7. Trigonometrische Funktionen

7.1 Winkelfunktion im Dreieck

Rechtwinklige Dreiecke

Bezeichnungen in rechtwinklingen Dreiecken

Allgemein:

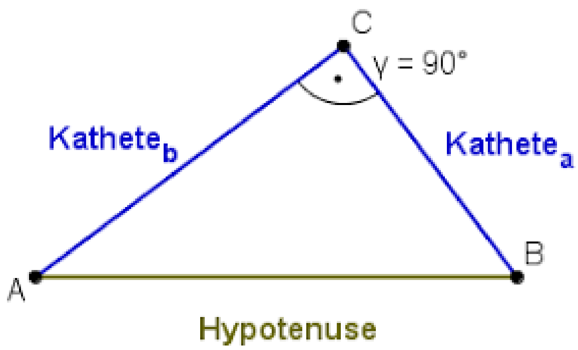


Figure 1: Dreieck

Im Bezug auf die Winkel:

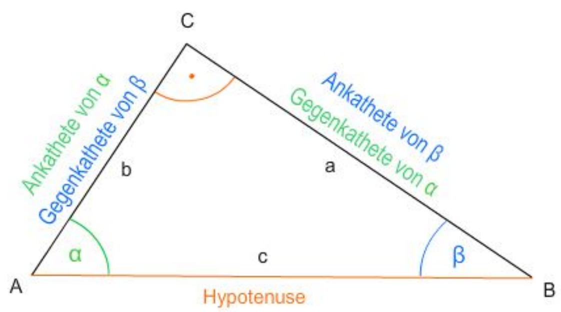


Figure 2: Dreieck

Beobachtung

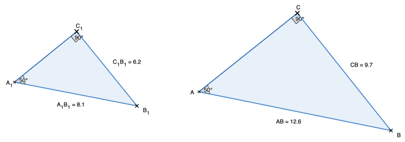


Figure 3: Dreieck

A_1B_1	B_1C_1	$\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$	AB	BC	$\frac{BC}{AB}$
8,1	6,2	0,76	12,6	9,7	0,76

In jedem rechtwinklingen Dreieck mit festem Winkel α ist das Verhältnis von Gegenkathete zu α zur Hypothenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Sinus zu dem Winkel α

Analog In jedem rechtwinklingen Dreieck mit festem Winkel α ist das Verhältnis von Ankathete zu α zur Hypothenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Kosinus zu dem Winkel α

Definition: Sinus

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hyopthenuse

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

Definition: Kosinus

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Kosinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Ankathete zur Länge der Hypothenuse

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

Definition: Tangens

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Ankathete

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

- Einheitskreis := Kreis um den Ursprung mit Radius 1
- Zu jedem Punkt P auf dem Kreis gibt es ein rechtwinkliges Dreieck
- Länge der Hypothenus ist 1.

