

Bayesowska estymacja parametrów strukturalnych ciągłego modelu GARCH i procesu zmienności przy wykorzystaniu markowowskich algorytmów Monte Carlo

Przemysław Ryś

Gala finałowa konkursu na najlepszą pracę dyplomową z obszaru Data Science, Warszawa, 4 czerwca 2020

- 1 Wprowadzenie i motywacja
- 2 Estymacja zmienności i parametrów strukturalnych modelu
- 3 Test metod na danych symulowanych
- 4 Wyniki części aplikacyjnej - indeks S&P500
- 5 Podsumowanie

Wprowadzenie i motywacja

Instrumenty pochodne

- Proces cen - S_t
- Wartość instrumentu wolnego od ryzyka - B_t , odpowiada oprocentowaniu rachunku bankowego.
- Instrument pochodny - instrument wypłacający w chwili T kwotę zależną od przebiegu procesu cen.
 - kontrakt terminowy forward wypłaca $(S_T - K)$ dla $K \in \mathbb{R}$
 - opcja europejska kupna (call) wypłaca $(S_T - K)^+$ dla $K \in \mathbb{R}$
 - opcja binarna kupna (call) wypłaca $\chi_{(S_T - K > 0)}$ dla $K \in \mathbb{R}$

Przedmiotem zainteresowania jest cena instrumentu pochodnego tj. koszt zawarcia kontraktu.

Wycena bezarbitrażowa (martyngałowa)

Uczciwa cena instrumentu pochodnego o wypłacie postaci $f(S_T)$:

- Obecna wartość portfela ϕ_t replikującego wypłatę $f(S_T)$.

$$\Pi_{f(S_T),0} = \phi_0^0 B_0 + \phi_0^1 S_0$$

- Zdyskontowana wartość oczekiwana wypłaty względem miary martyngałowej \mathbb{Q} :

$$\Pi_{f(S_T),0} = \frac{1}{B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} f(S_T)$$

gdzie \mathbb{Q} - miara martyngałowa.

Model Blacka-Scholesa

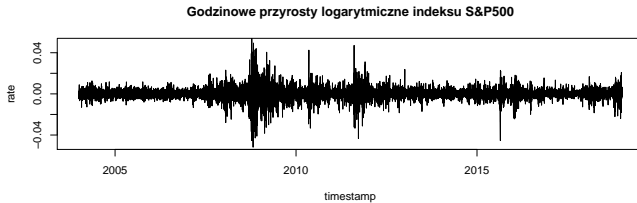
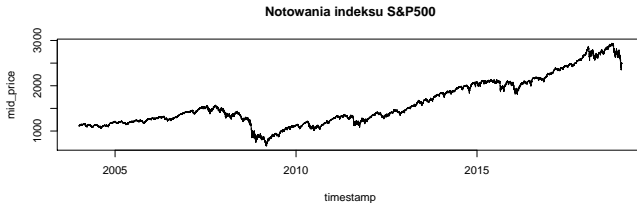
Filtracja \mathcal{F}_t jest generowana przez proces Wienera W_t , a S_t jest geometrycznym ruchem Browna:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 > 0$$

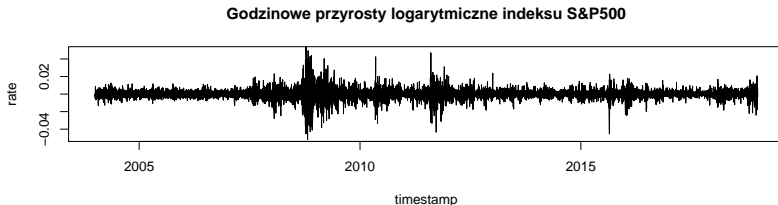
$$S_t = S_0 e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

- jeden z pierwszych, powszechnie stosowany model,
- łatwy do kalibracji,
- wzory analityczne na ceny niektórych instrumentów,
- łatwe symulowanie obserwacji procesu cen na potrzeby metod Monte Carlo

