

7. Trigonometrische Funktionen

Rechtwinklige Dreiecke

Bezeichnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Allgemein:

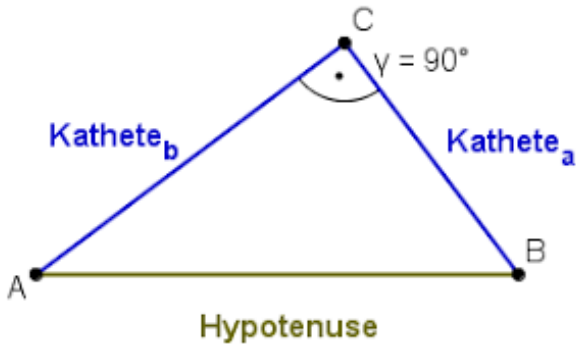


Figure 1: Dreieck

Im Bezug auf die Winkel:

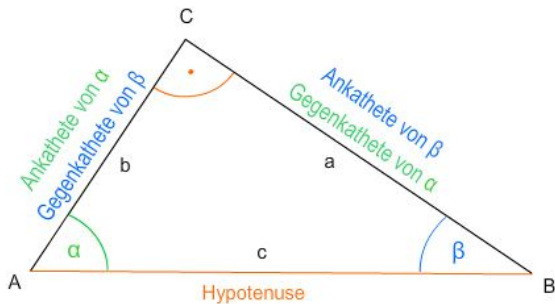


Figure 2: Dreieck

Beobachtung

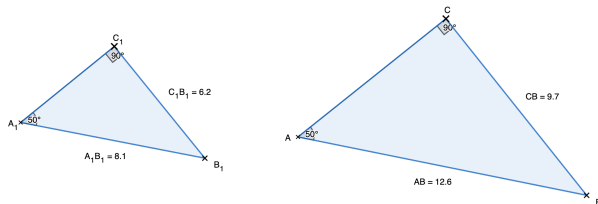


Figure 3: Dreieck

A_1B_1	B_1C_1	$\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$	AB	BC	$\frac{BC}{AB}$
8,1	6,2	0,76	12,6	9,7	0,76

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit festem Winkel α ist das Verhältnis von Gegenkathete zu α zur Hypothenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Sinus zu dem Winkel α

Analog In jedem rechtwinkligen Dreieck mit festem Winkel α ist das Verhältnis von Ankathete zu α zur Hypothenuse konstant. Dieses Verhältnis ist der Kosinus zu dem Winkel α

Definition: Sinus

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypothenuse

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

Definition: Sinus

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypothenuse

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

Definition: Kosinus

Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Ankathete zur Länge der Hypothenuse

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$$

Definition: Tangens

Gegeben:

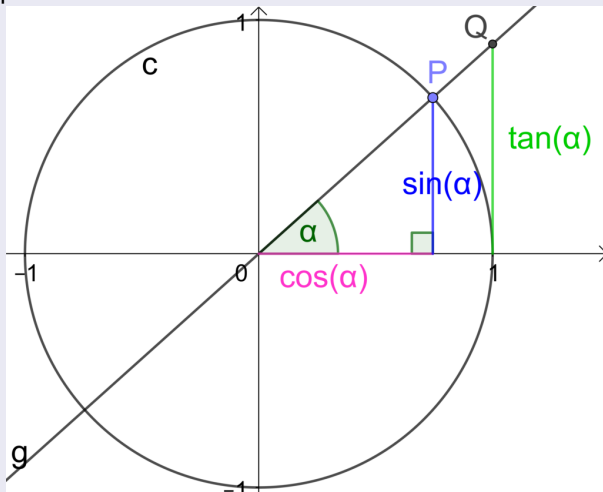
- rechtwinkliges Dreieck ABC
- Winkel $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Ankathete

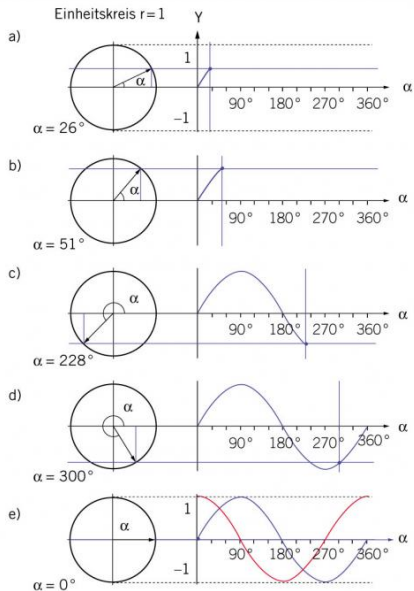
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

- Einheitskreis := Kreis um den Ursprung mit Radius 1
- Zu jedem Punkt P auf dem Kreis gibt es ein rechtwinkliges Dreieck
- Länge der Hypotenuse ist 1.



