3. Gleichungen und Ungleichungen lösen

Benötigt bei:

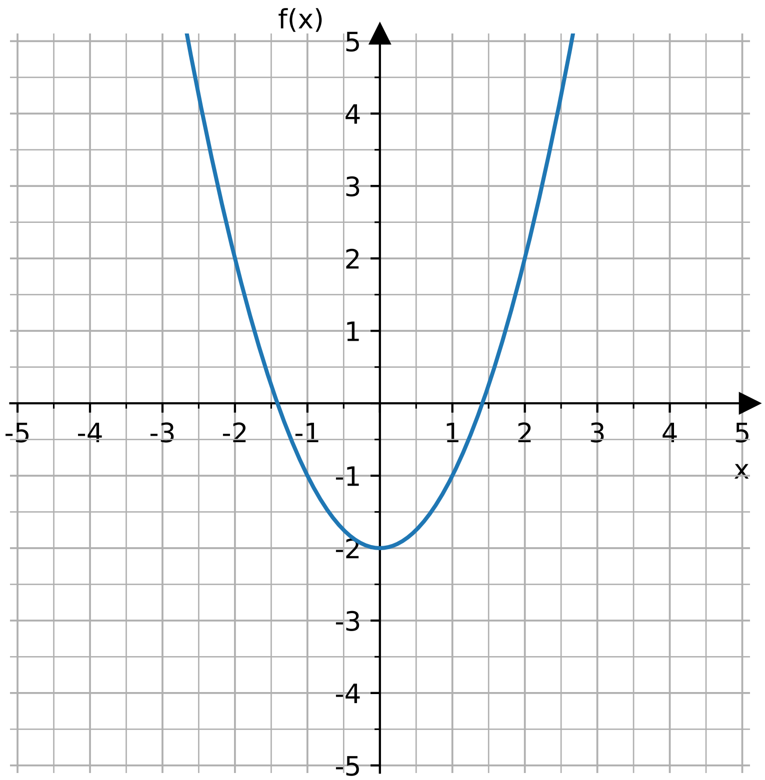
- Berechnung von Schnittpunkten des Graphen mit der x-Achse
- Anmerkung: Wie berechnet man den Schnitt mit der y-Achse?
- Extremstpunkte
  - notwendige Bedingung
- Wendepunkte
  - notwendige Bedingung
- Schnittpunkte von Graphen
- In der Geometrie:
  - Schnitt von Geraden
  - Schnitt von Ebenen,
  - Schnitt von Gerade mit Ebene
- In der Stochastik
- etc.

Nullgleichungen

1. Typ: $a_2x^2 + a_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = \sqrt{2}, \\
& x_2 = -\sqrt{2} \\
& L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}
\end{aligned}
$$

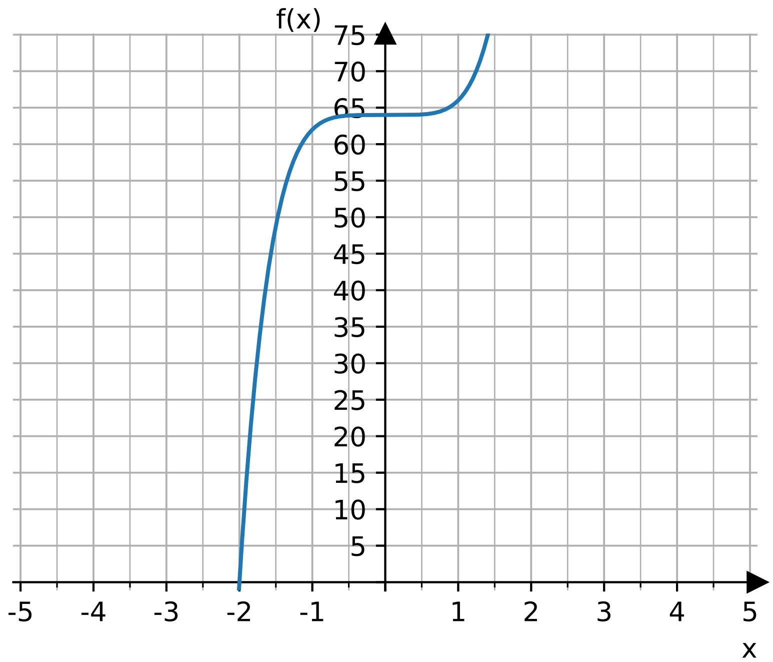
- Zwei Lösungen, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine positive Zahl vorhanden ist.
- Ein Lösung ausschließlich für die Gleichung $x^2 = 0$
- Keine Lösung, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine negative Zahl vorhanden ist.



