5. Waagerechte und senkrechte Asymptoten

Bisher: Wir haben hauptsächliche Ganzrationele Funktinen betrachtet.
Es gibt aber auch Funktionen, mit ganzrationaler Funktion im Nenner, z.B.:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x^3 - 2x + 1}$$

Diese Funktionen heißen **gebrochenrationale Funktionen**.

Definition:

Funktionen der Art $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, bei denen g und h ganzrationele Funktionen sind und h einen Grad größer gleich 1 hat, heißen **gebrochenrationale Funktionen**.

Beispiele:

1. $$g(x) = \frac{1}{x}$$

2. $$h(x) = \frac{x^2 + 2x}{2} \qquad \text{keine gebrochenrationale Funktion}$$

3. $$i(x) = \frac{2x^2 - \sin(x)}{x^2 + 2} \qquad \text{keine gebrochenrationale Funktion}$$

4. $$j(x) = \frac{x^4 - \frac{1}{2}x^2}{x^6 - x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 5}$$

Beobachtung:

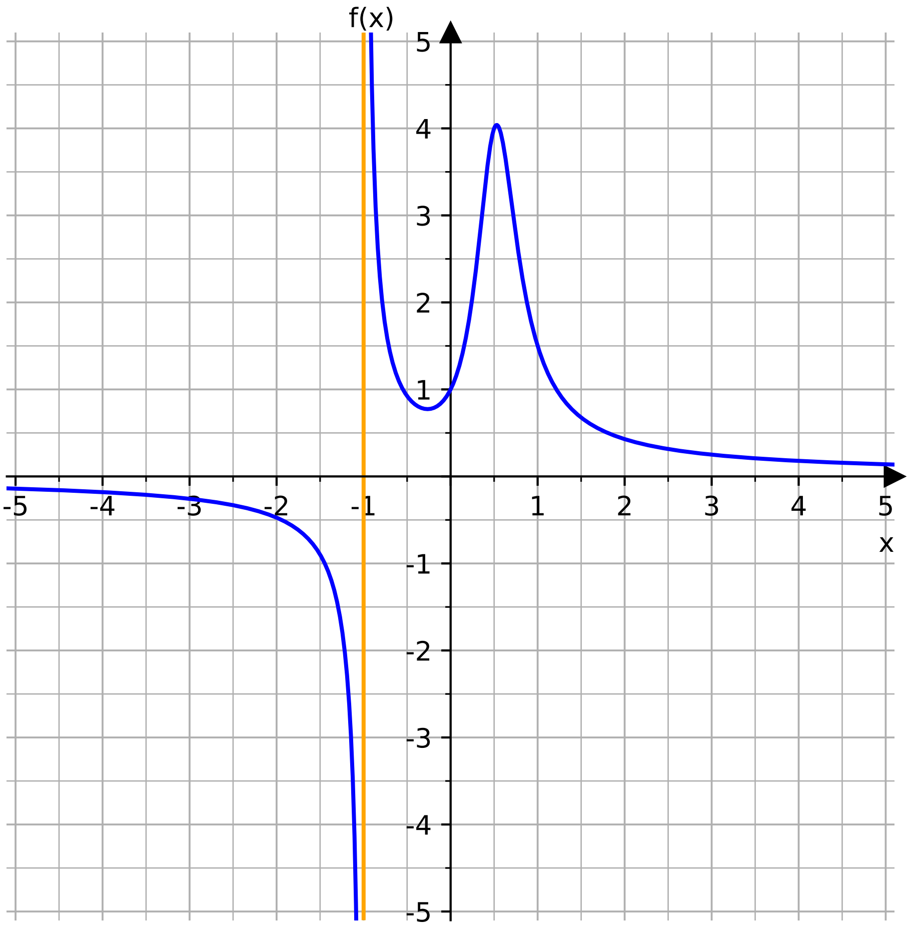
Ganzrationale Funktionen haben Definitionslücken, da nicht durch 0 geteilt werden darf.

Die Untersuchung und Angabe der Defintionsmenge ist folgliche obligatorisch. Dafür reicht es aus den Nenner zu betrachten.

Wie verläuft der Graph bei sochen Definitionslücken?

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^3-2x+1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



Beobachtung

Die Graphen von gebrochenrationalen Funktionen besitzen an den Defintionslücken senkrechte Asymptoten.

