

### 3. Gleichungen und Ungleichungen lösen

Benötigt bei:

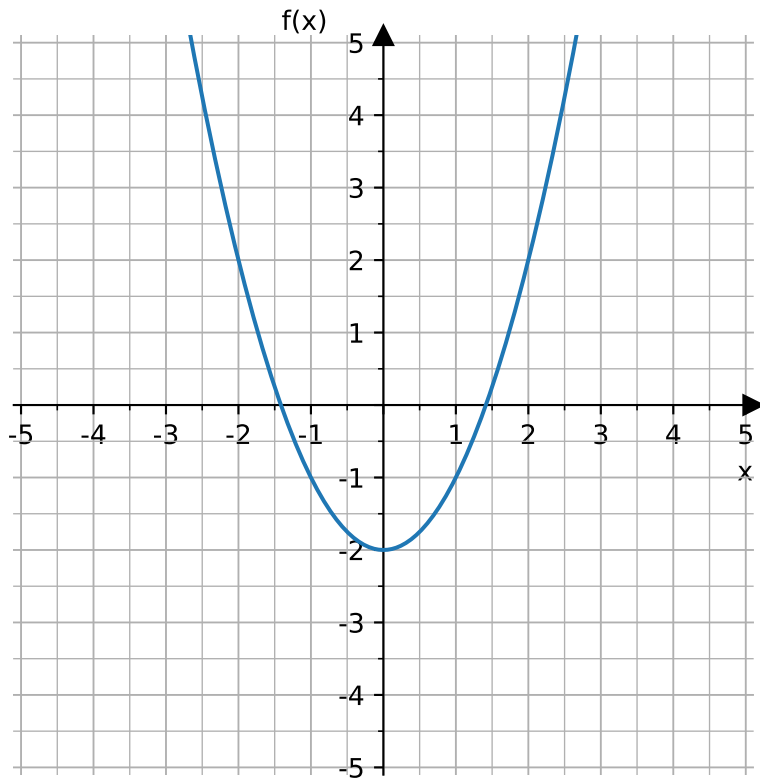
- Berechnung von Schnittpunkten des Graphen mit der x-Achse
- Anmerkung: Wie berechnet man den Schnitt mit der y-Achse?
- Extremstunkte
  - notwendige Bedingung
- Wendepunkte
  - notwendige Bedingung
- Schnittpunkte von Graphen
- In der Geometrie:
  - Schnitt von Geraden
  - Schnitt von Ebenen,
  - Schnitt von Gerade mit Ebene
- In der Stochastik
- etc.

#### Nullgleichungen

1. Typ:  $a_2x^2 + a_0 = 0$

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \sqrt{2}, \\ x_2 &= -\sqrt{2} \\ L &= \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}\end{aligned}$$

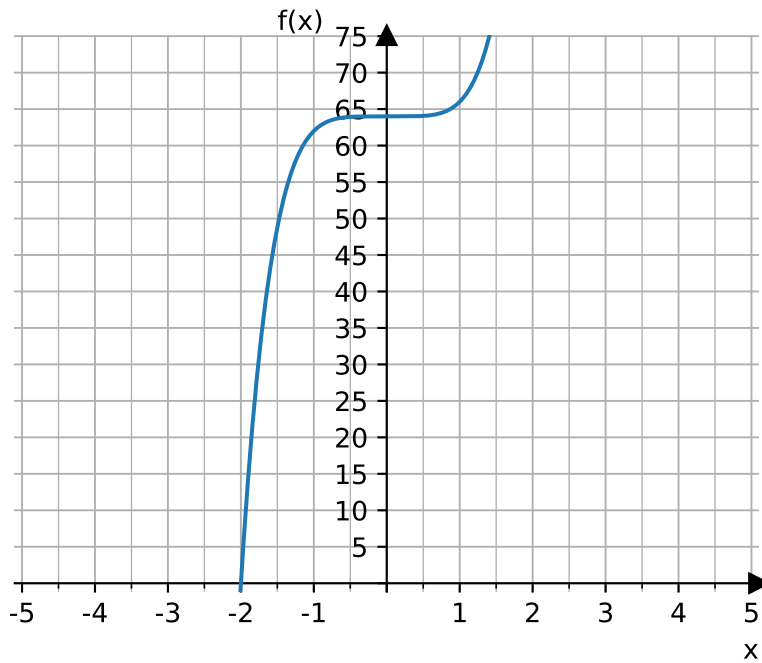
- Zwei Lösungen, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine positive Zahl vorhanden ist.
- Ein Lösung ausschließlich für die Gleichung  $x^2 = 0$
- Keine Lösung, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine negative Zahl vorhanden ist.