2. Typ: $a_n x^n + a_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
& & 2x^5 + 64 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & 2x^5 &= -64 \\
&\Leftrightarrow & x^5 &= -32 \\
&\Leftrightarrow & x &= \sqrt[5]{-32} \\
&\Leftrightarrow & x &= -2 \\
& & L &= \{-2\}
\end{aligned}
$$

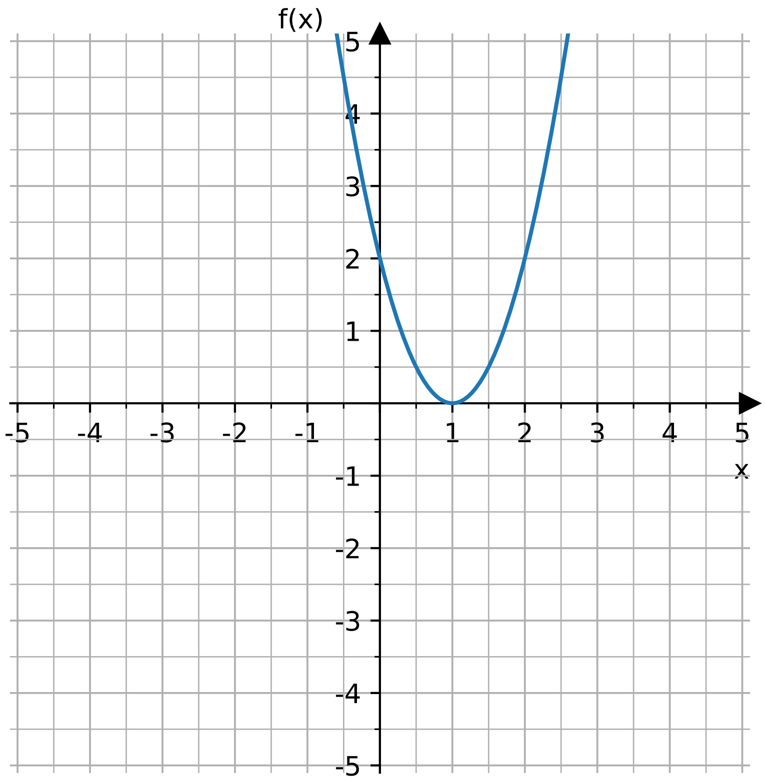
- mehrere Lösungen, wenn Grad n gerade ist.
- eine Lösung, wenn der Grad n ungerade ist.



4. Typ: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$
$$x_1 = 1$$
$$L = \{1\}$$

- für $a_2 = 1$: p-q-Formel
$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
- für $a_2 \neq 1 \neq 0$: abc-Formel
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- Diskriminante entscheidet über die Anzahl der Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$

