6. Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion und seine Ableitungsfunktion

$f(x) = e^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.
Also ist die e-Funktion injektiv.
Damit ist die e-Funktion nach Satz umkehrbar.

Bestimmung der Umkehrfunktion:

1. e-Funktion ist injektiv und damit umkehrbar.
2. $$y = e^x$$
3. Die Lösung der Gleichung $y = e^x$ lautet: ln(y), somit ist:
$$x = \ln(y)$$
4. $$y = \ln(x)$$
5. $$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

Die Defintionsmenge von $\ln(x)$ ist die Wertemenge der e-Funktion: $D = \mathbb{R}_0^+$
Die Wertemenge von $\ln(x)$ ist die Defintionsmenge der e-Funktion: $W = \mathbb{R}$

Satz:

Die **natürliche Logarithmusfunktion** f^{-1} ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.
Sie hat die Defintionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$ und die Wertemenge $W = \mathbb{R}$. Es gilt folglich:

$$ln : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$

Bestimmung der Ableitungsfunktion:

Es sei:

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

.
Damit gilt:

$$e^{f^{-1}(x)} = x$$

beide Seiten ableiten:

$$e^{f^{-1}(x)} \cdot f'^{-1}(x) = 1$$

f^{-1} ist die Umkehrfunktion von e:

$$x \cdot f'^{-1}(x) = 1$$

Dividiere durch x mit x>0:

$$f'^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

Satz:

Sei $(f^{-1}) : x \to \ln(x)$ die natürliche Logarithmusfunktion.
Es gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$$

Grenzwerte der natürlichen Logarithmusfunktion:

Satz:

Es gilt:

1. $$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$
2. $$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$
3. Sei $\alpha > 0$, dann gilt:

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

   Der Logarithmus wächst für $x \to \infty$ langsamer gegen ∞, als jede positive Potenz von x.
4. Es gilt für $\alpha > 0$

   $$\lim_{x \to 0} x^\alpha \cdot \ln(x) = 0$$