Sinus, Kosinusfunktion und Tangensfunktion im Dreieck



Definition: Sinusfunktion im Dreieck

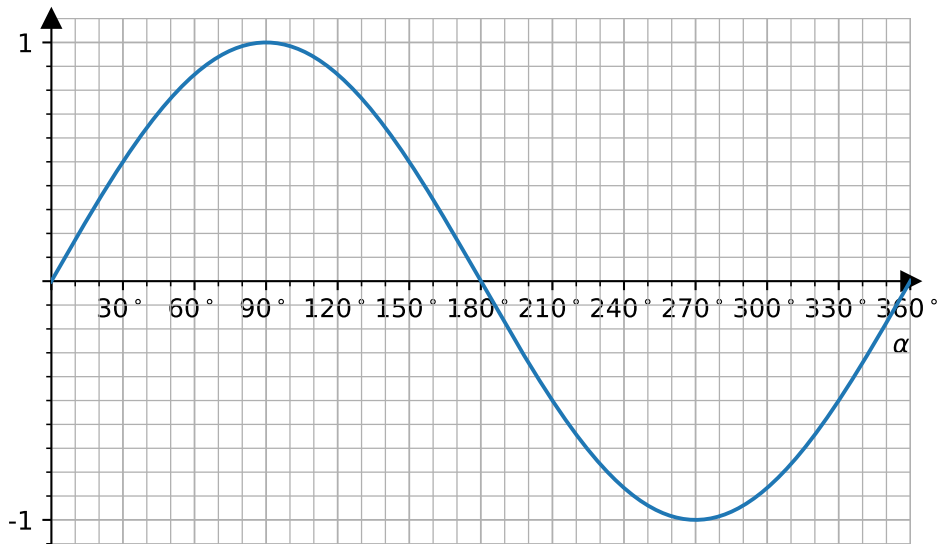
Gegeben:

-rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Sinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Sinusfunktion**

Funktionsgraph der Sinus-Funktion:

$\sin(\alpha)$



Definition: Kosinus-Funktion im Dreieck

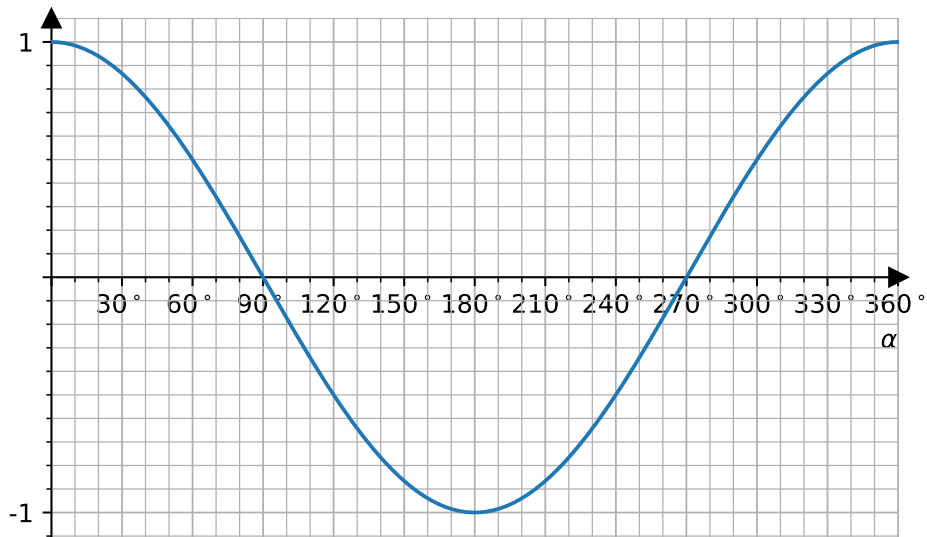
Gegeben:

-rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Kosinus zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Kosinusfunktion**

Funktionsgraph der Kosinus-Funktion:

$\cos(\alpha)$



Definition: Tangens-Funktion im Dreieck

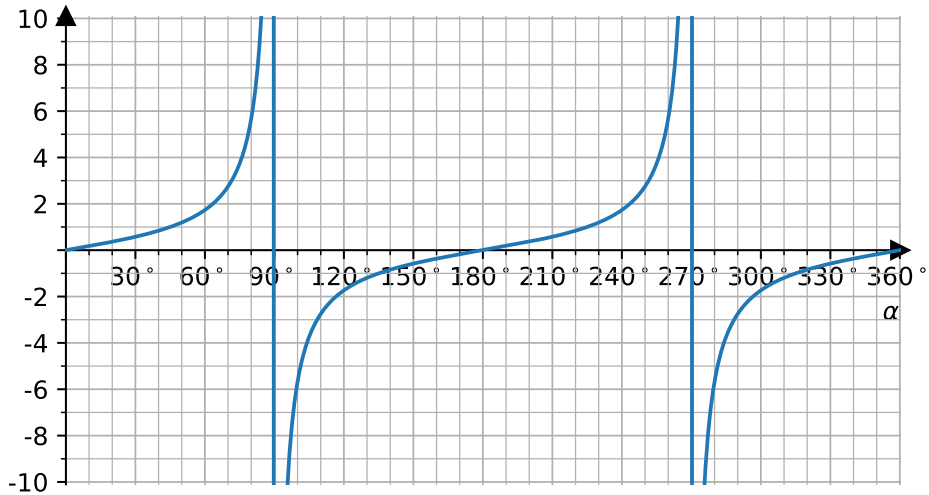
Gegeben:

- rechtwinkliges Dreieck ABC

Die Abbildung, die jeder Winkelgröße den Tangens zum Winkel im zugehörigen rechtwinkligen Dreieck zuordnet, heißt **Tangensfunktion**

Funktionsgraph der Tangens-Funktion:

$\cos(\alpha)$



Bogenmaß

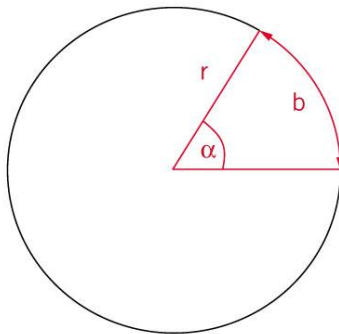


Figure 6: Einheitskreis

Beobachtung:

- Jedem Winkel kann eindeutig eine Kreisbogenlänge zugeordnet werden.
- Diese Zuordnung ist bijektiv.

Folgerung

Damit lässt sich wie folgt auch zu jeder reellen Zahl x ein Wert $\sin(x)$, $\cos(x)$ bzw. $\tan(x)$ zuordnen:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \rightarrow & \sin(\alpha) \\ \downarrow & & = \\ x & \rightarrow & \sin(x) \end{array}$$

Funktionsterme

Zuordnung Winkel \rightarrow Bogenlänge

$$g(\alpha) = \left(r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right)$$

Zuordnung Bogenlänge (reelle Zahl) \rightarrow Sinus

$$f(x) = f(g(\alpha)) = \sin \left(r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right) = \sin(x)$$

Winkelfunktionen

Sinus-Funktion

- Definitionsmenge: \mathbb{R}
- Wertemenge: $W = \{f(x) \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode $p = 2\pi$
- punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Nullstellen:

$$\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Maximalstellen:

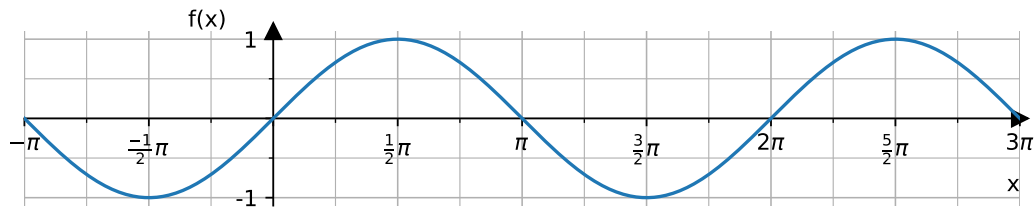
$$\dots, -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots$$