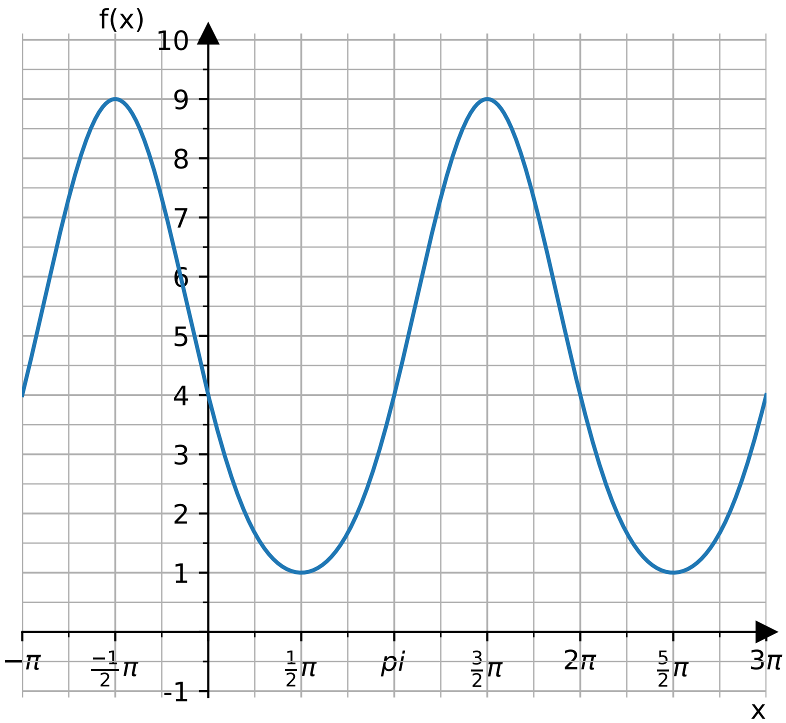


5. Typ: $a_2x^{2n} + a_1x^n + a_0 = 0$

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& \sin^2(x) - 4\sin(x) + 4 = 0 \\
& u^2 - 4u + 4 = 0 \quad \circ\, u = \sin(x) \\
\Leftrightarrow\quad & (u-2)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & u - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & u = 2 \quad \circ\, u = \sin(x) \\
& \sin(x) = 2 \\
& L = \{\},\ \text{da } -1 \leq \sin(x) \leq 1
\end{aligned}
$$

- Substitution und Resubstitution
- weiter Gleichungen, die so gelöst werden können:
  - $a_2e^{2x} + a_1e^x + a_0 = 0$
  - $a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$

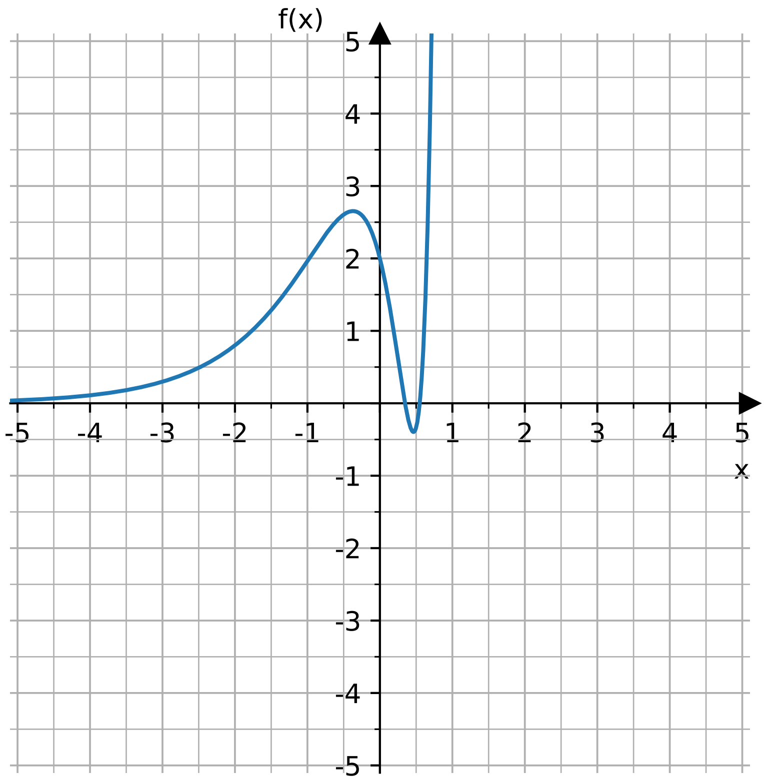


Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& & e^{5x} - 5e^{3x} + 6e^{x} &= 0 & \\
\Leftrightarrow & & e^{x} \cdot \left(e^{4x} - 5e^{2x} + 6\right) &= 0 & \\
\Leftrightarrow & \quad e^{x} \neq 0; & e^{4x} - 5e^{2x} + 6 &= 0 & \text{Satz vom Nullprodukt} \\
& & u^2 - 5u + 6 &= 0 \circ u = e^{2x} & \text{Substitution} \\
& & u_1 &= 2 & \text{Lösungsformel} \\
& & u_2 &= 3 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & e^{2x} &= 2 \circ u = e^{2x} & \text{Resubstitution 1} \\
\Leftrightarrow & & 2x &= \ln(2) & \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{\ln(2)}{2} &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & e^{2x} &= 3 \circ u = e^{2x} & \text{Resubstitution 2} \\
\Leftrightarrow & & 2x &= \ln(3) & \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{\ln(3)}{2} &
\end{aligned}
$$



6. Typ: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ **und eine Lösung ist bekannt**

$$x^3 - 6x^2 + 6 = 0$$

Errate eine Nullstelle, hier $x_1 = 1$

Dividiere Polynom durch den Term $x - 1$.