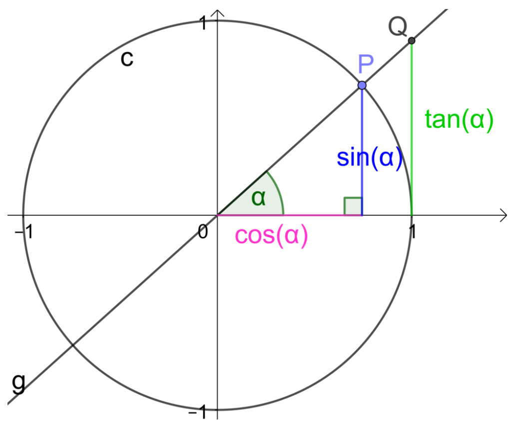


Figure 4: Einheitskreis

Sinus, Kosiunsfunktion und Tangensfunktion im Dreieck

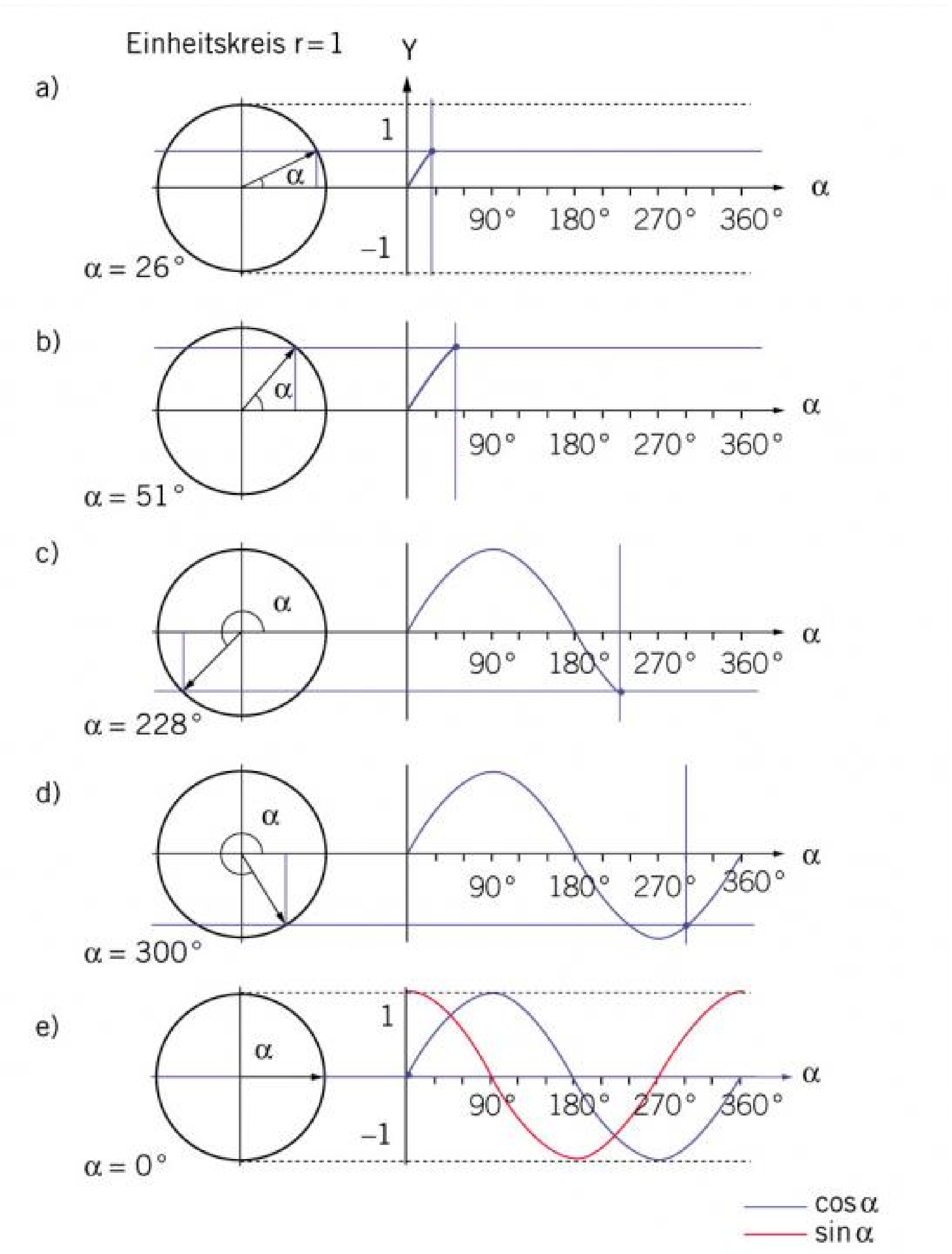
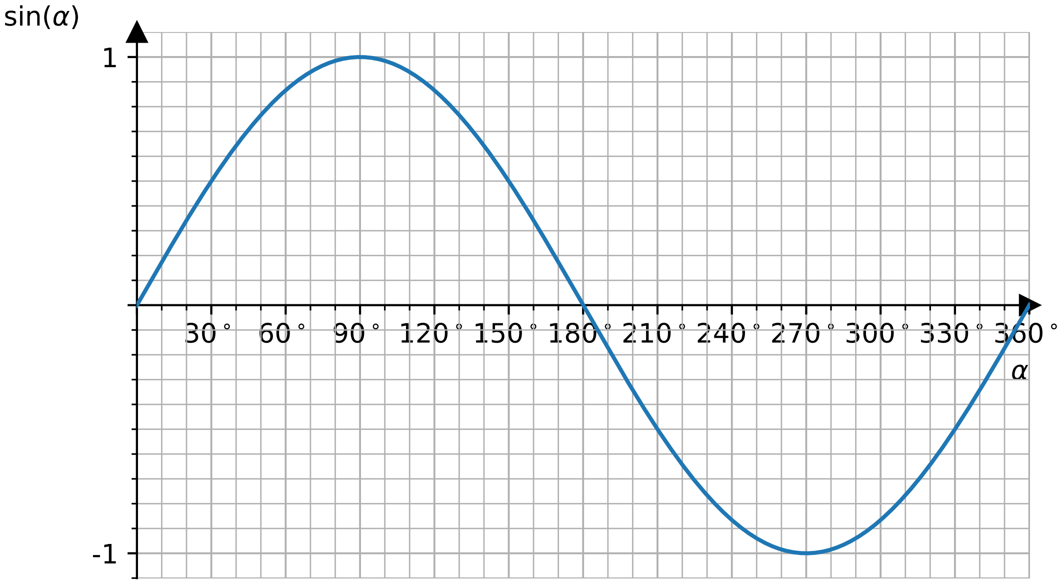