Notowania indeksu S&P500



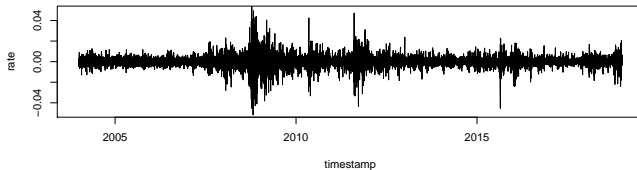
Przyrosty logarytmiczne indeksu S&P500



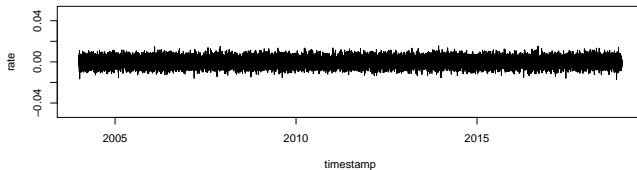
Odchylenie standardowe przyrostów logarytmicznych, nazywane **zmiennością** nie jest stałe w czasie.

Stochastyczna zmienność

Godzinowe przyrosty logarytmiczne indeksu S&P500



Godzinowe przyrosty logarytmiczne w modelu Blacka-Scholesa kalibrowanym dla indeksu S&P500



Ciągły model GARCH

Filtracja \mathcal{F}_t jest generowana przez dwuwymiarowy proces Wienera (W_t, \tilde{W}_t) , a S_t jest określony przez następujący układ stochastycznych równań różniczkowych:

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t \\ d\nu_t = \kappa(\nu - \nu_t) dt + \eta \nu_t d\tilde{W}_t, \end{cases}$$

gdzie S_0 jest stałą dodatnią.

- uwzględnia stochastyczną zmienność ν_t jest procesem stochastycznym o wahaniach proporcjonalnych do η ,
- własność powrotu procesu ν_t do poziomu ν z siłą κ ,
- wymagający proces kalibracji parametrów,
- symulowanie obserwacji procesu cen na potrzeby metod Monte Carlo tylko w przybliżeniu poprzez schematy dyskretizacyjne.

Estymacja zmienności i parametrów strukturalnych modelu

Problem estymacji

Dysponujemy obserwacjami notowań S_t w dyskretnych, równoodległych momentach $\{t_1, \dots, t_n\}$, co Δ_t .

Celem jest estymacja wartości procesu zmienności $\sqrt{\nu_t}$ w tych punktach czasu oraz wartości parametrów ciągłego modelu GARCH: $\delta, \kappa, \nu, \eta$.

Przekształcenie i dyskretyzacja

Rozpatrujemy przyrosty logarytmiczne $R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-\Delta_t})$. Po zastosowaniu wzoru Itô i dyskretyzacji Eulera–Maruyamy dostajemy:

$$\begin{cases} R_t \approx \delta\Delta_t\nu_{t-\Delta_t} + \sqrt{\nu_{t-\Delta_t}}(W_t - W_{t-\Delta_t}) \\ \nu_t \approx \nu_{t-\Delta_t} + \kappa(\nu - \nu_{t-\Delta_t})\Delta_t + \eta\nu_{t-\Delta_t}(\tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-\Delta_t}) \end{cases}$$

co daje schemat:

$$\begin{cases} R_i = \gamma V_{i-1} + \sqrt{V_{i-1}}\tilde{\epsilon}_i \\ V_i = \alpha + \beta V_{i-1} + \eta V_{i-1}\bar{\epsilon}_i \end{cases}$$

gdzie $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n) \sim_{iid} \mathcal{N}(0, \Delta_t)$ oraz $\gamma = \delta\Delta_t$, $\alpha = \kappa\nu\Delta_t$, $\beta = 1 - \kappa\Delta_t$.

Standardowe podejście do estymacji zmienności

Wariancja historyczna o oknie estymacji długości n to szereg estymatorów wariancji stóp zwrotu postaci

$V_t \approx \frac{1}{\Delta_t} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (R_{t-i} - \bar{R})^2$. Czynniki $\frac{1}{\Delta_t}$ odpowiada za przeskalowanie do jednostki bazowej, zwykle okresu jednego roku, co pozwala na porównywanie wariancji (zmienności) dla szeregów o różnej częstotliwości.

