

4. Betragsfunktion

= Abstandsfunction

= “Mach-positiv”-Funktion

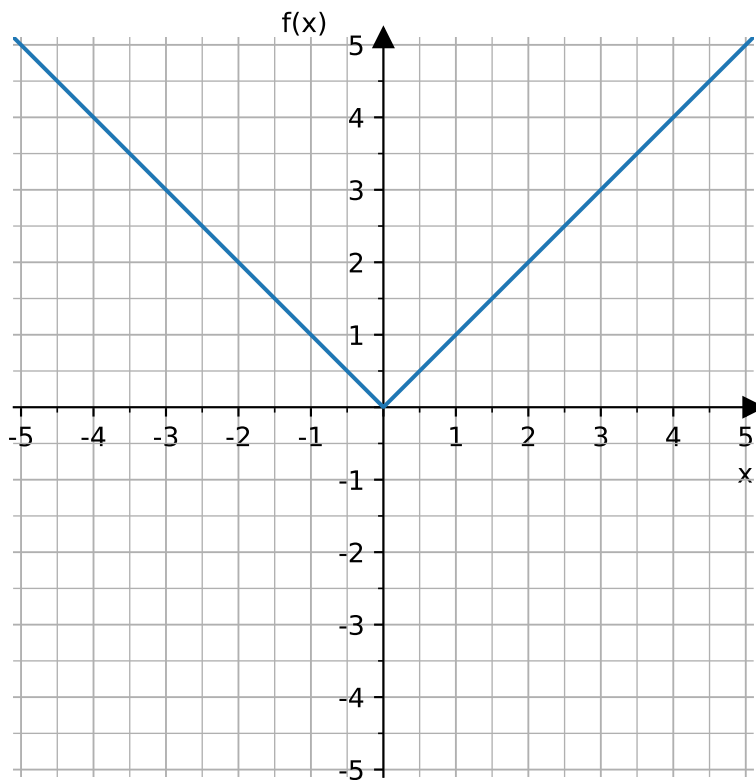
Definition

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Beispiele:

1) $|2| = 2$

2) $|-4| = 4$

$$3) |x+1| = \begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

$$4) 2x^2 + |-x+4| = \begin{cases} 2x^2 - x + 4 & , x \leq 4 \\ 2x^2 + x - 4 & , x > 4 \end{cases}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} -x+4 &\geq 0 \\ -x &\geq -4 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

$$5. |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & , x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1$$

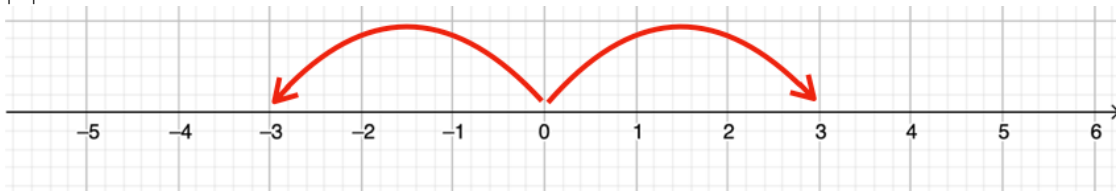
Es gibt folglich drei mögliche Intervalle: $(-\infty; 1]$, $(1; 3)$ und $[3; \infty)$

Überprüfe, in welchen Intervallen die Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Wähle dazu Werte aus den Intervallen. Es ergibt sich:

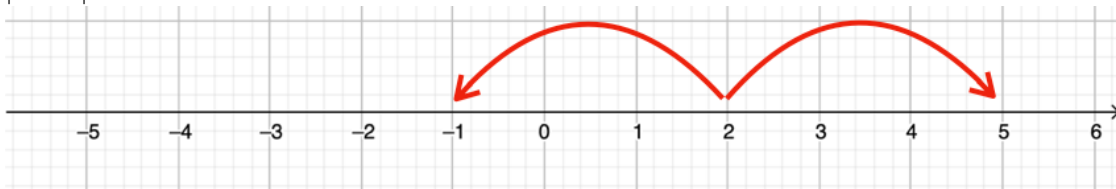
$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

Abstand:

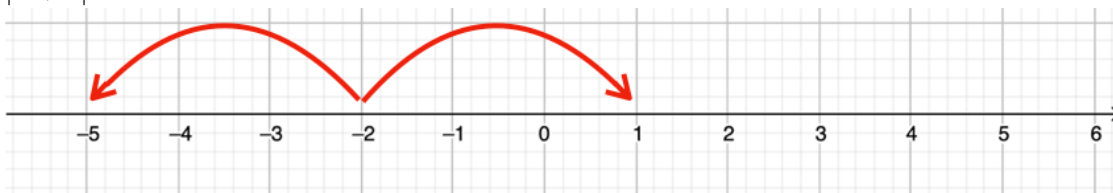
$$1) |x| = 3$$



$$2) |x-2| = 3$$



3) $|x + 2| = 3$



Dreiecksungleichung:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

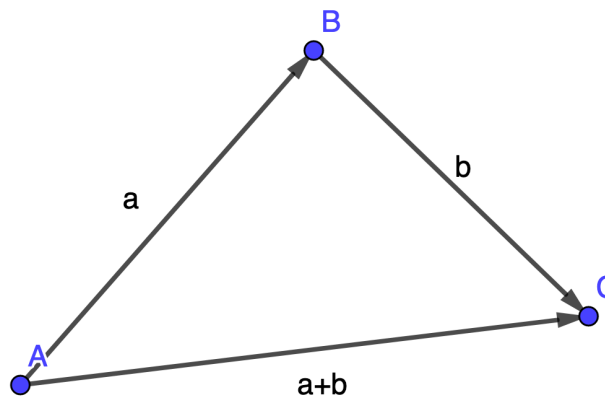


Figure 1: Dreiecksungleichung

Beweis:

1) Es gilt: $a \leq |a|$ und $b \leq |b| \Rightarrow (a + b) \leq |a| + |b|$

2) Es gilt: $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b| \Rightarrow -a + (-b) \leq |a| + |b|$

3) Es gilt: $|a + b| = \begin{cases} a + b & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) & , a + b < 0 \end{cases}$

Mit 2) und 3) folgt:

$$|a + b| = \begin{cases} a + b \leq |a| + |b| & , a + b \geq 0 \\ -(a + b) \leq |a| + |b| & , a + b < 0 \end{cases}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \checkmark$$

Betragsgleichungen lösen

Beispiel:

$$|x - 4| = 2x - 11$$

1. Fall $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$\begin{aligned} & |x - 4| = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & \quad x - 4 = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & \quad x_1 = 7 \\ & x \geq 2 \text{ und } x_1 = 7 \Rightarrow L = \{7\} \end{aligned}$$

2. Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$\begin{aligned} & |x - 4| = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & \quad -(x - 4) = 2x - 11 \\ \Leftrightarrow & \quad x - 4 = -2x + 11 \\ \Leftrightarrow & \quad 3x = 15 \\ \Leftrightarrow & \quad x_2 = 5 \\ & x < 2 \text{ und } x_2 = 5 \Rightarrow L = \{\} \end{aligned}$$

Gesamtlösungsmenge:

$$L = \{7\}$$