

4. Betragsfunktion

4. Betragsfunktion

= Abstandsfunktion

= “Mach-positiv”-Funktion

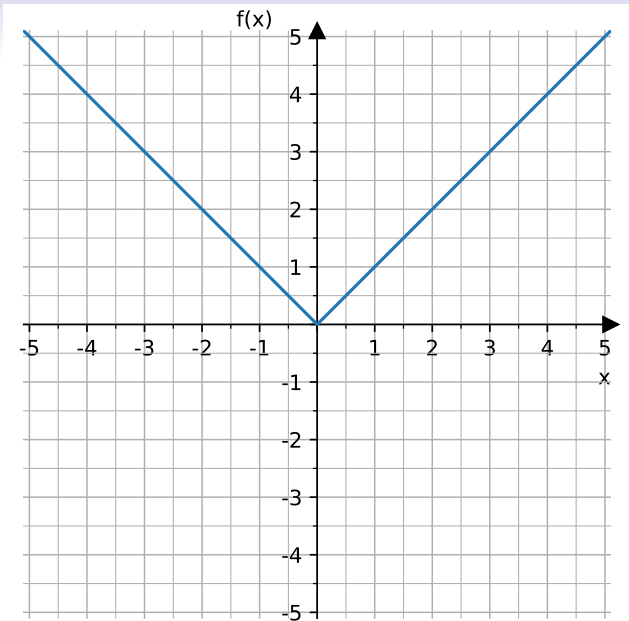
Definition

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Beispiele:

1) $|2| = 2$

2) $|-4| = 4$

3) $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & , x \geq -1 \\ -(x + 1) & , x < -1 \end{cases}$

4) $2x^2 + |-x + 4| = \begin{cases} 2x^2 - x + 4 & , x \leq 4 \\ 2x^2 + x - 4 & , x > 4 \end{cases}$

Begründung:

$$-x + 4 \geq 0$$

$$-x \geq -4$$

$$x \leq 4$$

$$5. |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & , x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 3 \quad , x_2 = 1$$

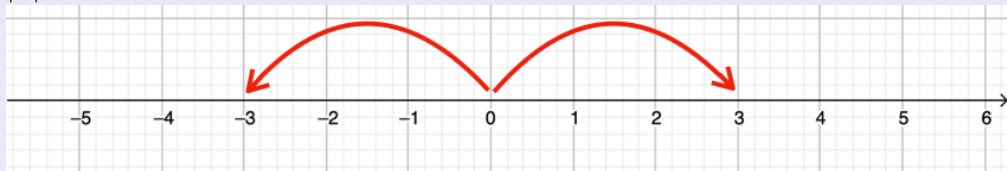
Es gibt folglich drei mögliche Intervalle: $(-\infty; 1]$, $(1; 3)$ und $[3; \infty)$

Überprüfe, in welchen Intervallen die Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Wähle dazu Werte aus den Intervallen. Es ergibt sich:

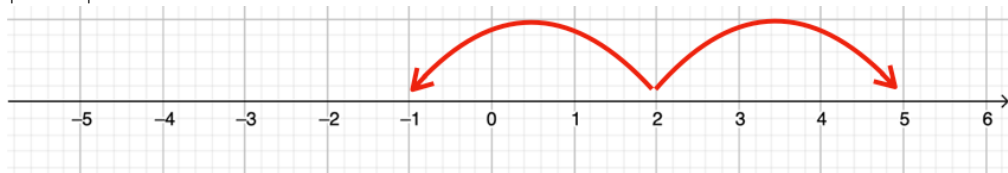
$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

Abstand:

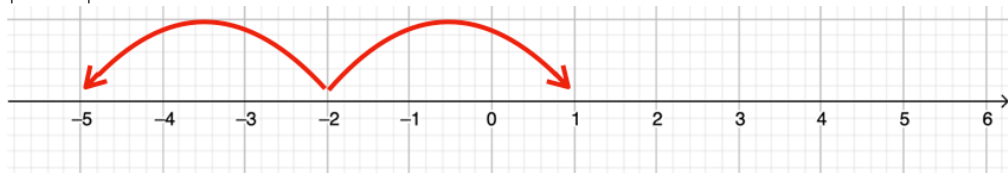
1) $|x| = 3$



2) $|x - 2| = 3$



3) $|x + 2| = 3$



Dreiecksungleichung:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

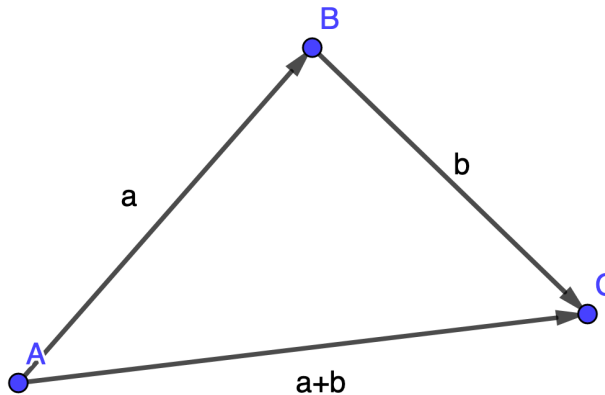


Figure 1: Dreiecksungleichung

Beweis:

1) Es gilt: $a \leq |a|$ und $b \leq |b| \Rightarrow (a + b) \leq |a| + |b|$

2) Es gilt: $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b| \Rightarrow -a + (-b) \leq |a| + |b|$

3) Es gilt: $|a + b| = \begin{cases} a + b & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) & , a + b < 0 \end{cases}$

Mit 2) und 3) folgt:

$$|a + b| = \begin{cases} a + b \leq |a| + |b| & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) \leq |a| + |b| & , a + b < 0 \end{cases}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \checkmark$$

Betragsgleichungen lösen

Beispiel:

$$|x - 4| = 2x - 11$$

1. Fall $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$|x - 4| = 2x - 11$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 2x - 11$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 7$$

$$x \geq 2 \text{ und } x_1 = 7 \Rightarrow L = \{7\}$$

2. Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$\begin{aligned} & |x - 4| = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & -(x - 4) = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & x - 4 = -2x + 11 \\ \Leftrightarrow & 3x = 15 \\ \Leftrightarrow & x_2 = 5 \\ & x < 2 \text{ und } x_2 = 5 \Rightarrow L = \{\} \end{aligned}$$

Gesamtlösungsmenge:

$$L = \{7\}$$