Figure 5: Sinusfunktion

> **ℹ Definition: Sinusfunktion im Dreieck**
>
> Gegeben:
>
> - rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Sinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Sinusfunktion**

Funktionsgraph der Sinus-Funktion:



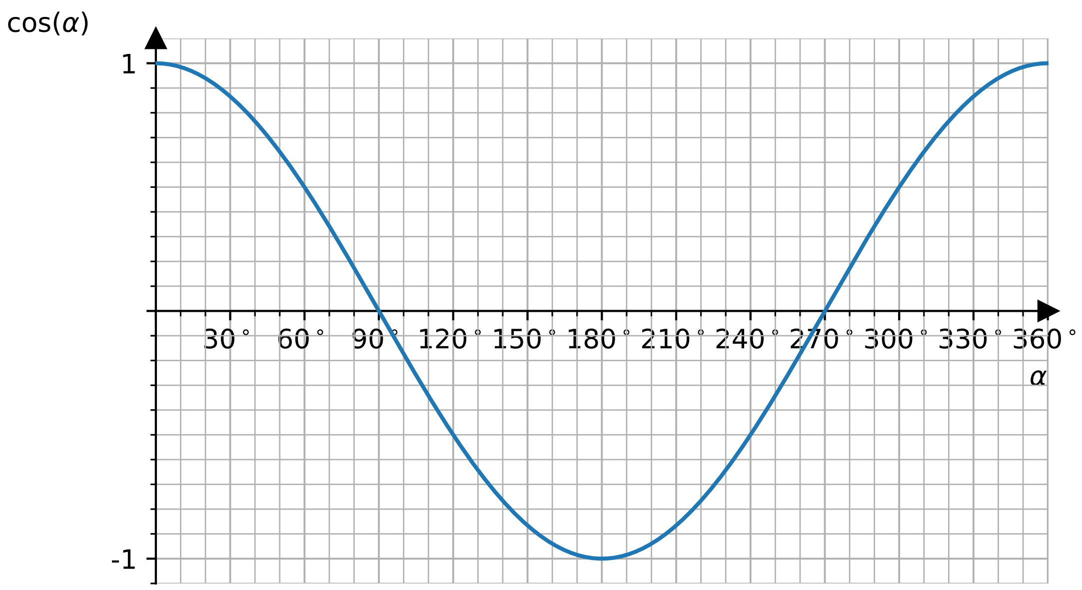
ℹ Definition: Kosinus-Funktion im Dreieck

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Kosinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Kosinusfunktion**

Funktionsgraph der Kosinus-Funktion:



