Name	
VP	Note

MATHEMATIK

Klausur KS1.1.1 — 16. Oktober 2019

Differentialrechnung — HND

Pflichtteil

keine Hilfsmittel

Aufgabe P1

Leiten Sie ab und vereinfachen Sie das Ergebnis von $f(x) = (\sin(2x))^2$.

(3 VP)

Aufgabe P2

Bestimmen Sie die Steigung des Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = x(x+3) - 2$ an der Stelle $x_0 = -2$.

(3 VP)

Aufgabe P3

Lösen Sie die Gleichung $4x^4 = 4 + 6x^2$.

(3 VP)

Aufgabe P4

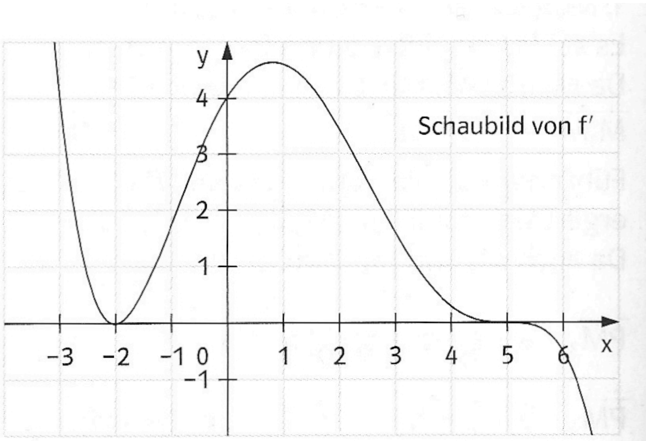
Das Schaubild von f besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

(3 VP)

Aufgabe P5

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig oder falsch ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.



(1) Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

(2) Die Ableitung von f' ist bei $x = 5$ null.

(3) Das Schaubild von f hat im Intervall $[-3; 6]$ genau zwei Wendepunkte.

(4) Das Schaubild von f beschreibt auf dem Intervall $[1; 4]$ eine Rechtskurve.

(5) $f(0) > f(5)$.

(5 VP)

$\sum$ (**17 VP**)

Name	
VP	Note

MATHEMATIK

Klausur KS1.1.1 — 16. Oktober 2019

Differentialrechnung — HND

Wahlteil

Hilfsmittel: Taschenrechner und Merkhilfe

Aufgabe W1

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{25}{8} \text{ im Bereich } -2{,}5 \le x \le 5$$

Dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100m).

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes im angegebenen Bereich.

(1 VP)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des höchsten (Gipfel) und den tiefsten Punkts (Tal) des Höhenzugs. Wie groß ist der Höhenunterschied.

(5 VP)

c) Die Nullstellen des Graphen liegen auf 2387m ü.M. Wie hoch ist der Gipfel des Höhenzugs?

(1 VP)

d) Bestimmen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist.

(3 VP)

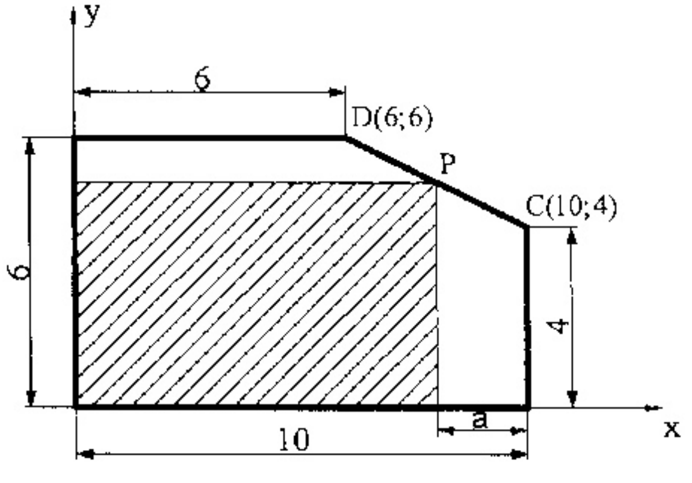
Aufgabe W2

In NwT werden aus Gründen der Ressourcenschonung Holzreststücke verwendet. Aus einem fünfeckigen Brett soll zur Weiterverarbeitung ein rechteckiges Stück herausgesagt werden. Dabei soll der Punkt P auf der Strecke durch die Punkte C und D liegen. Alle Angeben in Zentimeter.

Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den das rechteckige Brett maximal groß wird und geben Sie den Flächeninhalt des rechteckigen Bretts an.

Teilergebnis:Gerade durch Punkt C und Punkt D $y = -\frac{1}{2}x + 9$

(6 VP)



$\sum$ **(16 VP)**

Viel Erfolg!

Aufgabe P1

$$f'(x) = 2(\sin(2x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4\sin(2x)\cos(2x)$$
1 1 1

(3 VP)

Aufgabe P2

$$f(x) = x^2 + 3x - 2 \quad 1$$
$$f'(x) = 2x + 3 \quad 1$$
$$f'(-2) = -4 + 3 = -1 \quad 1$$

(3 VP)

Aufgabe P3

$$4x^4 = 4 + 6x^2$$
$$4x^4 - 6x^2 - 4 = 0$$
$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$$
$$u^2 - \frac{3}{2}u - 1 = 0 \quad \circ\, u = x^2 \quad 1$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$
$$u_1 = 2, \quad u_2 = -\frac{1}{2} \quad \circ\, u = x^2 \quad 1$$
$$x^2 = 2$$
$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} \quad 1$$

(3 VP)

Aufgabe P4

1. Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$
$$f''(x) = -6x + 6$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0$$
$$x = 1 \quad 1$$

