3. Produktfunktionen und ihre Ableitungsfunktion

Erinnerung: Gegeben: $u(x) = x^2 + 1 \text{ und } v(x) = 3x$ Mit Hilfe der Addtion, Subtraktion, Multiplikation und Divison lassen sich neue Funktionen konstruieren.

	Funktionsname	Funktionsterm
Summe	$u + v$	$x^2 + 3x + 1$
Differenz	$u - v$	$x^2 - 3x + 1$
Multiplikation	$u \cdot v$	$(x^2 + 1) \cdot 3x$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{x^2+1}{3x}$

Definition:

Seien u(x), v(x) Funktionen.

Die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ heißt **Produktfunktion** mit den Faktoren u(x) und v(x).

Beispiele:

- $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$
- $g(x) = \cos x \cdot \sin x$
- $h(x) = (x+2)(x-3)$

Satz:

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch $f = u \cdot v$ differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beweis:

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x) \cdot v(x) \quad - u(x_0) \cdot v(x) \quad + \quad u(x_0) \cdot v(x) \quad - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{(u(x) - u(x_0)) \cdot v(x) \quad + \quad u(x_0)\,(v(x) - v(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) \quad + \quad u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) \quad + \quad u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \to u'(x_0), \quad \text{für } x \to x_0$$

$$\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \to v'(x_0), \quad \text{für } x \to x_0$$

$$v(x) \to v(x_0) \quad \text{für } x \to x_0$$

Damit gilt

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

$\square$