Untersuchung des Verhaltens an den Definitionslücken

Idee: Man nähert sich in einer Umgebung der Defintionslücke von beiden Seiten an und betrachtet die Veränderung der Funktionswerte.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^3-x+1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$
$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = ?$$
$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = ?$$

$x \searrow -1$:

x	$f(x)$
0	$?$
$-0,5$	$?$
$-0,9$	$?$
$-0,99$	$?$

$x \nearrow -1$:

x	$f(x)$
-2	$?$
$-1,5$	$?$
$-1,1$	$?$
$-1,01$	$?$

Satz:

Gegeben: - ganzrationale Funktion $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ - g und h differenzierbare Funktionen

Es gilt:

Wenn $g(x_0) \neq 0$ und h(x_0)=0$ gilt, dann
- ist x_0 eine **Polstelle** von f - Die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist eine senkrechte Asymptote von f.

Bemerkung:

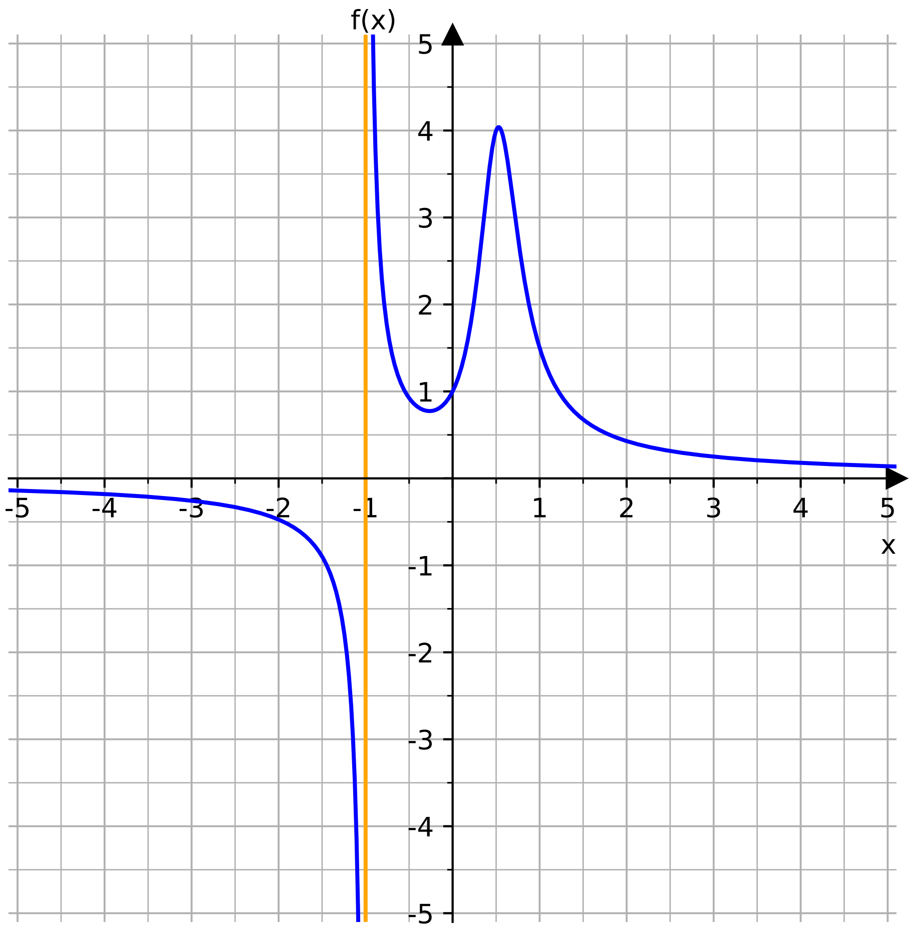
- Der Pol ist die Stelle auf der x-Achse, durch welche die senkrechte Asmptote verläuft.
- Man bezeichnet die Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn einer der beiden "Äste" an der Senkrechten Asymptote gegen $+\infty$ und der andere gegen $-\infty$ läuft.

Forscheraufgabe

Wenn die Voraussetzungen $g(x_0) = 0$ und gleichzeitig $h(x_0) = 0$ erfüllt sind, lässt sich der Satz nicht anwenden!
Welche Aussgaben kann man dann machen? $\Rightarrow$ Buch Seite 155 Nr. 13

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x^3 - 2x + 1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



Beobachtung

- Es gibt auch waagerechte Asymptoten.
- Waagerechte Asymptoten lassen sich mit Hilfe der Grenzwertbetrachtung suchen.

Grenzwertbetrachtung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x^2+1}{3x^3-2x+1} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \frac{0}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x^2+1}{3x^3-x+1} \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \frac{0}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beobachtung

- Der Graph nähert sich für $x \to \pm\infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = 0$ an.
- Diese Gerade heißt waagerechte Asymptote

Satz:

Gegeben: - ganzrationale Funktion $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ - der Grad des Zählers g sei a - der Grad des Nenners h sei b.

Es gilt:

- $a < b$: waagerechte Asymptote mit $y = 0$.
- $a = b$: waagerechte Asymptote mit $y = \frac{a}{b}$
- $a > b$: keine waagerechte Asymptote.