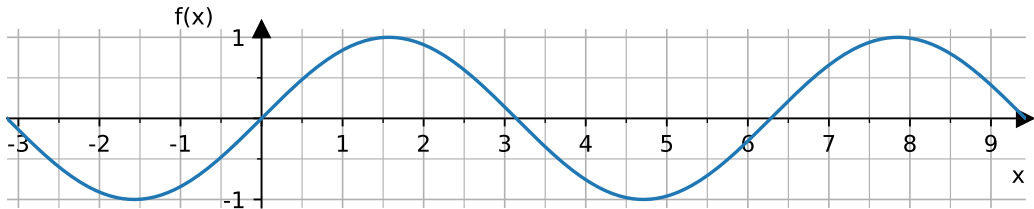
$$\text{allgemein: } \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Minimalstellen:

$$\dots, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$





Kosinus-Funktion

- Definitionsmenge: \mathbb{R}
- Wertemenge: $W = \{f(x) \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$
- periodisch
- Periode $p = 2\pi$
- achsensymmetrisch zur y-Achse

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- Nullstellen:

$$\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } \frac{2k+1}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Maximalstellen:

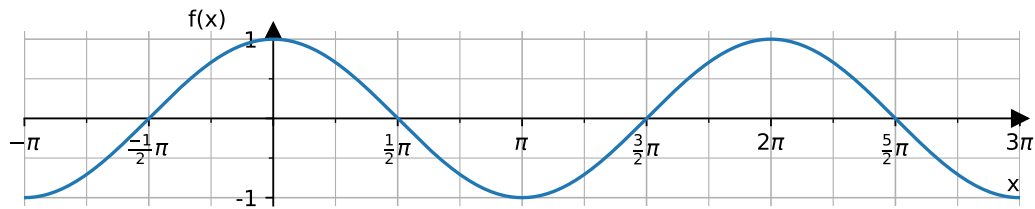
$$\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

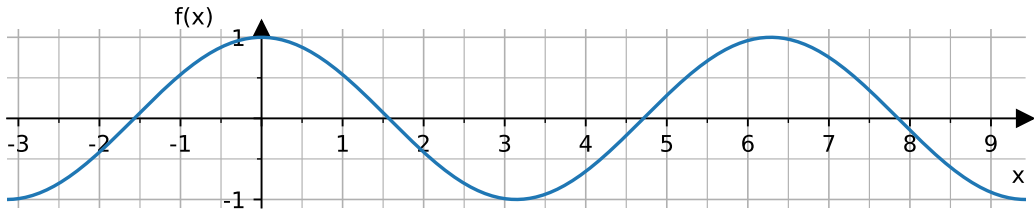
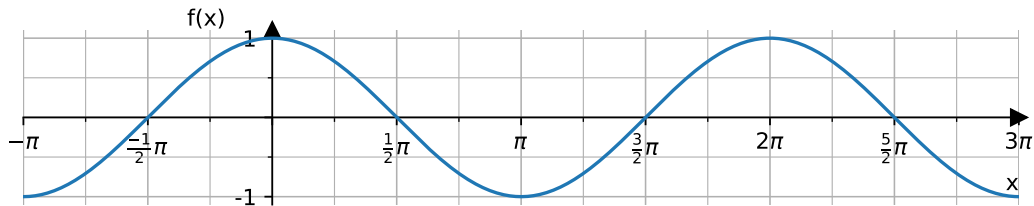
$$\text{allgemein: } 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Minimalstellen:

$$\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

$$\text{allgemein: } (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$





Verschieben der Sinusfunktion entlang der y-Achse

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(x) + d$$

Die Mittellinie ist die Gerade $y = d$

Verschieben der Sinusfunktion entlang der y-Achse

Funktionsgleichung:

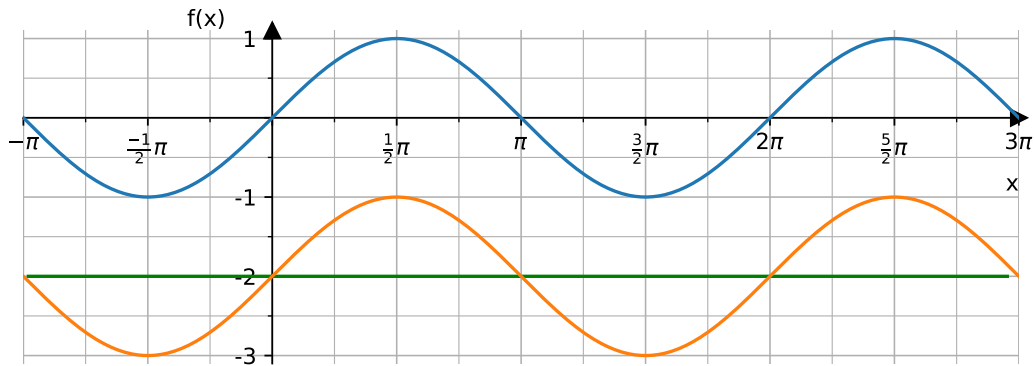
$$f(x) = \sin(x) + d$$

Die Mittellinie ist die Gerade $y = d$

Beispiel

$$f(x) = \sin(x) - 2$$

Mittellinie: $y = -2$



Verschieben entlang der x-Achse

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(x - c)$$

Man nennt c auch Phase.

