9. Ortskurven

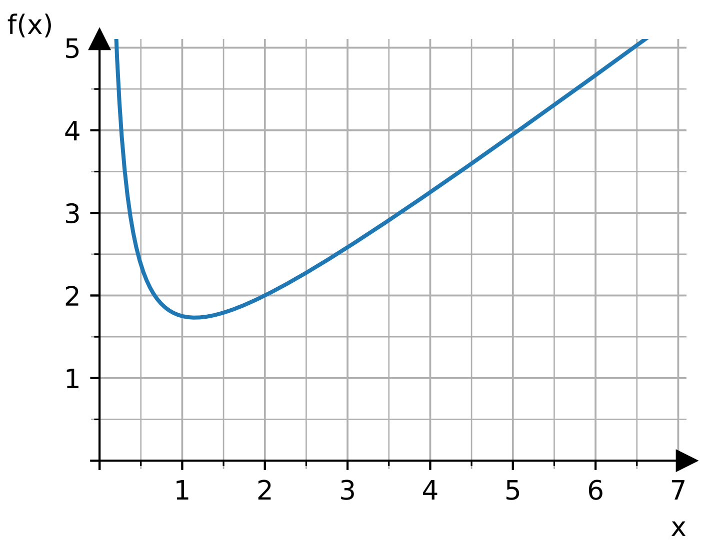
2024-03-19

Beispiel:

Geegeben: Funktionenschar $f_a(x) = \frac{1}{x} + ax, \quad x > 0, a > 0$

Aufgabe a:

Zeichne den Graphen $G_{f_{0,75}}$ zur Funktion $f_{0,75}(x) = \frac{1}{x} + 0,75x$



Aufgabe b:

Gib die Bereiche an, auf dem f_{0,75}(x) kleiner als 2 ist.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + 0,75x &= 2 \\
1 + 0.75x^2 &= 2x \\
0,75x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0,75 \cdot 1}}{2 \cdot 0,75} = \frac{2 \pm 1}{1,5} \\
x_1 = 2 \quad x_2 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Überprüfe, ob auf dem Intervall $I = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$ $f_{0,75}(x) < 2$ gilt, mit Stichprobe:

$$f_{0,75}(1) = 1 + 0,75 \cdot 1 = 1,75 < 2$$

Das gesuchte Intervall ist $I = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

Aufgabe c:

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Tiefpunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten und bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die Tiefpunkte aller Graphen G_a liegen.

1. notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f_a'(x) &= 0 \\
-x^{-2} + a &= 0 \\
x^{-2} &= a \\
x^2 &= \frac{1}{a} \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich ist $x > 0: \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$

2. hinreichende Bedingung: $f_a'(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_a''(x) &= 2x^{-3} \\
f_a''\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) &> 0
\end{aligned}$$

Die Tiefpunkte lauten: $T_a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}|2\sqrt{a})\right)$

3. Ortskurve der Tiefpunkte bestimmen

Aus den Koordinaten der Tiefpunkte lassen sich die x- und die y-Kooridnate ablesen.

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad y = 2\sqrt{a}$$

Mit den Koordinaten muss eine Gleichung in Abhänigkeit von x erstellte werden.

Forme $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ nach a um.

$$\sqrt{a} = \frac{1}{x}$$
$$a = \frac{1}{x^2}$$

Setze das Ergebnis für a in die Gleichung $y = 2\sqrt{a}$ ein.

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$
$$y = \frac{2}{x}$$