Dies ist eine Polynomdivision:

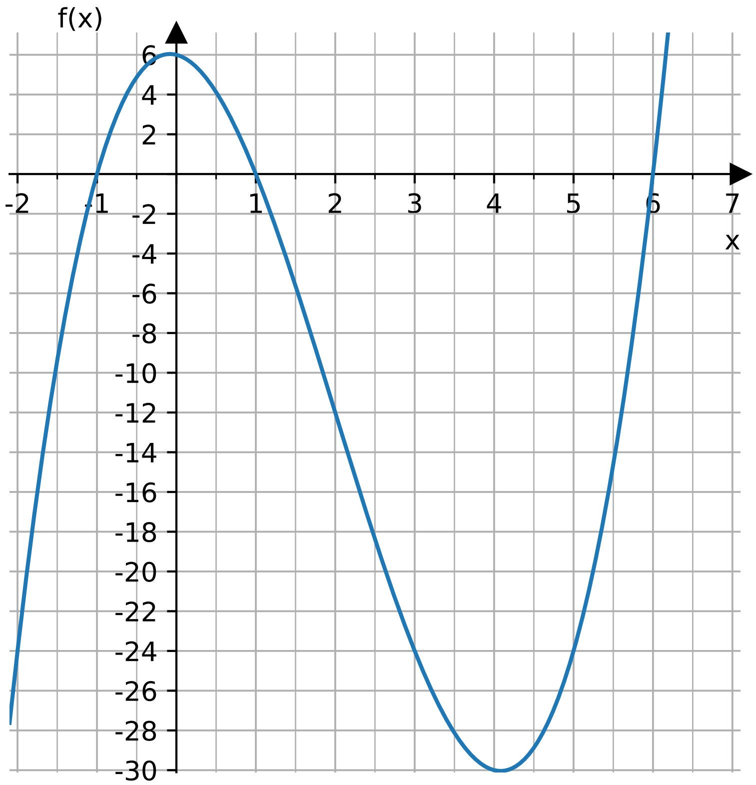
$$\begin{array}{llll}
\;\; x^3 & -6x^2 - x & +6 : (x-1) = x^2 - 5x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & \\
\hline
 & -5x^2 - x & \\
- & (-5x^2 + 5x) & \\
\hline
 & \quad -6x & +6 \\
 & -(-6x & +6) \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

Suche von dem Ergebnis die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x - 6 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_1 &= 6 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Damit hat man alle Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ gefunden:

$$L = \{-1; 1; 6\}$$



Gleichungen mit Termen auf beiden Seiten

7. Typ: Wurzelgleichungen

$$
\begin{aligned}
&& \sqrt{20-2x}+6 &= x \\
\Leftrightarrow && \sqrt{20-2x} &= x-6 && \text{Wurzel isolieren} \\
\Rightarrow && 20-2x &= (x-6)^2 && (!) \\
\Leftrightarrow && 20-2x &= x^2-12x+36 && \text{(2. Binomische Formel)} \\
\Leftrightarrow && 0 &= x^2-10x+16 \\
&& x_{1,2} &= 5 \pm \sqrt{25-16} && \text{p-q-Formel} \\
&& &= 5 \pm 3 \\
&& x_1 &= 8 \\
&& x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

- Es muss quadriert werden.
- **Quadrieren ist keie Äquivalenzumformung (!)**
- Durch das Quadrieren, generiert man eventuell zusätliche Lösungen der quadrierten Gleichung.
- Probe ist zwingend erforderlich.