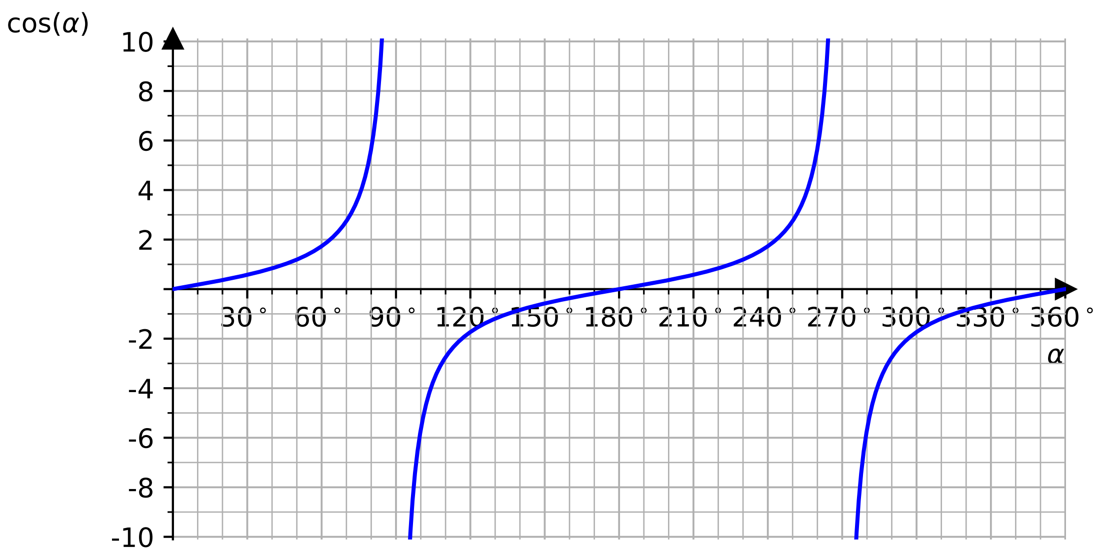
ℹ Definition: Tangens-Funktion im Dreieck

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Tangens zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Tangensfunktion**

Funktionsgraph der Tangens-Funktion:



7.2 reelwertige Winkelfunktionen

Bogenmaß

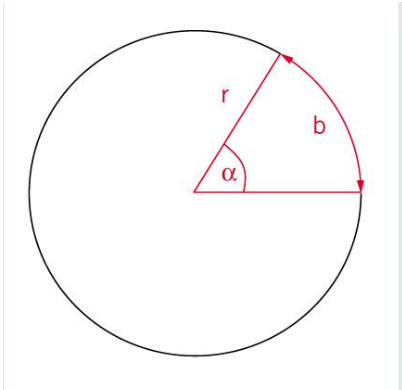


Figure 6: Einheitskreis

Beobachtung:

- Jedem Winkel kann eindeutig eine Kreisbogenlänge zugeordnet werden.
- Diese Zuordnung ist bijektiv.
- Die Kreisbogenlänge ist eine reelle Zahl.

! Satz:

Gegeben: - Kreis $k(M;r)$ mit Mittelpunkt M und Radius r - Kreissektor mit Öffnungswinkelswinkel α
Die Kreisbogenlänge b des Kreissegments (Bogenmaß) wird berechnet mit:

$$b = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

Folgerung

Damit lässt sich wie folgt auch zu jeder reelen Zahl x ein Wert $\sin(x)$, $\cos(x)$ bzw. $\tan(x)$ zuordnen:

$$\begin{array}{cc} \alpha & \rightarrow \sin(\alpha) \\ \downarrow & = \\ x & \rightarrow \sin(x) \end{array}$$

Funktionsterme

Zuordnung Winkel $\rightarrow$ Bogenlänge

$$g(\alpha) = \left(r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}\right)$$

Zuordnung Bogenlänge (reele Zahl) $\rightarrow$ Sinus

$$f(x) = f(g(\alpha)) = \sin\left(r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}\right) = \sin(x)$$

Winkelfunktionen

Sinus-Funktion

- Defintionsmenge: $\mathbb{R}$
- Wertemenge: $W = \{f(x) | -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode $p = 2\pi$
- punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Nullstellen:

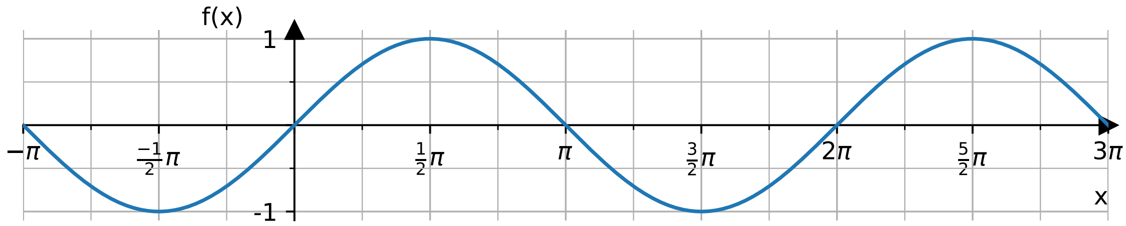
$$\begin{gathered} ..., -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ... \\ \text{allgemein: } k \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

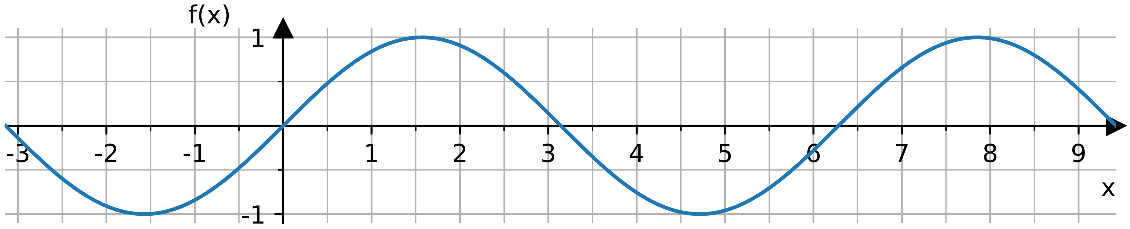
- Maximalstellen:

$$\begin{gathered} ..., -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, ... \\ \text{allgemein: } \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

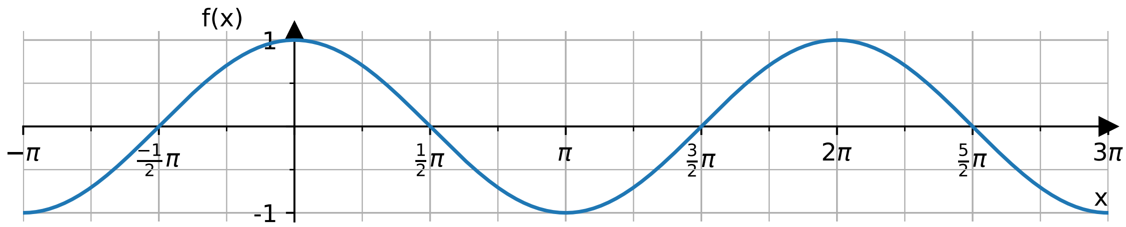
- Minimalstellen:

$$\begin{gathered} ..., -\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, ... \\ \text{allgemein: } \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$





Kosinus-Funktion



Eigenschaften:

- Defintionsmenge: $\mathbb{R}$
- Wertemenge: $W = \{f(x) | -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode $p = 2\pi$
- achsensymmetrisch zur y-Achse

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- Nullstellen:

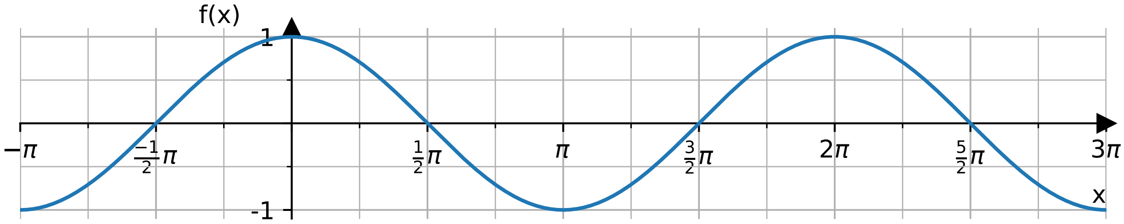
$$..., -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, ...$$
$$\text{allgemein: } \frac{2k+1}{2} \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

