

#### 4. Betragsfunktion

= Abstandsfunction

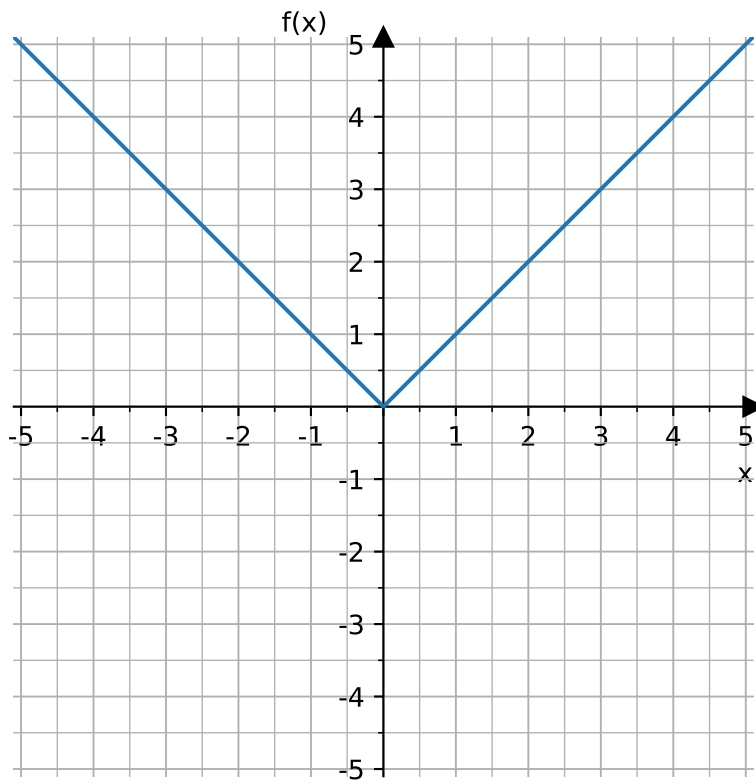
= “Mach-positiv”-Funktion

**Definition:**

Für  $x \in \mathbb{R}$  wird definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

**Funktionsgraph:**



**Beispiele:**

1)  $|2| = 2$

2)  $|-4| = 4$

3)  $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & , x \geq -1 \\ -(x + 1) & , x < -1 \end{cases}$

$$4) \ 2x^2 + |-x + 4| = \begin{cases} 2x^2 - x + 4 & , x \leq 4 \\ 2x^2 + x - 4 & , x > 4 \end{cases}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} -x + 4 &\geq 0 \\ -x &\geq -4 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

$$5. \ |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & , x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 3 \quad , x_2 = 1$$

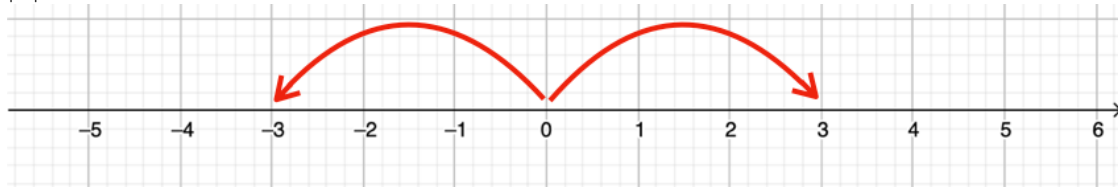
Es gibt folglich drei mögliche Intervalle:  $(-\infty; 1]$ ,  $(1; 3)$  und  $[3; \infty)$

Überprüfe, in welchen Intervallen die Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Wähle dazu Werte aus den Intervallen. Es ergibt sich:

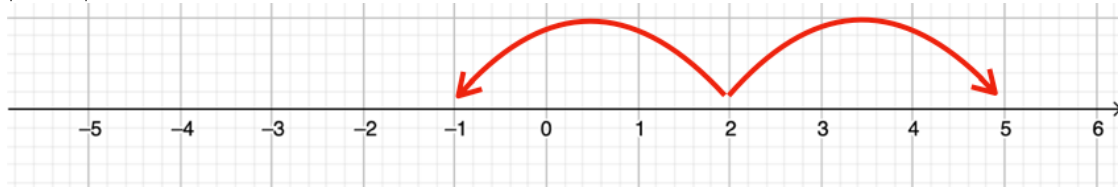
$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

**Abstand:**

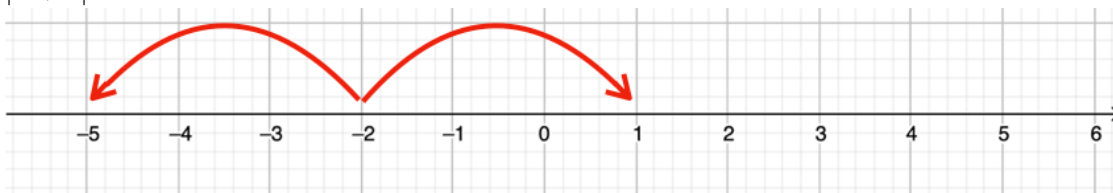
$$1) \ |x| = 3$$



$$2) \ |x - 2| = 3$$



3)  $|x + 2| = 3$



### Dreiecksungleichung:

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

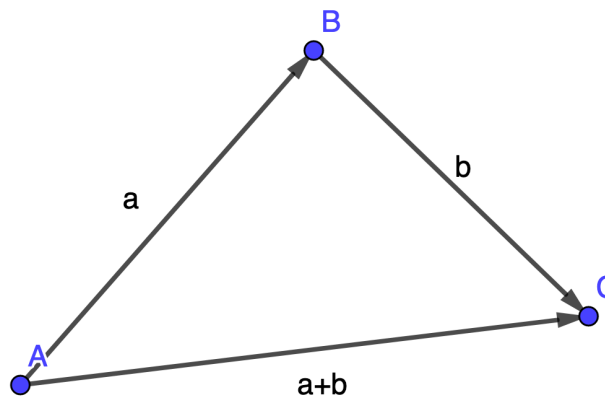


Figure 1: Dreiecksungleichung

### Beweis:

1) Es gilt:  $a \leq |a|$  und  $b \leq |b| \Rightarrow (a + b) \leq |a| + |b|$

2) Es gilt:  $-a \leq |a|$  und  $-b \leq |b| \Rightarrow -a + (-b) \leq |a| + |b|$

3) Es gilt:  $|a + b| = \begin{cases} a + b & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) & , a + b < 0 \end{cases}$

Mit 2) und 3) folgt:

$$|a + b| = \begin{cases} a + b \leq |a| + |b| & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) \leq |a| + |b| & , a + b < 0 \end{cases}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \checkmark$$