I. Grundlagen der Differenzialrechnung

1. Ableitungen und Ableitungsregeln

Funktionsbegriff

Defintion Funktion:

Eine Funktion f ist eine Abbildung, bei der jedem Wert der Defintionsmenge $\mathbb{D}$ ein Wert aus der Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet wird. Man schreibt kurz: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$.

Funktionen können mit Hilfe

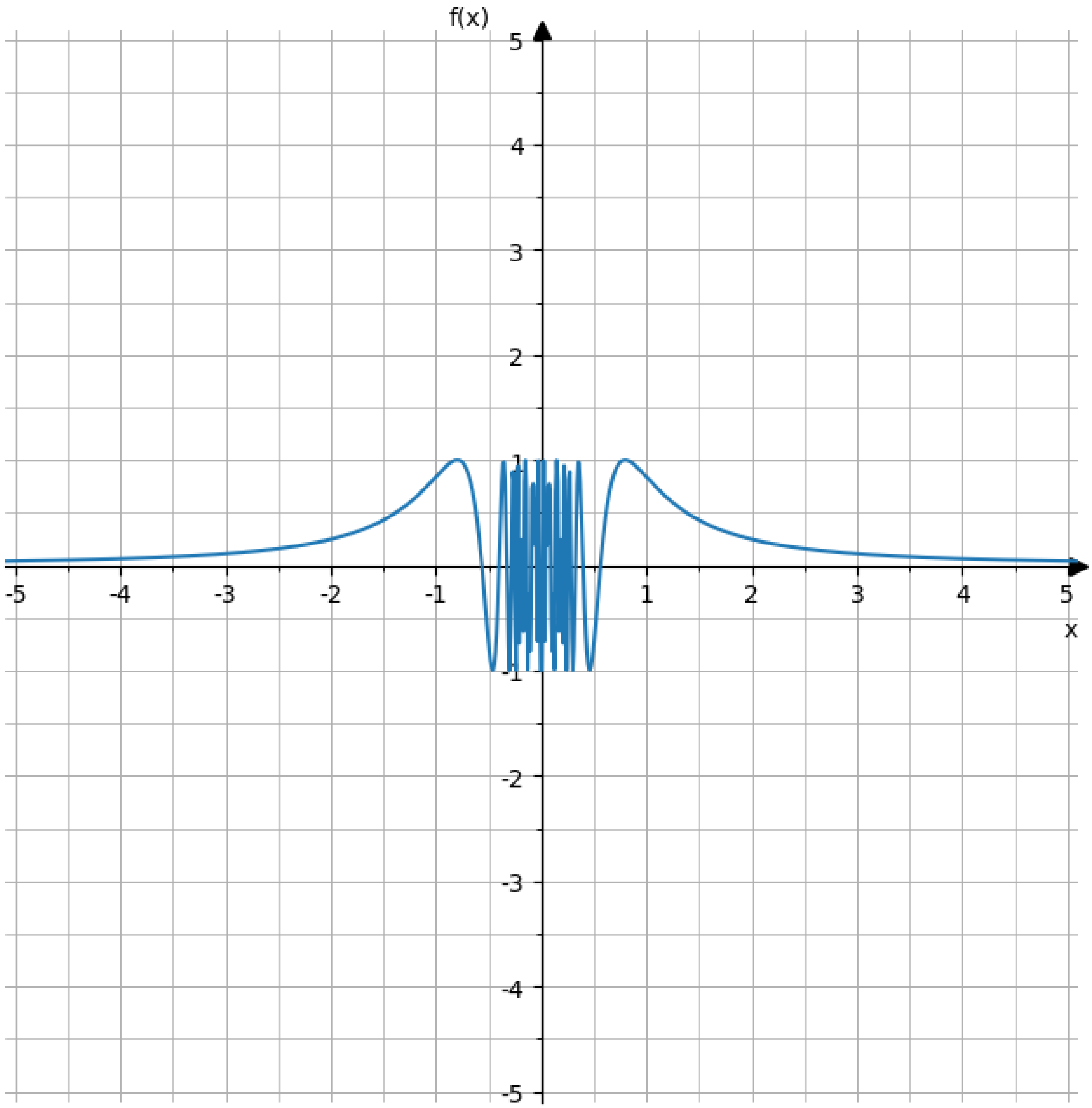
- einer Wertetabelle (nur ausgewählte Werte)
- der Zuordnungsvorschrift $x \to f(x)$
- der Funktionsgleichung $f(x) = \ldots$
- eines Funktionsgraphen beschrieben weden.