Verschieben entlang der x-Achse

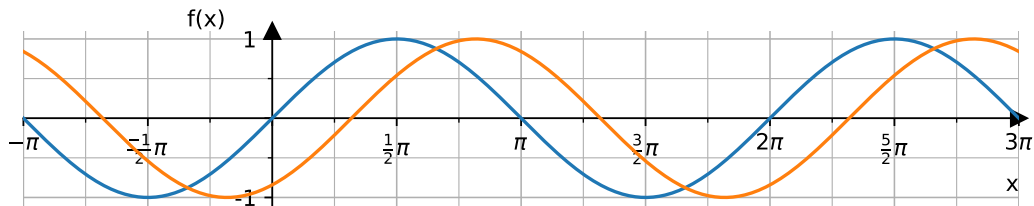
Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(x - c)$$

Man nennt c auch Phase.

Beispiel

$$f(x) = \sin(x - 1)$$

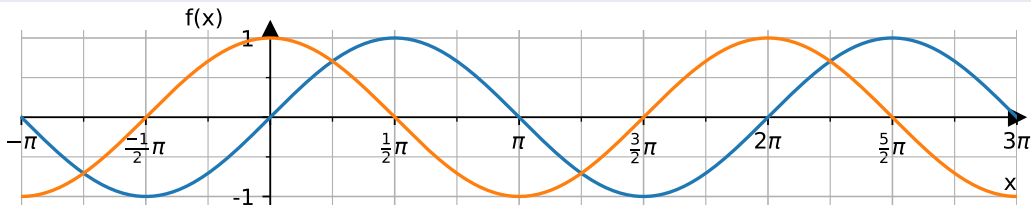


Beobachtung

$$f(x) = \sin\left(x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) = \cos(x)$$

Beobachtung

$$f(x) = \sin\left(x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) = \cos(x)$$



Strecken / Stauchen

Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(x)$$

$|a|$ nennt man Amplitude (= Ausschlag). Die Amplitude ist immer positiv.

Strecken / Stauchen

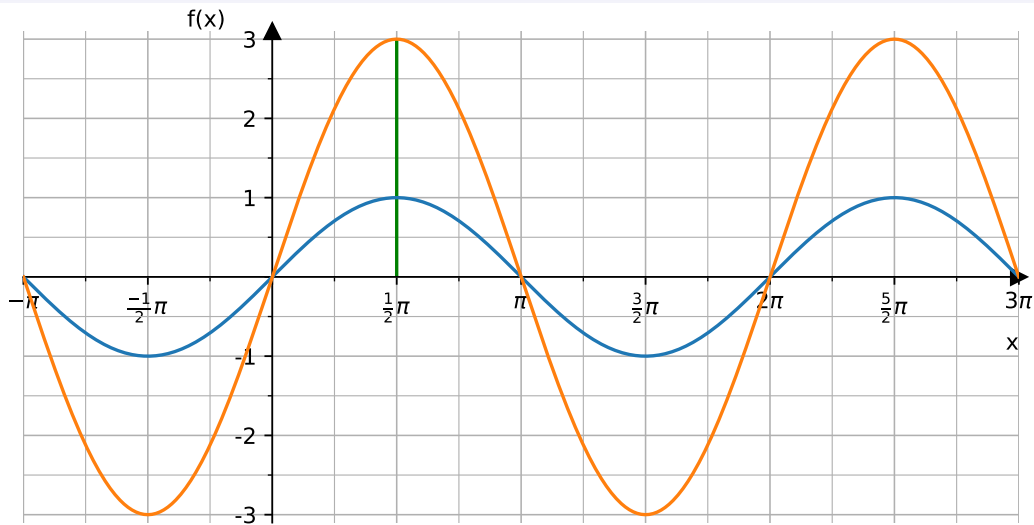
Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(x)$$

$|a|$ nennt man Amplitude (= Ausschlag). Die Amplitude ist immer positiv.

