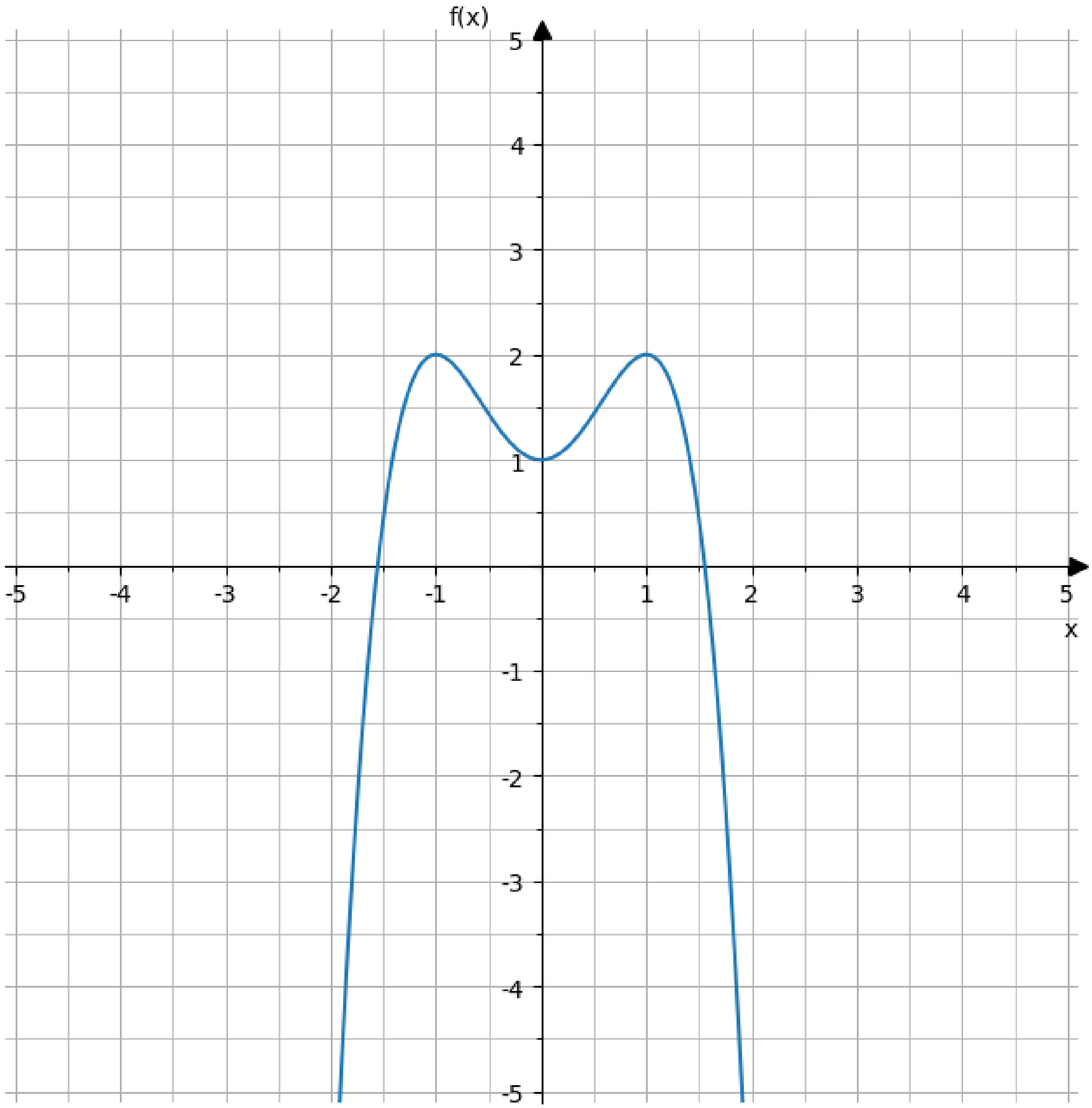
5. Extrem- und Wendepunkte

In [7]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator, MultipleLocator, FuncFormatt

# Defintionsmenge und Funktion
# ----------------------------
a= -5.1 # untere x-Intervallgrenze
b= 5.1 # obere x-Intervallgrenze
c = -5.1# untere y-Intervallgrenze
d = 5.1 # obere y-Intervallgrenze
x = np.linspace(a, b,1000)
y1= -x**4+2*x**2+1
# ----------------------------

# Einstellung des Graphen
fig=plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1,1,1, aspect =1)

# Definiton der Haupteinheiten, reele Zahlen ohne die 0
def major_tick(x, pos):
    if x==0:
        return ""
    return int(x)

# Achsenskalierung
ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(2))
ax.xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))
ax.yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(major_tick))

