.plot(x,y1, zorder=10)  
#plt.show()
```

Out[7]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x127177990>]



## Besondere Stellen und Funktionswerte von Funktionen

**Definitionen von Begriffen zur Beschreibung von Stellen und Funktionswerte einer Funktion**

**Maximumstelle  $x_0$  von  $f$**

In einer Umgebung einer Stelle  $x_0$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies die Stellen  $x_1$  und  $x_5$

**Lokales Maximum von  $f$**

Wenn in einer Umgebung einer Stelle  $x_0$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$ , dann ist  $f(x_0)$  ein \*lokales Maximum\*\*

Im Beispiel sind dies  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$

### **Globales Maximum von f**

Für alle  $x \in \mathbb{D}$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel ist dies  $f(x_1)$

### **Minimumstelle $x_0$ von f**

In einer Umgebung einer Stelle  $x_0$  gilt:  $f(x) \geq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies die Stellen  $x_3$

### **Lokales Minimum von f**

Wenn in einer Umgebung einer Stelle  $x_0$  gilt:  $f(x) \geq f(x_0)$ , dann ist  $f(x_0)$  ein **lokales Minimum**

Im Beispiel sind dies  $f(x_3)$

### **Globales Minimum von f**

Für alle  $x \in \mathbb{D}$  gilt:  $f(x) \geq f(x_0)$

### **Wendestelle von f**

Stellen, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert.

## **Eigenschaften des Graphen**

### **Definitionen**

#### **Hochpunkt eines Graphen**

$H(x_0|f(x_0))$ , für den für die Stelle  $x_0$  gilt: In einer Umgebung von  $x_0$  ist  $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies  $H_1(x_1|f(x_1))$  und  $H_2(x_5|f(x_5))$

#### **Tiefpunkt eines Graphen**

$H(x_0|f(x_0))$ , für den für die Stelle  $x_0$  gilt: In einer Umgebung von  $x_0$  ist  $f(x) \geq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies  $T(x_3|f(x_3))$

#### **Wendepunkt eines Graphen**

Punkt des Graphen, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert.

Im Beispiel  $W_1(x_2|f(x_2))$  und  $W_2(x_4|f(x_4))$

**Sattelpunkt eines Graphen** Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. (vgl. den Graphen von  $f(x) = x^3$  an der Stelle  $x=3$ .)

## Bestimmung der inneren Extremstellen

### Satz: Bestimmung von Extremstellen

Gegeben:

- Intervall  $I$
- Funktion  $f$
- $f$  auf  $I$  zweimal differenzierbar
- $x_0 \in I$  innere Stelle von  $I$  (also nicht die Randstellen)

$x_0$  ist eine Maximumstelle von  $f$ , wenn

1. **Notwendige Bedingung:**  $f'(x_0) = 0$
2. **Hinreichend Bedingung: (VZW)**  $f'$  macht an der Stelle  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel von + nach -

oder

2. **Hinreichende Bedingung:**  $f''(x) < 0$

$x_0$  ist eine Minimumstelle von  $f$ , wenn

1. **Notwendige Bedingung:**  $f'(x_0) = 0$
2. **Hinreichend Bedingung: (VZW)**  $f'$  macht an der Stelle  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel von - nach +.

oder

2. **Hinreichende Bedingung:**  $f''(x) > 0$

### Bemerkung:

Gilt für eine Funktion  $f$  und einer Stelle  $x_0$ , dass sowohl  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) = 0$ , dann kann man **nicht** daraus schließen, dass keine Extremstelle bei  $x_0$  vorliegt. In diesem Fall verwendet man zusätzlich die Untersuchung mit Hilfe des Vorzeichenwechsels (VZW) von  $f'$ . Liegt kein VZW vor, so kann man weiterhin **nicht** daraus schließen, dass keine Extremstelle bei  $x_0$  vorliegt.

### Satz: Bestimmung von Wendestellen

Gegeben:

- Intervalle  $I$
- Funktion  $f$ , definiert auf  $I$
- $f$  auf  $I$  dreimal differenzierbar
- $x_0 \in I$  innerer Stelle des Intervalls

$x_0$  ist eine **Wendestelle von  $f$** , wenn

1. **Notwendige Bedingung:**  $f''(x_0) = 0$
2. **Hinreichende Bedingung:**  $f''(x)$  macht an der Stelle  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel

oder

2. **Hinreichende Bedingung:**  $f'''(x_0) \neq 0$