2. **Typ:**  $a_n x^n + a_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 2x^5 + 64 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x^5 &= -64 \\
 \Leftrightarrow x^5 &= -32 \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt[5]{-32} \\
 \Leftrightarrow x &= -2 \\
 L &= \{-2\}
 \end{aligned}$$

- mehrere Lösungen, wenn Grad  $n$  gerade ist.
- eine Lösung, wenn der Grad  $n$  ungerade ist.



**3. Typ:**  $a_2x^2 + a_1x = 0$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, \text{ oder}$$

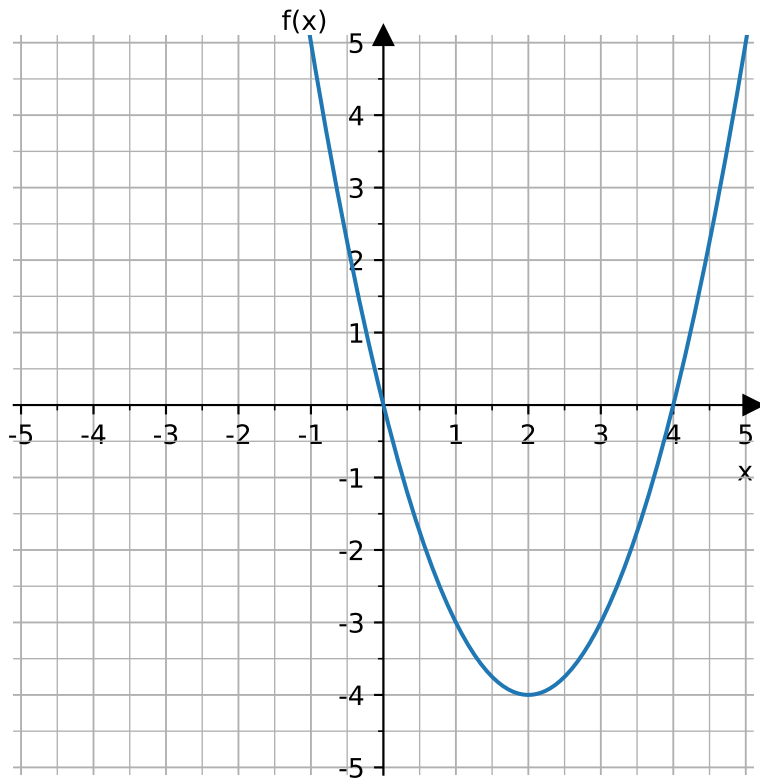
$$(2x_2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2$$

$$L = \{0; 2\}$$

- Anwendung des Distributivgesetzes durch Ausklammern der Variablen.
- Anwendung des Satzes vom Nullprodukt



4. **Typ:**  $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 1$$

$$L = \{1\}$$

- für  $a_2 = 1$ : p-q-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

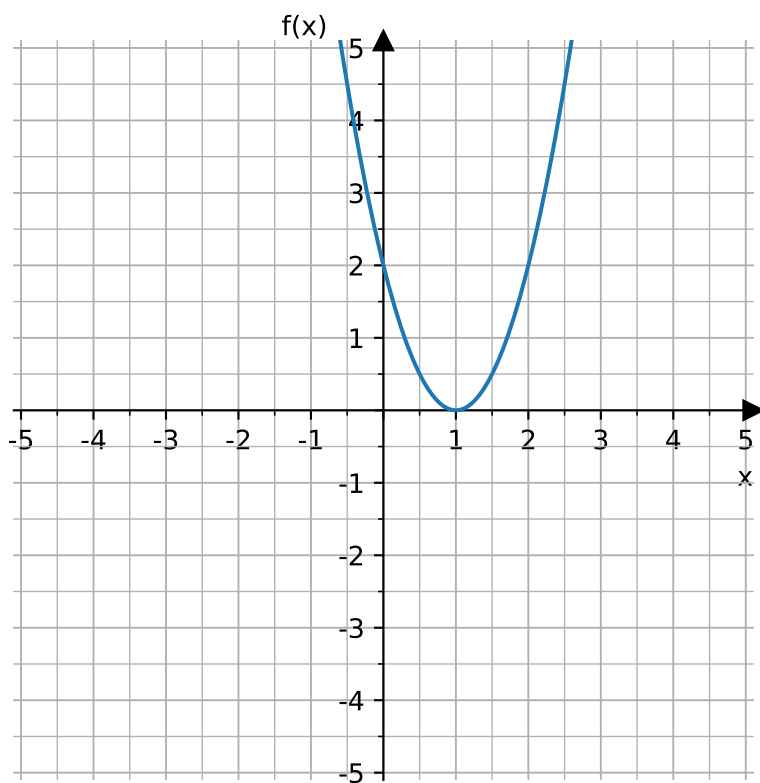
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- für  $a_2 \neq 1 \neq 0$ : abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Diskriminante entscheidet über die Anzahl der Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  bzw.  $D = b^2 - 4ac$



