2. Das Integral als orientierter Flächeninhalt

2.1 exakte Bestimmung von Flächeninahlten

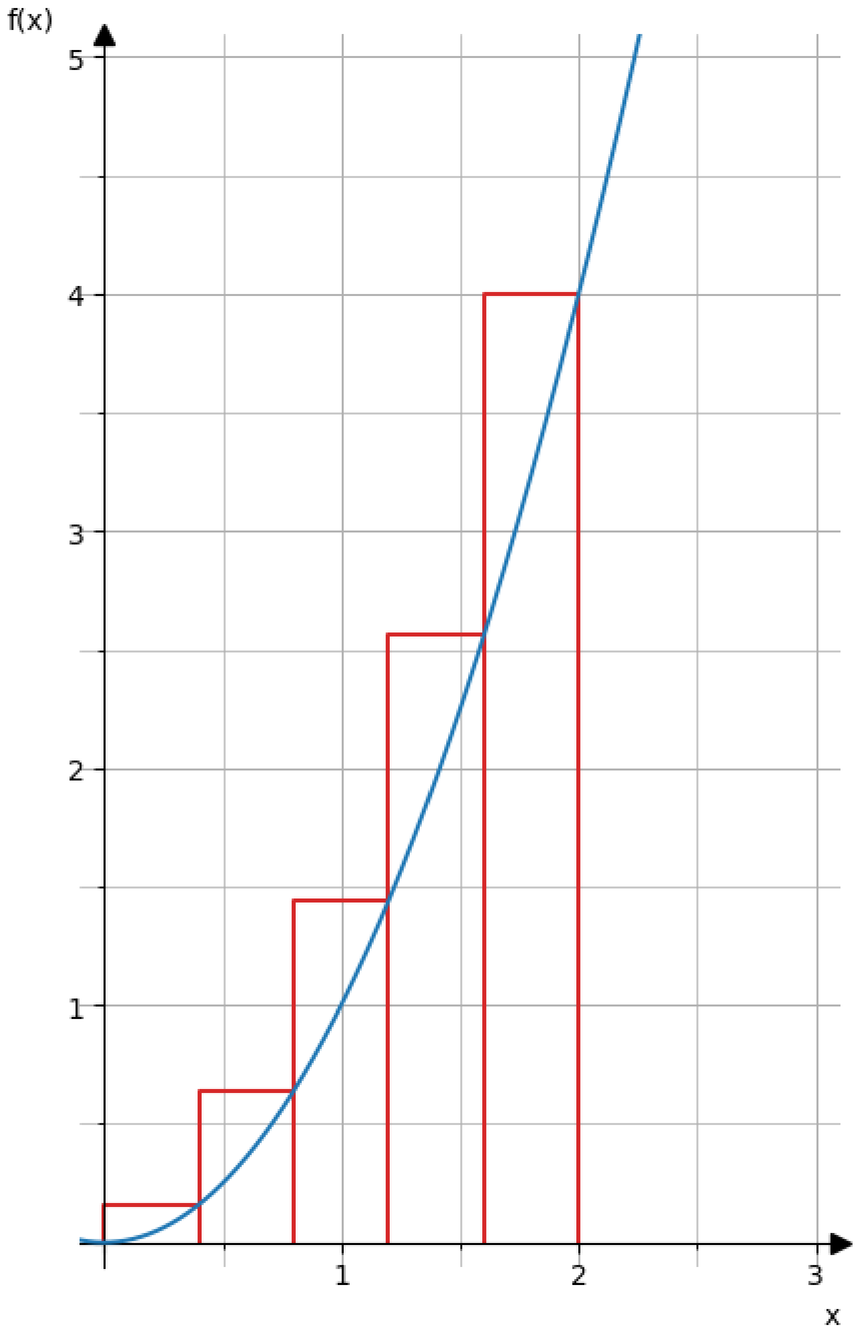
Beispiel:

- $f(x) = x^2$
- Gesucht ist der Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen von f auf dem Intervall $I = [0, 2]$