Standardowo w procesie pomija się średnią stopę zwrotu, zakładając, że jest równa 0. Taki szereg estymatorów nazywany jest **wariancja zrealizowaną** - $V_t \approx \frac{1}{\Delta_t} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n R_{t-i}^2$.

Zmienność historyczna i zmienność zrealizowana wyznaczamy jako pierwiastek z odpowiednio wariancji historycznej i zrealizowanej.

Estymacja parametrów oparta o estymator zmienności

Dysponując estymatorem szeregu zmienności możemy wprost wyznaczyć estymatory parametrów strukturalnych modelu.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{V_{i-1}} \\ \hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{i-1}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i-1}^{-1}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i-1}^{-1}} \\ \hat{\alpha} = \left(\frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{i-1}}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i-1}^{-1}} \right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \\ \hat{\eta} = \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{V_i}{V_{i-1}} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{i-1}} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{i-1}}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i-1}^{-1}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right)^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{V_{i-1}} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{V_{i-1}} \right)^2 \right) \right) \right)^{0.5} \end{array} \right.$$

Podejście bayesowskie i MCMC

Chcemy uzyskać estymator bayesowski parametrów oraz kolejnych stanów szeregu V_i , czyli wektor wartości oczekiwanych rozkładu warunkowego $\rho(\gamma, \alpha, \beta, \eta^2, V_0, \dots, V_n | R_1, \dots, R_n)$.

- Jednoczesna, łączna estymacja wszystkich parametrów strukturalnych modelu i zmienności.
- Uwzględnienie informacji o specyfikacji modelu w procesie estymacji V_0, \dots, V_n .
- Wyniki dużo mniej wrażliwe na początkowe założenia (a priori) od standardowych metod (n).
- Możliwość szacowania przedziałów ufności dla estymatorów.
- Wygodne porównywanie dopasowania różnych modeli poprzez funkcje wiarygodności.

Zasadnicza trudność

- Rozkład łączny jest **wielowymiarowy** i ma bardzo **skomplikowaną postać**, trudną do wyznaczenia analitycznie.
- Dla danych minutowych w rozpatrywanym w tej pracy przypadku liczba estymowanych wielkości, czyli wymiar rozkładu warunkowego przekracza 1 500 000.
- Ze względu na charakterystyka problemu każda para wielkości jest **warunkowo zależna**. Problem estymacji nie sprowadza się do rozłącznych estymacji analogicznych jednowymiarowych parametrów.

Podstawy markowskiego Monte Carlo (MCMC)

- Problem daje się sformułować jako wyznaczenie wartości oczekiwanej pewnego rozkładu

$$\mathbb{E} Y = ?$$

- Nie możemy generować obserwacji z dokładnego rozkładu Y .
- Możemy skonstruować łańcuch Markowa $(Y_t)_{t=1}^N$ o rozkładzie ergodycznym Y tj. $Y_t \xrightarrow{d} Y$.
- Wtedy na mocy Prawa Wielkich Liczb dla łańcuchów Markowa:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n Y_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} Y$$

Próbnik Gibbsa (1/2)

Jak skonstruować taki łańcuch Markowa?

Założenie 1: Docelowy rozkład jest wielowymiarowy, to znaczy dla pewnego $p > 1$ zmienna losowa o docelowym rozkładzie X spełnia $X = (X_1, \dots, X_p)$ dla pewnych X_1, \dots, X_p .

Założenie 2: Możemy symulować obserwacje z pełnych rozkładów warunkowych:

$$X_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p \sim f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

dla $i = 1, 2, \dots, p$.

Próbnik Gibbsa (2/2)

Algorytm Krok próbnika Gibbsa z $X^{(t)}$ do $X^{(t+1)}$:

$$X_1^{(t+1)} \sim f_1(x_1|x_2^{(t)}, \dots, x_p^{(t)})$$

$$X_2^{(t+1)} \sim f_2(x_2|x_1^{(t)}, x_3^{(t)}, \dots, x_p^{(t)})$$

...

$$X_p^{(t+1)} \sim f_p(x_p|x_1^{(t)}, \dots, x_{p-1}^{(t)})$$

Podjęcie bayesowskie i MCMC (2)

Postaci tych rozkładów warunkowych wyznaczamy, wykorzystując podejście bayesowskie, na podstawie obserwacji oraz przyjętych rozkładów a priori:

- jednowymiarowego rozkład normalnego dla γ ,
- dwuwymiarowego rozkład normalnego o macierzy diagonalnej dla (α, β) ,
- rozkładu *inverse-gamma* dla nieujemnej zmiennej η^2 ,
- nieinformatywnych dla V_0, \dots, V_n .