**5. Typ:**  $a_2x^{2n} + a_1x^n + a_0 = 0$

$$\sin^2(x) - 4\sin(x) + 4 = 0$$

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \quad \circ u = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 2 \quad \circ u = \sin(x)$$

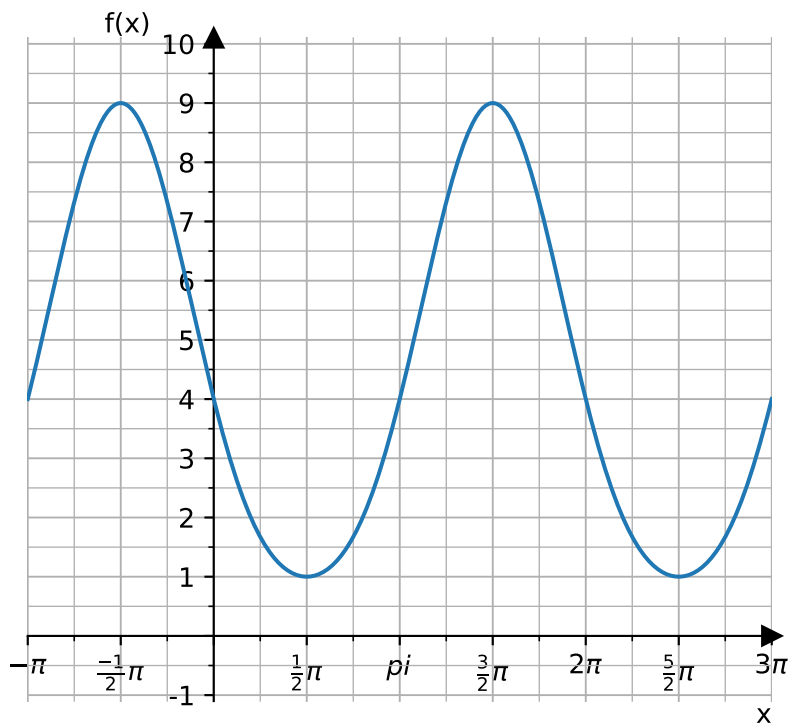
$$\sin(x) = 2$$

$$L = \{\}, \text{ da } -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

- Substitution und Resubstitution
- weiter Gleichungen, die so gelöst werden können:

$$- a_2e^{2x} + a_1e^x + a_0 = 0$$

$$-a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$$



**6. Typ:**  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$  und eine Lösung ist bekannt

$$x^3 - 6x^2 + 6 = 0$$

Errate eine Nullstelle, hier  $x_1 = 1$

Dividiere Polynom durch den Term  $x - 1$ .

Dies ist eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 6x^2 - x + 6 : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -5x^2 - x + 6 \\
 \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Suche von dem Ergebnis die Nullstellen:

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}}$$

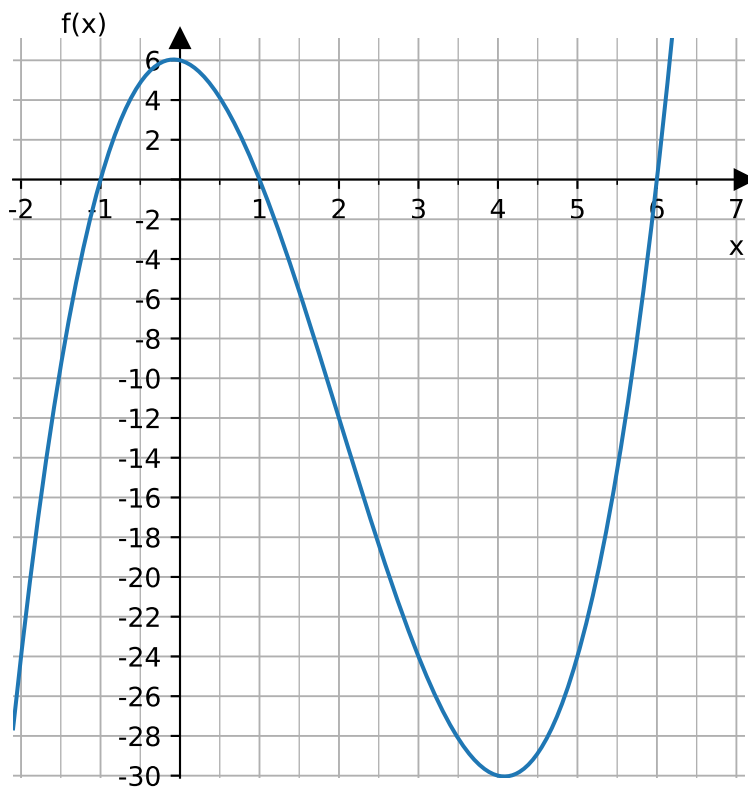
$$= \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -1$$

Damit hat man alle Lösungen der Gleichung  $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$  gefunden:

$$L = \{-1; 1; 6\}$$



**Gleichungen mit Termen auf beiden Seiten**

**7. Typ: Wurzelgleichungen**

$$\begin{aligned}
& \sqrt{20-2x}+6=x \\
\Leftrightarrow & \sqrt{20-2x}=x-6 \quad \text{Wurzel isolieren} \\
\Rightarrow & 20-2x=(x-6)^2 \quad (!) \\
\Leftrightarrow & 20-2x=x^2-12x+36 \quad (2. \text{ Binomische Formel}) \\
\Leftrightarrow & 0=x^2-10x+16 \\
& x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-16} \quad \text{p-q-Formel} \\
& =5\pm 3 \\
& x_1=8 \\
& x_2=3
\end{aligned}$$

- Es muss quadriert werden.
- **Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung (!)**
- Durch das Quadrieren, generiert man eventuell zusätzliche Lösungen der quadrierten Gleichung.
- Probe ist zwingend erforderlich.

**Probe:**

$x_1 = 8$ :

$$\begin{aligned}
\sqrt{20-2\cdot 8}+6 &= 8 \\
2 &= 2
\end{aligned}$$

$x_2 = 3$ :

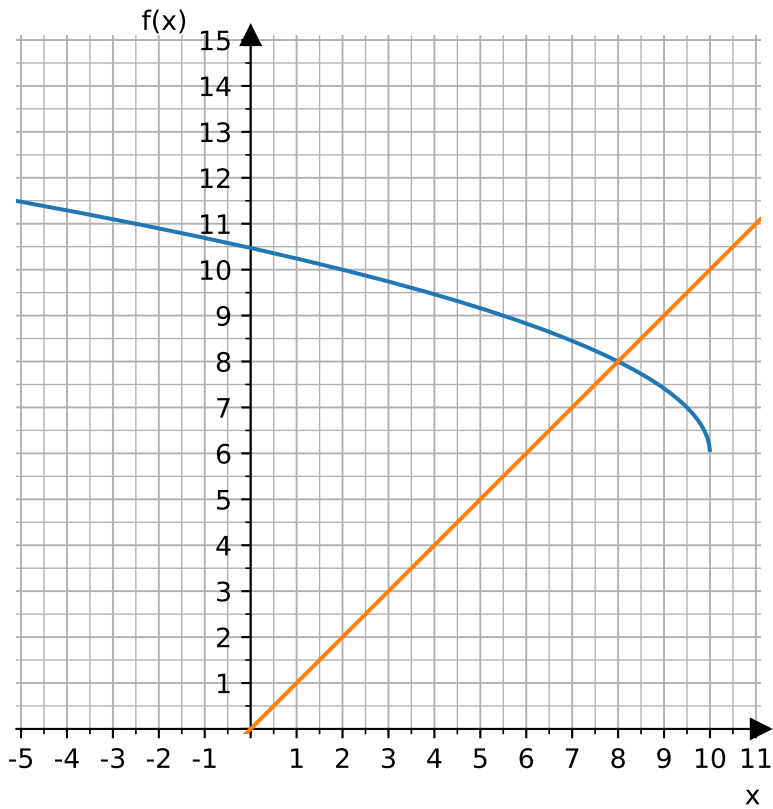
$$\begin{aligned}
\sqrt{20-2\cdot (3)}+6 &= 3 \\
\sqrt{14}+6 &= 3 \\
x_2 = 2 &\text{ ist keine Lösung.}
\end{aligned}$$

```

/var/folders/m3/zhwxf20x7p33z6tsgcbbkz3m0000gn/T/ipykernel_27671/3098493842.py:12: RuntimeWarning:
  y1= np.sqrt(20-2*x)+6