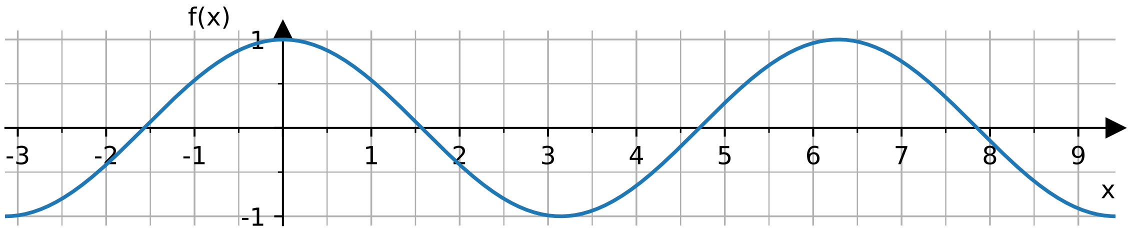
- Maximalstellen:

$$\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$
$$\text{allgemein: } 2k \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

- Minimalstellen:

$$\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$
$$\text{allgemein: } (2k+1)\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$





Verschieben der Sinusfunktion entlang der y-Achse

Funktionsgleichung:

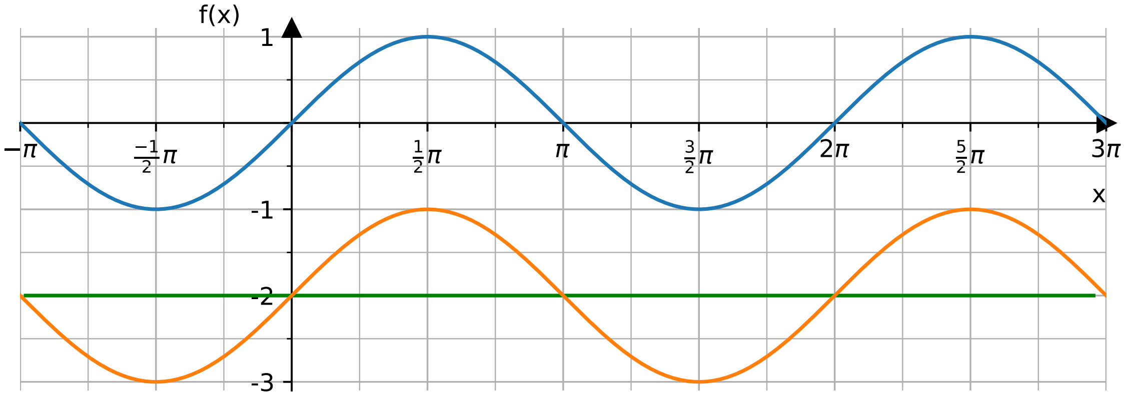
$$f(x) = \sin(x) + d$$

Die Mittellinie ist die Gerade $y = d$

Beispiel

$$f(x) = \sin(x) - 2$$

Mittellinie: $y = -2$



Verschieben entlang der x-Achse

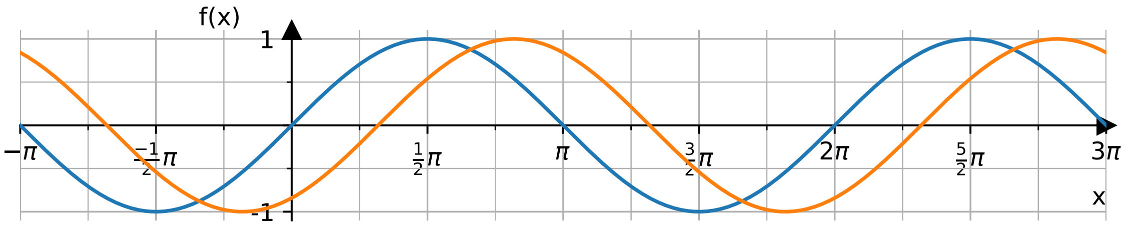
Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(x - c)$$

Man nennt c auch Phase.