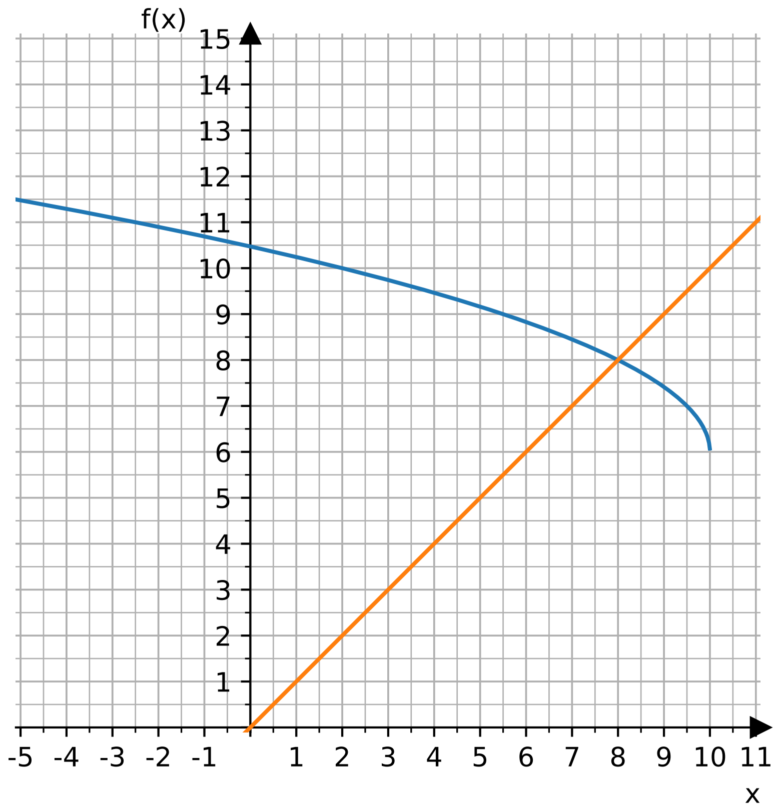
Probe:
$x_1 = 8$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{20-2\cdot 8}+6 &= 8 \\
2 &= 2
\end{aligned}
$$

$x_2 = 2$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{20-2\cdot(2)}+6 &= 3 \\
\sqrt{16}+6 &\neq 3 \\
x_2 = 2 &\text{ ist keine Lösung.}
\end{aligned}
$$

```
/var/folders/m3/zhwkf20x7p33z6tsgcbbkz3m0000gn/T/ipykernel_7867/2378097725.py:12: RuntimeWar
  y1= np.sqrt(20-x*2)+6
```



8. Typ: Bruchgleichungen

- Idee: Mit Nenner multiplizieren.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&& \frac{x^2-3}{x+1} &= \frac{6x}{3x+3} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\Leftrightarrow && \frac{x^2-3}{x+1} &= \frac{6x}{3(x+1)} \\
\Leftrightarrow && \frac{x^2-3}{x+1} \cdot (x+1) &= \frac{6x}{3} \\
\Leftrightarrow && x^2-3 &= 2x \\
\Leftrightarrow && x^2-2x-3 &= 0
\end{aligned}
$$

p-q-Formel:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 3 \\
L &= \{3\}
\end{aligned}
$$

Ungleichungen

1. Alternative: Löse die dazugehörige Gleichung

$$3 \cdot 5^x > 6$$

Die dazugehörige Gleichung:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^x &= 6 \\ \Leftrightarrow \quad 5^x &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \log_5(2) \\ &\approx 0,43 \end{aligned}$$

Übertrage auf die Ungleichung:
Testwert 0 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

