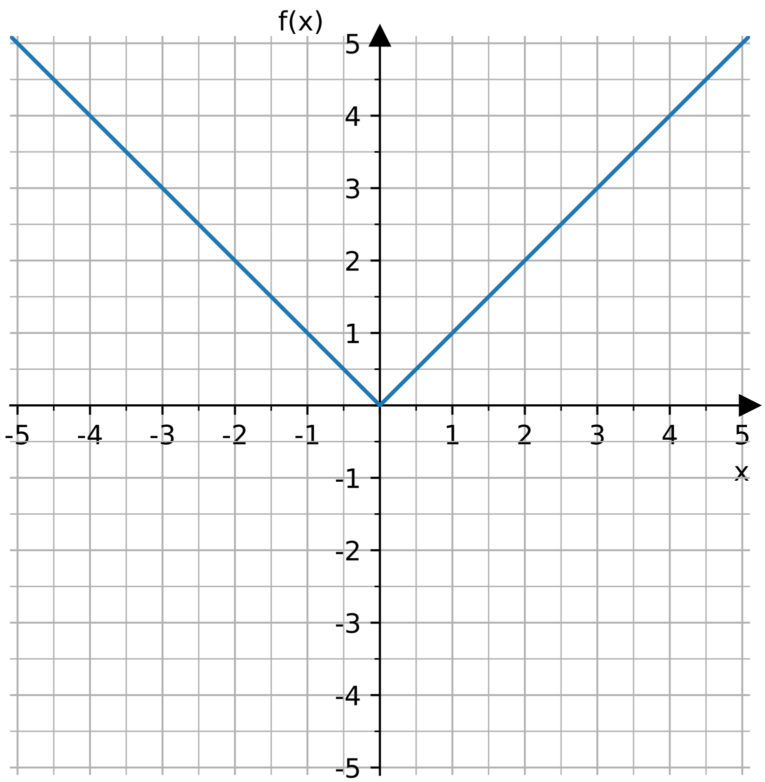
## 4. Betragsfunktion

= Abstandsfunktion
= "Mach-positiv"-Funktion

**Definition:**
Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

**Funktionsgraph:**




**Beispiele:**

1) $|2| = 2$
2) $|-4| = 4$
3) $|x+1| = \begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$

4) $2x^2 + |-x+4| = \begin{cases} 2x^2 - x + 4 & , x \leq 4 \\ 2x^2 + x - 4 & , x > 0 \end{cases}$

Begründung:

$$\begin{aligned} -x + 4 &\geq 0 \\ -x &\geq -4 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

5. $|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & , x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$

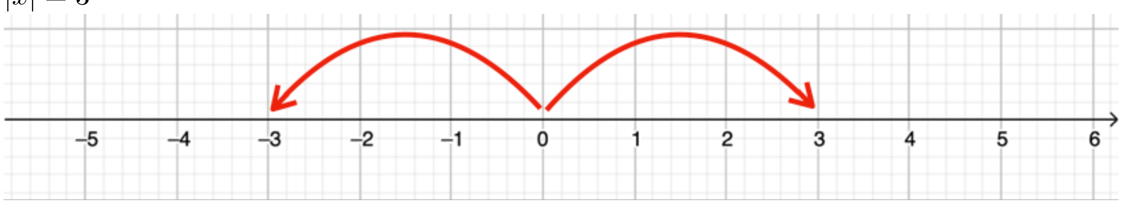
$$\begin{aligned} &x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \\ &x_1 = 3 \qquad , x_2 = 1 \end{aligned}$$

Es gibt folglich drei mögliche Intervalle: $(-\infty; 1], (1; 3)$ und $[3; \infty)$
Überprüfe, in welchen Intervallen die Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Wähle dazu Werte aus den Intervallen.Es ergibt sich:

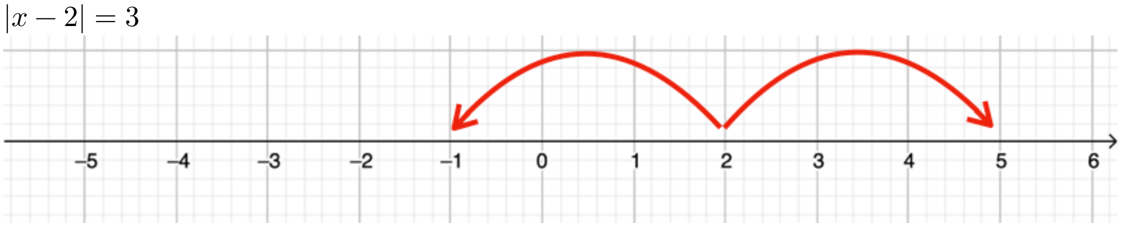
$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \leq 1 \text{ oder} x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

**Abstand:**

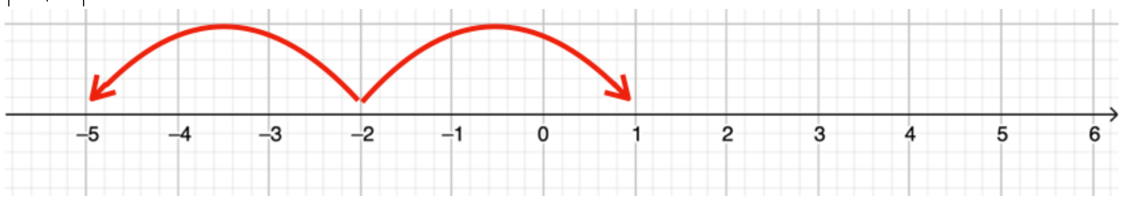
1) $|x| = 3$




2) $|x-2| = 3$



3) $|x+2| = 3$




**Dreiecksungleichung:**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

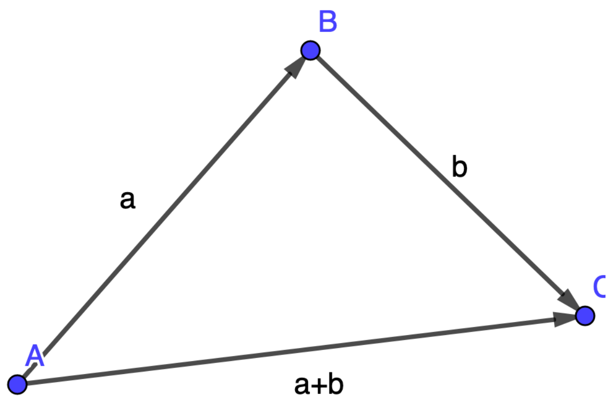



Figure 1: Dreiecksungleichung

**Beweis:**
1) Es gilt: $a \leq |a|$ und $b \leq |b| \quad \Rightarrow (a+b) \leq |a| + |b|$

2) Es gilt: $-a |a| und -b |b| -a + (-b) |a|+|b| $

3) Es gilt: $|a+b| = \begin{cases} a+b & , a+b \geq 0 \\ -(a+b) & , a+b < 0 \end{cases}$

Mit 2) und 3) folgt:

$$|a+b| = \begin{cases} a+b \leq |a|+|b| & , a+b \geq 0 \\ -(a+b) \leq |a|+|b| & , a+b < 0 \end{cases}$$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \checkmark$