2. Linearfaktordarstellung

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x+3) \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$$

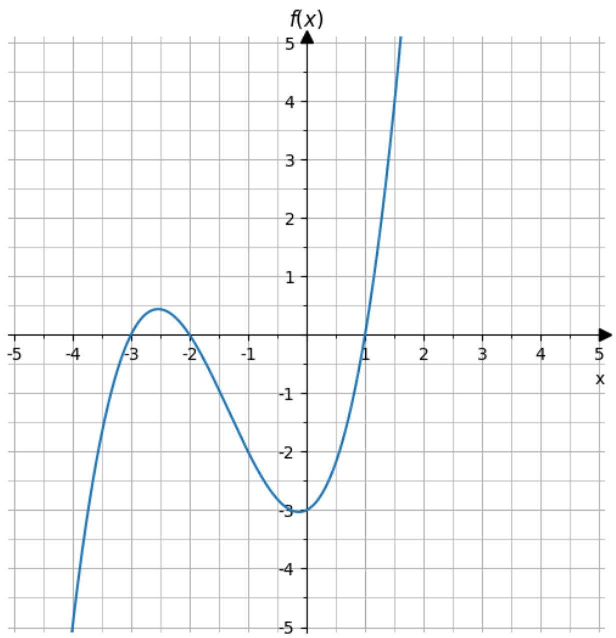
	f(x)	g(x)
Grad	auszurechenen	ablesbar
		$\mathrm{grad}(f) = 3$
Nullstellen	ablesbar	auszurechnen
	$n_1 = -3$ $n_2 = -2$ $n_3 = 1$	
Aufbau	Produkt von Linearfaktoren	Polynom

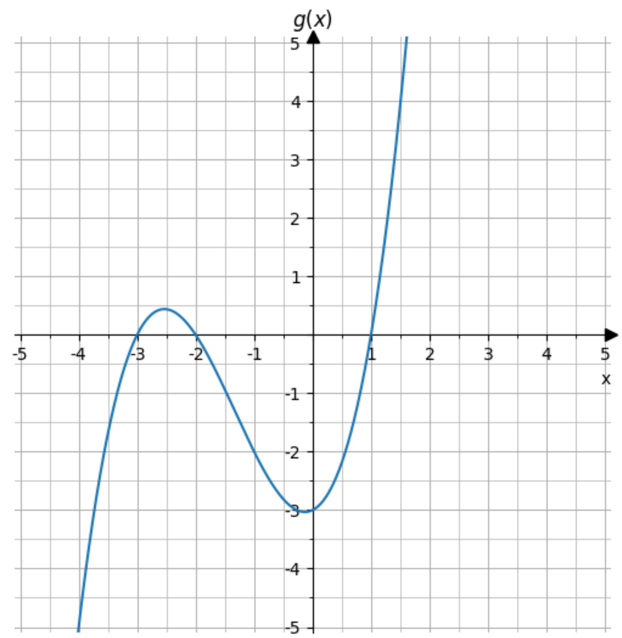
Definition:

Bestehen Faktoren einer Multiplikation aus linearen Elementen der Form $ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man die Faktoren als Linearfaktoren.

Schauen wir uns die Funktionsgraphen der Fuktion f und g an:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x14868b920>]
```





Satz 1:

a Jede ganzrationale Funktion in Lienarfaktordarstellung lässt sich durch ausmultiplizieren in eine Polynomfunktion umformen.
b Nicht jede ganzrationale Funktion besitzt eine Liearfaktordarstellung.

Beweis:

a klar
b Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1$

Satz 2:

Ist eine ganzrationale Funktion f vom Grad n und der Nullstelle c gegeben, so gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad n-1, so dass gilt:

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x)$$

Beweis:

Gegeben:

- ganzrationale Funktion f
- $\text{grad}(f) = n$
- c Nullstelle von f

Verschiebung der Nullstelle c in den Ursprung durch Verschieben des Graphen von f entlang der x-Achse um $-c$ erzeugt eine neue Funktion h:

$$h(x) = f(x - (-c)) = f(x + c)$$

Eigenschaften von h:

- h ist auch eine ganzrationale Funktion mit $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$
- $x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h, d.h. $h(0) = f(0 + c) = f(c) = 0$

Es folgt damit: $a_0 = 0$

und es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x \\ &= x \cdot \left(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1\right) \\ &= x \cdot k(x) \end{aligned}$$

Eigneschaften von k(x):

- ganzrationale Funktion
- Gleichung $k(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$
- $\operatorname{grad}(k) = n - 1$

Zurückverschiebung des Graphen von h um c entlang der x-Achse ergibt den Graphen von f und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x - c) \\ &= (x - c) \cdot k(x - c) \\ &= (x - c) \cdot g(x), \quad \text{mit } g(x) = k(x - c) \end{aligned}$$

mit $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(k) = n - 1 \square$

Satz 3:

Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweis:

Gegeben:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $\operatorname{grad}(f) = n$

$\Rightarrow$ Es gibt ein c_1, so das gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - c_1) \cdot \left(a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) \\ &= (x - c_1) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(f) - 1 = n - 1$

Sei c_2 weiter Nullstelle von f(x).
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - c_1)(x - c_2)\left(a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0\right) \\ &= (x - c_1)(x - c_2) \cdot h(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{grad}(h) = \mathrm{grad}(f) - 2 = n - 2$$

Die Durchführung dieser Schritte ist insgesamt maximal n-mal möglich. $\square$