In [4]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= np.sin(1/x**2)
# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
```

```python
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#plt.show()
```

Out[4]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x11f710850>]
```



Defintion Intervalle:

$$[a;b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$(a;b) = \quad]a;b[\quad := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$(a;b] = \quad]a;b] \quad := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a;b) = \quad [a;b[\quad := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \geq b\}$$

Ableitung einer Funktion

Geogebra Differenzenquotient

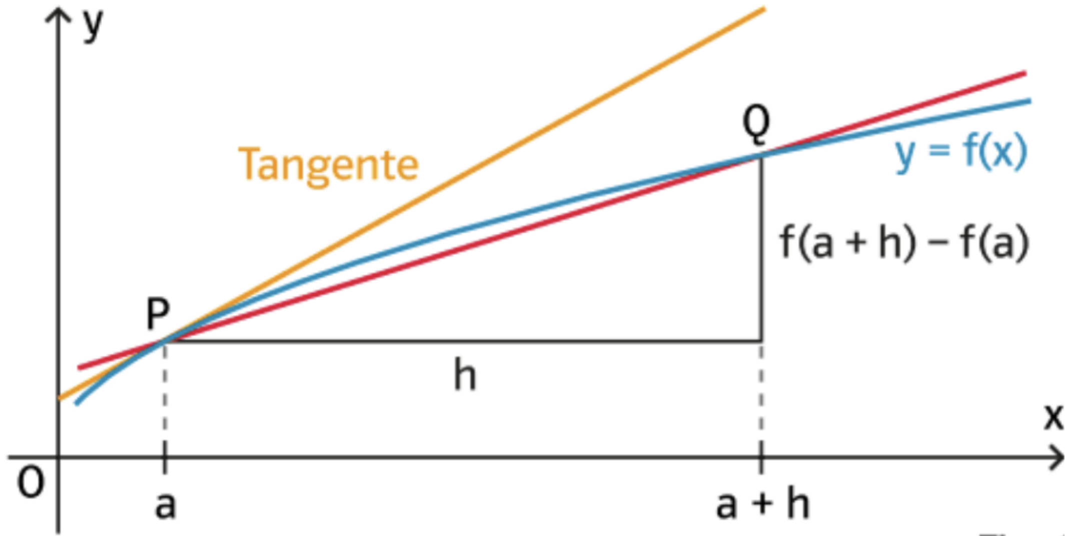


Fig. 1

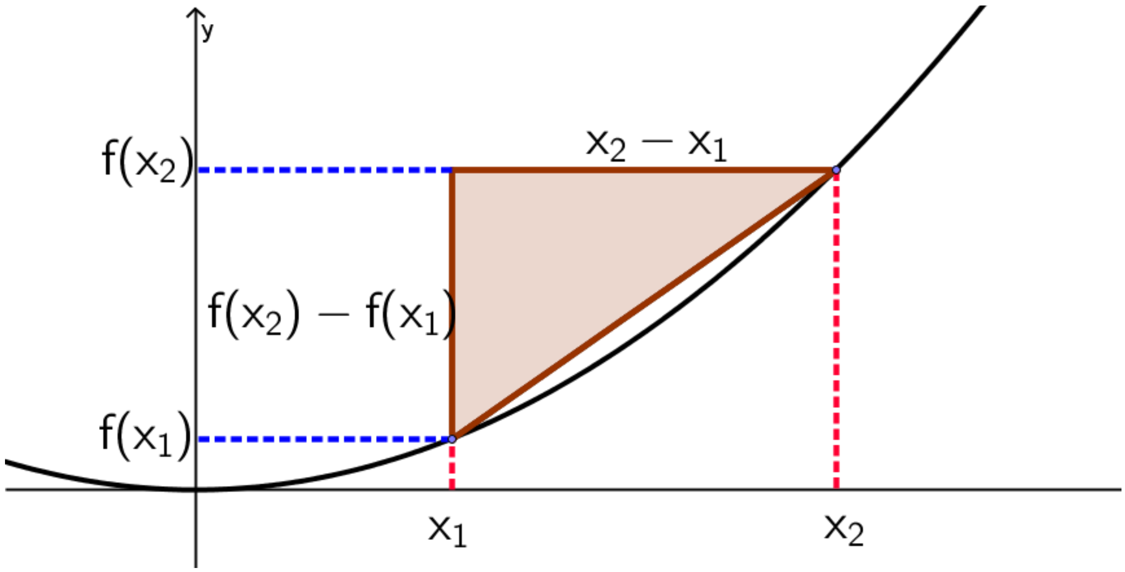
Defintion Ableitung einer Funktion (h-Methode):

