3. Die Stammfunktion

Gegeben sind folgende Funktionen und Ihre Ableitungsfunktionen:

Funktion f	Ableitungsfunktion f'
$f(x) = x^3 - \sqrt{x}$	$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = -4x^4 + \frac{2}{3}x$	$f'(x) = -16x^3 + \frac{2}{3}$
$f(x) = x^3 - 4x + 2$	$f'(x) = 3x^2 - 4$

Welche Funktion muss man Ableiten, um folgende Ableitungsfunktionen zu erhalten?

Ableitungsfunktion f'	abzuleitende Funktion F
$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$f'(x) = -16x^3 + \frac{2}{3}$	
$f'(x) = 3x^2 - 4$	

Definition:
Gegeben seien ein Intervall I und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$
Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f auf dem Intervall I, wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Satz:
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^z, \quad z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
Es gilt:

$$F(x) = \frac{1}{z+1} x^{z+1}$$

Beispiele:

1. $f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3$
2. $f(x) = -x^7 \qquad F(x) = -\frac{1}{8}x^8$
3. $f(x) = x^{-3} \qquad F(x) = -\frac{1}{3}x^{-2}$

Satz:
Seien H und H Stammfunktionen der Funktinen g und g und $c, m \in \mathbb{R}$.

Summenregel: Wenn

$$f(x) = g(x) + h(x),\ \text{dann gilt: } F(X) = G(x) + H(x)$$

Faktorregel: Wenn

$$f(x) = c \cdot g(x),\ \text{dann gilt: } F(X) = c \cdot G(x)$$

lineare Substitution: Wenn

$$f(x) = g(m \cdot x + c),\ \text{dann gilt: } F(X) = \frac{1}{m} \cdot G(m \cdot x + c)$$

Beispiele:

Zur Summenregel:

$$f(x) = 2x^2 + 3 \quad F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Zur Produktregel:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 \quad F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3$$

Zur linearen Substitution:

$$f(r) = (3r + 2)^2 \quad F(r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(3r + 2)^3$$

Beobachtung:

Für $f(x) = x^4$ gilt $F(X) = \frac{1}{5}x^5$, da $F'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' = x^4$

Für die Funktion $F_2(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2$ gilt aber auch $F_2'(x) = x^4$

Für die Funktion $F_3(x) = \frac{1}{5}x^5 - 0,3$ gilt aber auch $F_2'(x) = x^4$

Allgemein bedeutet das: Für die Funktion $F_r(x) = \frac{1}{5}x^5 + r$ mit $r \in \mathbb{R}$ gilt $F_r'(x) = x^4$

Das führt zu dem Satz:

Satz:

Ist F eine Stammfunktion zur Funktion f auf dem Intervall I, dann gibt es zu f weitere Stammfunktinen.
Für die weiteren Stammfunktionen G gilt:

$$F(x) = G(x) + c, \text{mit der Konstanten } c \in \mathbb{R}$$

Stammfunktionen zu einigen Grundfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
1	x
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|\|x\|\|)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$

| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ |$\sin(x)$ | $-\cos(x)$| | $\cos(x)$| $sin(x)$| | e^x | e^x|