# Position der Achsen im Schaubild
ax.spines[['top','right']].set_visible(False)
ax.spines[['bottom','left']].set_position('zero')

# Pfeile für die Achsen
ax.plot((1),(0), ls="", marker= ">", ms=7, color="k", transform=ax.get_yaxis
ax.plot((0),(1), ls="", marker= "^", ms=7, color="k", transform=ax.get_xaxis

# Achsenlänge und Beschriftung
ax.set_xlim(a,b)
ax.set_ylim(c, d)
ax.set_xlabel("x", loc="right")
ax.set_ylabel("f(x)", loc="top", rotation=0)

# Kästchen
ax.grid(linestyle="-", which="major",linewidth=0.7, zorder=-10)
ax.grid(linestyle="-", which="minor",linewidth=0.5, zorder=-10)

# Plot der Funktion
```

```
ax.plot(x,y1, zorder=10)
#plt.show()
```

Out[7]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x127177990>]



Besondere Stellen und Funktionswerte von Funktionen

Definitionen von Begriffen zur Beschreibung von Stellen und Funktionswerte einer Funktion

Maximumstelle x_0 von f

In einer Umgebung einer Stelle x_0 gilt: $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies die Stellen x_1 und x_5

Lokales Maximum von f

Wenn in einer Umgebung einer Stelle x_0 gilt: $f(x) \leq f(x_0)$, dann ist $f(x_0)$ ein *lokales Maximum**

Im Beispiel sind dies $f(x_1)$ und $f(x_2)$

Globales Maximum von f

Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel ist dis f(x_1)

Minimumstelle x_0 von f

In einer Umgebung einer Stelle x_0 gilt: $f(x) \geq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies die Stellen x_3

Lokales Mainimum von f

Wenn in einer Umgebung einer Stelle x_0 gilt: $f(x) \geq f(x_0)$, dann ist $f(x_0)$ ein **lokales Minimum**

Im Beispiel sind dies $f(x_3)$

Globales Minimum von f

Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt: $f(x) \geq f(x_0)$

Wendestelle von f

Stellen, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert.

Eigenschaften des Graphen

Definitionen

Hochpunkt eines Graphen

$H(x_0|f(x_0)$, für den für die Stelle x_0 gilt: In einer Umgebung von x_0 ist $f(x) \leq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies $H_1(x_1|f(x_1))$ und $H_2(x_5|f(x_5))$

Tiefpunkt eines Graphen

$H(x_0|f(x_0)$, für den für die Stelle x_0 gilt: In einer Umgebung von x_0 ist $f(x) \geq f(x_0)$

Im Beispiel sind dies $T(x_3|f(x_x))$

Wendepunkt eines Graphen

Punkt des Graphen, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert.

Im Beispiel $W_1(x_2|f(x_2))$ und $W_2(x_4|f(x_4))$

Sattelpunkt eines Graphen Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerecher Tangente. (vgl. den Graphen von $f(x) = x^3$ an der Stelle x=3.)

Bestimmung der inneren Extremstellen

Satz: Bestimmung von Extremstellen

Gegeben:

- Intervall I
- Funktion f
- f auf I zweimal differenzierbar
- $x_0 \in I$ innere Stelle von I (also nicht die Randstellen)

x_0 ist eine Maximumstelle von f, wenn

1. **Notwendige Bedingung:** $f'(x_0) = 0$
2. **Hinreichend Bedingung: (VZW)** f' macht an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von + nach -

oder

2. **Hinreichende Bedingung:** $f''(x) < 0$

x_0 ist eine Minimumstelle von f, wenn

1. **Notwendige Bedingung:** $f'(x_0) = 0$
2. **Hinreichend Bedingung: (VZW)** f' macht an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von - nach +.

oder

2. **Hinrechende Bedingung:** $f''(x) > 0$

Bemerkung:

Gilt für eine Funktin f und einer Stelle x_0, dass sowohl $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, dann kann man **nicht** daraus schließen, das keine Extremstelle bei x_0 vorliegt. In diesem Fall verwendet man zusätzlich die Untersuchung mit Hilfe des Vorzeichenwechsels (VZW) von f'. Liegt kein VZW vor, so kann man weiterhin **nicht** daraus schließen, dass keine Extremstelle bei x_0 vorliegt.

Satz: Bestimmung von Wendestellen

Gegegben:

- Intervalle I
- Funktion f, definiert auf I
- f auf I dreimal differenzierbar
- $x_0 \in I$ innerre Stelle des Intervalls

x_0 ist eine **Wendestelle von f**, wenn

1. **Notwendige Bedingung:** $f''(x_0) = 0$
2. **Hinreichende Bedingung:** $f''(x)$ macht an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel

oder

2. **Hinreichende Bedingung:** $f'''(x_0) \neq 0$