Ich parametry wyznaczamy metodą momentów na podstawie estymatorów uzyskanych standardową metodą.

Podjęcie bayesowskie i MCMC (3)

Wykorzystamy w tym celu próbnik Gibbsa, który bazuje na symulowaniu obserwacji z rozkładów:

- $\rho(\gamma|\alpha, \beta, \eta, V, R) \propto \rho(R|\gamma, V)\rho(\gamma),$
- $\rho(\alpha, \beta|\gamma, \eta, V, R) \propto \prod_{i=1}^n \rho(V_i|\alpha, \beta, \eta, V_{i-1})\rho(\alpha, \beta),$
- $\rho(\eta^2|\gamma, \alpha, \beta, V, R) \propto \rho(V|\alpha, \beta, \eta^2)\rho(\eta^2),$
- $\rho(V_0|\gamma, \alpha, \beta, \eta, R, V_{-0}) \propto \rho(V_1|V_0, \alpha, \beta, \eta^2)\rho(R_1|V_0, \gamma)\rho(V_0),$
- $\dots,$
- $\rho(V_n|\gamma, \alpha, \beta, \eta, R, V_{-n}).$

Projekt i implementacja metody

Finalnie algorytm markowskiego Monte Carlo ma następujący krok:

- $\rho(\gamma|\alpha, \beta, \eta, V, R) \sim \mathcal{N}$,
- $\rho(\alpha, \beta|\gamma, \eta, V, R) \sim \mathcal{N}$,
- $\rho(\eta^2|\gamma, \alpha, \beta, V, R) \sim \text{Inverse} - \text{Gamma}$,
- $\rho(V_0|\gamma, \alpha, \beta, \eta, R, V_{-0}) \sim \text{algorytm Metropolis} - \text{Hastingsa}$,
- $\forall_{t \in \{1, \dots, n-1\}} \rho(V_t|\gamma, \alpha, \beta, \eta, R, V_{-t}) \sim \text{algorytm MH}$,
- $\rho(V_n|\gamma, \alpha, \beta, \eta, R, V_{-n}) \sim \mathcal{N}$,

Algorytm został zaimplementowany na potrzeby pracy w środowisku R oraz języku C++. Punktami startowymi były oszacowania parametrów uzyskane standardowymi metodami.

Test metod na danych symulowanych

Konstrukcja testu (1/2)

- Przygotowanie zestawów danych tj. szeregu zmienności oraz szeregu logarytmicznych stóp zwrotu zgodnych z postacią modelu przy wykorzystaniu schematu dyskretyzacyjnego Eulera - Maruyamy
 - trzy zestawy danych o zróżnicowanych własnościach odwzorowywujących stosunkowo bezpieczne oraz ryzykowne aktywa finansowe,
 - agregacja każdego szeregu do trzech częstotliwości - minutowej, godzinowej oraz dziennej.
- Estymacja parametrów strukturalnych modelu oraz wartości szeregu zmienności za pomocą metody MCMC dla każdego z dziewięciu przypadków.