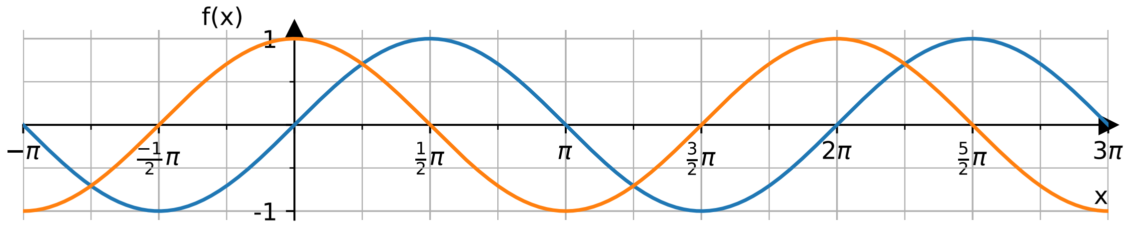
Beipsiel

$$f(x) = \sin(x - 1)$$



Beobachtung

$$f(x) = \sin(x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \pi\right)) = \cos(x)$$



Strecken / Stauchen

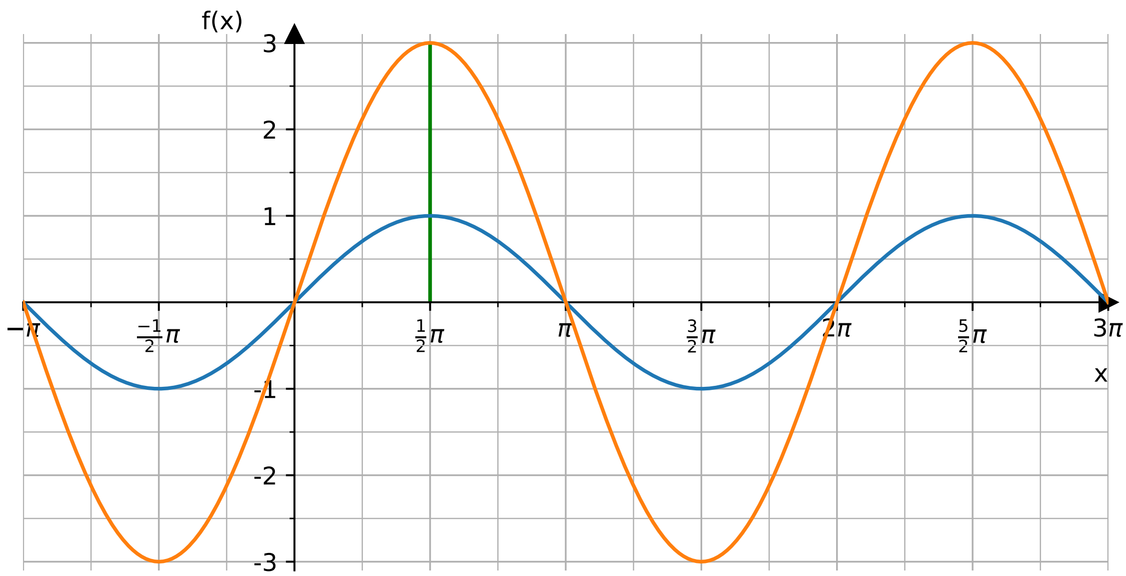
Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(x)$$

$|a|$ nennt man Amplitude (= Ausschlag). Die Amplitude ist immer positiv.

Beipsiel

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$



Periode verändern

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(b \cdot x)$$

Das Verhältnis

$$p = \frac{2\pi}{b}$$

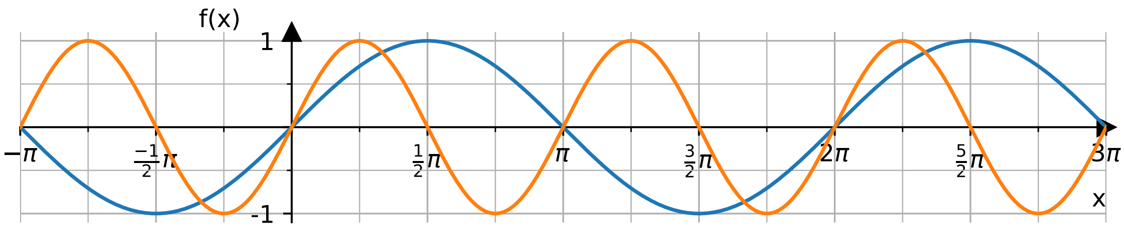
nennt man Periode.

