4. Betragsfunktion

4. Betragsfunktion

$=$ Abstandsfunktion
$=$ "Mach-positiv"-Funktion

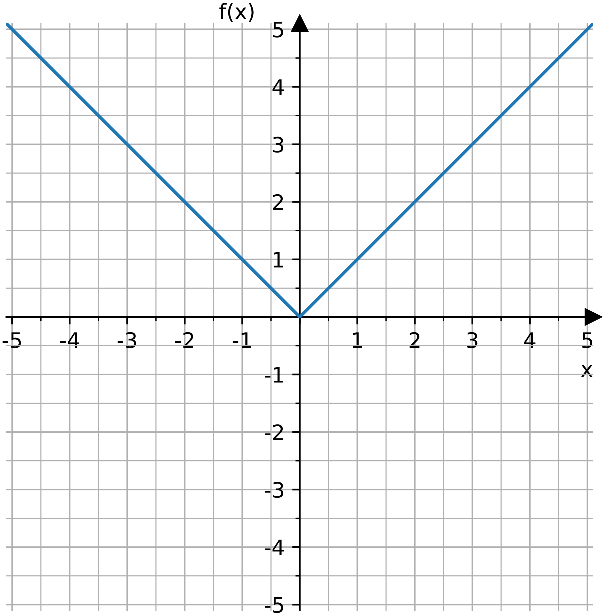
Definition

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Funktionsgraph:



f(x)
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Beispiele:

1) $|2| = 2$
2) $|-4| = 4$
3) $|x+1| = \begin{cases} x+1 & ,x \geq -1 \\ -(x+1) & ,x < -1 \end{cases}$
4) $2x^2 + |-x+4| = \begin{cases} 2x^2 - x + 4 & ,x \leq 4 \\ 2x^2 + x - 4 & ,x > 0 \end{cases}$

Begründung:

$$\begin{aligned} -x + 4 &\geq 0 \\ -x &\geq -4 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

5. $$|x^2-4x+3| = \begin{cases} x^2-4x+3 & , x^2-4x+3 \geq 0 \\ -(x^2-4x+3) & , x^2-4x+3 < 0 \end{cases}$$

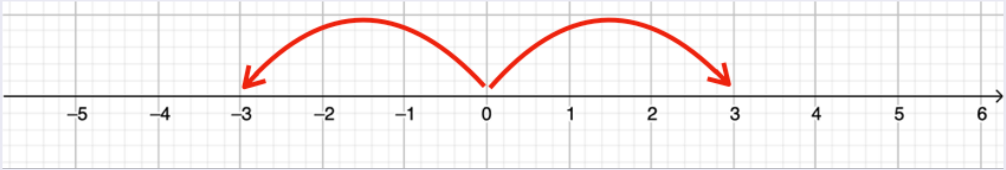
$$\begin{aligned} & x^2-4x+3=0 \\ & x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \\ & x_1 = 3 \qquad , x_2 = 1 \end{aligned}$$

Es gibt folglich drei mögliche Intervalle: $(-\infty;1], (1;3)$ und $[3;\infty)$
Überprüfe, in welchen Intervallen die Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Wähle dazu Werte aus den Intervallen.Es ergibt sich:

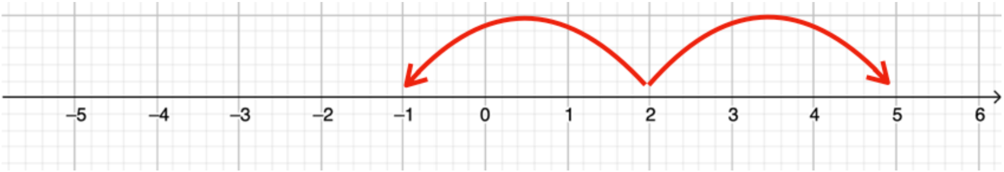
$$|x^2-4x+3| = \begin{cases} x^2-4x+3 & , x \leq 1 \text{ oder} x \geq 3 \\ -x^2+4x-3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

Abstand:

1) $|x| = 3$



2) $|x-2| = 3$



3) $|x + 2| = 3$

Dreiecksungleichung:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

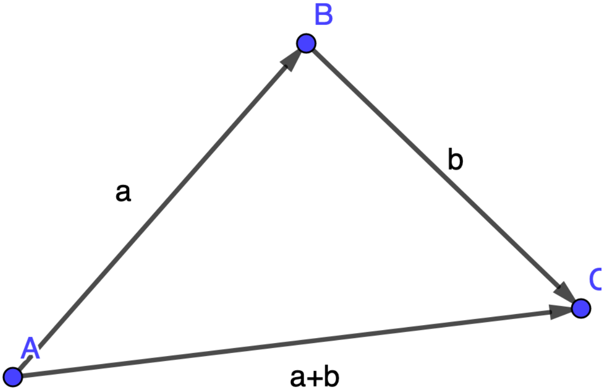


Figure 1: Dreiecksungleichung

Beweis:

1) Es gilt: $a \leq |a|$ und $b \leq |b| \quad \Rightarrow (a+b) \leq |a| + |b|$

2) Es gilt: $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b| \quad \Rightarrow -a + (-b) \leq |a| + |b|$

3) Es gilt: $|a+b| = \begin{cases} a+b & , a+b \geq 0 \\ -(a+b) & , a+b < 0 \end{cases}$

Mit 1), 2) und 3) folgt:

$$|a+b| = \begin{cases} a+b \leq |a| + |b| & , a+b \geq 0 \\ -(a+b) \leq |a| + |b| & , a+b < 0 \end{cases}$$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \checkmark$

Betragsgleichungen lösen

Beispiel:

$$|x-4| = 2x-11$$

1. Fall $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$$\begin{aligned} & & |x-4| &= 2x-11 \\ &\Leftrightarrow & x-4 &= 2x-11 \\ &\Leftrightarrow & x_1 &= 7 \\ & & x \geq 4 \text{ und } x_1 &= 7 \\ & & \Rightarrow L_1 &= \{7\} \end{aligned}$$

2. Fall $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$

$$\begin{aligned} & |x-4| = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow \quad & -(x-4) = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 4 = -2x + 11 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x = 15 \\ \Leftrightarrow \quad & x_2 = 5 \\ & x < 4 \text{ und } x_2 = 5 \\ & \Rightarrow L_2 = \{\} \end{aligned}$$

Gesamtlösungsmenge:

$$L = L_1 \cup L_2 = \{7\}$$