Beispiel

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$



Periode verändern

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(b \cdot x)$$

Das Verhältnis

$$p = \frac{2\pi}{b}$$

nennt man Periode.

Periode verändern

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sin(b \cdot x)$$

Das Verhältnis

$$p = \frac{2\pi}{b}$$

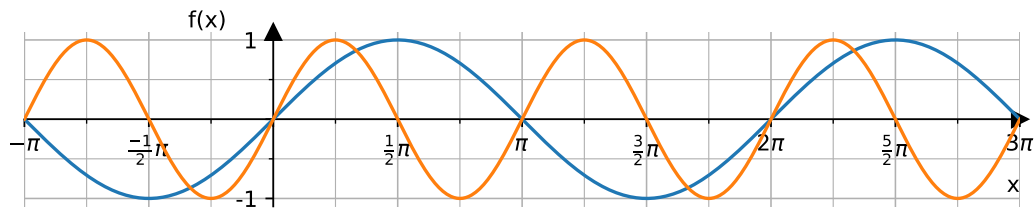
nennt man Periode.

Beispiel

$$f(x) = \sin(2 \cdot x)$$

Die Periode ist:

$$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

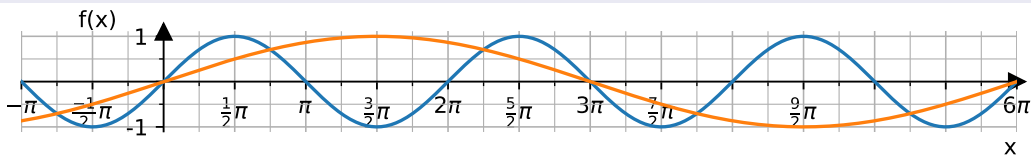


Beispiel

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$$

Beispiel

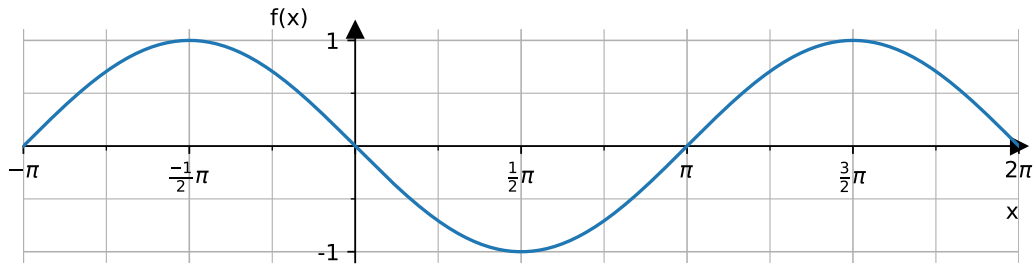
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$$

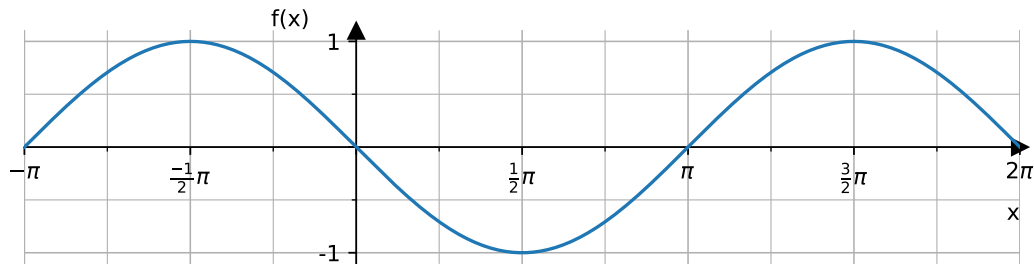


Spiegeln an der x-Achse

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\sin(x) = \sin(-x)$$





Allgemeine Sinus-Funktion

Definition: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Der Graph der Funktion

$$g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

geht aus der Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

hervor, indem - f um $|a|$ in y-Richtung gestreckt wird. Die Amplitude A entspricht $A = |a|$

- f um Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung gestreckt wird.
- f um c in x-Richtung und um d in y-Richtung verschoben wird.

Bemerkung

Analoge Aussagen gelten auch für die Kosinus-Funktion.

Der Graph der Kosinus-Funktion geht aus dem Graph der Sinus-Funktion durch Verschiebung in x-Richtung um $-\frac{\pi}{2}$ hervor.

Beispiel:

$$a = 5$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

$$d = -1$$