2. Hinreichende Bedingung

$$f'''(x) = -6$$
$$f'''(1) = -6 \quad \neq 0 \quad 1$$

Wendepunkt
$W(-1\,|\,f(-1)) = W(-1\,|\,-2)$ 1

(3 VP)

Aufgabe P5

(1) falsch, da f' keine Vorzeichenwechsel bei $x = 2$ macht. 1

(2) richtig, da der Graph von f' keine Steigung hat. 1

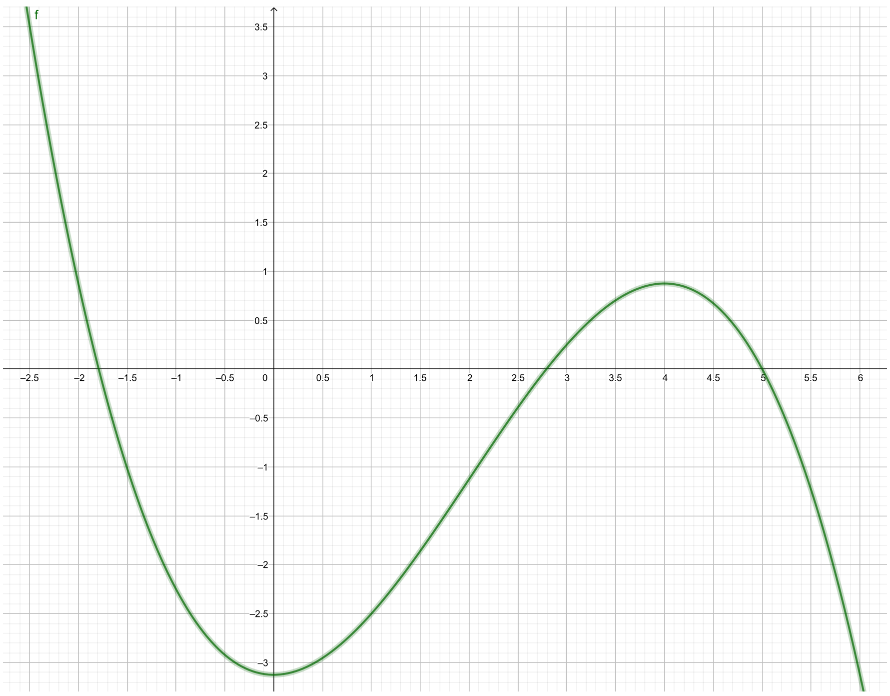
(3) richtig, bei $x = 2$ und bei $x \approx 0{,}8$ ist die Steigung von f' null und macht einen Vorzeichenwechsel. 1

(4) richtig, das auf diesem Intervall $f' > 0$ und f' streng monoton fallend ist. 1

(5) falsch, da $f' > 0$ zwischen 0 und 5 ist, gilt $f(0) < f(5)$. 1

(5 VP)

Aufgabe W1
a)



1

b)
Notwendige Bedingung

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$x_1 = 0$ **oder** $-\frac{3}{8}x + \frac{3}{2} = 0$

$x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4$ 1

Hinreichende Bedingung

$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$f''(0) = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ **Tiefpunkt** 1

$TP(0 \mid -\frac{25}{8})$

$f''(4) = -1{,}5$ $\Rightarrow$ **Hochpunkt** 1

$HP(4 \mid 0{,}875)$

Das Tal befindet sich beim TP und der Gipfel beim HP. 1

Der Höhenunterschied beträgt $0{,}875 - (-3{,}125) = 4$. Das entspricht 400m. 1

c) Die Höhe des Gipfels über der Nullstelle des Graphen beträgt 0,875. Das entspricht 87,5m. Der Gipfel liegt folglich $2387 + 87{,}5 = 2474{,}5$ m über dem Meeresspiegel. 1

d) Wendepunkt berechnen

1. Notwendige Bedingung

$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0$

$x = 2$ 1

2. Hinreichend Bedingung

$f'''(x) = -\frac{3}{4}$

$f'''(2) \neq 0$ $\Rightarrow$ **Wendestelle** 1

Wendepunkt

$W(2 \mid f(2)) = W(2 \mid -1{,}125)$

Am Steilsten ist der Höhenzug im Punkt W. 1

(10 VP)

Aufgabe W2

a)

Hauptbedingung

$A(a, y_P) = (10 - a) \cdot y_P$ 1

Nebenbedingung:

$P(10 - a \mid g(10 - a)) \in g(x)$ mit g ist Gerade durch die Punkte C und D

Gerade g aufstellen:

$6 = m \cdot 6 + c \qquad \Rightarrow c = 6 - 6m$

$4 = m \cdot 10 + c$

$4 = 10m + 6 - 6m$

$-2 = 4m$

$-\frac{1}{2} = m$ 1

$c = 6 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 9$ 1

$g(x) = -\frac{1}{2}x + 9$

y_P berechnen:

$y_P : g(10 - a) = -\frac{1}{2}(10 - a) + 9 = \frac{1}{2}a + 4$

Zielfunktion

$A(a) = (10 - a) \cdot \left(\frac{1}{2}a + 4\right)$ 1

$= -\frac{1}{2}a^2 + a + 40$

Notwendige Bedingung:

$A'(a) = -a + 1$

$A'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow -a + 1 = 0$

$a = 1$ 1

Hinreichende Bedingung:

$A''(a) = -1$

$A''(1) = -1$ **Hochpunkt**

Flächeninhalt

$A = 40{,}5[cm^2]$ 1

(6 VP)