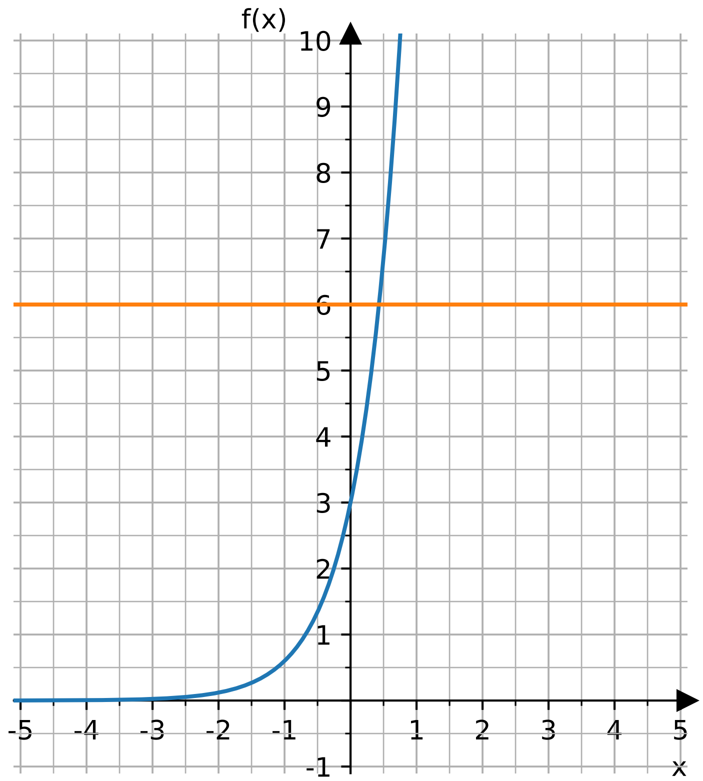
$$3 \cdot 5^0 = 3 < 6$$

Testwert 1 liegt links auf dem Zahlenstrahl von 0,43

$$3 \cdot 5^1 = 15 > 6$$

Damit gilt für die Lösungsmenge:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \log_5(2)\}$$



2. Alternative: Behalte das Ungleichheitszeichen bei

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& -3 \cdot 5^x > 6 \\
\Leftrightarrow \quad & 5^x < -2 \qquad (!) \\
\Leftrightarrow \quad & x < \log_5(2) \quad \text{log-Funktion ist streng mono steigend} \\
& L = \{x \in \mathbb{R} | x < \log_5(2)\}
\end{aligned}
$$

- belasse das Größer/Kleiner-Zeichen.
- achte darauf, dass bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl sich das Zeichen umdreht.
- Anwendung von ausschließlich streng monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit $<$ dier $>$-Zeichen.
- Anwendung von ausschließlich monotonen Funktionen auf die Ungleichung mit $\leq$ oder $\geq$-Zeichen.

Beispiel 2:

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 3 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x-2 \geq 3(x-1)\text{VORSICHT!}(x-1)\text{könnte auch negativ sein.}$$

1. Fall: $(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{x-1} \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x-2 \leq 3(x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x-2 \leq 3x-3 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x \leq -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} | -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$

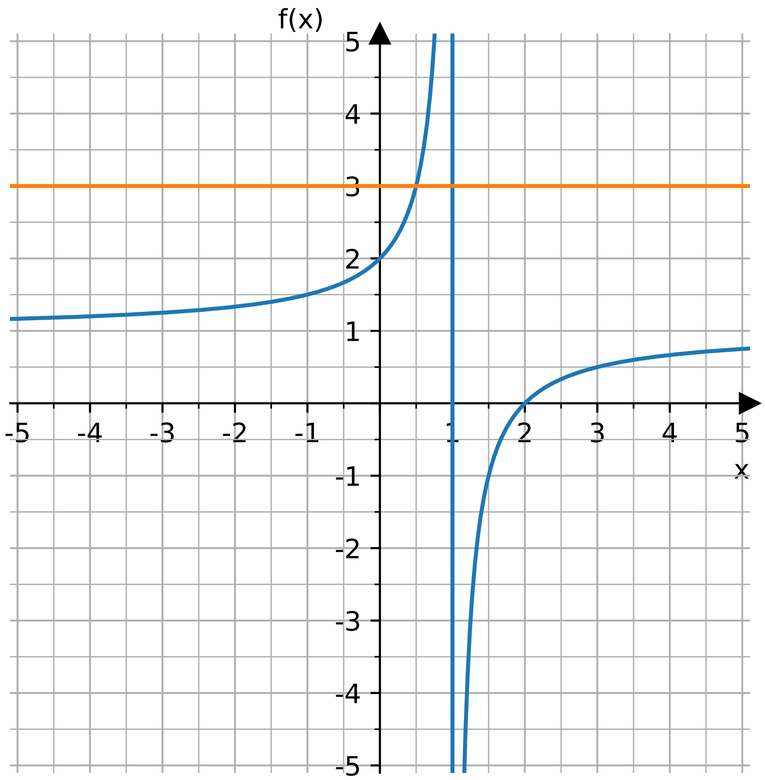
2. Fall: $(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{x-1} \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x-2 \geq 3(x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x-2 \geq 3x-3 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x \geq -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$L_2 = \{\}$$

Zusammen:

$$L = L_1 \cup L_2 = x \in \mathbb{R} \setminus \{\ 1| -\frac{1}{2} \leq x < 1\}$$


f(x)
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x