Beispiel

$$f(x) = \text{sin}(2 \cdot x)$$

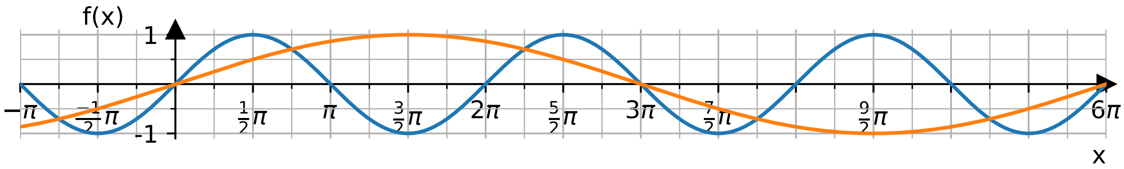
Die Periode ist:

$$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Beispiel

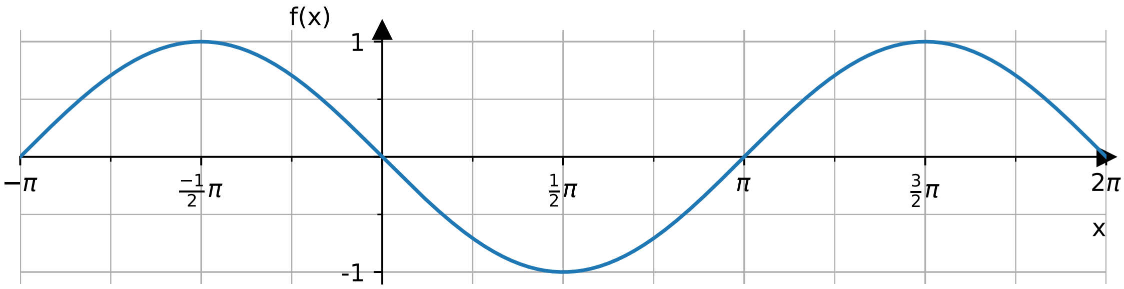
$$f(x) = \text{sin}\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$$

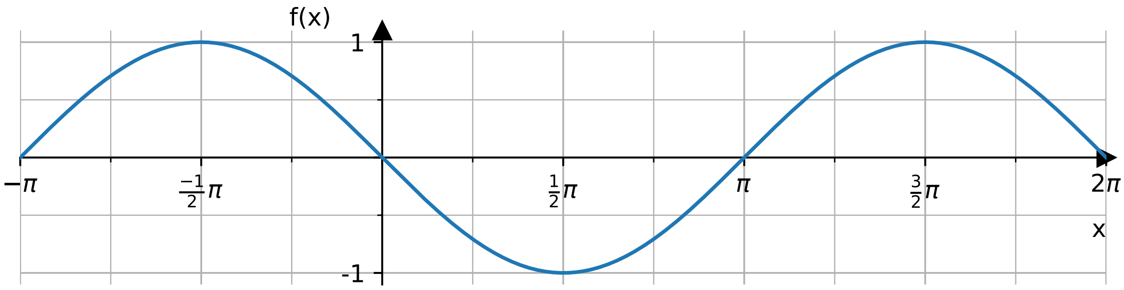


Spiegeln an der x-Achse

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\text{sin}(x) = \text{sin}(-x)$$





Allgemeine Sinus-Funktion

Definition

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Der Graph der Funktion

$$g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

geht aus der Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

hervor, indem - f um $|a|$ in y-Richtung gestreckt wird. Die Amplitude A entspricht $A = |a|$
- f um Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung gestreckt wird.
- f um c in x-Richtung und um d in y-Richtung verschoben wird.

Bemerkung

Analoge Aussagen gelten auch für die Kosinus-Funktion.
Der Graph der Kosinus-Funktion geht aus dem Graph der Sinus-Funktion durch Verschiebung in x-Richtung um $-\frac{\pi}{2}$ hervor.

Beispiel:

$a = 5$
$b = 2$
$c = -2$

$d = -1$