```





## 8. Typ: Bruchgleichungen

- Idee: Mit Nenner multiplizieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 - 3}{x + 1} = \frac{6x}{3x + 3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 3}{x + 1} = \frac{6x}{3(x + 1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 3}{x + 1} \cdot (x + 1) = \frac{6x}{3} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3 = 2x \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 3 = 0
 \end{aligned}$$

p-q-Formel:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -1 \\
 x_2 &= 3 \\
 L &= \{3\}
 \end{aligned}$$

## Ungleichungen

### 1. Alternative: Löse die dazugehörige Gleichung

$$3 \cdot 5^x > 6$$

Die dazugehörige Gleichung:

$$3 \cdot 5^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \log_5(2) \\ \approx 0,43$$

Übertrage auf die Ungleichung:

Testwert 0 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

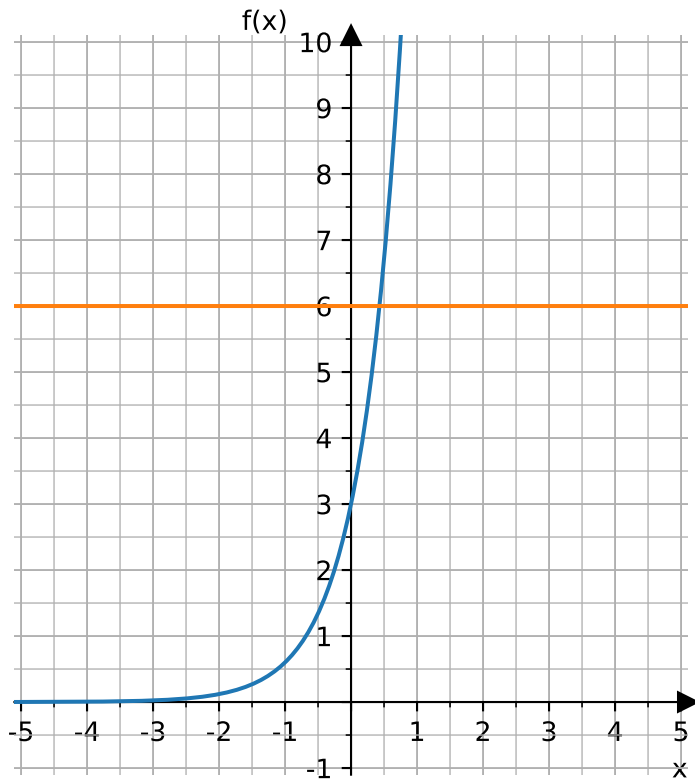
$$3 \cdot 5^0 = 3 < 6$$

Testwert 1 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

$$3 \cdot 5^1 = 15 > 6$$

Damit gilt für die Lösungsmenge:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \log_5(2)\}$$



## 2. Alternative: Behalte das Ungleichheitszeichen bei

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}
 & -3 \cdot 5^x > 6 \\
 \Leftrightarrow & 5^x < -2 \quad (!) \\
 \Leftrightarrow & x < \log_5(2) \quad \text{log-Funktion ist streng mono steigend} \\
 & L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_5(2)\}
 \end{aligned}$$

- belasse das Größer/Kleiner-Zeichen.
- achte darauf, dass bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl sich das Zeichen umdreht.
- Anwendung von ausschließlich streng monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit  $<$  oder  $>$ -Zeichen.
- Anwendung von ausschließlich monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit  $\leq$  oder  $\geq$ -Zeichen.

Beispiel 2:

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\Leftrightarrow x-2 \geq 3(x-1)$$

VORSICHT ! (x-1) könnte auch negativ sein. Fallunterscheidung notwendig

**1. Fall:**  $(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 \leq 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x-2 \leq 3x-3$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$

**2. Fall:**  $(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 \geq 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x-2 \geq 3x-3$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$L_2 = \{\}$$

**Zusammen:**

$$L = L_1 \cup L_2 = x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$