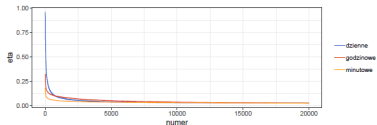
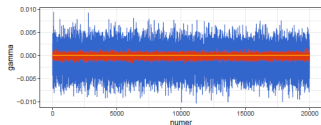
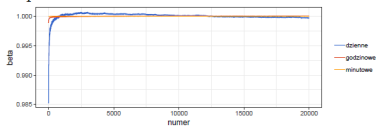
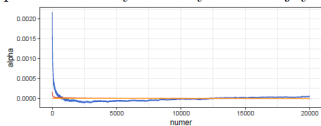
Konstrukcja testu (2/2)

- Benchmark: Estymacja szeregu zmienności za pomocą zmienności zrealizowanej dla trzech długości okna estymacji, dopasowanego każdorazowo do częstotliwości danych oraz standardowa estymacja parametrów strukturalnych w oparciu o wyznaczoną zmienność zrealizowaną dla każdego przypadku.
- Porównanie rozkładów błędów względnych i bezwzględnych estymatorów zmienności w czasie, uzyskanych różnymi metodami dla różnych częstotliwości danych.
- Porównanie uzyskanych oszacowań parametrów strukturalnych różnymi metodami dla różnych częstotliwości danych.

Ewolucja oszacowań parametrów w czasie

Nie ma podstaw do kwestionowania poprawności metody.

Przebieg estymacji parametrów metodą markowskiego Monte Carlo - wartości parametrów wylosowanych w kolejnych krokach próbnika Gibbsa - Zestaw A



Wyniki estymacji zmienności

Statystyki błędów względnych przyjmowanych przez estymatory szeregu zmienności na różnych częstotliwościach dla zestawu parametrów A [%]

| | obserwacje minutowe | | | | | obserwacje godzinowe | | | | | obserwacje dzienne | | | | |
|-------|---------------------|-------|-------|------|------|----------------------|--------|-------|-------|-------|--------------------|--------|-------|-------|-------|
| | MCMC | RVH | RVD | RVW | RVM | MCMC | RVD | RVW | RVM | RVQ | MCMC | RVW | RVM | RVQ | RV6M |
| min | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Q1% | 0.03 | 0.11 | 0.05 | 0.03 | 0.03 | 0.06 | 0.35 | 0.16 | 0.08 | 0.07 | 0.08 | 0.43 | 0.20 | 0.12 | 0.07 |
| Q5% | 0.12 | 0.57 | 0.22 | 0.13 | 0.15 | 0.28 | 1.67 | 0.80 | 0.39 | 0.36 | 0.38 | 1.79 | 1.14 | 0.57 | 0.37 |
| sr. | 1.53 | 7.25 | 2.83 | 1.59 | 1.90 | 3.25 | 21.30 | 9.75 | 5.01 | 4.32 | 5.91 | 21.58 | 12.47 | 7.68 | 5.72 |
| med. | 1.31 | 6.11 | 2.39 | 1.35 | 1.61 | 2.80 | 18.14 | 8.35 | 4.13 | 3.53 | 4.63 | 18.70 | 10.83 | 6.38 | 4.94 |
| Q95% | 3.66 | 17.81 | 6.88 | 3.79 | 4.71 | 7.56 | 52.15 | 23.76 | 12.65 | 11.10 | 14.87 | 49.79 | 30.51 | 19.30 | 14.22 |
| Q99% | 4.95 | 23.45 | 8.99 | 5.12 | 5.98 | 9.73 | 68.94 | 31.20 | 16.88 | 14.02 | 19.39 | 63.94 | 38.93 | 24.53 | 17.84 |
| maks. | 7.67 | 42.39 | 16.56 | 8.42 | 8.92 | 12.80 | 114.39 | 44.28 | 25.14 | 19.18 | 23.47 | 100.65 | 54.42 | 33.26 | 21.23 |
| SD | 1.14 | 5.48 | 2.12 | 1.18 | 1.44 | 2.32 | 16.07 | 7.25 | 3.85 | 3.35 | 4.66 | 15.68 | 9.01 | 5.82 | 4.33 |