In [32]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -0.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 3.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -0.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1=x**2

def f(x):
    return x**2

n= 6
xi=np.linspace(0,2,n)
yi=f(x)
oben=np.zeros(n)
for i in range(len(oben)-1):
    cx = np.linspace(xi[i], xi[i+1], 50)
    cy = f(cx)
    oben[i+1] = np.max(cy)

oben[0] = yi[0]

# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax= fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
```

```
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
plt.plot(xi, oben, drawstyle='steps-pre', color='C3')
plt.vlines(xi, ymin=0, ymax=oben, color='C3', alpha=1)
#plt.show()
```

Out[32]: <matplotlib.collections.LineCollection at 0x12f2c9510>



Idee:

- Wir teilen das Intervall $I = [0, 2]$ in $n = 5$ Teilintervalle auf.
- Wir berechnen den Flächeninhalt der Summe der Rechtecke S_5
- Der Flächeninhalt ist ungenau.
- Intervall in mehr Teilintervalle aufteilen.
- Aufstellen der allgmeinen Rechtecksumme S_n
- Intervall auf beliebig viele Teilintervalle aufteilen, $n \to \infty$

Intervallteilung:**

Wir wählen n Teilintervalle.
Dann ist die Breite

$$h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Obersumme:

$$\begin{aligned}
O_N &= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2 && (1)\\
&= \frac{2}{n}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \left(3\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2\right) && (2)\\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^2} + \frac{36}{n^2} + \ldots + \frac{4n^2}{n^2}\right) && (3)\\
&= \frac{2^3}{n^3}(4 + 8 + 36 + \ldots + 4n^2) && (4)\\
&= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+2) && (5)\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{2n+1}{n^2} && (6)\\
&= \frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) && (7)
\end{aligned}$$

Grenzwert $n \to \infty$ der Obersumme

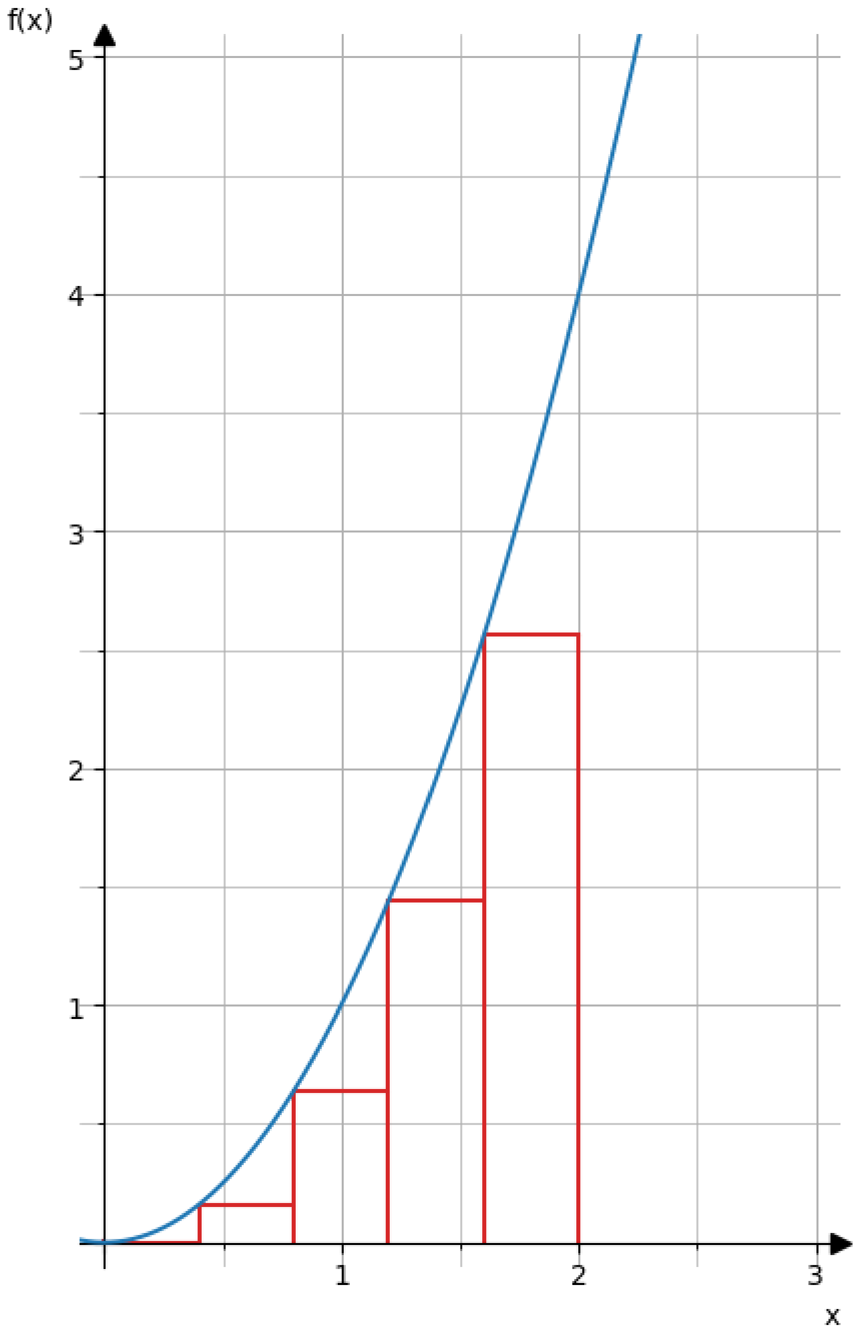
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

In [33]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -0.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 3.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -0.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1=x**2

def f(x):
    return x**2

n= 6
xi=np.linspace(0,2,n)
yi=f(x)
unten=np.zeros(n)
for i in range(len(unten)-1):
```

```python
    cx = np.linspace(xi[i], xi[i+1], 50)
    cy = f(cx)
    unten[i+1] = np.min(cy)

unten[0] = yi[0]

# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax= fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
ax.plot(x,y1, zorder=10)
plt.plot(xi, unten, drawstyle='steps-pre', c='C3')
plt.vlines(xi, ymin=0, ymax=unten, color = 'C3', alpha=1)
#plt.show()
```

```
Out[33]:  <matplotlib.collections.LineCollection at 0x12fd78850>
```



