2. Verkette Funktionen

Wiederholung:

Gegeben: $u(x) = x^2 + 1 \text{ und } v(x) = 3x$ Mit Hilfe der Addtion, Subtraktion, Multiplikation und Divison lassen sich neue Funktionen konstruieren.

Funktionsname	Funktionsterm
Summe	$u + v$
Differenz	$u - v$
Multiplikation	$u \cdot v$
Division	$\frac{u}{v}$

Neues Beispiel:

Abbildung 1:

x	2x
-1	-2
0	0
$\frac{1}{2}$	1
$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

Abbildung 2:

x	x^2
-2	4
0	0
1	1
$2\sqrt{3}$	$???$

Zuerst Abbildung 1 dann Abbildung 2:

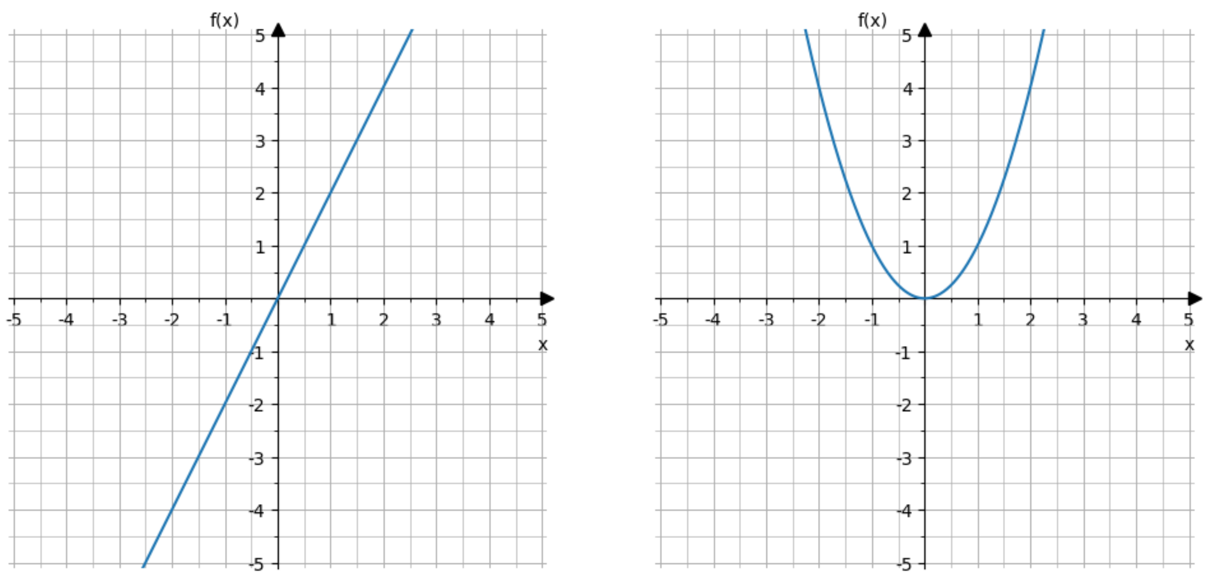
x	$???$
-1	
0	

x	???
$\frac{1}{2}$	
$\sqrt{3}$	

In [25]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ------------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= 2*x
y2= x*x
# ------------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(12,12))
ax = fig.add_subplot(1,2,1, aspect =1)
ax1 = fig.add_subplot(1,2,2, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

ax1.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax1.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax1.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax1.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax1.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax1.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

ax1.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax1.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
```

```python
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

ax1.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax1.get_yax
ax1.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax1.get_xax

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

ax1.set_xlim(a,b)
ax1.set_ylim(c, d)
ax1.set_xlabel("x", loc="right")
ax1.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

ax1.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax1.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
plt.subplot(121)
plt.plot(x,y1, zorder=10)