Uzyskane oszacowania parametrów

Estymatory parametrów strukturalnych ciągłego modelu GARCH wyznaczone na podstawie danych o różnej częstotliwości dla zestawu parametrów A

| | obserwacje minutowe | | | | | | obserwacje godzinowe | | | | | | obserwacje dzienne | | | | | |
|----------|---------------------|-------|---------|-------|-------|-------|----------------------|-------|--------|-------|-------|-------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | par | MCMC | RVH | RVD | RVW | RVM | par | MCMC | RVD | RVW | RVM | RVQ | par | MCMC | RVW | RVM | RVQ | RV6M |
| γ | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| α | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| β | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.86 | 0.98 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 1.00 | 0.86 | 0.96 | 0.99 | 1.00 |
| η | 0.30 | 0.03 | 10.83 | 1.58 | 0.32 | 0.08 | 0.30 | 0.04 | 16.48 | 2.46 | 0.57 | 0.19 | 0.30 | 0.04 | 6.46 | 1.60 | 0.50 | 0.17 |
| δ | 0.10 | -0.26 | -0.09 | -0.19 | -0.21 | -0.18 | 0.10 | -0.28 | 0.81 | -0.43 | -0.20 | -0.21 | 0.10 | -0.23 | 0.47 | -0.32 | -0.26 | -0.20 |
| κ | 2.00 | 0.04 | 1229.07 | 69.93 | 3.26 | -0.18 | 2.00 | 0.01 | 238.41 | 40.39 | 5.41 | -0.22 | 2.00 | -0.01 | 34.77 | 10.59 | 2.14 | -0.46 |
| ν | 0.15 | 0.12 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | -0.22 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.26 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |

Tendencja do nadmiernego wygładzenia - niskie η

- Metoda MCMC ma tendencję do nadmiernego wygładzania estymatora szeregu zmienności, czyli zaniżania wartości η .
- Proponowanym rozwiązaniem jest rozważenie algorytmu dla różnych wartości ustalonego parametru η , na poziomie zgodnym z intuicją biznesową.

Uzyskane oszacowania parametrów metodą bez η (1/2)

Estymatory parametrów strukturalnych ciągłego modelu GARCH wyznaczone na podstawie danych o różnej częstotliwości dla zestawu parametrów A i algorytmu z zadanyim poziomem wygładzenia

| | obserwacje minutowe | | | | | | obserwacje godzinowe | | | | | | obserwacje dzienne | | | | | |
|----------|---------------------|-------|---------|-------|-------|-------|----------------------|-------|--------|-------|-------|-------|--------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| | par | MCMC | RVH | RVD | RVW | RVM | par | MCMC | RVD | RVW | RVM | RVQ | par | MCMC | RVW | RVM | RVQ | RV6M |
| γ | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | - | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| α | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | - | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| β | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.86 | 0.98 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | - | 0.86 | 0.96 | 0.99 | 1.00 |
| η | 0.30 | 0.30 | 10.83 | 1.58 | 0.32 | 0.08 | 0.30 | 0.30 | 16.48 | 2.46 | 0.57 | 0.19 | 0.30 | - | 6.46 | 1.60 | 0.50 | 0.17 |
| δ | 0.10 | -0.27 | -0.09 | -0.19 | -0.21 | -0.18 | 0.10 | -0.23 | 0.81 | -0.43 | -0.20 | -0.21 | 0.10 | - | 0.47 | -0.32 | -0.26 | -0.20 |
| κ | 2.00 | 2.10 | 1229.07 | 69.93 | 3.26 | -0.18 | 2.00 | 1.63 | 238.41 | 40.39 | 5.41 | -0.22 | 2.00 | - | 34.77 | 10.59 | 2.14 | -0.46 |
| ν | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.19 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | - | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |

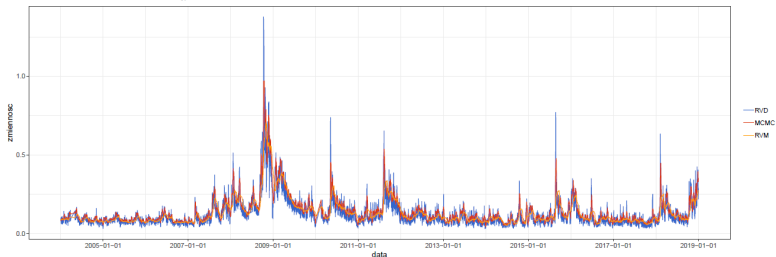
Uzyskane oszacowania parametrów metodą bez η (2/2)

- Ustalenie poziomu wygładzenia jest decyzją podobną do typowego problemu wyboru długości okna estymacji dla estymatorów ruchomych.
- Arbitralnie ustalony poziom parametru η w teście okazał się mieć zdecydowanie niższy (wręcz zaniedbywalny) wpływ na osiągnięte wyceny opcji niż wybór długości okna estymacji.
- Dla stosunkowo niskiej częstotliwości obserwacji algorytm MCMC nie osiągnął zbieżności w zadowalającym czasie.
- Wyższa częstotliwość danych pozwala na poprawienie jakości estymatorów uzyskiwanych metodą MCMC.