Untersumme:

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{2}{n}\left(0^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \left(3\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left((n-1)\frac{2}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{2^3}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \\ &= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1) \\ &= \frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

Grenzwert $n \to \infty$ der Untersumme

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{8}{3}$$

Conclusio: Der Flächeninhalt beträgt

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n \frac{8}{3}$$

Definition:

Sei Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ gegeben.
Exisitieren für jede Untersummenfolge und Obersummenfolge die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} U_n \text{ und } \lim_{n\to\infty} O_n$$

und sind die Grenzwerte gleich, dann ist der gemeinsame Grenzwert der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Definition:

Eine Funktion f heißt auf einem Intervall $I = [a, b]$ integrierbar, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

Bemerkung:

Wie sieht es für $f(x) \leq 0$ aus?
Mit dieser Methode berechnet man den orientierten Flächeninhalt, d.h. Flächen oberhalb der x-Achse werden poitiv berrechnet. Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ berechent.

Möchte man Flächeninhalte unterhalb der x-Achse berechnen, verwendet man den Betrag des negativen Flächeninhalts.

Satz:

Jede stetige Funktion auf einem Intervall I hat für jede beliebige Folge von Obersummen O_N bzw. Untersummen U_N ein-und-densleben Gernezwert.

Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Stellen und der Breite der Teilintervalle.

Definition:

Gegeben:

- Eine Funktion f auf einem Intervall $I = [a, b]$
- f ist stetig
- für alle $n \in \mathbb{N}$ sein S_N eine Rechtecksumme mit der Breite $h = \frac{b-a}{n}$ Es gilt:

Der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_N$$

heißt **Integral der Funktion** f über dem Intervall $I = [a, b]$. Man schreibt:

$$\lim_{n \to \infty} = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ heißt Integrand x ist die Integrationsvariable a ist die untere Grenze b ist die obere Grenze.

Bemerkung:

1. Das Integralzeichen geht auf G.W. Leibnitz zurück. Es symbolisiert ein langestrecktes S für die Rechtecksummen.

2. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. $I = [a, b]$, und $a < c < b$. Es gilt die Intervalladditivität:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

4. $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$