Gegeben: Eine Funktion f mit Defintionsmenge $\mathbb{D}_\mathrm{f}$. Der Quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist der Differenzenquotient. Dieser beschreibt das Änerungsverhalten in einem Bereich um die Stelle $a \in \mathbb{D}\mathrm{f}$

Gibt es einen Wert, wenn h gegen 0 strebt $(h \neq 0)$, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, so nennt man **f an der Stelle a differenzierbar** und nennt den **Grenzwert "Ableitung von f an der Stelle a"**. Man schreibt kurz:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle a die Steigung f'(a). Ist die Funktion f an jeder Stelle $a \in \matbb{D} differenzierbar, so nennt man f differenzierbar.



Defintion Ableitung einer Funktion (x-Methode):

Gegeben: Eine Funktion f auf dem Intervall I. Der Quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ist der Differenzenquotient. Dieser beschreibt das Änerungsverhalten in einem Bereich um die Stelle $a \in \mathbb{D}$f

Gibt es einen Wert, wenn x gegen a strebt $(x \neq a)$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, so nennt man **f an der Stelle a differenzierbar** und nennt den **Grenzwert "Ableitung von f an der Stelle a"**. Man schreibt kurz:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle a die Steigung f'(a). Ist die Funktion f an jeder Stelle $a \in \mathbb{D}$ differenzierbar, so nennt man f differenzierbar.

Wichtige Ableitungen, die man kennen muss:

1. $$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$ $$f'(x) = 0$$

2. $$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$ $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3. $$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$ $$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4. $$f(x) = \sin(x) \quad x \in \mathbb{R}$$ $$f'(x) = \cos(x)$$

5. $$f(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}$$ $$f'(x) = -\sin(x)$$

Ableitungsregeln:

Gegeben:

- auf $I_f = [a_f; b_f]$ differenzierbare Funktion f
- auf $I_g = [a_g; b_g]$ differenzierbare Funktion g
- auf $I_h = [a_h; b_h]$ differenzierbare Funktion h
- $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- c $\in \mathbb{R}

Potenzregel:

$f(x) = x^r$

Es gilt: $f(x) = r \cdot x^{r-1}$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x)$

Es gitl: $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Summenregel $f(x) = g(x) + h(x)$

Es gilt: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Bemerkung: Überlegen Sie, wie sich die Potenzregel, Faktorregel und die Summenregel auf die Defintionsmenge der Ableitungsfunktion auswirken.

Tangente

Tangente berechnen:

Gegeben: Funktion f mit Graph G_f

Gesucht: Tangentengleichung $t: \quad y = mx + c$ der Tangente an G_f in Punkt $P(a|f(a)$)

Lösung:

- Bestimme Steigung m der Tangenten durch $m = f'(a)$
- Bestimme c durch Punktprobe mit P.

Steigungswinkel der Tangenten bei a

Winkel α, den die Tangente mit der Horizontalen einschließt.

Es gilt: $\tan(\alpha) = f'(a)$

Beachte:

- Hat die Tangente eine negative Steigung, so hat die Tangente auch einen negativen Steigungswinkel α. Für den Steigungswinkel α gilt: $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- Zwei Graphen G_f und G_h zweier Funktionen f und g berühren sich in eine Punkt $P(a|f(a)), bedeutet:
  - f(a)=g(a)
  - f'(a)=g'(a)

Übungen im Buch

- Seite 12 Nr. 2 (3 Aufgaben)
- Seite 12 Nr. 3 ()
- Steite 13 Nr. 9 (3 Aufgaben), 10 und 13

- Für die Profis Nr 15 und 16