Wyniki części aplikacyjnej - indeks S&P500

Wyniki estymacji zmienności

Estymator szeregu zmienności indeksu S&P500 uzyskany metodą MCMC dla ustalonego poziomu $\eta = 200\%$ dla danych minutowych oraz dzienne i miesięczne szeregi zmienności zrealizowanej



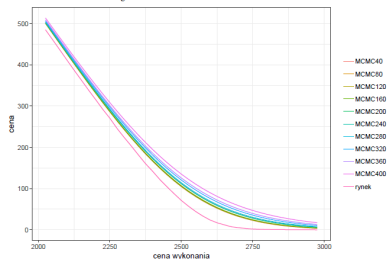
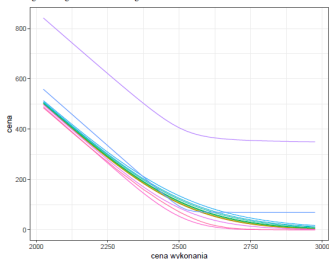
Uzyskane oszacowania parametrów

Estymatory parametrów strukturalnych ciągłego modelu GARCH wyznaczone na podstawie kwotowań indeksu S&P500 o częstotliwości minutowej

| | algorytm MCMC | | | | | | | | | | estymacja ze zmienności zrealizowanej | | | |
|-------|---------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------------|--------|--------|-------|
| | 40% | 80% | 120% | 160% | 200% | 240% | 280% | 320% | 360% | 400% | RVH | RVD | RVW | RVM |
| gamma | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| alpha | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| beta | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.998 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| eta | 0.400 | 0.800 | 1.200 | 1.600 | 2.000 | 2.400 | 2.800 | 3.200 | 3.600 | 4.000 | 1075.898 | 64.300 | 15.690 | 3.094 |
| delta | 1.518 | 1.475 | 1.421 | 1.359 | 1.267 | 1.192 | 0.717 | 1.000 | 0.625 | 0.847 | -4.519 | 3.050 | 2.588 | 3.622 |
| kappa | -0.733 | -0.583 | -0.319 | 0.048 | 0.498 | 1.066 | 0.637 | 2.469 | 2.202 | 4.200 | 196.104 | 19.999 | 3.268 | 0.661 |
| nu | 0.004 | 0.000 | -0.016 | 0.267 | 0.048 | 0.037 | 0.082 | 0.036 | 0.053 | 0.042 | 0.025 | 0.025 | 0.025 | 0.025 |

Uzyskane ceny opcji kupna

Ceny miesięcznych opcji kupna (call) wyznaczone metodą Monte Carlo zgodnie z wyestymowanymi modelami oraz rzeczywiste notowania tych instrumentów



Wprowadzenie i motywacja

Estymacja zmienności i parametrów strukturalnych modelu

Test metod na danych symulowanych

Wyniki części aplikacyjnej - indeks S&P500

Podsumowanie

Podsumowanie

Podsumowanie i wnioski

- Przedstawiona metoda MCMC pozwoliła na uzyskanie **dokładniejszych** oszacowań obserwacji procesu zmienności w terminach błędów względnych i bezwzględnych od standardowo używanych zmienności zrealizowanych.
- Metoda w podstawowej postaci **nie daje lepszych** estymatorów parametrów strukturalnych modelu od standardowych metod.
- Metoda z zadaniem η zwraca **zdecydowanie lepsze wyniki**.
- Wrażliwość uzyskiwanych wycen na przyjęty poziom η jest zadowalająco niska.
- Metoda może być wykorzystywana w praktyce do **wyceny instrumentów pochodnych**, a także **zarządzania ryzykiem finansowym**.