2. Der natürliche Logarithmus

Bisher haben wir Potenzgleichungen gelöst. Zum Beispiel $x^2 = 4$

Wie lösen wir aber $e^x = 7$?(Exponentialgleichung)

Die Lösung dieser Gleichung wird als Logarithmus von 7 zur Basis e bezeichnet.

Kurz geschrieben: $\log_e(7)$

Den Logarithmus zur Basis e bezeichnet man als **natürlicher Logarithmus** und schreibt kurz: $\ln(7)$

Es gilt somit: $e^{\ln 7} = 7$

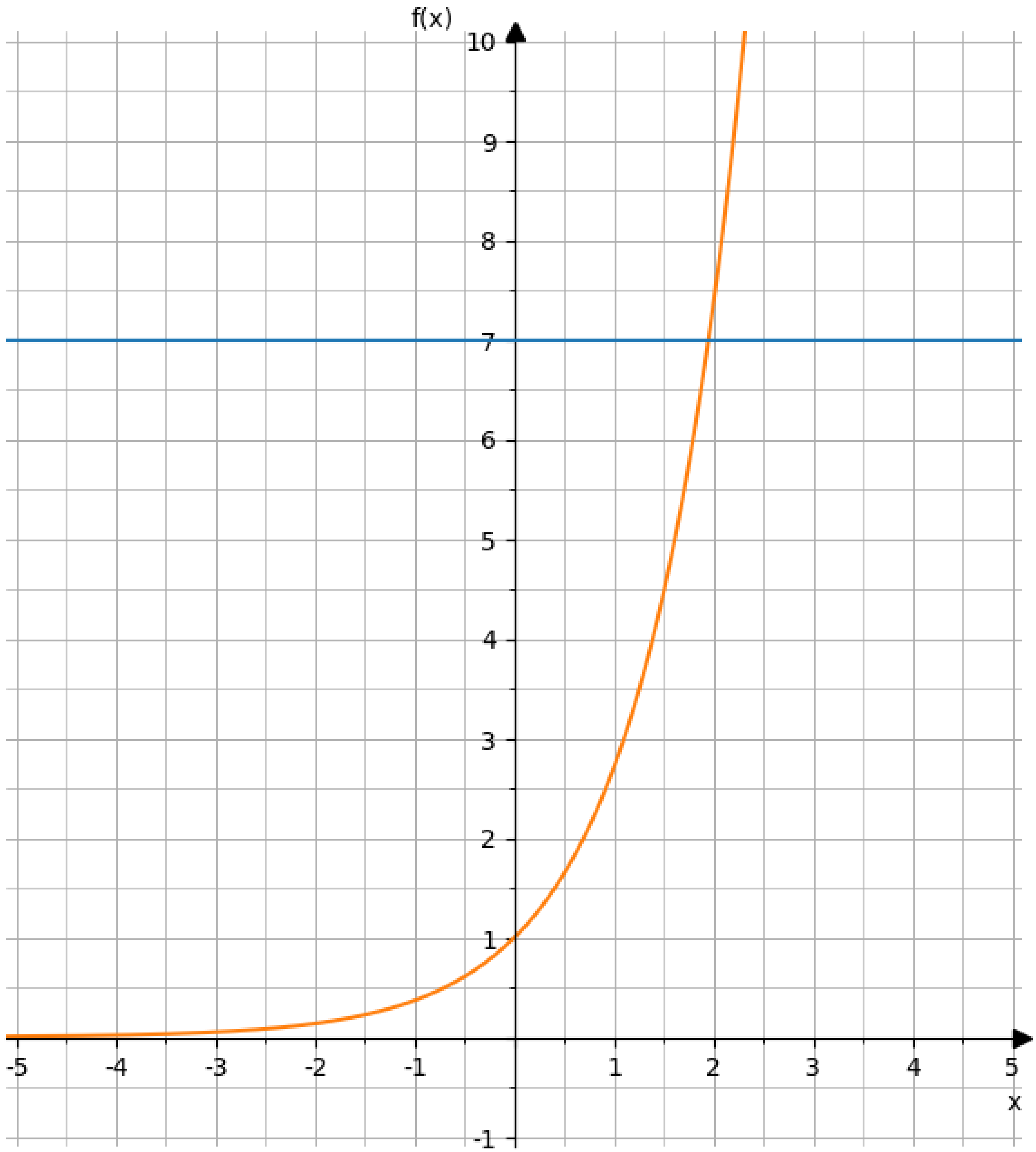
Zeichnerische Lösung

In [20]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -1.1# untere y-Intervallgrenze
d = 10.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1=0*x+7
y2=np.exp(x)
# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
```

```
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
ax.plot(x,y2)
#plt.show()
```

Out[20]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x137ed5490>]
```



$$ln(7) \approx 1,9$$

oder anders aufgeschrieben:

$$e^{1,9} \approx 7$$

Definition:

Für eine positive Zahl b heißt die Lösung x der Exponentialgleichung e x = b der natürliche Logarithmus von b. Man schreibt x = ln(b) Es gilt:

Für eine reelle Zahl $b > 0$ is $x = \ln(b)$ heißt die Lösung der **Exponentialgleichung** $e^x = b$ **natürlicher Logarithmus von b**

Für $b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{\ln(b)} = b \text{ und } \ln(e^c) = c$$

Rechnerische Lösung

$$\begin{aligned} e^x &= 7 \quad |ln() \\ ln(e^x) &= ln(7) \\ x &= ln(7) \\ x &\approx 1,945910 \end{aligned}$$

In [21]:
```
np.log(7)
```

Out[21]:
```
1.9459101490553132
```

Logarithmengesetze

Satz: Seien $u > 0, u \in \mathbb{R}$ und $v > 0, v \in \mathbb{R}$ reele Zahlen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \ln(u \cdot v) &= \ln(u) + \ln(v) \\ \ln\left(\frac{u}{v}\right) &= \ln(u) - ln(v) \\ \ln\left(u^k\right) &= k \cdot \ln(u) \end{aligned}$$

Lösung allgemeiner Exponentialgleichungen

Problem: Wie lassen sich allgemeine Exponentialgleichungen lösen?

Beipsiel:

$$5^x = 2$$

Herleitung:

Sei $a > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$a^x = b$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(a^x) = \ln(b)$$

$$\overset{Log.Gesetz}{\Leftrightarrow} \qquad x \cdot \ln(a) = \ln(b)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
5^x &= 2 \\
\Leftrightarrow \quad x &= \log_5(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(5)} \\
x &\approx 0,43068
\end{aligned}
$$

In [22]:
```
np.log(2)/np.log(5)
```

Out[22]:
```
0.43067655807339306
```

Beliebige Exponenatialfunktion als natürliche Exponentialfunktion

Sei $f(x) = a^x$, mit $a > 0, a \in \mathbb{R}$

$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a^x \\
&= \left(e^{\ln(a)}\right)^x \\
&\underset{Pot.Gesetz}{=} e^{\ln(a) \cdot x}
\end{aligned}
$$

Potenzgesetze

Satz: Seien $u > 0, u \in \mathbb{R}$ und $v > 0, v \in \mathbb{R}$ reele Zahlen.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\
\frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\
(a^r)^s &= a^{r \cdot s}
\end{aligned}
$$