

4 Funktionenscharen

Beispiel:

$$f(x) = e^{x+1}$$

$$g(x) = e^{x+2}$$

$$h(x) = e^{x+3}$$

$$i(x) = e^{x+4}$$

Dies Funktionen haben folgende Eigenschaften gemeinsam:

- 1.
- 2.

Ihr Schaubilder sehen wir folgt aus:

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatter

# Definitionsmenge und Funktion
# -----
a = -6.1 # untere x-Intervallgrenze
b = 4.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -0.1 # untere y-Intervallgrenze
d = 10.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b, 1000)
yminus1 = np.exp(x-1)
y0 = np.exp(x)
y1 = np.exp(x+1)
y2 = np.exp(x+2)
y3 = np.exp(x+3)
y4 = np.exp(x+4)

# -----

# Einstellung des Graphen
fig = plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect = 1)

# Definition der Haupteinheiten, reelle Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
```

```

ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker=">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker="^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

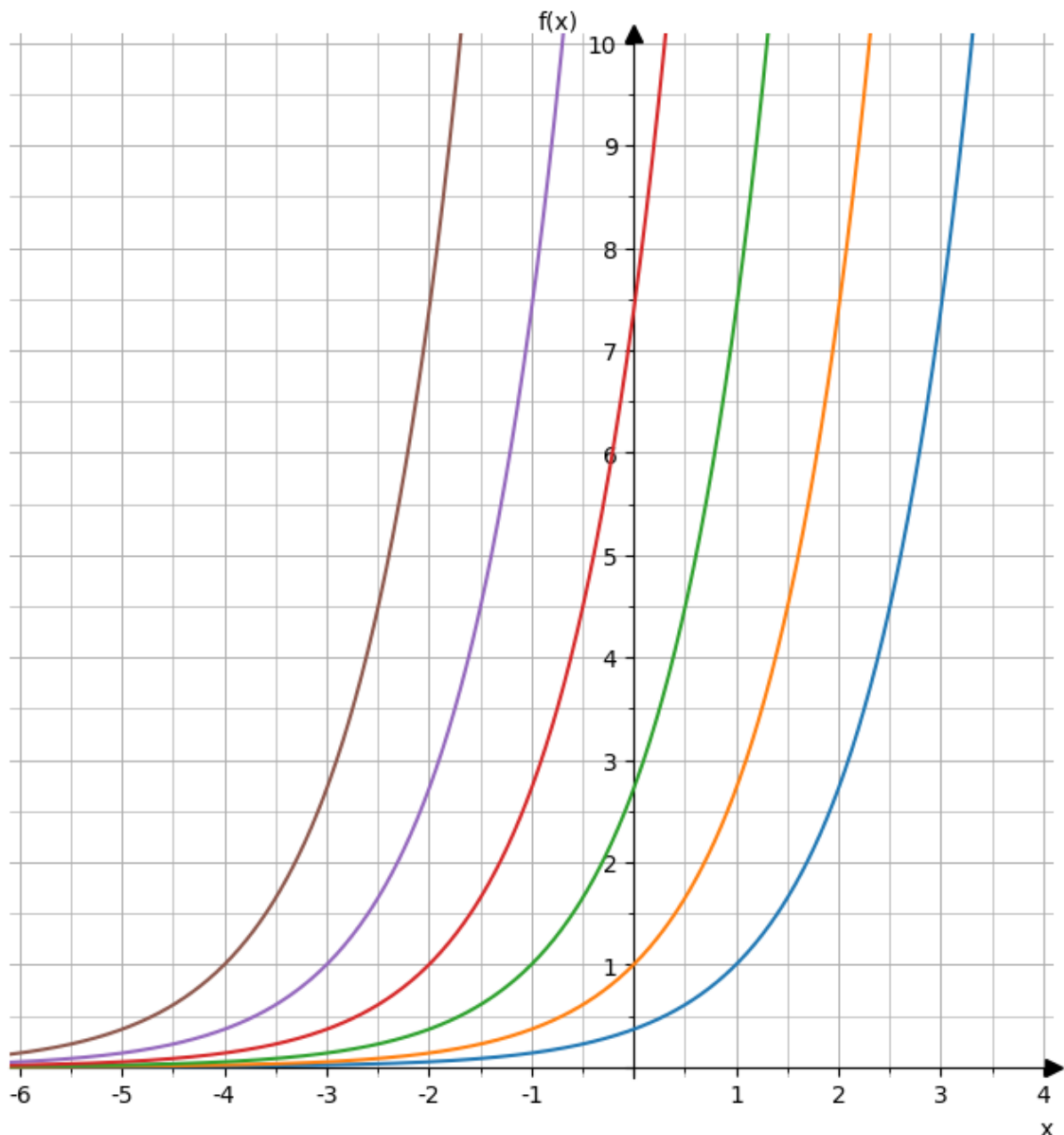
# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="--", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="--", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,yminus1, zorder=10)
ax.plot(x,y0, zorder=10)
ax.plot(x,y1, zorder=10)
ax.plot(x,y2, zorder=10)
ax.plot(x,y3, zorder=10)
ax.plot(x,y4, zorder=10)
plt.show()

```

Out[1]: [`<matplotlib.lines.Line2D at 0x10e9f4090>`]



Welche Möglichkeit gäbe es, alle unendliche vielen Funktionen, welche diese Struktur besitzen, in einem Funktionsterm zu schreiben?

Alle Funktionsterme unterscheiden sich nur in einer Zahl. Wir nennen diese Zahl allgemein a .

a ist bei uns eine ganze Zahl. Dies müssen wir dokumentieren und schreiben $a \in \mathbb{Z}$.

Damit lautet der Funktionsterm: $f_a(x) = e^{x+a}, \quad a \in \mathbb{Z}$

****Definition:****

Enthält ein Funktionsterm neben einer möglichen Funktionsvariable, z.B. x noch einen Parameter, z.B. a , so gehört zu jedem Wert des Parameters $a \in \mathbb{D}$ (Definitionsmenge von

a) eine Funktion f_a , die jedem x ein Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet.
 Die Funktionen f_a bilden eine **Funktionenschar**.

Übung 1: Buch Seite 62 Nr. 9

a)

$$\begin{aligned} t &= 3 \\ f_k(3) &= 7000 \\ 8 - 2e^{-k \cdot 3} &= 7000 \end{aligned}$$