plt.subplot(122)
plt.plot(x,y2, zorder = 10)
#plt.show()
```

Out[25]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x130ad57d0>]

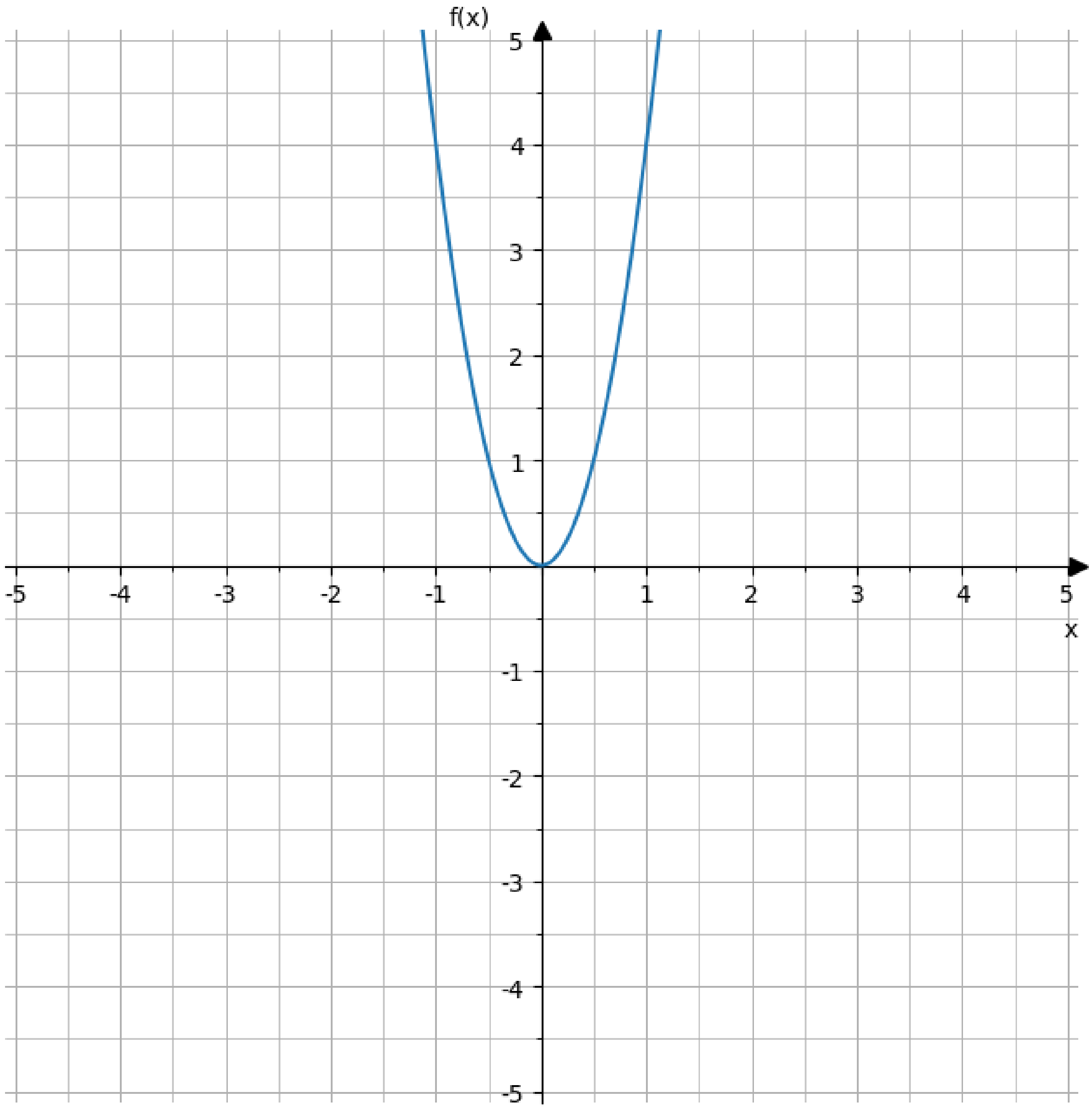


In [7]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt
```

```python
# Defintionsmenge und Funktion
# -----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= (2*x)**2
#y2= x*x
# -----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#ax.plot(x,y2, zorder = 0)
#plt.show()
```

Out[7]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x107eab350>]



Definition:

Gegeben:

- Funktion $v : x \mapsto v(x), \quad x \in D_1$
- Funktion $u : x \mapsto u(x), \quad x \in D_2$

Die Funktion $u \circ v : x \mapsto u(v(x))$ (lies u nach v) heißt **Verkettung der Funktionen u und v**. v ist die **innere Funktion** und u ist die **äußere Funktion**.

Für die Defintionsmenge von $u \circ v$ gilt: $D = \{x | x \in D_v \text{ und } v(x) \in D_u\}$

Bemerkung:

- Die Verkettung von Funktionen ist nich kommutativ, d.h. $v(u(x)) \neq u(v(x))$

- Beispiel: $u(x) = \sqrt{x}, \quad v(x) = 2x^2, \qquad u(v(x) = \sqrt{2x^2}n \neq v(u(x) = 2\sqrt{x}^2$

- Die Zerlegung von Teilfunktinen ist nicht immer eindeutig.
- Überlegen Sie sich dazu Beispiele.

Problem: Wie lautet die Ableitungsfunktionen zum Beispiel von der Funktion $f(x) = (2x+2)^3$?

Überlegung:

Gegeben:

- $f(x) = u(v(x))$
- $x_0 \in D_v$ und $v(x_0)$ differenzierbar
- $v(x_0) \in D_u$ und $v(v(x_0))$ differenzierbar

Idee: Stelle den allgemeinen Differenzenquotient auf.

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\overset{f(x)=u(v(x))}{=} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$$

Idee: Mutlipliziere mit 1

$$= \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{v(x) - v(x_0)}$$

$$= \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$\overset{v=v(x), v_0=v(x_0)}{=} \frac{u(v) - u(v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Idee: Wende nun den Limes an

$$ \lim \limits_{x \to x_0}\frac{u(v)-u(v_0)}{v-v_0} \cdot \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}

$$\overset{v \text{ diffbar} \Rightarrow v \text{ stetig in } x_0}{=} u'(v_0) \cdot v'(x_0)$$

$$ = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)

Satz: Kettenregel

Seien u und v differenzierbare Funktionen und $f = u \circ v$, so ist auch f differenzeirbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Merkrege: "Äußere Ableitung mal innere Ableitung"

Bemerkung:

Die Herleitung gilt nur für Funktionen, bei denen $v(x) - v(x_0) \neq 0$ für eine hinreichend kleine Umgebung. Die Verallgemeinerung lässt sich aber auch zeigen.

Übungen:

- Buch Seite 18 Nr. und 3
- Buch Seite 18 Nr. 6