Umformung:

$$\begin{aligned} 8 - 2e^{-k \cdot 3} &= 7 \\ -2e^{-k \cdot 3} &= -1 \\ 2e^{-k \cdot 3} &= 1 \\ e^{-k \cdot 3} &= \frac{1}{2} \\ -k \cdot 3 &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -k \cdot 3 &= \ln(2^{-1}) \\ -k \cdot 3 &= -\ln(2) \\ k &= \frac{\ln(2)}{3} \approx 0,23 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'_k(t) &= 2k \cdot e^{kt} \\ f'_k(0) &= 0,25 \\ 2e^{-k \cdot 0} &= 0,25 \\ 2k &= 0,25 \\ k &= 0,125 \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 8 - 2e^{-k \cdot x} = 8$$

Antwort: Es ist folglich mit 8000 Ameisen zu rechnen.

d)

Antwort 1 : Die Gleichung $f_k(t+1) - f_k(t) = 0,1$ gibt den Zeitpunkt t an, zu dem der Ameisenbestand in der Folgewoche um 100 zunimmt.

Antwort 2: Die Gleichung $f'_k(t) = 0,1$ gibt den Zeitpunkt t an, an dem die momentane Änderungsrate 100 Ameisen beträgt.

Übung 2: Buch Seite 62 Nr. 11

b) Berechne die Koordinaten der Extrempunkte. Die x-Koordinate

$$f_k(x) = (x - k)e^{x-k}$$

$$f'_k(x) = e^{x-k} + (x - k)e^{x-k} = (x - k + 1)e^{x-k}$$

$$f''_k(x) = e^{x-k} + (x - k + 1)e^{x-k} = (x - k + 2)e^{x-k}$$

$$1. \text{ Not. Bed.: } f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow (x - k + 1)e^{x-k} = 0$$

$$\text{S.v.N } (x - k + 1) = 0$$

$$x = k - 1$$

$$2. \text{ Hinr. Bed.: } f''_k(k - 1) = e^{k-1-k}(k - 1 - k + 2) = e^{-1} > 0$$

Es handelt sich um einen Tiefpunkt

Die y-Koordinate des Tiefpunkts

$$\begin{aligned} f_k(k - 1) &= (k - 1 - k)e^{k-1-k} \\ &= -e^{-1} \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$T_k \left(k - 1 \mid -\frac{1}{e} \right)$$

Wann liegt dieser Punkt auf der x-Achse?

$$-\frac{1}{e} = 0$$

Hierfür gibt es keine Lösung.

Wann liegt dieser Punkt auf der y-Achse?

$$k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Übung 3: Buch Seite 62 Nr. 10

a)

$$h'_c(x) = e^{c+x} + xe^{c+x} = (x + 1)e^{c+x}$$

$$h'_c(0) = e^c$$

b)

Betrachte die Steigungen an der Stelle $x=0$:

A: h_0

B: $h_{0,5}$

C: h_1

D: $h_{1.5}$

c)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} h_c(x) = \infty$
- Tiefpunkte bei $x = -1$
- Wendepunkte bei $x = -2$
- Erhöhung von c führt zu einem steileren Anstieg des Graphen (= Streckung)

d) Vorgehensweise analog wie in Aufgabe 11

$$T(-1| -e^{-1+c})$$